

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Radnai Georgina

MÁTRIXFELBONTÁSOK

BSc szakdolgozat

Témavezető: Ágoston István
Algebra és Számelmélet tanszék



Budapest, 2016

Tartalomjegyzék

Bevezetés	4
1. LU-felbontás	5
1.1. Mátrixok LU-felbontása	5
1.2. LU-felbontás alkalmazása	7
1.3. Kiszámolási módszerek	8
1.4. Egy másik módszer: Gauss-elimináció	9
1.5. Példa	10
2. QR-felbontás	12
2.1. Mátrixok QR-felbontása	12
2.2. QR-felbontás Gram–Schmidt-ortogonalizációval	13
2.3. QR-felbontás Householder transzformációval	16
2.4. Householder-mátrixok kiszámolása:	18
2.5. Példa	19
2.6. QR- felbontás Givens forgatással	20
3. Szinguláris értékek szerinti felbontás	22
3.1. Önadjungált szemidefinit mátrixok	22
3.2. Mátrix szinguláris értékei, szinguláris értékek szerinti felbontás	24
3.3. Eckart Young - tétel	26
3.4. Az Eckart - Young -tétel alkalmazása képtömörítésre	26

Köszönetnyilvánítás

Mindenek előtt szeretném megköszönni témavezetőmnek, Ágoston Istvánnak, aki folyamatosan támogatott, valamint meglátásaival és ötleteivel nagyban hozzájárult a szakdolgozatom elkészüléséhez.

Szeretném megköszönni a családomnak, akik még a legnehezebb időszakokban is mellettem álltak és lelkesítettek nem csak a szakdolgozat elkészülésében, hanem végig az egyetemi éveim alatt.

Külön köszönöm Márton Ákosnak, aki segített a Latex illetve a Matlab programok megértésében.

Szeretném még megköszönni barátaim türelmét és támogatását, főképpen Bukovinszi Zsófiának, Fekete Katának, Horváth Dórának, Sári Kingának és Virág Dalmának.

Bevezetés

Mátrixfelbontással akkor találkoztam először, amikor a lineáris algebrát tanultam és azt mondtuk egy mátrixra, hogy diagonalizálható. Hiszen azok a mátrixok, amik diagonalizálhatók, azokat fel tudjuk írni úgy, hogy egy invertálható mátrix szorozva egy diagonális mátrixszal szorozva egy invertálható mátrixszal. Az előnye például, hogy sokkal könnyebb egy diagonális mátrixot hatványozni.

Ennél trükkösebb alkalmazások is vannak, és ehhez hasonlóakat numerikus analízisből tanultam. Tipikusan a numerikus eljárások ismertetésénél találkozunk az ember különböző felbontásokkal. A szakdolgozatomban három ilyen felbontást fogok ismertetni és megmutatok néhány eljárást, hogy hogyan is lehet ezeket a felbontásokat megkapni, illetve mire lehet őket használni. Ezek a lineáris algebra numerikus alkalmazásainál jönnek elő, főleg számolások, számítások gyorsítására, egyszerűbbé tételére.

A felbontások tárgyalásánál támaszkodtam a Faragó István, Horváth Róbert : Numerikus módszerek című könyvére, illetve a szinguláris értékek szerinti felbontásnál pedig Ivanyos Gábor jegyzeteire.

A képtömörítésnél használtam a Matlab programot, hogy illusztráljam a szinguláris értékek szerinti felbontás alkalmazhatóságát.

1. fejezet

LU-felbontás

1.1. Mátrixok LU-felbontása

1.1.1. Definíció. Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix LU-felbontásán egy olyan $A = L \cdot U$ szorzatelőállítását értünk, ahol $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ alsó háromszögmátrix (L mint lower) és $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ felső háromszögmátrix (U mint upper), továbbá L -ről feltesszük, hogy normált, azaz a főátlóban csak egyesek szerepelnek.

Az $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrix esetén L és U a következőképpen néz ki:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}, l_{ij}, u_{ij} \in \mathbb{R}$$

1.1.2. Tétel. Az $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ reguláris mátrixnak akkor és csak akkor létezik LU-felbontása, ha az összes főminor mátrixa is reguláris, azaz

$$A_{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ jelöléssel (ahol } 1 \leq n \leq m) \det A_{(n)} \neq 0$$

Ekkor az LU-felbontása egyértelmű.

Bizonyítás:

Teljes indukcióval bizonyítjuk.

$k = 1$ -re nézzük meg A_1 felbontását:

$A_1 = (a_{11}) = 1 \cdot (u_{11})$, tehát ebből következik, hogy $a_{11} = u_{11}$.

Tegyük fel, hogy A_{k-1} -ről tudjuk, hogy létezik az LU-felbontása vagyis

$A_{k-1} = L_{k-1} \cdot U_{k-1}$. Ezt felhasználva nézzük meg A_k felbontását:

$$A_k = \begin{pmatrix} A_{k-1} & d_{k-1} \\ c_{k-1}^T & a_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{k-1} & 0 \\ l_{k-1}^T & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} U_{k-1} & u_{k-1} \\ o^T & u_{kk} \end{pmatrix}$$

A mátrix szorzást írjuk fel blokkonként, így azt kapjuk, hogy :

$$\begin{aligned} L_{k-1} \cdot u_{k-1} &= d_{k-1} \\ l_{k-1}^T \cdot U_{k-1} &= c_{k-1}^T \iff U_{k-1}^T \cdot l_{k-1} = c_{k-1} \\ l_{k-1}^T \cdot u_{k-1} + u_{kk} &= a_{kk} \end{aligned}$$

Mivel feltettük, hogy egyértelműen létezik $L_{k-1} \cdot U_{k-1}$ így az

$L_{k-1} \cdot u_{k-1} = d_{k-1}$ -ből u_{k-1} egyértelműen kifejezhető hiszen $\det(L_k) = 1$.

Az $l_{k-1}^T \cdot U_{k-1} = c_{k-1}^T \cdot l_{k-1}^T$ tudjuk kifejezni, hiszen

$$\det(A_{k-1}) = \det(L_{k-1}) \cdot \det(U_{k-1}) = 1 \cdot (U_{k-1}) \neq 0.$$

$$l_{k-1}^T \cdot u_{k-1} + u_{kk} = a_{kk} \text{-ből pedig tudjuk, hogy } u_{kk} = a_{kk} - l_{k-1}^T \cdot u_{k-1}.$$

Ha tudjuk, hogy $\det(A_k) = \det(L_k) \cdot \det(U_k)$ és $\det(U_k) = \det(U_{k-1}) \cdot u_{kk}$ -ből pedig következik, hogy $a_{kk} \neq 0$.

Nézzük meg az LU-felbontást visszafelé. Ha van egy LU-felbontásom és az összes főminor mátrixa reguláris, akkor A is reguláris lesz.

Megmutatom, hogy A -nak a főminorjai ugyanazok, mint LU -nak a főminorjai. Tegyük fel, hogy létezik egy $A = LU$ felbontásom. Vegyük fel A -nak a

$$\text{blokkmátrixok szerinti felbontását: } A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right)$$

Bontsuk fel L -et és U -t is hasonlóképpen :

$$\text{ekkor } L = \left(\begin{array}{c|c} L_1 & L_2 \\ \hline L_3 & L_4 \end{array} \right) \text{ és } U = \left(\begin{array}{c|c} U_1 & U_3 \\ \hline U_2 & U_4 \end{array} \right)$$

Ezek a blokkmátrixok ugyanakkora méretűek és szeretném megmutatni, hogy ezek regulárisak. Az L és az U mátrixunkat szorozzuk össze és nézzük meg, hogy A_1 blokkmátrixra így mit kapunk.

