Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Térbeli affin transzformációk és másodrendű felületek analitikus vizsgálata

Szakdolgozat

Készítette:
Sebestyén Krisztina
matematika Bsc, tanári szakirány

Témavezető:
Verhóczki László
egyetemi docens, Geometriai Tanszék

Budapest

2016

Tartalomjegyzék

Előszó

Középiskolás diákként már tanultam a síkbeli egybevágósági és hasonlósági transzformációkról. Az egyetemen a geometria előadásokon részletesen is tárgyalásra kerültek ezek a nevezetes transzformációk és az általuk alkotott transzformációcsoportok. Kiderült, hogy vannak olyan transzformációk, amelyek egyenest egyenesbe képeznek és megőrzik a kollineáris ponthármasok osztóviszonyát, de általában nem hasonlóságok. Ezeket neveztük el affin transzformációknak. Azonban a geometria előadásokon elsősorban csak a síkbeli affinitásokat tanulmányoztuk. Geometriai tanulmányaimban szerepeltek a síkbeli másodrendű görbék is. Viszont a másodrendű felületek, melyek egy részletes tárgyalása a Hajós György által írt [2] tankönyv befejező paragrafusaiban található meg, már csak az említés szintjén jöttek elő az előadásokon.

Szakdolgozatomban a térbeli affin transzformációkat tárgyalom és megvizsgálom, hogy ezek a transzformációk milyen kapcsolatban állnak a másodrendű felületekkel.

A dolgozat első fejezetében kerül sor a térbeli affin transzformációk vizsgálatára. Elsőként az affinitás alapvető tulajdonságait határozzuk meg. Ezt követően bevezetjük az alapsíkos affinitás fogalmát. Egy rögzített derékszögű koordináta-rendszert alkalmazva tanulmányozzuk az affin transzformációkat. Ennek érdekében bevezetjük az affinitás által indukált lineáris leképezés fogalmát. Megmutatjuk, hogy egy affin transzformációnál a képpont koordinátáit lineárisan lehet kifejezni az eredeti pont koordinátáiból. Ennek következtében az affin transzformációkat mátrixegyenletek alakjában is le lehet írni. A dolgozatban konkrétan is megadjuk az alapsíkos affinitás mátrixegyenletét egy speciális koordináta-rendszerben.
Bebizonyítjuk azon alapvető tételt, amely kimondja, hogy két általános helyzetű pontnégyeshez mindig egyértelműen létezik olyan affin transzformáció, amely az első pontnégyest a másodikba viszi. Az analitikus leírás alapján belátjuk azt is, hogy amennyiben az affin transzformációnál egy poliéder képének térfogatát elosztjuk az eredeti poliéder térfogatával, akkor mindig ugyanazt a hányadost nyerjük. Ezt a számot az affinitás térfogati arányszámának nevezzük. Emiatt értelmezni lehet a térfogattartó affin transzformációkat, amelyek egy részcsoportot képeznek az affin transzformációk csoportjában.

A szakdolgozat második fejezetében tanulmányozzuk a másodrendű felületeket és kapcsolatukat az affin transzformációkkal. Röviden leírjuk, hogy miként lehet másodrendű felületeteket származtatni másodrendű görbékből. Ezt követően igazoljuk, hogy a térbeli affin transzformáció másodrendű felületet másodrendű felületbe képez. Felhasználjuk a [2] tankönyvben igazolt azon tételt, miszerint a koordináta-rendszer alkalmas megválasztása esetén bármely másodrendű felület egyenlete kanonikus alakot ölt. A meghatározott kanonikus egyenletek alapján a másodrendű felületeket 15 osztályba lehet besorolni. Ezzel kapcsolatosan a dolgozat befejező szakaszában igazoljuk, hogy amennyiben két másodrendű felület egyazon osztályba tartozik a kanonikus egyenlete szerint, akkor van olyan affin transzformáció, amely az első felületet a másodikba viszi. Ez azt mutatja, hogy a másodrendű felületeknek a kanonikus egyenlettel történő osztályozása valójában az affin transzformációk szerinti osztályozásnak felel meg.

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Verhóczki Lászlónak a szakdolgozati konzultációk során nyújtott segítségét.

1. fejezet
A térbeli affin transzformációk tárgyalása

1.1. Alapvető fogalmak, jelölések

Dolgozatomban $\boldsymbol{X}$ fogja jelölni az euklideszi tér pontjainak halmazát. Ennek elemeit, a pontokat latin nagybetűkkel $(A, B, C \dots)$ jelöljük. A tér kitüntetett ponthalmazai az egyenesek és a síkok, előbbieket latin kisbetűkkel $(e, f, g \dots)$, utóbbiakat pedig görög betűkkel $(\alpha, \beta, \gamma \dots)$ fogjuk jelölni. Az A, B pontokat összekötő szakaszra az $\overline{AB}$ jelölést alkalmazzuk. A két pont távolságát $d(A, B)$-vel jelöljük.

Az A kezdőpontból a B végpontba mutató irányított szakasz jele $\overrightarrow{AB}$ lesz. Mint ismeretes, az irányított szakaszok egyenlőségük alapján ekvivalenciaosztályokat határoznak meg. Ezeket az ekvivalenciaosztályokat szabad vektoroknak nevezzük, és a dolgozatban félkövér latin betűkkel $(\mathbf{u}, \mathbf{v} \dots)$ jelöljük őket. A térbeli szabad vektorok terét $\boldsymbol{V}$ fogja jelölni. Az $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vektorok skaláris szorzatát jelölje $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, vektoriális szorzatukat $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorhármas vegyes szorzatát pedig $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

A következőkben szeretnénk felidézni pár olyan definíciót, melyet a későbbiekben alkalmazni fogunk.

1.1.1. Definíció. Legyenek adva az A, B, C egymástól különböző kollineáris pontok. A pontokat tartalmazó egyenesen vegyünk fel egy irányítást. Az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{CB}$ irányított szakaszok előjeles hosszát jelölje AC és CB. Ekkor az A, B, C ponthármas osztóviszonyán az $(ABC) = \frac{AC}{CB}$ hányadost értjük.

Megjegyzés: Világos, hogy az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{CB}$ irányított szakaszok iránya csakis akkor egyezik meg, ha C pont az A, B pontok között van. Tehát az (ABC) osztóviszonyra akkor teljesül az $(ABC) > 0$ egyenlőtlenség, ha a C pont rajta van az $\overline{AB}$ szakaszon.

1.1.2. Definíció. Az egybevágóságon (más szóval egybevágósági transzformáción) egy olyan $\varphi: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ leképezést értünk, mely bijektív és megőrzi a pontok távolságát.

Megjegyzés: Legyenek adva a $\varphi_1: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ és $\varphi_2: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ egybevágóságok. Ezek szorzatán a $\varphi_2 \circ \varphi_1: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ leképezést értjük. Evidens, hogy ez is egy egybevágósági transzformáció. Belátható, hogy az egybevágóságok egy csoportot alkotnak a kompozíció műveletére nézve. Ezt a csoportot jelölje *Iso(**X**)*.