$A_1 = L_1 \cdot U_1 + L_2 \cdot U_3$ Mivel L alsó háromszög mátrix, U pedig felső háromszög mátrix, így az $L_2 = 0$ és $U_3 = 0$, amiből adódik, hogy $A_1 = L_1 \cdot U_1$

Nézzük meg mi lesz A_2 -es blokkmátrix esetén.

$A_2 = L_1 \cdot U_3 + L_2 \cdot U_4$ Ebben az egyenletben $L_2 = 0$ ezért $A_2 = L_1 \cdot U_3$ Az A_3 -as blokkot is könnyű kiszámolni, hiszen

$A_3 = L_3 \cdot U_1 + L_4 \cdot U_2$, ahol $U_3 = 0$, így $A_3 = L_3 \cdot U_1$ szintén leegyszerűsödik.

A_4 pedig a következőképpen fog kinézni :

$$A_4 = L_3 \cdot U_3 + L_4 \cdot U_4$$

Látjuk, hogy A -nak a főminorjai L -nek és U -nak a főminorjaival egyeznek meg. Tegyük fel, hogy A reguláris. L biztos, hogy reguláris, hiszen a főátlójában

egyesekek szerepelnek. U -ról feltettük, hogy felső háromszögmátrix és U -nak regulárisnak kell lennie, hiszen, ha nem lenne reguláris, akkor A sem lenne, így pedig U főátlójában nem nulla elemek állnak. Ennek a főminorjai is regulárisak, így két reguláris mátrixot szorzunk, tehát A reguláris mátrix lesz és minden főminorja reguláris. \square

1.2. LU-felbontás alkalmazása

Egy mátrix LU-felbontásának ismeretében a alábbi feladatok könnyebben oldhatók meg:

(i) determináns leolvasásánál:

A mátrix determinánsát megkaphatjuk, ha az U mátrix főátlóbeli elemeit összeszorozzuk.

(ii) lineáris egyenletrendszerek kiszámolásánál:

Akkor érdemes LU-felbontást készíteni, ha sokszor fogjuk használni ezeket a mátrixokat. Ha már kiszámoltuk az A mátrix LU-felbontását, akkor könnyebben (kevesebb lépésből ($2n^2$)) megoldható az $A \cdot x = b$ egyenletrendszer. Itt az a könnyebbség, hogy a háromszög mátrix miatt csak visszahelyettesítéssel összesen $\approx n^2$ művelettel.

$$A = L \cdot U \Rightarrow A \cdot x = L \cdot (U \cdot x) = b$$

Legyen az $U \cdot x = y$ tehát akkor $L \cdot y = b$. Ebből könnyen kiszámolható y . Behelyettesítjük az $U \cdot x = y$ egyenletbe és megkapjuk x értékét.

Az $A \cdot x = b$ egyenletrendszer megoldható, akkor és csak akkor, ha az $L \cdot y = b$ és $U \cdot x = y$ egyenletrendszerek is megoldhatók.

Megmutatom, hogy amikor egy ilyen felső háromszögmátrixszal megadott egyenletrendszert oldok meg akkor a lépésszámgény lényegében n^2 .

Van $(n-i) \cdot (n-k+1)$ szorzás, ugyanennyi összeadás, vagyis

$(n-i) \cdot (n-k+1)$ és még egy darab osztás, ez összesen $2 \cdot (n-i) + 1$ db műveletigény. Számoljuk ki, hogy ez n darab i -re nézve mennyi.

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{n-1} 1 + 2 \cdot \underbrace{(n-i)} \right) + 1 = \sum_{a=1}^{n-1} (2a+1) + 1 = \\ & = 2 \cdot \sum_{a=1}^{n-1} a + (n-1) + 1 = 2 \cdot \frac{(n-1)^n}{2} + n = n^2 + o(n) \end{aligned}$$

Mivel nekünk két háromszögmátrixunk van, amibe vissza kell helyettesíteni így a műveletigénye kétszer annyi, vagyis $2n^2$.

Ha viszont egy általános mátrixnak csinálom meg a Gauss - eliminációját, akkor ha ott az első oszlopot nullázom, az $\approx n^2$ lépés. Utána a második oszlopot nullázom $\approx (n - 1)^2$ lépésigény, a harmadikat, ott $\approx (n - 2)^2$ lépésigény, így összesen a Gauss - elimináció műveletigénye $\frac{2}{3} \cdot n^3 + o(n^2)$

Tehát ha már megvan nekünk egy mátrix LU - felbontása, akkor tényleg sokkal egyszerűbben, kevesebb lépésből meg tudunk oldani egyenletrendszereket.

1.3. Kiszámolási módszerek

Az L és az U elemeit viszonylag egyszerűen is megkaphatjuk, ha a megfelelő sorrendben próbáljuk meg őket kiszámolni. A következő sorrendeket szokás alkalmazni:

• sorfolytonos :

1	
2	3
4	5

• oszlopfolytonos :

1	3		
2			
	4		

• parkettaszerű :

1		
2	3	
	4	5

Bemutatom a sorfolytonos számolás menetét: Nézzük meg mi lesz az első sorával.

$$a_{1j} = 1 \cdot u_{1j} = u_{1j} \quad (j = 1 \dots n)$$

tehát U első sora megegyezik A első sorával, azaz itt nem kell számolni. A következő lépésben nézzük meg a második sorának első elemét.

$$a_{21} = l_{21} \cdot u_{11} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}$$

ezután,

$$a_{2j} = l_{2j} \cdot u_{2j} + l_1 \cdot u_{2j} \Rightarrow u_{2j} = a_{2j} - l_{2j} \cdot u_{1j} \quad (j = 2 \dots n)$$

általánosan:

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \cdot (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj}) \quad (i > j)$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \quad (i \leq j)$$

1.4. Egy másik módszer: Gauss-elimináció

A feltétel, hogy a minorok regulárisak, azt eredményezi, hogy az elimináció sorcsere nélkül elvégezhető. Hiszen az első sor első eleme nem nulla, így alatta ki tudok nullázni. Ilyenkor a 2×2 minor, a 3×3 minor nem változik, hiszen csak a mátrixon belüli sorokat adtam hozzá, így a minorok regularitása nem változik. Utána a főátló második eleme alatt tudom kinullázni az elemeket, hiszen a minor reguláris, ezért nem kell sorcserét csinálnom. Ezt addig folytatom, amíg felső háromszögmátrixot nem kapok. Ha ezt meg tudom csinálni, akkor mindig csak lefelé vonok ki, lefelé adok hozzá, lefelé nullázok. Azaz elemi mátrix, amivel szorozni kell, hogy az elimináció lépéseit megcsináljuk, az átló fölött nem tartalmaz nem nulla elemeket.

Az elimináció lépéseit tehát úgy is felfoghatjuk, mintha egy alsó háromszög mátrixszal szoroznánk. Legyen ez az alsó háromszög mátrixunk az $E_i (i = 1, \dots, n-1)$ mátrix.