1.1.3. Definíció. Hasonlóságon (más szóval hasonlósági transzformáción) egy olyan $\varphi: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ leképezést értünk, amely bijektív és amelyhez van olyan λ pozitív szám, hogy bármely A, $B \in \boldsymbol{X}$ pontok esetén a $\varphi(A) = A'$ és $\varphi(B) = B'$ képpontok távolságára teljesül a $d(A', B') = \lambda\, d(A, B)$ egyenlőség. A λ számot mondjuk a φ hasonlóság arányának.

Megjegyzés: A hasonlóságok szintén csoportot alkotnak a kompozíció műveletére nézve. Ezt a transzformáció csoportot jelölje *Sim(**X**)*. Világos, hogy a hasonlósági transzformációk csoportja magába foglalja az egybevágósági transzformációk csoportját, vagyis fennáll *Iso(**X**)* $\subset$ *Sim(**X**)*.

1.2. Az affin transzformáció alapvető tulajdonságai

Elsőként vezessük be az affin transzformáció fogalmát.

1.2.1. Definíció. A térbeli affin transzformáció egy olyan $\varphi\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ bijektív leképezés, mely egyenestartó és megőrzi a kollineáris ponthármasok osztóviszonyát.

Megjegyzés: Az affinitás definíciójából következnek az alábbi alaptulajdonságok. Két affin transzformáció szorzata (kompozíciója) szintén affin transzformáció. Egy $\varphi\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ affinitás inverze, vagyis a $\varphi^{-1}\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ leképezés szintén affin transzformáció. Tehát a kompozícióra nézve az affinitások is csoportot alkotnak, melyet jelöljön *Aff(**X**)*. Az affinitások csoportja magába foglalja a hasonlóságok és az egybevágóságok csoportját, melyet a következőképpen írhatunk fel: *Iso(**X**)* $\subset$ *Sim(**X**)* $\subset$ *Aff(**X**).*

Megjegyzés: Mivel az affin transzformáció egyenestartó és osztóviszonytartó, adódik, hogy az affinitás szakaszt szakaszba képez.

A következő állítás az affin transzformáció alapvető tulajdonságairól szól, melyek könnyen levezethetőek az affinitás definíciójából.

1.2.1. Állítás. *Legyen adott egy $\varphi\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ affin transzformáció. Ekkor igazak a következők.*

(1) A φ affinitás síkot síkba képez.
(2) Párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe képez.
(3) Parallelogrammát parallelogrammába képez.

Bizonyítás:
(1) Tekintsünk egy σ síkot és azon három nem kollineáris pontot, melyek legyenek A, B és C. Vegyük az A', B', C' képpontokat. Ezek nem kollineárisak, tehát meghatároznak egy ρ síkot. Legyen P $(P \neq A)$ egy pontja a σ síknak. Könnyű belátni, hogy az A, P pontokon áthaladó egyenes φ szerinti képének van két közös pontja ρ-val, vagyis rajta van a ρ síkon. Innen már adódik, hogy a σ sík affin képe éppen a ρ sík.
(2) Legyenek a g, h egyenesek párhuzamosak. Ezek g', h' képei rajta vannak a g, h egyeneseket tartalmazó sík képén az (1) tulajdonság miatt. A g', h' egyenesek nem lehetnek metszőek. Ugyanis, ha a g', h' egyeneseknek lenne közös pontja, akkor az képe lenne egy g-re eső és egy h-ra eső pontnak is, ami ellentmond annak, hogy a φ leképezés bijektív. Emiatt a g', h' egyenesek egymással párhuzamosak.
(3) Vegyünk egy $ABCD$ parallelogrammát. Az előbb bizonyítottuk, hogy az affinitás párhuzamosságtartó. Emiatt az $A'B'C'D'$ négyszög szemközti oldalegyenesei szintén párhuzamosak, tehát $A'B'C'D'$ egy paralelogramma.■

Szeretnénk példát mutatni olyan affin transzformációkra, melyek nem hasonlóságok. Ennek érdekében bevezetjük az alapsíkos affinitás fogalmát.

1.2.2. Definíció. Legyen adott egy σ sík, egy vele nem párhuzamos i egyenes és egy λ $(\lambda \neq 0,\ \lambda \neq 1)$ szám. Tekintsük azt a $\varphi\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ leképezést, amely a σ sík pontjait fixen hagyja, továbbá egy P $(P \notin \sigma)$ pont $P' = \varphi(P)$ képét az alábbi feltételek határozzák meg:

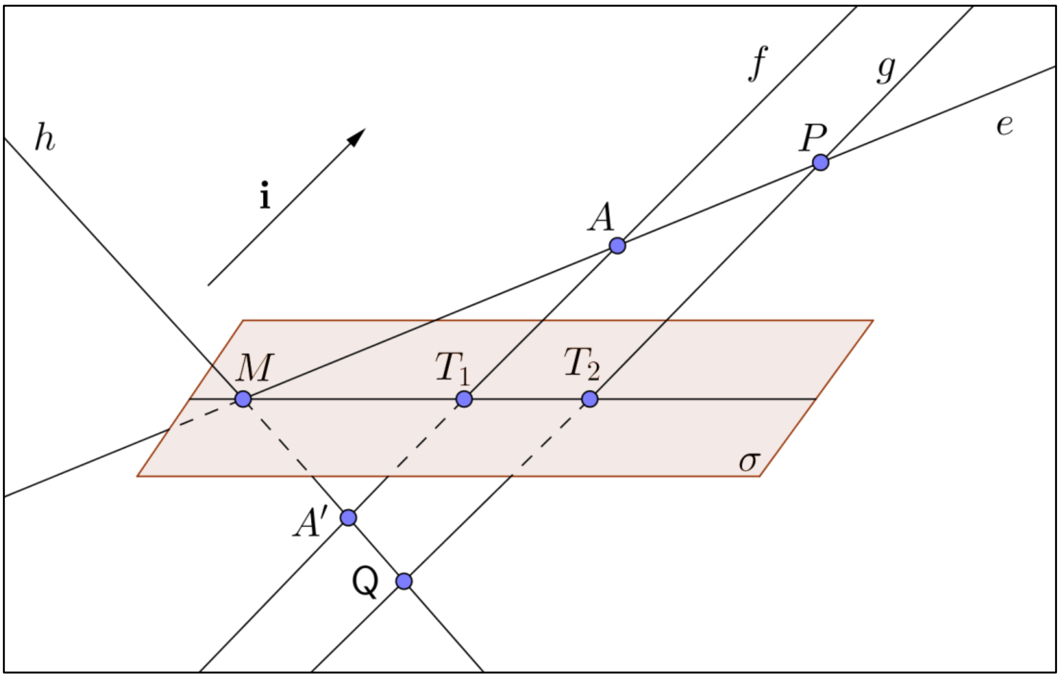
(1) A P' pont rajta van a P-n átmenő i-vel párhuzamos f egyenesen.
(2) Amennyiben a σ sík f egyenessel vett metszéspontját T-vel jelöljük, akkor $\overrightarrow{TP'}$ és $\overrightarrow{TP}$ vektorokra fennáll a $\overrightarrow{TP'} = \lambda\,\overrightarrow{TP}$ összefüggés.

Ezt a φ leképezést egy alapsíkos affin transzformációnak nevezzük. Ennek σ az alapsíkja, i az iránya és λ az előjeles aránya.

1.2.2. Állítás. *Az alapsíkos affinitás egy affin transzformáció.*

Bizonyítás:
Világos, hogy a fenti definíció szerinti φ leképezés bijektív. Azt is be kell látnunk, hogy ez a leképezés egyenestartó és megőrzi az osztóviszonyt.