Az A mátrixot szeretnénk felbontani az L és U mátrixok szorzatára, ahol L az elemi mátrixok inverzeinek szorzata, vagyis

$$L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \dots E_{n-1}^{-1}.$$

Nézzük meg az átalakítás első lépését.

$$A \rightsquigarrow A' = E_1 \cdot A$$

A második lépésben a már megkapott A' -vel dolgozunk tovább.

$$A'' = E_2 \cdot E_1 \cdot A$$

Ezt folytatva $n-1$ lépésen keresztül akkor a következőt kapjuk:

$$A^{(n-1)} = E_{n-1} \dots E_2 \cdot E_1 \cdot A,$$

ahol $A^{(n-1)} = U$ -val, tehát megkapjuk a felsőháromszög alakot. Ha baloldról beszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát az

$$(E_{n-1} \cdots E_2 \cdot E_1)^{-1}$$

inverz mátrixszal, akkor megkapjuk, hogy

$$(E_{n-1} \cdots E_2 \cdot E_1)^{-1} \cdot U = A$$

és mivel

$$(E_{n-1} \cdots E_2 \cdot E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdots E_{n-1}^{-1} \text{ -vel, ezért}$$

$$LU = A.$$

A fenti módszerből látszik, hogy ha a mátrix k rangú és az első k minor nem nulla, akkor a fenti eljárással nem akadunk el, és meg tudjuk csinálni az LU - felbontást. Kimondhatunk tehát egy elégséges feltételt LU-felbontás létezésére szinguláris mátrixok esetén is.

1.4.1. Tétel. *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, olyan, hogy $r(A) = k, k < n$. Tegyük fel, hogy az A_1, \dots, A_k főminorok determinánsa nem nulla. Ekkor A -nak létezik LU-felbontása.*

1.5. Példa

$$A_0 = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Első lépésben az első oszlop második és harmadik elemét szeretnénk kinullázni, méghozzá úgy, hogy a második sorból kivonjuk az első sor kétszeresét, és a harmadik sorból az első sor háromszorosát. Ezt úgy érjük el, hogy A -t szorozzuk, az

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixszal.

Most az $E_1 \cdot A_0$ mátrixszorzásból megkapjuk az A_1 mátrixot.

$$E_1 \cdot A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} = A_1.$$

A második lépésben pedig a második oszlop harmadik elemét szeretnénk kinulázni úgy, hogy a harmadik sorból kivonjuk a második sor -4 -szeresét. Ezt úgy érjük el, hogy az A_1 mátrixot szorozzuk az

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ mátrixszal.}$$

Ilyenkor az $E_2 \cdot A_1$ mátrixszorzásból megkapjuk az A_2 mátrixot.

$$A_2 = E_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

Mivel 3×3 -as volt a mátrix, így az E_i mátrixok készen vannak, az U mátrix pedig könnyen leolvasható.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

Már csak az L mátrixra van szükségünk. $L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1}$

Könnyen látható, hogy az E_i mátrixok inverzét úgy kapjuk, hogy a főátlón kívüli elemeinek (-1) -szeresét vesszük.

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ellenőrzés:

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = A$$

2. fejezet

QR-felbontás

2.1. Mátrixok QR-felbontása

2.1.1. Definíció. Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix QR-felbontásán egy olyan $A = Q \cdot R$ szorzatelőállítását értünk, ahol $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonális mátrix, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reguláris felső háromszögmátrix.

Emlékeztetőül: Egy Q mátrixot pedig akkor nevezünk ortogonálisnak, ha

$$Q^{-1} = Q^T.$$

Az $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mátrix esetén Q és R a következőképpen néz ki:

$$Q = \begin{pmatrix} \underline{q}_1 & \underline{q}_2 & \underline{q}_3 \end{pmatrix}$$
$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix},$$

ahol Q oszlopai, mint vektorok ortonormált rendszert alkotnak.

A $\underline{q}_1, \underline{q}_2, \dots, \underline{q}_n \in \mathbb{R}^n$ vektorok ortonormált rendszert alkotnak, ha

$$\langle \underline{q}_i, \underline{q}_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j \\ 1, & \text{ha } i = j \end{cases}$$

2.1.2. Tétel. Bármely reguláris A mátrixnak létezik QR - felbontása: létezik egy R felső háromszögmátrix és egy ortogonális Q mátrix, hogy $A = QR$. A felső háromszögmátrix vagyis az R mátrix invertálható és elérhető, hogy minden főátlóbeli eleme pozitív legyen. Az így kapott felbontás egyértelmű.

Ez a felbontás is jól használható lineáris egyenletrendszerek megoldásához. Ha már tudjuk az A mátrix QR- felbontását, akkor például a következőképpen ki tudjuk számolni egy egyenletrendszer megoldását.

$$A\underline{x} = \underline{b} \iff QR\underline{x} = \underline{b} \iff R\underline{x} = Q^{-1}\underline{b}$$

Q^{-1} kiszámolása könnyű, hiszen $Q^{-1} = Q^T$

$\underline{c} = Q^{-1}\underline{b}$ pedig csak egy mátrixszorzás, amit könnyebben tudunk számolni. Ekkor \underline{c} -t behelyettesítve kapjuk, hogy

$$R\underline{x} = \underline{c}$$

ennek a megoldása könnyebb, mert R invertálható felső háromszögmátrix, és ahogy korábban láttuk, az ilyen egyenletrendszerek megoldása lépésenkénti visszahelyettesítéssel gyorsabban megoldható.

2.2. QR-felbontás Gram–Schmidt-ortogonalizációval

Legyen A egy reguláris mátrix, oszlopvektorait pedig jelöljük $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ -nel. Mivel szeretnénk egy ortogonális és egy felső háromszögmátrix szorzataként előállítani, így QR-felbontást kell kapnunk, ahol Q oszlopait $\underline{q}_1, \underline{q}_2, \dots, \underline{q}_n$ -nel jelöljük, míg az R trianguláris lesz, azaz:

$$(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) = (\underline{q}_1, \underline{q}_2, \dots, \underline{q}_n) \cdot \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

A mátrix elemeit úgy kapjuk, hogy Q -val megszorozzuk ezt az R mátrixot. Írjuk fel ezeket az egyenleteket a szorzás alapján:

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 &= r_{11} \cdot \underline{q}_1 \\ \underline{a}_2 &= r_{12} \cdot \underline{q}_1 + r_{22} \cdot \underline{q}_2 \\ &\vdots \\ \underline{a}_n &= r_{1n} \cdot \underline{q}_1 + r_{2n} \cdot \underline{q}_2 + \dots + r_{nn} \cdot \underline{q}_n \end{aligned}$$

Az egyenletekben az r -ek és a \underline{q} -k az ismeretlenek, de \underline{q} vektorokról tudjuk, hogy ortogonálisak.

Az első egyenlet megoldása. Szorozzunk be balról a transzponálttal, ilyenkor a következőt kapjuk:

$$\underline{a}_1^T \underline{a}_1 = r_{11}^2 \cdot \underline{q}_1^T \underline{q}_1$$

\underline{q} -ről tudjuk, hogy ortogonális ezért $\underline{q}_1^T \underline{q}_1 = 1$. Vagyis csak az $\underline{a}_1^T \underline{a}_1 = r_{11}^2$ egyenlet marad nekünk, amiből már következik, hogy $r_{11} = +\sqrt{\underline{a}_1^T \underline{a}_1}$, ahol $\underline{a}_1^T \underline{a}_1$ mindig pozitív, hiszen a komponensek négyzetösszegével egyenlő. Ekkor már ki tudjuk fejezni \underline{q}_1 -et is, méghozzá a következőképpen:

$$\underline{q}_1 = \frac{1}{r_{11}} \cdot \underline{a}_1$$

Nagyon jó, az első egyenletből már mind a két ismeretlent ki tudom fejezni \underline{a}_1 segítségével. Nézzük meg a második egyenlettel mi fog történni. Itt három ismeretlenünk is van, az r_{12}, r_{22} és a \underline{q}_2 .

Szorozzuk be az egész egyenletet balról \underline{q}_1^T -tal, ilyenkor a $\underline{q}_1^T \underline{q}_2 = 0$ az ortonormáltság miatt és $\underline{q}_1^T \underline{q}_1 = 1$ szintén az ortonormáltság miatt. Tehát az egyenletünk a következőképpen néz ki:

$$\underline{q}_1^T \underline{a}_2 = r_{12},$$

ahonnan r_{12} -t már ki tudjuk számolni. \underline{q}_2 meghatározásához először definiáljuk a \underline{b}_2 vektort,

$$\underline{b}_2 = \underline{a}_2 - r_{12} \underline{q}_1,$$

ilyenkor $\underline{b}_2 = r_{22} \underline{q}_2$.

Az első egyenletnél látottakhoz hasonlóan adódik, hogy

$$\underline{b}_2^T \underline{b}_2 = r_{22}^2, \text{ vagyis } r_{22} = +\sqrt{\underline{b}_2^T \underline{b}_2} \text{ és } \underline{q}_2 = \frac{1}{r_{22}} \cdot \underline{b}_2.$$

Tehát mind a három ismeretlent ki tudtuk fejezni.

Az n -edik egyenlet megoldása is hasonlóképpen fog történni feltéve, ha az előző egyenletek meg lettek oldva, azaz $1 \leq i \leq j < n$ -re a \underline{q}_i -t illetve az r_{ij} -t már kiszámoltuk. Ilyenkor $i = 1, 2, \dots, n-1$ -re az egyenletet szorozzuk be balról \underline{q}_i^T -tal, ekkor az összes \underline{q} eltűnik, kivéve az r_{in} -nel való szorzást. Tehát nekünk az alábbi egyenletünk maradt meg:

$$\underline{q}_i^T \underline{a}_n = r_{in} \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

Ebből pedig r_{in} meghatározható. Ahogy a \underline{q}_2 vektor meghatározásához definiálnunk kellett egy \underline{b}_2 vektort, most a \underline{q}_n vektor meghatározásához kell definiálnunk egy \underline{b}_n vektort. Legyen

$$\underline{b}_n = \underline{a}_n - (r_{1n} \cdot \underline{q}_1 + r_{2n} \cdot \underline{q}_2 + \dots + r_{n-1,n} \cdot \underline{q}_{n-1})$$

Felhasználva a $\underline{b}_n = r_{nn} \cdot \underline{q}_n$ összefüggést az n -edik egyenlet alapján, az első és második egyenlethez hasonlóan $\underline{b}_n^T \underline{b}_n = r_{nn}^2$, így

$$r_{nn} = +\sqrt{\underline{b}_n^T \underline{b}_n} \text{ és } \underline{q}_n = \frac{1}{r_{nn}} \cdot \underline{b}_n.$$

Ezzel az eljárással tehát meghatározható a QR-felbontás.

Q és R előállításához a következő általános képleteket használjuk fel:

$$r_{kk} = \|a_k - \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik} \cdot q_i\|_2$$

$$\underline{q}_k = \frac{1}{r_{kk}} \cdot (a_k - \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik} \cdot q_i)$$

Az így nyert $\underline{q}_1, \underline{q}_2, \dots, \underline{q}_n \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer ortonormált. Ha kézi számolást végzünk, akkor nem kell a normált vektorhoz ragaszkodni, hiszen elegendő lesz a végén leosztani a vektorok normájával. Most nézzünk példát a már leírt kiszámítási módra.

$$\text{Legyen } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Keressük a QR-felbontását ennek a mátrixnak.

$$r_{11} = \|\underline{a}_1\|_2 = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\underline{q}_1 = \frac{1}{r_{11}} \cdot \underline{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r_{12} = \langle \underline{a}_2, \underline{q}_1 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\underline{a}_2 - r_{12} \cdot \underline{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_{22} = \|\underline{a}_2 - r_{12} \cdot \underline{q}_1\|_2 = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2} = 2$$

$$\underline{q}_2 = \frac{1}{r_{22}} \cdot (\underline{a}_2 - r_{12} \cdot \underline{q}_1) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_{13} = \langle \underline{a}_3, \underline{q}_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$r_{23} = \langle \underline{a}_3, \underline{q}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\underline{a}_3 - r_{13} \cdot \underline{q}_1 - r_{23} \cdot \underline{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r_{33} = \|\underline{a}_3 - r_{13} \cdot \underline{q}_1 - r_{23} \cdot \underline{q}_2\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\underline{q}_3 = \frac{1}{r_{33}} \cdot (\underline{a}_3 - r_{13} \cdot \underline{q}_1 - r_{23} \cdot \underline{q}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tehát:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

A továbbiakban nézzük meg, hogy hogyan lehet másként is megkapni egy QR-felbontást.

2.3. QR-felbontás Householder transzformációval

2.3.1. Definíció. Egy \underline{v} vektorhoz tartozó $H = H(\underline{v})$ mátrixot Householder-mátrixnak nevezzük ha $H(\underline{v}) = I - 2\underline{v}\underline{v}^T$, ahol $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ és $\|\underline{v}\|_2 = 1$.

2.3.2. Tétel. A Householder-mátrix egy szimmetrikus, ortogonális mátrix és mint egy \mathbb{R}^n -beli transzformáció, egy tükrözést valósít meg.

Bizonyítás: Igazoljuk ezeket a tulajdonságokat külön-külön.

1. Szimmetria: azaz $H(\underline{v})^T = H(\underline{v})$

Bizonyítás: $(I - 2\underline{v}\underline{v}^T)^T = I^T - 2(\underline{v}^T)^T \cdot \underline{v}^T = I - 2\underline{v}\underline{v}^T \quad \square$

2. Ortogonalitás: Tudjuk, hogy $H(\underline{v})^T = H(\underline{v})$, hiszen előbb láttuk be, így csak azt kell igazolni, hogy $H(\underline{v})^T = H(\underline{v})$, azaz:

$$H(\underline{v})^T \cdot H(\underline{v}) = H(\underline{v}) \cdot H(\underline{v})^T = H(\underline{v})^2 = I$$

Bizonyítás: $(I - 2\underline{v}\underline{v}^T) \cdot (I - 2\underline{v}\underline{v}^T) = I - 2\underline{v}\underline{v}^T - 2\underline{v}\underline{v}^T + 4\underline{v}\underline{v}^T \cdot \underline{v}\underline{v}^T = I - 4\underline{v}\underline{v}^T + 4\underline{v}\underline{v}^T = I$ (mivel $\underline{v}^T \underline{v} = 1$). \square

3. Tükrözés: Legyen \underline{a} vektor merőleges \underline{v} -re. Ekkor $H(\underline{v}) \cdot \underline{a} = \underline{a}$.

Bizonyítás: $(I - 2\underline{v}\underline{v}^T) \cdot \underline{a} = I \cdot \underline{a} - 2\underline{v}\underline{v}^T \cdot \underline{a} = \underline{a} - 2\underline{v} \cdot \underline{0} = \underline{a}$ (mivel $\underline{v}^T \cdot \underline{a} = \underline{0}$) \square

Tehát a transzformáció \underline{v} -re merőleges vektorokat helyben hagy.