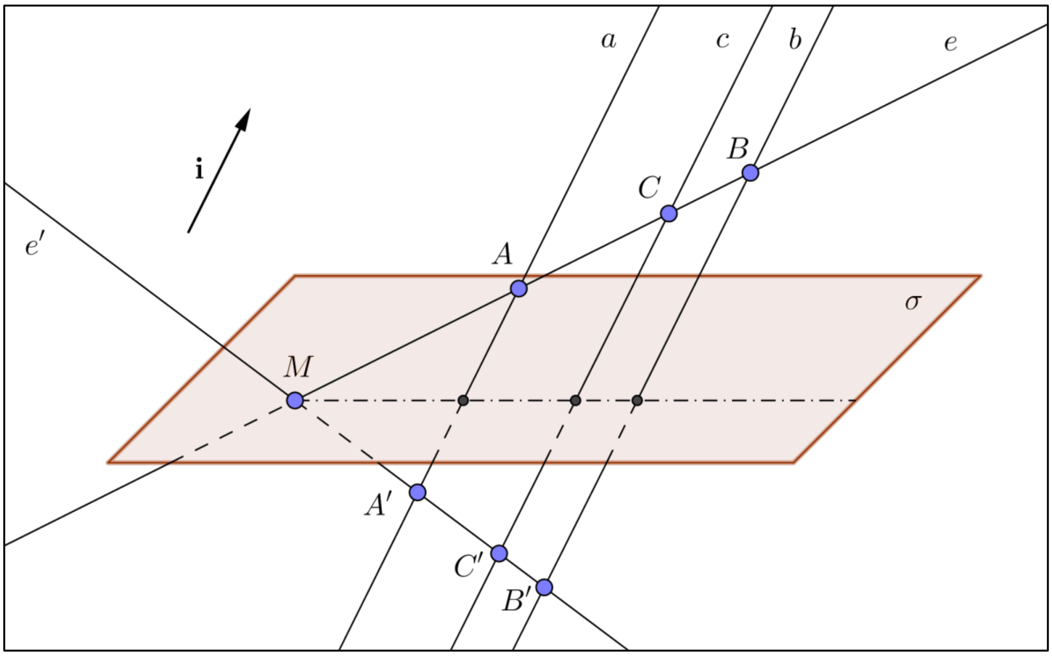
1) Tekintsünk egy olyan e egyenest, amely metszi a σ alapsíkot egy M pontban. Vegyük az e egyenes egy A $(A \neq M)$ pontját és annak $A' = \varphi(A)$ képét. Az $A,\ A'$ pontok f egyenese messe el T_1-ben a σ síkot. Azt szeretnénk belátni, hogy az $M,\ A'$ pontok egyenese, melyet h-val jelölünk, lesz az e egyenesnek a φ szerinti képe. (Lásd az *1. ábrát.*) Vegyünk egy tetszőleges P pontot az e egyenesen. A P-n átmenő i-vel párhuzamos g egyenesnek a h-val vett metszéspontja legyen Q. Világos, hogy az $MT_1A\Delta$ és az $MT_2P\Delta$ háromszögek hasonlóak, mivel szögeik páronként egyenlők. Emiatt a két háromszögben a megfelelő oldalak aránya megegyezik, azaz fennáll a következő összefüggés: $\frac{T_2P}{T_1A} = \frac{MT_2}{MT_1}$. Ugyanígy adódik, hogy az $MT_1A'\Delta$ és az $MT_2Q\Delta$ háromszögek is hasonlóak. Ezek oldalaira teljesül $\frac{T_2Q}{T_1A'} = \frac{MT_2}{MT_1}$. Ezek alapján fennáll a $\frac{T_2P}{T_1A} = \frac{T_2Q}{T_1A'}$ összefüggés. Az egyenletből átrendezéssel adódik, hogy $\frac{T_2Q}{T_2P} = \frac{T_1A'}{T_1A} = |\lambda|$. Ebből pedig már következik, hogy fennáll $\overrightarrow{T_2Q} = \lambda\overrightarrow{T_2P}$. Eszerint Q lesz a P pont képe, azaz $\varphi(P) = Q$. Tehát az e egyenes pontjainak képei a h egyenesre illeszkednek.



1. ábra – Az alapsíkos affin transzformáció egyenestartó tulajdonsága

2) Az alábbiak során igazoljuk, hogy φ megőrzi az osztóviszonyt. Vegyük az e egyenes és a σ sík M metszéspontját. Tekintsük az e egyenesen azon $A,\ B,\ C$ pontokat, melyek különböznek M-től, illetve ezek képét: $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$, $C' = \varphi(C)$. Az előbb beláttuk, hogy az e

egyenes pontjainak képei szintén egy M metszésponton átmenő e' egyenesre illeszkednek. (Lásd a *2. ábrát.*) Azt szeretnénk belátni, hogy az osztóviszonyra fennáll $(ABC) = (A'B'C')$. Az $A,\ A'$ pontokat tartalmazó egyenes legyen a, a $B,\ B'$pontokat tartalmazó egyenes b, a C, C' pontokat tartalmazó egyenes pedig c. Az 1.2.2. Definícióból következik, hogy az a, b, c egyenesek párhuzamosak. A párhuzamos szelők tétele miatt felírhatjuk a következő összefüggést: $\frac{AC}{A'C'} = \frac{CB}{C'B'}$. Ezt átrendezve teljesül az $\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$ egyenlet. Ez az egyenlőség az előjeles szakaszhosszak esetében is teljesül, vagyis igaz az $(ABC) = (A'B'C')$ összefüggés.



2. ábra – Az alapsíkos affin transzformáció osztóviszony tartása

3) A fentiekben az általános esetet tárgyaltuk, amikor az e egyenes metszi az alapsíkot. Ha az e egyenes párhuzamos a σ alapsíkkal, akkor egyszerűen belátható, hogy az e pontjainak képei egy az e-vel párhuzamos egyenest alkotnak. Az osztóviszony megőrzése is könnyen belátható. Ezzel igazoltuk a kimondott állítást.■

Megjegyzés: Legyen φ egy olyan alapsíkos affinitás, amelynél az előjeles arányra fennáll, hogy $\lambda \neq -1$. Ekkor az alapsíkbeli pontok távolsága megőrződik, viszont az i iránnyal párhuzamos szakaszok hossza $|\lambda|$-szorosára változik a transzformációnál. Emiatt a φ transzformáció nem lehet hasonlóság.

1.2.3. Definíció. Egy $\varphi\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ alapsíkos affin transzformációt merőlegesnek mondunk, ha az affinitás iránya merőleges az alapsíkra.

1.3. Az affin transzformációk analitikus leírása

A továbbiakban feltesszük, hogy a térben rögzítve van egy Descartes-féle koordinátarendszer, melynek kezdőpontja O és alapvektorai az $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$ ortonormált vektorok, melyek egy jobbrendszert alkotnak.

Egy P pontnak az O kezdőpontra vonatkozó helyvektora egyértelműen áll elő az alapvektorok lineáris kombinációjaként az $\overrightarrow{OP} = x_P\mathbf{i} + y_P\mathbf{j} + z_p\mathbf{k}$ alakban. Az ebben szereplő együtthatókat mondjuk a P pont koordinátáinak. (Jelölés: $P(x_P, y_P, z_p)$).