4. Most nézzük meg, hogy mi a helyzet egy \underline{v} vektorral párhuzamos vektor esetén. Legyen \underline{y} párhuzamos \underline{v} -vel, azaz $\underline{y} = \lambda \cdot \underline{v}$

Ekkor $H(\underline{v}) \cdot \underline{y} = -\underline{y}$

Bizonyítás:

$(I - 2\underline{v}\underline{v}^T) \cdot \underline{y} = I \cdot \underline{y} - 2\underline{v}\underline{v}^T \underline{y} = I \cdot \underline{y} - 2\underline{v}\underline{v}^T \lambda \underline{y} = \underline{y} - 2\lambda \underline{v}\underline{v}^T \underline{v} = \underline{y} - 2\underline{y} = -\underline{y}$

Ez azt jelenti, hogy a transzformáció a \underline{v} -vel párhuzamos vektorokat a -1-szeresükbe viszi. \square

Mivel bármely $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$ vektor felbontható egy \underline{v} -vel merőleges és egy \underline{v} -vel párhuzamos komponensre, tehát $\underline{c} = \underline{a} + \underline{y}$ alakú, ezért

$H(\underline{v})\underline{c} = H(\underline{v}) \cdot \underline{a} + H(\underline{v}) \cdot \underline{y} = \underline{a} - \underline{y}$, vagyis a Householder-mátrix tükröző mátrix, mégpedig a \underline{v} vektor ortogonális kiegészítő alterére való tükrözés.

\square

A következő lemma segítségével beláthatjuk, hogy az A mátrixot felsőháromszög alakra hozhatjuk úgy, hogy $H(\underline{v})$ típusú tükröző mátrixokkal. (azaz speciális ortogonális mátrixokkal) szorzunk balról.

2.3.3. Lemma. *Legyen $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor létezik egy $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ amelyre $\|\underline{v}\|_2 = 1$ és melyre $H(\underline{v})\underline{a} = \sigma e_1$, ahol $\sigma = \pm \|\underline{a}\|_2$. Konkrétan \underline{v} választható a $\underline{v} = \frac{\underline{a} - \sigma e_1}{\|\underline{a} - \sigma e_1\|_2}$ vektornak.*

Bizonyítás: A megadott \underline{v} vektorra nyilván teljesül $\|\underline{v}\|_2 = 1$ feltétel. Ha $\underline{a} = \underline{0}$, akkor $\sigma = \underline{0}$ és az állítás igaz.

Tegyük fel, hogy $\underline{a} \neq \underline{0}$. Ekkor a σ definíciója alapján $\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle = \sigma^2$ is igaz lesz. Most helyettesítsük be \underline{v} -t a $H(\underline{v})$ mátrix definíciójába, ez a következőképpen néz ki:

$$\begin{aligned} H(\underline{v})\underline{a} &= (I - 2 \cdot \frac{\underline{a} - \sigma e_1}{\|\underline{a} - \sigma e_1\|_2} \cdot \frac{(\underline{a} - \sigma e_1)^T}{\|\underline{a} - \sigma e_1\|_2}) \cdot \underline{a} = \\ &= \underline{a} - \frac{2}{\|\underline{a} - \sigma e_1\|_2^2} \cdot (\underline{a} - \sigma e_1) \cdot (\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle - \sigma \langle e_1, \underline{a} \rangle) = \underline{a} - (\underline{a} - \sigma e_1) = \sigma e_1 \end{aligned}$$

hiszen a nevezőben szereplő $\|\underline{a} - \sigma e_1\|_2^2$ tagot ha felbontjuk, akkor az alábbi módon néz ki:

$$\langle \underline{a} - \sigma e_1, \underline{a} - \sigma e_1 \rangle = \langle \underline{a}, \underline{a} \rangle - 2\sigma \langle \underline{a}, e_1 \rangle + \sigma^2 = 2(\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle - \sigma \langle \underline{a}, e_1 \rangle)$$

Tehát a nevezővel tudunk egyszerűsíteni és a mátrixunk valóban σe_1 -gyel lesz egyenlő. \square

2.4. Householder-mátrixok kiszámolása:

Most definiáljuk a QR - felbontást Householder- mátrixok segítségével.

Először az első oszlopban elimináljuk az első elem alattiakat. Ezután egy olyan transzformációt alkalmazunk, amely sem az első sort sem az első oszlopot nem változtatja, de a második sor második eleme alattiakat eliminálja. Ezt így folytatjuk addig, ameddig nem kapunk egy felső háromszögmátrixot. Nézzük meg, hogy hogyan is kell felbontanunk a mátrixot.

Legyen $A = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ilyenkor az előbb látott lemma szerint létezik olyan $\underline{v}_1 \in \mathbb{R}^n$, amire teljesül, hogy $\|\underline{v}_1\|_2 = 1$, ekkor $H(\underline{v}_1)\underline{a}_1 = \sigma_1 e_1$. Most szorozzuk be $H_1 = H(\underline{v}_1)$ -gyel az A mátrixot, ilyenkor az alábbi alakot kapjuk

$$H(\underline{v}_1) \cdot A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & * \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

és a $H_1 := H(\underline{v}_1)$ mátrix pedig ortogonális, A_1 pedig $\in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$.

Nézzük meg mi fog történni a második lépésben. $A_1 = [\underline{a}_1^{(1)}, \underline{a}_2^{(1)}, \dots, \underline{a}_{n-1}^{(1)}]$ esetén létezik $\underline{v}_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$, amire szintén teljesül, hogy $\|\underline{v}_2\|_2 = 1$, ekkor pedig

$$H(\underline{v}_2)\underline{a}_1^{(1)} = \sigma_2 e_1.$$

De ekkor:

$$H_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H(\underline{v}_2) \end{bmatrix}$$

mátrix is ortogonális és

$$H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & * & * \\ 0 & \sigma_2 & * \\ 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

Ezt az eljárást folytatjuk $n - 1$ -edik lépés után megkapjuk a felsőháromszög-alakot, amely főátlójában a σ_i értékek vannak.

Nézzük meg, hogy hogyan is állítható elő a QR-felbontás:

$$H_{n-1} \cdot H_{n-2} \cdot \dots \cdot H_1 \cdot A = R$$

így H_i szimmetrikussága és ortogonalitása miatt

$$Q = H_{n-1} \cdot H_{n-2} \cdot \dots \cdot H_1$$

Ebból a kettőből pedig következik, hogy

$$A = H_1 \cdot H_2 \cdot \dots \cdot H_{n-1} \cdot R = Q \cdot R$$

Így a QR-felbontás létezését is beláttuk, az egyértelműségét pedig már korábban bebizonyítottuk.

2.5. Példa

$$\text{Legyen } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \|\underline{a}_1\|_2 = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\underline{a}_1 - \sigma_2 \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_1 = \frac{\underline{a}_1 - \sigma_2 \underline{e}_1}{\|\underline{a}_1 - \sigma_2 \underline{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{(1+\sqrt{2})^2 + 0^2 + 1^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \cdot \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{H}_1 \underline{a}_1 = \underline{a}_1 - 2\underline{v}\underline{v}^T \underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \frac{1}{4+2\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 + \sqrt{2} \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (2 + \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{H}_1 \underline{a}_2 = \underline{a}_2 - 2\underline{v}\underline{v}^T \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \frac{1}{4+2\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 + \sqrt{2} \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{H}_1 \underline{a}_3 = \underline{a}_3 - 2\underline{v}\underline{v}^T \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \frac{1}{4+2\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 + \sqrt{2} \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (4 + \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - (3 - \sqrt{2}) \cdot \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{H}_1 A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = R$$

Így már rögtön meg is kaptuk a felső háromszögmátrixot, vagyis ezzel már meg tudjuk határozni a Q -t is. Ebben az esetben pedig $Q = H_1$, vagyis

$$A = H_1 \cdot R \Rightarrow A = Q \cdot R$$

2.6. QR- felbontás Givens forgatással

2.6.1. Definíció. *Givens-forgatásnak egy olyan forgatást nevezünk \mathbb{R}^n -ben, amely a két koordinátatengely által kifeszített síkban forgat, és a többi tengelyt helyben hagyja. Az i -edik és a j -edik koordinátatengely síkját érintő forgatás mátrixa:*

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \cos \alpha & \dots & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \dots & \sin \alpha & \dots & \cos \alpha & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezt úgy kapjuk meg, hogy ahol az egységmátrix i -edik és j -edik sora és oszlopa metszi egymást (ez pontosan négy hely) oda az α szögű forgatás mátrixát tesszük.