Amennyiben egy φ affinitást veszünk, akkor egy P pont képére a $P'= \varphi(P)$ jelölést fogjuk használni. A következőkben bevezetjük az indukált lineáris leképezés fogalmát.

1.3.1. Definíció. Legyen adott egy $\varphi: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ affin transzformáció. Ekkor a φ által a szabad vektorok terén indukált leképezésen azt a $\hat{\varphi}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ függvényt értjük, ahol fennáll a $\hat{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{A'B'}$ összefüggés tetszőlegesen vett $A,\ B \in \boldsymbol{X}$ pontokra.

Megjegyzés: Tegyük fel, hogy az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ irányított szakaszok egyenlőek, vagyis egyazon $\mathbf{u}$ szabad vektort képviselik. Mivel az affinitás parallelogrammát parallelogrammába képez, az $\overrightarrow{A'B'}$ és $\overrightarrow{C'D'}$ irányított szakaszok is egyenlőek egymással. Eszerint egy $\mathbf{u} \in \boldsymbol{V}$ vektornak a $\hat{\varphi}(\mathbf{u})$ képe nem függ a vektort reprezentáló irányított szakasz megválasztásától.

1.3.1. Állítás. *A szabad vektorok terén a φ affinitás által indukált $\hat{\varphi}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ leképezés egy lineáris izomorfizmus.*

Bizonyítás:
A $\hat{\varphi}$ linearitásának igazolásához azt kell belátnunk, hogy bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ számra és $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \boldsymbol{V}$ vektorokra teljesülnek az alábbi összefüggések:

(1) $\hat{\varphi}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \hat{\varphi}(\mathbf{u}) + \hat{\varphi}(\mathbf{v})$, (2) $\hat{\varphi}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda\, \hat{\varphi}(\mathbf{u})$.

(1) Legyenek adottak az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorokat reprezentáló $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ és $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$ irányított szakaszok. Vegyük továbbá a $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ és $\varphi(C) = C'$ képpontokat. Ekkor igazak a következő összefüggések:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \hat{\varphi}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \hat{\varphi}\left(\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \hat{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right) + \hat{\varphi}\left(\overrightarrow{BC}\right) \\ = \hat{\varphi}(\mathbf{u}) + \hat{\varphi}(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

(2) Egy adott λ $(\lambda \neq 1)$ számhoz vegyük az $A,\ B$ pontokon átmenő egyenes azon P pontját, amelyre fennáll az $\overrightarrow{AP} = \lambda\mathbf{u}$ egyenlőség. Tekintsük a P pont $\varphi(P) = P'$ képét. Ekkor teljesül $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = \lambda\mathbf{u} - \mathbf{u} = (\lambda - 1)\mathbf{u}$. Az 1.1.1. Definíció alapján az (ABP) osztóviszony az a szám, amelyre fennáll, hogy $\overrightarrow{AP} = (ABP) \cdot \overrightarrow{PB}$. Emiatt az $\overrightarrow{AP} = \lambda\mathbf{u}$ és $\overrightarrow{PB} = (1 - \lambda)\mathbf{u}$ egyenletekből már következik, hogy $(ABP) = \frac{\lambda}{1-\lambda}$.
Az affin transzformáció osztóviszonytartásából adódik, hogy a képpontokra fennáll $(A'B'P') = \frac{\lambda}{1-\lambda}$. Az ebből nyert $\overrightarrow{A'P'} = \frac{\lambda}{1-\lambda} \cdot \overrightarrow{P'B'}$ összefüggést átrendezve azt kapjuk, hogy $(1 - \lambda)\overrightarrow{A'P'} = \lambda \cdot \overrightarrow{P'B'}$. Innen már következik, hogy
$\overrightarrow{A'P'} = \lambda \cdot \overrightarrow{P'B'} + \lambda \cdot \overrightarrow{A'P'} = \lambda\left(\overrightarrow{A'P'} + \overrightarrow{P'B'}\right) = \lambda \cdot \overrightarrow{A'B'}$. Ez pedig azt jelenti, hogy teljesül $\hat{\varphi}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda\, \hat{\varphi}(\mathbf{u})$.

Mivel a φ affinitás egy bijektív leképezés, a $\hat{\varphi}$ indukált leképezés különböző vektorokat különböző vektorokba képez (azaz injektív). Az szintén könnyen belátható, hogy a $\hat{\varphi}$ szürjektív is. ■

Megjegyzés: Az affin transzformációnál az indukált leképezés a vektorok skaláris szorzatát és hosszát általában nem tartja meg.

Legyen adott egy $\varphi: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ affin transzformáció. Azt fogjuk vizsgálni, hogyan fejezhetők ki egy $P \in \boldsymbol{X}$ pont koordinátáiból a $\varphi(P) = P'$ képpont koordinátái. Ehhez szükségünk van a φ által indukált $\hat{\varphi}$ lineáris leképezés mátrixára.

Az **i, j, k** alapvektorok $\hat{\varphi}(\mathbf{i})$, $\hat{\varphi}(\mathbf{j})$, $\hat{\varphi}(\mathbf{k})$ képei kifejezhetők lineáris kombináció alakjában valamely a_{rs} (r, s= 1, 2, 3) együtthatókkal a következő módon:

$$\hat{\varphi}(\mathbf{i}) = a_{11}\mathbf{i} + a_{21}\mathbf{j} + a_{31}\mathbf{k},$$
$$\hat{\varphi}(\mathbf{j}) = a_{12}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{32}\mathbf{k},$$
$$\hat{\varphi}(\mathbf{k}) = a_{13}\mathbf{i} + a_{23}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}.$$

Az együtthatókból képzett $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ mátrix a $\hat{\varphi}$ indukált lineáris leképezés mátrixa az **i, j, k** bázisra nézve.

Az 1.3.1. Állításban beláttuk, hogy $\hat{\varphi}$ egy lineáris izomorfizmus. Ez azt jelenti, hogy a fenti **A** mátrix invertálható, azaz a determinánsára fennáll a következő összefüggés: $det\,\mathbf{A} \neq 0$.

Megjegyzés: Korábban már feltettük, hogy az **i**, **j**, **k** alapvektorok jobbrendszert alkotnak. Az **A** mátrix oszlopaiban a $\hat{\varphi}(\mathbf{i}), \hat{\varphi}(\mathbf{j})$, $\hat{\varphi}(\mathbf{k})$ vektorok koordinátái szerepelnek. Geometriai tanulmányainkból már ismert, hogy az **A** mátrix determinánsa megegyezik a $\hat{\varphi}(\mathbf{i}), \hat{\varphi}(\mathbf{j}), \hat{\varphi}(\mathbf{k})$ vektorok vegyes szorzatával. Ezek alapján a következő kijelentéseket tehetjük.
1) det $\mathbf{A} > 0$ esetén fennáll $\left(\hat{\varphi}(\mathbf{i}) \times \hat{\varphi}(\mathbf{j})\right) \cdot \hat{\varphi}(\mathbf{k}) > 0$, tehát a $\hat{\varphi}(\mathbf{i}), \hat{\varphi}(\mathbf{j})$, $\hat{\varphi}(\mathbf{k})$ vektorok is jobbrendszert alkotnak. Ekkor a φ affin transzformációt irányítástartónak mondjuk.
2) det $\mathbf{A} < 0$ esetén teljesül $\left(\hat{\varphi}(\mathbf{i}) \times \hat{\varphi}(\mathbf{j})\right) \cdot \hat{\varphi}(\mathbf{k}) < 0$, tehát a $\hat{\varphi}(\mathbf{i}), \hat{\varphi}(\mathbf{j})$, $\hat{\varphi}(\mathbf{k})$ vektorok balrendszert alkotnak. Ekkor a φ affin transzformációt irányításváltónak mondjuk.

Visszatérve a kitűzött feladatunkhoz, írjuk fel az O kezdőpont O' képének helyvektorát az **i**, **j**, **k** alapvektorok lineáris kombinációjaként az $\overrightarrow{OO'} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}$ alakban. Eszerint O' koordinátáit a (t_1, t_2, t_3) számhármas adja. Vegyünk egy tetszőleges $P \in \boldsymbol{X}$ pontot, ennek a pontnak a helyvektora legyen $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
Ekkor a $P' = \varphi(P)$ képpont koordinátáit az $\overrightarrow{OP'} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$ kifejezés együtthatói adják meg. Mivel $\hat{\varphi}$ egy lineáris leképezés, ezért igaz az alábbi egyenlőség:

$$\overrightarrow{O'P'} = \hat{\varphi}(\overrightarrow{OP}) = \hat{\varphi}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = x\hat{\varphi}(\mathbf{i}) + y\hat{\varphi}(\mathbf{j}) + \mathrm{z}\hat{\varphi}(\mathbf{k}).$$

Továbbá teljesül a fent említett összefüggések alapján, hogy

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'} = (t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}) + x\hat{\varphi}(\mathbf{i}) + y\hat{\varphi}(\mathbf{j}) + \mathrm{z}\hat{\varphi}(\mathbf{k}).$$

Felhasználva a $\hat{\varphi}(\mathbf{i})$**,** $\hat{\varphi}(\mathbf{j})$ és $\hat{\varphi}(\mathbf{k})$ lineáris kombinációs kifejezéseit kapjuk a következőt:

$$\overrightarrow{OP'} = (t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}) + x(a_{11}\mathbf{i} + a_{21}\mathbf{j} + a_{31}\mathbf{k}) + y(a_{12}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{32}\mathbf{k}) +$$
$$+z(a_{13}\mathbf{i} + a_{23}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + t_1)\mathbf{i} + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + t_2)\mathbf{j} +$$
$$+(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + t_3)\mathbf{k}.$$

Mivel a P' pont $\overrightarrow{OP'}$ helyvektora egyértelműen áll elő az **i**, **j**, **k** bázisvektorok lineáris kombinációjaként, ezért a képpont koordinátáira teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + t_1,$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + t_2,$$
$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + t_3.$$

A fentiek alapján egy tetszőlegesen választott $P(x,y,z)$ pont $P'(x',y',z')$ képének koordinátáit lineáris kifejezésekkel kaphatjuk meg P koordinátáiból. Vegyük észre, hogy a fenti egyenletek felírhatók egyetlen mátrixegyenlettel:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Ezt nevezzük az affinitást leíró mátrixegyenletnek. Mindezek után már kimondható a következő állítás.

1.3.2. Állítás. *Egy $\varphi: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ affin transzformációnál egy tetszőleges $P(x,y,z)$ pont $P' = \varphi(P)$ képének (x',y',z') koordinátáira teljesül az (1.1) mátrixegyenlet.*

Ezt az (1.1) mátrixegyenletet felírhatjuk egy homogenizált alakban is a következőképpen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Megemlíthetjük, hogy a fent szereplő 4×4 -es mátrix determinánsa megegyezik az inhomogén egyenlet $\mathbf{A}$ mátrixának determinánsával.

Ezt követően szeretnénk belátni, hogy az (1.1) mátrixegyenlet mindig meghatároz egy affin transzformációt.

1.3.3. Állítás. *Legyenek adva a $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ számok és egy olyan $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ mátrix, amire fennáll $det\,\mathbf{A} \neq 0$. Tekintsük azt a $\varphi: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ leképezést, amely tetszőleges $P(x,y,z)$ ponthoz azt a $P' = \varphi(P)$ pontot rendeli, melynek koordinátáit a következő mátrixegyenlet határozza meg: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$. Ekkor a φ leképezés egy affinitás.*

Bizonyítás:

Tekintsünk a térben egy S pontot, melynek koordinátáit az (s_1, s_2, s_3) számhármas adja meg. A $P(x,y,z)$ pontot akkor képezi S–be a φ leképezés, ha teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + t_1, \\ s_2 &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + t_2, \\ s_3 &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + t_3. \end{aligned}$$

Ezeket tekintsük az x, y, z ismeretlenekre felírt

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= s_1 - t_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= s_2 - t_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= s_3 - t_3 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszernek. Mivel az ismeretlenek együtthatóiból képzett mátrix determinánsa nem egyenlő nullával, alkalmazhatjuk a Cramer-szabályt, miszerint egyértelműen létezik megoldása az egyenletrendszernek. Ebből már következik, hogy a φ leképezés bijektív. Ezt követően a φ leképezés egyenestartását fogjuk belátni. Ehhez vegyünk egy e egyenest a térben, melyet egyértelműen meghatároz egy $E(e_1, e_2, e_3)$ pontja és egy e-vel párhuzamos $\mathbf{v} = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} + v_3\,\mathbf{k}$ irányvektor. A $P(x,y,z)$ pont akkor van rajta az e egyenesen, ha létezik olyan $\tau \in \mathbb{R}$, amelyre teljesül, hogy $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE} + \tau \cdot \mathbf{v}$. Az ebből nyert $x = e_1 + \tau v_1$,

$y = e_2 + \tau v_2,\ z = e_3 + \tau v_3$ egyenletek adják az e egyenes paraméteres egyenletrendszerét. Vegyük az $E' = \varphi(E)$ pontot, melynek a koordinátái legyenek (e_1', e_2', e_3'). Tegyük fel, hogy P rajta van e-n. Ekkor a következő mátrixegyenletet kapjuk $P'(x', y', z')$ koordinátáira:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Ezek után tekintsük azt a $\boldsymbol{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$ vektort, melynek koordinátái $w_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3,\ w_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3,\ w_3 = a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3$. A fentiek alapján P' képpont koordinátáira fennáll, hogy $x' = e_1' + \tau w_1,\ y' = e_2' + \tau w_2,\ z' = e_3' + \tau w_3$. Eszerint a P' képpont rajta van az E' pontot tartalmazó, $\mathbf{w}$ irányú f egyenesen. Látható, hogy f egyenes bármely pontja az e egyenes egy pontjának φ szerinti képe. Tehát fennáll $\varphi(e) = f$.

Az, hogy a φ leképezés osztóviszonytartó, közvetlen számolással szintén belátható. ■

Megjegyzés: A $\varphi\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ affin transzformáció egy egybevágóság, ha a $\hat{\varphi}$ indukált lineáris leképezést leíró **A** mátrixra teljesül az $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$ összefüggés, amelyben **I** az egységmátrix és $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ az **A** mátrix transzponáltja.