Ezzel a forgatással elérhetjük, hogy egy tetszőleges x vektort egy olyan vektorba forgassunk, amelynek j -edik koordinátája 0. Ha csak az i -edik és a j -edik sorokat és oszlopokat kiemeljük, akkor a következőképpen néz ki:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ebből látjuk, hogy az

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \alpha &= \frac{a}{r} \\ \sin \alpha &= \frac{-b}{r} \end{aligned}$$

egyenletekből fel tudjuk írni a forgatómátrixot, ha a -t és b -t ismerjük. Ezt az eljárást is használhatjuk, hogy mátrixokat felsőháromszög-alakra hozzunk, méghozzá úgy, hogy balról szorozzuk egy Givens-forgatás mátrixával. Ebből a mátrix QR-felbontását megkaphatjuk, ilyen forgatások egymásutánjával. A módszer különösen előnyös, ha a kiindulómátrixunk úgynevezett ritka mátrix.

Nézzünk meg egy példát QR- felbontásra Givens forgatással.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 15 & 8 \\ 0 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

Először elimináljuk a második sor első elemét a következőképpen: $a = 3$, $b = 4$, tehát $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Ebből következik, hogy $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \alpha = \frac{-4}{5}$, írjuk fel erre a Q_1 mátrixot.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Első lépésben egy mátrixszorzással tudjuk eliminálni.

$$Q_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

A következő lépésben elimináljuk a harmadik sor második elemét. Ehhez kell nekünk a Q_2 mátrix, vagyis írjuk fel erre a forgatást: $a = 5$, $b = 12$, $r = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ 0 & \frac{-12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$$

Az eliminálást úgy kapjuk meg ha $Q_2 \cdot Q_1 \cdot A$ szorzást elvégezzük:

$$Q_2 \cdot Q_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 10 \\ 0 & 13 & \frac{108}{13} \\ 0 & 0 & \frac{45}{13} \end{bmatrix} = R$$

Mivel látjuk, hogy ez egy felső háromszögmátrix így ezt elnevezzük R -nek. Q -t pedig úgy kapjuk meg, hogy ha vesszük, $(Q_2 \cdot Q_1)$ inverzét, amit transzponálással kaphatunk: $(Q_2 \cdot Q_1)^{-1} = Q_1^{-1} \cdot Q_2^{-1} = Q_1^T \cdot Q_2^T$. Tehát:

$$Q = Q_1^T \cdot Q_2^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{13} & \frac{-12}{13} \\ 0 & \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} & \frac{48}{65} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{13} & \frac{-36}{65} \\ 0 & \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$$

Ezekkel a mátrixokkal megkapjuk $A = QR$ -felbontást.

3. fejezet

Szinguláris értékek szerinti felbontás

3.1. Önadjungált szemidefinit mátrixok

A bevezetőben már említettük, hogy a mátrix diagonális alakjának a megkeresése az tulajdonképpen egy mátrix felbontással ekvivalens. Ilyenkor $A = SDS^{-1}$, ahol S egy invertálható mátrix. Ugyanakkor QR -felbontásnál láttuk azt is, hogy unitér mátrixszal számolni mennyivel könnyebb, például nem kell invertálni. Ez geometriailag azt jelenti, hogy csak távolságtartó transzformációkat engedünk meg. Tehát felmerül a kérdés, hogy lehet-e unitér mátrixokkal diagonális alakra hozni egy mátrixot. Nézzük meg, hogy hogyan lehet unitér mátrixszal diagonizálni.

3.1.1. Tétel. *Diagonizálás egyik feltétele, hogy létezik sajátvektorokból álló bázisa.*

A diagonizálás a következőképpen néz ki: $S^{-1}AS = D$ azaz $A = SDS^{-1}$, ahol S oszlopai az A sajátvektorai és lineárisan függetlenek.

3.1.2. Tétel. *Unitér mátrixnál már eggyel erősebb feltétel valósul meg, akkor lehet diagonizálni, ha létezik sajátvektorokból álló ortonormált bázisa.*

Unitér mátrix diagonizálásánál a fentebb látott S oszlopai most egy sajátvektorokból álló ortonormált bázist alkotnak, így $S^{-1} = S^*$, tehát unitér.

Az unitér mátrix diagonizálhatóságának feltétele már ismert, de a következő tételben elmondom.

3.1.3. Tétel. *Az mátrix normális azaz $A^*A = AA^*$*

A tétel bizonyítása megtalálható Freud Róbert: Lineáris algebra című könyvében.

Normális mátrixokra nézzünk meg pár példát:

(i) az unitér mátrixok, azaz A mátrix unitér, ha $A^* = A^{-1}$

(ii) az önadjungált, azaz $A^* = A$

Normális mátrixokon belül az önadjungált mátrixok jellemzését adja az alábbi állítás.

3.1.4. Állítás. *Egy mátrix akkor és csak akkor önadjungált, ha normális és minden sajátértéke valós.*

3.1.5. Definíció. *Az önadjungált mátrix pozitív definit, ha minden $\underline{x} \neq 0$ vektorra $\underline{x}^* A \underline{x} > 0$ és pozitív szemidefinit, ha $\underline{x}^* A \underline{x} \geq 0$ minden x -re.*

Kritérium a definitiségre, hogy akkor minden sajátértéke pozitív. A szemidefinitiség kritériuma pedig, hogy minden sajátértéke nemnegatív kell hogy legyen.

Pozitív szemidefinit mátrixokra példát adnak az alábbi típusú mátrixok.

3.1.6. Állítás. *Tetszőleges $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ alakú mátrix esetén $A^* A$ önadjungált és pozitív szemidefinit.*

Bizonyítás: Önadjungált az világos, hiszen $(A^* A)^* = (A^*)^* A^* = A A^*$. A szemidefinitiségnél pedig ellenőrizni kell, hogy $\underline{x}^* A^* A \underline{x} \geq 0$ és egyenlő $(A \underline{x})^* (A \underline{x})$ azaz ez az érték az $A \underline{x}$ vektoroknak önmagával vett skaláris szorzata, és ez az érték a skaláris szorzat pozitív definitisége miatt biztosan nemnegatív. \square

3.1.7. Állítás. *$A^* A$ rangja megegyezik A rangjával.*

Bizonyítás: $\text{Ker} A = \text{Ker} A^* A$, tehát ugyanazokat az elemeket viszik nullába, hiszen ha $A \underline{x} = 0$ akkor $A^* A \underline{x} = 0$, tehát ekkor $\text{Ker} A \leq \text{Ker} A^* A$ -nak. Másrészt ha tudjuk, hogy $A^* A \underline{x} = 0$, ebből pedig következik, hogy $\langle A \underline{x}, A \underline{x} \rangle = 0$. Akkor tudjuk, hogy $A \underline{x} = 0$, mert egy vektor önmagával vett skaláris szorzata csak akkor nulla, ha a vektor nulla. Ebből következik hogy akkor $\text{Ker} A^* A \leq \text{Ker} A$ -nak. Ebből miért is következik, hogy ugyanakkora a rangja?