Megjegyzés: A $\varphi\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ affin transzformáció egy hasonlóság, ha a $\hat{\varphi}$ indukált lineáris leképezést leíró **A** mátrixra fennáll az $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} = \lambda^2 \cdot \mathbf{I}$ egyenlőség valamely $\lambda > 0$ számmal. Ekkor a λ szám adja a hasonlóság arányát.

Az alapsíkos affin transzformáció analitikus leírása

A dolgozat 1.2. szakaszában már bevezettük az alapsíkos affin transzformáció fogalmát, és szeretnénk ezt analitikus formában is leírni. Az alapsíkos affin transzformáció irányát meghatározó vektort jelöljük **v**-vel, λ legyen az előjeles arány, σ pedig az alapsík.

A koordináta-rendszert úgy válasszuk meg, hogy az O kezdőpont kerüljön a σ alapsíkra és ez a σ alapsík legyen az $[x, y]$ koordinátasík. (Lásd a *3. ábrát.*) Vegyük az $\mathbf{i} = \overrightarrow{OE_1}$, $\mathbf{j} = \overrightarrow{OE_2}$, $\mathbf{k} = \overrightarrow{OE_3}$ alapvektorokat, melyek közül **i** és **j** benne vannak σ-ban. Világos, hogy a σ-beli $O,\ E_1,\ E_2$ pontok képeire fennáll $O' = O,\ E_1' = E_1,\ E_2' = E_2$. Emiatt az indukált leképezésnél teljesül $\hat{\varphi}(\mathbf{i}) = \mathbf{i}$, $\hat{\varphi}(\mathbf{j}) = \mathbf{j}$. Az **A** mátrix meghatározásához kellene még a $\hat{\varphi}(\mathbf{k}) = \hat{\varphi}\left(\overrightarrow{OE_3}\right) = \overrightarrow{O'E_3'} = \overrightarrow{OE_3'}$ vektor lineáris kombinációs kifejezése.

Az E_3 ponton átmenő **v**-vel párhuzamos egyenes messe a σ síkot a T pontban. Vegyük észre, hogy a $\overrightarrow{TE_3} = \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OE_3}$ párhuzamos a $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ vektorral és harmadik koordinátája 1. Emiatt fennáll a következő összefüggés: $\overrightarrow{TE_3} = \frac{1}{v_3} \cdot \mathbf{v} = \frac{v_1}{v_3} \cdot \mathbf{i} + \frac{v_2}{v_3} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Definíció alapján teljesül $\overrightarrow{TE_3'} = \lambda\overrightarrow{TE_3}$, továbbá $\overrightarrow{E_3E_3'} = \overrightarrow{E_3T} + \overrightarrow{TE_3'} = -\overrightarrow{TE_3} + \lambda\overrightarrow{TE_3} = (\lambda - 1)\overrightarrow{TE_3}$. Emiatt fennáll $\overrightarrow{OE_3'} = \overrightarrow{OE_3} + \overrightarrow{E_3E_3'} = (\lambda - 1)\overrightarrow{TE_3} + \mathbf{k}$.

Felhasználva a $\overrightarrow{TE_3}$ vektorra kapott összefüggést adódik, hogy

$$\overrightarrow{OE_3'} = (\lambda - 1)\left(\frac{v_1}{v_3} \cdot \mathbf{i} + \frac{v_2}{v_3} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k}\right) + \mathbf{k}.$$

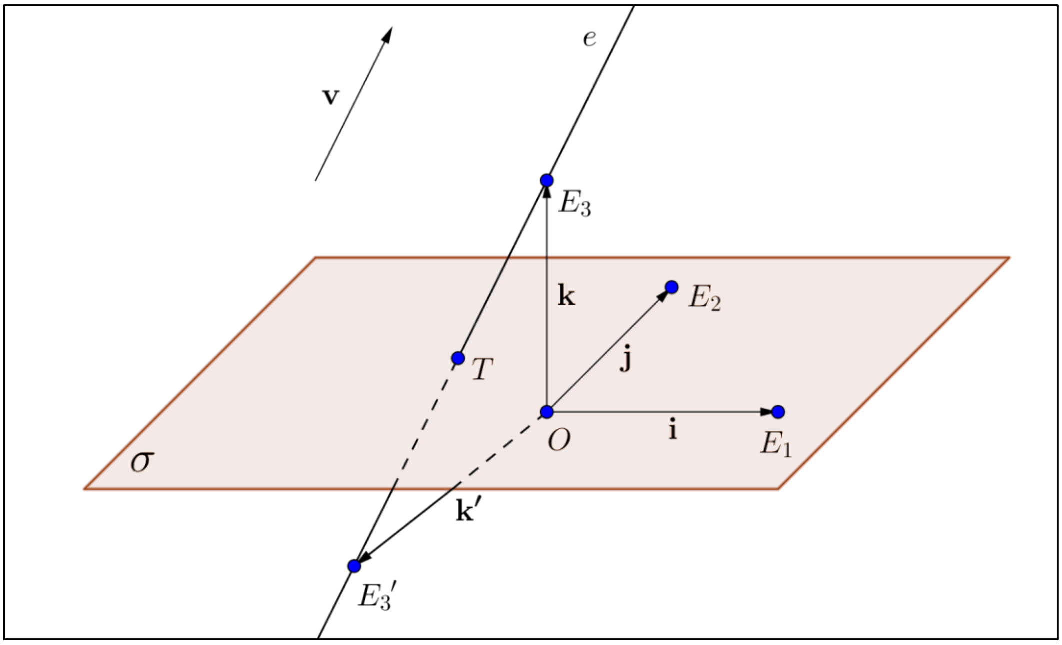
A szorzást kifejtve azt kapjuk, hogy $\overrightarrow{OE_3'} = \frac{(\lambda-1)v_1}{v_3} \cdot \mathbf{i} + \frac{(\lambda-1)v_2}{v_3} \cdot \mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$.

Ezek után már felírhatjuk a $\hat{\varphi}$ indukált lineáris leképezés mátrixát, a következőképpen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{(\lambda-1)v_1}{v_3} \\ 0 & 1 & \dfrac{(\lambda-1)v_2}{v_3} \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Ebből már könnyen felírható az alapsíkos affinitást leíró mátrixegyenlet:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{(\lambda-1)v_1}{v_3} \\ 0 & 1 & \dfrac{(\lambda-1)v_2}{v_3} \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$



3. ábra – Az alapsíkos affin transzformáció és az alapvektorok

Megjegyzés: Amennyiben az alapsíkos affinitás iránya merőleges az alapsíkra, akkor a $\mathbf{v} = \mathbf{k}$ vektort alkalmazzuk. Ez esetben a mátrixunk az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ alakra egyszerűsödik.

A nyírás, mint speciális alapsíkos affin transzformáció

Vegyünk egy $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ $(\mathbf{v} \neq 0)$ vektort, amely párhuzamos a $z = 0$ egyenletű koordinátasíkkal. Tekintsük azt a $\varphi: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ leképezést, mely a tér egy tetszőleges $P(x, y, z)$ pontjához azt a $P' = \varphi(P)$ pontot rendeli, melynek koordinátáit a következő mátrixegyenlet adja meg: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Ez esetben a koordinátákra fennállnak az $x' = x + v_1 z,\ y' = y + v_2 z,\ z' = z$ egyenletek. Az 1.3.3. Állításból következik, hogy ez a φ leképezés egy affin transzformáció.

Világos, hogy φ fixen hagyja a $z = 0$ egyenletű sík pontjait, azaz az $[x, y]$ koordinátasík pontjait. Ha a $P(x, y, z)$ pont nincs a koordinátasíkon, akkor a $P' = \varphi(P)$ képpontra fennáll

$\overrightarrow{PP'} = z\,\mathbf{v}$. Ez a φ transzformáció egy speciális alapsíkos affinitás, mivel bármely az alapsíkra nem illeszkedő pontot a képével összekötő egyenes párhuzamos az alapsíkkal, konkrétan a **v** vektorral.

Ily módon bevezethetjük a következő fogalmat.

1.3.2. Definíció. Nyírásnak nevezzük azt az affin transzformációt, amely fixen hagyja egy σ sík összes pontját és amelynél bármely a síkra nem eső pontot a képével összekötő egyenes párhuzamos egy σ-beli **v** vektorral. A σ síkot mondjuk a nyírás alapsíkjának, a **v** vektor irányát pedig a nyírás irányának.

1.4. Az affin transzformáció meghatározása általános helyzetű pontnégyesekkel

Az alábbiakban azt szeretnénk igazolni, hogy ha a térben adott két általános helyzetű pontnégyes, akkor egy alkalmas affin transzformációval átvihető az első pontnégyes a másodikba.

Megjegyzés: Egy pontnégyest akkor nevezünk általános helyzetűnek, ha a négy adott pont nem illeszkedik ugyanarra a síkra. A P_1, P_2, P_3, P_4 általános helyzetű pontok, mint csúcspontok, meghatároznak a térben egy tetraédert, melyet a következőképpen jelölünk: $T(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

Megjegyzés: A későbbiekben a P_1, P_2, P_3, P_4 pontnégyes által meghatározott tetraéder térfogatát jelölje $V(T(P_1, P_2, P_3, P_4))$.

Az állításunk bizonyításához szükségünk van a következő lemmára. Így ezt bizonyítjuk először.

1.4.1. Lemma. *Legyen adott a térben négy általános helyzetű pont:* $P_r(x_r, y_r, z_r)$ *(r=1,2,3,4). Képezzük ezen pontok koordinátáiból a*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Ezen **P** *kvadratikus mátrix determinánsának az abszolút értéke megegyezik a* $T(P_1, P_2, P_3, P_4)$ *tetraéder térfogatának a hatszorosával, azaz fennáll* $|\,det\,\mathbf{P}\,| = 6 \cdot V(T(P_1, P_2, P_3, P_4))$.

Bizonyítás: Tekintsük azon vektorokat, melyeket az adott pontok a következőképpen határoznak meg: $\mathbf{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{P_1P_3}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{P_1P_4}$. (Lásd a *4. ábrát*.) Ezeket a vektorokat kifejezhetjük az egységvektorok és koordináták segítségével:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k},$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = (x_3 - x_1)\mathbf{i} + (y_3 - y_1)\mathbf{j} + (z_3 - z_1)\mathbf{k},$$

$$\overrightarrow{P_1P_4} = (x_4 - x_1)\mathbf{i} + (y_4 - y_1)\mathbf{j} + (z_4 - z_1)\mathbf{k}.$$

A vektoriális szorzat definíciójából adódik a következő összefüggés:

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \big((y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(y_3 - y_1)\big)\mathbf{i} + ((z_2 - z_1)(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1))\mathbf{j} + ((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1))\mathbf{k}.$$

Ha vesszük a fenti vektoriális szorzat és a $\overrightarrow{P_1P_4}$ skaláris szorzatát, azaz a három vektor vegyes szorzatát, akkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}&\big(\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\big) \cdot \overrightarrow{P_1P_4} = \\ &= (y_2 - y_1)(z_3 - z_1)(x_4 - x_1) - (z_2 - z_1)(y_3 - y_1)(x_4 - x_1) \\ &+ (z_2 - z_1)(x_3 - x_1)(y_4 - y_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1)(y_4 - y_1) \\ &+ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)(z_4 - z_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)(z_4 - z_1).\end{aligned}$$

Tekintsük a P_r pontok koordinátáival meghatározott $\mathbf{P}$ mátrixot. A mátrix determinánsa nem változik meg, ha az első oszlopot kivonjuk a mátrix többi oszlopából. Ily módon az alábbi összefüggés adódik:

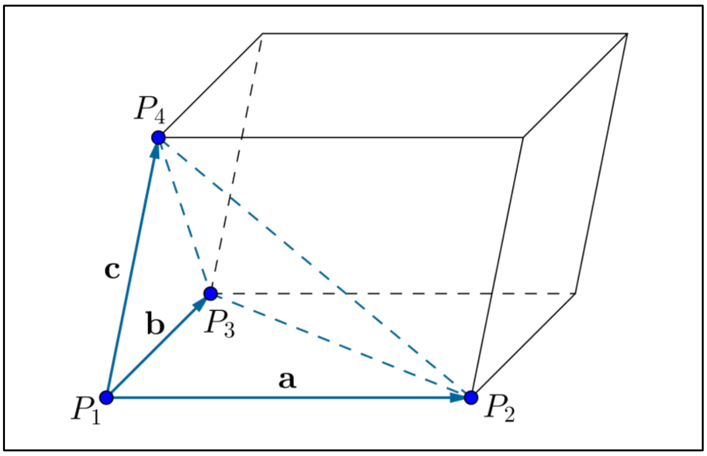
$$det\,\mathbf{P} = det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A negyedik sor alapján kifejtve a determinánst azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}det\,\mathbf{P} = -\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \\ = [-(x_2 - x_1)(y_3 - y_1)(z_4 - z_1) - (x_3 - x_1)(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) \\ - (x_4 - x_1)(y_2 - y_1)(z_3 - z_1) + (x_4 - x_1)(y_3 - y_1)(z_2 - z_1) \\ + (x_2 - x_1)(y_4 - y_1)(z_3 - z_1) + (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)(z_4 - z_1)].\end{aligned}$$

A fentiek alapján fennáll a $det\,\mathbf{P} = -\big(\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\big) \cdot \overrightarrow{P_1P_4}$ összefüggés.

Ismeretes, hogy az **a**, **b**, **c** vektorok vegyes szorzatának abszolút értéke megegyezik az általuk kifeszített parallelepipedon térfogatával. Az is világos, hogy a parallelepipedon térfogata hatszorosa a $T(P_1, P_2, P_3, P_4)$ tetraéder térfogatának. (Lásd a *4. ábrát*.) Ezen megállapításokból már következik, hogy fennáll a $|\,det\,\mathbf{P}\,| = 6 \cdot V(T(P_1, P_2, P_3, P_4))$ egyenlőség. ■



*4. ábra – Az **a, b, c** vektorok által kifeszített parallelepipedon és a $T(P_1, P_2, P_3, P_4)$ tetraéder*

Ezután már kimondhatjuk az affin transzformációkat jellemző alapvető tételünket, mely így hangzik.