Legyen $A \in \mathbb{C}^{n \times k}$ ekkor $A^* A \in \mathbb{C}^{k \times k}$. Az A -nak a rangja úgy néz ki, hogy veszem a lépcsős alakot és onnan a nem nulla elemek száma. A magtérnek a dimenziója a szabad vektoroknak a száma, az A rangja pedig a kötött változók száma, ez a kettő együtt egyenlő az oszlopok számával.

Az $A^* A$ -ban ugyanannyi oszlop van, mint A -ban. Ez azt jelenti, ha a magtere az $A^* A$ -nak r , akkor a rangja az oszlopok száma $- r$. Ha a magtere az $A^* A$ -nak és az A -nak ugyanaz, az oszlopok száma ugyanaz, akkor a rangja is ugyanaz. \square

3.2. Mátrix szinguláris értékei, szinguláris értékek szerinti felbontás

3.2.1. Definíció. Az A mátrix szinguláris értékei alatt az A^*A (nem nulla) sajátértékeinek a pozitív négyzetgyökeit értjük és

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0.$$

Láttuk azt, hogy A^*A tetszőleges A mátrix esetén önadjungált, tehát a sajátértékei valósak. Sőt pozitív szemidefinit, tehát a sajátértékei nemnegatívak. Ebből következik, hogy ezekből a sajátértékekből tudok pozitív négyzetgyököt vonni, így a szinguláris értékek sorozata jól van definiálva.

3.2.2. Lemma. Legyen $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mátrix. Ekkor létezik egy olyan $M' m \times n$ -es négyzetes unitér mátrix illetve egy $M n \times n$ -es négyzetes unitér mátrix, amelyekre teljesül, hogy M'^*AM olyan $m \times n$ -es \sum' mátrix, hogy a főátlójában A -nak a szinguláris értékei helyezkednek el nem növekvő sorrendben és a többi helyen pedig nulla áll. Ha A -nak a szinguláris értékei $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$ számok akkor M'^*AM vagy

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_n & \\ & & & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_n & \\ & & & \end{pmatrix}, \text{ vagy } \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_n & \\ & & & \end{pmatrix}$$

alakú, attól függ, hogy $m < n$, $m = n$, $m > n$.

Bizonyítás: Vegyük az A^*A $m \times m$ -es pozitív szemidefinit mátrixnak a sajátvektoraiból álló ortonormált bázisát úgy, hogy a sajátértékek ne növekvő sorrendben legyenek. Ahhoz, hogy erre a bázisra áttérjünk kell egy olyan M unitér mátrix, melyre M^*A^*AM az a D diagonális mátrix lesz amelynek főátlójában a σ^2 elemek vannak. (a szinguláris értékek négyzetei). A $D = (AM)^*(AM)$ diagonalitásából következik, hogy az AM mátrix oszlopai ortogonális rendszert alkotnak. A diagonális elemek az oszlopvektorok hosszának a négyzetét adják, így az i -edik elem hossza $\sqrt{\sigma_i}$. Az A mátrix rangja legyen r , vagyis r a nem nulla szinguláris értékek száma. M' -t válasszuk egy olyan $m \times m$ -es unitér mátrixnak, amelynek az első r oszlopa AM első r oszlopa 1 hosszúra normálva. Mivel a nem nulla szinguláris értékek száma r , AM további oszlopai nullák lesznek. $AM = M' \sum'$ és ebből $\sum' = M'^*AM$. \square

3.2.3. Tétel.

Redukált SVD: Legyen $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ -es mátrix, melynek rangja r és legyen \sum olyan $r \times r$ -es mátrix, melynek főátlójában A -nak a szinguláris értékei vannak nem növekvő sorrendben. Ilyenkor létezik egy $U' m \times r$ -es és egy $U n \times r$ -es

mátrix, hogy U' -nek és U -nak is az oszlopai ortonormált rendszert alkotnak. Azaz $U'^*U' = I_r$ és $U^*U = I_r$. Ekkor A szinguláris felbontása

$$A = U' \Sigma U^*.$$

Bizonyítás: Legyen $\Sigma' = M'^*AM$ a fenti lemma szerint. Ekkor $A = M' \Sigma' M^*$. Legyen U' az M' mátrix első r oszlopából álló $m \times r$ -es mátrix, U pedig M mátrix első r oszlopából álló $n \times r$ -es mátrix. Tehát ekkor

$$M = \left(U \mid M_1 \right), M' = \left(U' \mid M'_1 \right)$$

ekkor az SVD-tétel szerint.

$$\begin{aligned} A &= M' \Sigma' M^* = \\ &= \left(U' \mid M'_1 \right) \left(\begin{array}{c|c} \Sigma & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} U^* \\ M_1^* \end{pmatrix} = \left(U' \mid \Sigma \mid 0 \right) \begin{pmatrix} U^* \\ M_1^* \end{pmatrix} = U' \Sigma U^* \end{aligned}$$

□

Nézzünk meg egy példát a szinguláris értékek szerinti felbontásra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 30 & 90 \end{pmatrix}$$

$$k_{(A^*A)}(x) = x^2 - 100x = x(x - 100)$$

$$\lambda_1 = 100, \lambda_2 = 0, \sigma_1 = 10, \sigma_2 = 0, \Sigma = [10], \Sigma' = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Az A^*A sajátvektora λ_1 -hez : $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, normálva : $\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Az A^*A sajátvektora λ_2 -höz : $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, normálva : $\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} M' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} U' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

$$A = U' \Sigma U^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \cdot 10 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

3.3. Eckart Young - tétel

A matematikában gyakran kell közelítő mátrixokkal dolgoznunk. Pl: a kis rangú mátrixok sokkal helytakarékosabban tárolhatók, mint a regulárisak. Így a következő tétel arra keres választ, hogy mi lesz egy A mátrix optimális közelítése, ha a rögzített k -rangú mátrixok között keressük ezt az approximációt.

3.3.1. Tétel (Eckart-Young).

Teljes SVD: Legyen $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ -es mátrix, melynek rangja r és A szinguláris értékek szerinti felbontása :

$$A = U' \Sigma U^*.$$

Ekkor tetszőleges $0 \leq k \leq r$ -re :

$A = U^{(k)} \Sigma^{(k)} U^{(k)}$ A -hoz a Frobenius-normában az egyik legközelebbi $m \times n$ -es mátrix, melynek rangja legfeljebb k . Itt $U^{(k)}$ az U első k oszlopából álló részmatrixa, $U'^{(k)}$ az U' első k oszlopából álló részmatrixa és $\Sigma^{(k)}$ a Σ bal felső $k \times k$ -as része. Ekkor a közelítés hibája :*

$$\sqrt{\sum_{i=k+1}^r \sigma_i^2},$$

ahol a közelítés hibája $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$ az A -nak a szinguláris értékei.

A tétel bizonyítására most nem térek ki, de Ivanyos Gábor honlapján található jegyzetben megtekinthető.

3.4. Az Eckart - Young -tétel alkalmazása képtömörítésre

JPG képek tömörítésére is használható a szinguláris értékelbontás. Az eljárás egyik alapvető kiindulása, hogy az emberi szem sokkal érzékenyebb a színek fényességére, mint a színeknek az árnyalatára, ezért a képből sok színérték elhagyható.

Képtömörítés SVD faktorizációval. Egy fekete-fehér képet tekintsünk egy A mátrixnak, melyben a pixelek száma megegyezik a mátrix méretével, azaz

100×100 pixeles kép egy 100×100 -as mátrixnak felel meg. A mátrixban lévő a_{ij} adatokat a $[0, 1]$ intervallumból vesszük, ahol a 0-t fehér pixelnek tekintjük, az 1-et pedig feketének. Így a közbeeső értékek vagyis a $0 < a_{ij} < 1$, a szürke különböző árnyalatainak fognak megfelelni. Most egy olyan módszert mutatok meg, amellyel tudjuk minimalizálni a kép méretét, úgy hogy maga az új kép látszólag nagyon minimálisan térjen el az eredetitől. Erre az Eckart-Young tételt hívjuk segítségül. Legyen $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ egy r rangú mátrix. Nézzük meg ennek az SVD faktorizációját.

$$A = V \Sigma' U^*, \text{ ahol } \Sigma' = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Itt $U \in \mathbb{C}^n \times n$ és $V \in \mathbb{C}^m \times m$ unitér mátrixok és Σ diagonális mátrix, melynek elemei $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$. Ezek az értékek az A^*A mátrix sajátértékeinek pozitív négyzetgyökei, vagyis szinguláris értékei. Ha U és V oszlopait u_i -vel és v_i -vel jelöljük, akkor a következőképpen is fel tudjuk írni az A mátrixot:

$$A = V \Sigma' U^* = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i u_i^*$$

Mivel a szinguláris értékek nemnövekvő sorrendben vannak így az A mátrix közelíthető az első $k \leq r$ oszloppal, ami a következőképpen néz ki:

$$A_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i u_i^*$$

Az Eckart-Young tétel miatt A_k lesz a legjobb közelítése az A mátrixnak a k rangú mátrixok között. Ha k sokkal kisebb, mint r akkor sok tárhelyet tudunk megspórolni, ha A -t A_k -val közelítjük. Az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix tárolása $m \times n$ skalár tárolását jelenti. De az A_k tárolása jóval kevesebbet igényel, pontosan k darab $\lambda_i v_i \in \mathbb{C}^m$ vektor és $u_i \in \mathbb{C}^n$ vektor, azaz $k(m+n)$ számú skalárt. Vagyis nekünk jó az, ha k kicsi és megelégszünk A egy közelítésével is.

Nézzünk egy konkrét példát.

Az eredeti képet átalakítottam egy négyzetes képpé, ami 250×250 pixelből áll. Ezt megfeleltetjük egy A mátrixnak, mely 250×250 -es.

A Matlab programmal pedig a következő átalakításokat végeztem. A képet színesből fekete-fehérré alakítottam, a mátrixban lévő számokat a tizedes törtekké alakítottam és a mátrixot szétbontottam a szinguláris értékek szerinti komponensekre. Utána a for-ciklusban lévő parancsokat végrehajtottam 5-ös rangtól egészen 30-as rangig ötösével, eltávolítottam a szinguláris értékeket, a nem szükségeseket lenulláztam. A kapott mátrixból pedig megalkottam a képet. A Matlabos programkód pedig a következőképpen néz ki :

```

inImage=imread('eredeti.jpg');
inImage=rgb2gray(inImage);
inImageD=double(inImage);

[U,S,V]=svd(inImageD);

dispEr = [];
numSVals = [];
for N=5:5:30

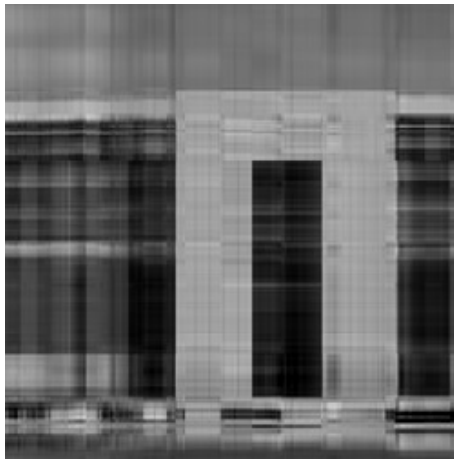
    C = S;
    C(N+1:end,:)=0;
    C(:,N+1:end)=0;
    D=U*C*V';

    figure;
    buffer = sprintf('Image output using %d singular values', N)
    imshow(uint8(D));
    title(buffer);
    error=sum(sum((inImageD-D).^2));

    dispEr = [dispEr; error];
    numSVals = [numSVals; N];
end

```

Az eredeti kép mellett további 3 kép látható melyeket 3 különböző k -val közelíttem az eredeti A -hoz, vagyis 3 különböző A_k mátrix.



$k = 5$



$k = 10$



$k = 30$



eredeti

Látjuk, hogy a $k = 5$ -re még nagyon elmosódott a kép, míg $k = 10$ -re már egész jól kivehető, de a $k = 30$ -as közelítés az ami szinte ugyanúgy néz ki mint az eredeti kép, csak jóval kevesebb helyet foglal, körülbelül a negyedére csökkentettük.

$$\frac{k(m+n)}{m \times n} = \frac{30(250+250)}{251 \times 250} \approx 24\%$$

Ennek a képtömörítési módszernek a fő számítási költsége az A mátrix szinguláris felbontásának kiszámolása. A képtömörítéshez természetesen léteznek más sokkal hatékonyabb és olcsóbb algoritmusok is, mint az SVD faktorizáció.

Irodalomjegyzék

- [1] Freud Róbert: *Lineáris algebra ELTE Eötvös Kiadó* (2014)
- [2] Wettl Ferenc: *Lineáris algebra Typotex* (2011)
- [3] Stoyan Gisbert, Takó Galina: *Numerikus módszerek I. Második átdolgozott kiadás Typotex* (2002)
- [4] Gergó Lajos: *Numerikus módszerek ELTE Eötvös Kiadó* (2000)
- [5] Fogaras Dániel: *SVD www.cs.bme.hu/~fd/papers/fog_svd02.pdf*
- [6] Házi Attila: *Előadás jegyzete*
www.uni-miskolc.hu/~matha/Numerikus_05ea.pdf
- [7] Wettl Ferenc: *Előadás jegyzet*
www.math.bme.hu/~wettl/okt/linalg/2015/2ea_matrixok.pdf
- [8] Lócsi Levente: *Előadás jegyzet www.people.inf.elte.hu/hozsaa/3_felev/Nummod1/Locsi-esti-ea-dia/nummod1esti_ea04.pdf*
- [9] Virágh János, Dombi József, Csendes Tibor: *Numerikus matematika*
www.users.atw.hu/mejegyzetek/files/2009_10_25_02_10_32nummod_jegyzet_1.pdf
- [10] Faragó István, Horváth Róbert: *Numerikus módszerek Typotex* (2011)
- [11] Aradi Bernadett: *Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás*
www.math.unideb.hu/media/aradi-bernadett/Gram-Schmidt.pdf
- [12] Ivanyos Gábor: *Előadásvázlat*
www.math.bme.hu/~ig/alkalg/alkalg.pdf
- [13] *www.elte.prompt.hu/sites/default/files/tananyagok/GeofizikaiInverzio/ch02s05*.
- [14] *www.uni-miskolc.hu/evml/database/downloads/diskret/segedletek/num14.pdf*