1.4.2. Tétel. *Legyen adott az* $\boldsymbol{X}$ *térben két általános helyzetű pontnégyes,* P_1, P_2, P_3, P_4 *és* Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. *Ekkor egyértelműen létezik egy olyan* $\varphi: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ *affinitás, amely az első pontnégyest a másodikba képezi, vagyis amelyre fennáll* $\varphi(P_r) = Q_r$ *(r = 1, 2, 3, 4).*

Bizonyítás:
A téren már rögzítve van egy Descartes-féle koordináta-rendszer. Tekintsük az adott P_1, P_2, P_3, P_4 és Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 pontnégyesek koordinátáiból képzett

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ és } \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \acute{x}_1 & \acute{x}_2 & \acute{x}_3 & \acute{x}_4 \\ \acute{y}_1 & \acute{y}_2 & \acute{y}_3 & \acute{y}_4 \\ \acute{z}_1 & \acute{z}_2 & \acute{z}_3 & \acute{z}_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

négyzetes mátrixokat.

Vegyünk egy $\varphi: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ affinitást és a leíró $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixát, melynek determinánsa nem 0. Világos, hogy a feljebb említett **M** mátrixszal leírt φ affinitás pontosan akkor viszi P_r pontot a Q_r pontba, ha a pontok koordinátáira teljesül az alábbi mátrixegyenlettel leírt összefüggés:

$$\begin{pmatrix} \acute{x}_r \\ \acute{y}_r \\ \acute{z}_r \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy $\varphi(P_r) = Q_r$ (r =1, 2, 3, 4) pontosan akkor teljesül egyszerre, ha igaz az

$$\begin{pmatrix} \acute{x}_1 & \acute{x}_2 & \acute{x}_3 & \acute{x}_4 \\ \acute{y}_1 & \acute{y}_2 & \acute{y}_3 & \acute{y}_4 \\ \acute{z}_1 & \acute{z}_2 & \acute{z}_3 & \acute{z}_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixegyenlet. Azt kellene tehát belátnunk, hogy pontosan egy olyan **M** mátrix van, amellyel az adott **P** és **Q** mátrixokkal teljesül a $\mathbf{Q} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}$ egyenlőség.
Az 1.4.1. Lemmából következik, hogy a P_1, P_2, P_3, P_4 és Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 pontok koordinátáiból képzett **P**, **Q** mátrixok determinánsa nem 0. Emiatt ezek a mátrixok is invertálhatóak. Szorozzuk be a $\mathbf{Q} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}$ mátrixegyenletet jobbról a **P** inverz-mátrixával, vagyis a $\mathbf{P}^{-1}$ mátrixszal. Ekkor a következőt kapjuk: $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{M}$. Eszerint csakis az $\mathbf{M} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ mátrixra igaz, hogy megoldja a fenti egyenletet. Ezzel pedig bebizonyítottuk, hogy egyértelműen létezik olyan affin transzformáció, amely az első pontnégyest a másodikba viszi.■

Példa

Legyenek adottak a $P_1(2,-2,4)$, $P_2(0,1,5)$, $P_3(0,0,2)$, $P_4(0,0,0)$ és a $Q_1(1,1,5)$, $Q_2(-2,4,3)$, $Q_3(4,-3,-1)$, $Q_4(3,2,1)$ pontnégyesek a térben. Számoljuk ki annak a φ affin transzformációnak az **M** mátrixát, mely az első pontnégyest a másodikba viszi.
Ehhez szükségünk van a pontok koordinátáiból kiszámított **P** és **Q** négyzetes mátrixokra:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\-2&1&0&0\\4&5&2&0\\1&1&1&1\end{pmatrix},\ \mathbf{Q}=\begin{pmatrix}1&-2&4&3\\1&4&-3&2\\5&3&-1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Az 1.4.2. Tétel bizonyításában láthattuk, hogy a φ affinitást az az $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&t_1\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&t_2\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&t_3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ mátrix határozza meg, melyre teljesül, hogy

$$\begin{pmatrix}1&-2&4&3\\1&4&-3&2\\5&3&-1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&t_1\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&t_2\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&t_3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0&0\\-2&1&0&0\\4&5&2&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Azaz az **M** mátrixot megkapjuk, ha **Q** mátrixot összeszorozzuk **P** mátrix inverzével. A **P** mátrixunk egy úgynevezett alsó háromszög mátrix, aminek a determinánsa könnyen kiszámolható: $det\,\mathbf{P}=4$. Mivel nem nulla, így létezik az inverze, melyet az ismeretes Gauss-Jordan eliminációval levezetve könnyen megkaphatunk:

$$\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\1&1&0&0\\-\frac{7}{2}&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}&0\\2&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}.$$

Emiatt igaz $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1&-2&4&3\\1&4&-3&2\\5&3&-1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\1&1&0&0\\-\frac{7}{2}&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}&0\\2&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{19}{2}&-\frac{15}{2}&\frac{1}{2}&3\\19&\frac{29}{2}&-\frac{5}{2}&2\\11&7&-1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$

1.5. Az affin transzformáció térfogati arányszáma

Az alábbiakban bevezetjük egy φ affin transzformáció térfogati arányszámát illetve megvizsgáljuk, hogy mikor térfogattartó egy affinitás.

Ismeretes, hogy az affin transzformáció síkot síkba, szakaszt szakaszba képez. Ebből már következik, hogy egy féltér affin képe is egy féltér, továbbá konvex alakzat affin képe is konvex. Mivel egy konvex poliéder előáll véges sok féltér metszeteként, belátható, hogy az affin transzformáció konvex poliédert konvex poliéderbe képez. Speciálisan egy tetraédernek az affin képe szintén egy tetraéder.

Tekintsünk a térben egy $\varphi\colon \boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}$ affin transzformációt, melyet a pontok koordinátáira vonatkozóan az (1.2) mátrixegyenlet ír le. Egy T tetraédernél $V(T)$ jelölje a tetraéder térfogatát, $T'=\varphi(T)$ pedig a tetraéder φ szerinti képét.

1.5.1. Állítás. *Bármely T tetraéder esetén a T' képtetraéder térfogatára teljesül a* $V(T') = |\,det\,\mathbf{A}\,| \cdot V(T)$ *összefüggés.*

Bizonyítás:
Vegyünk egy T tetraédert, melyet a P_1, P_2, P_3, P_4 csúcspontok határoznak meg. Az adott φ affin transzformáció képezze ezeket a Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 pontokba. Ekkor φ a T tetraédert a Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 csúcsokkal meghatározott T' tetraéderbe képezi. Vegyük a φ affinitást leíró **M** mátrixot. Ekkor a csúcspontok koordinátáiból képzett 4×4-es **P** és **Q** mátrixokkal teljesül a $\mathbf{Q} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}$ mátrixegyenlet. Ha alkalmazzuk a determinánsok szorzástételét, azt kapjuk, hogy $det\,\mathbf{Q} = det\,\mathbf{M} \cdot det\,\mathbf{P}$. Mivel **M** és **A** mátrix determinánsa megegyezik, ezért $|det\,\mathbf{Q}| = |det\,\mathbf{A}| \cdot |det\,\mathbf{P}|$. Továbbá az 1.4.1. Lemma kimondja, hogy $|det\,\mathbf{P}| = 6 \cdot V(T)$ és ugyanígy $|det\,\mathbf{Q}| = 6 \cdot V(T')$. Ha ezeket behelyettesítjük az egyenletünkbe, kapjuk a $6 \cdot V(T') = |\,det\,\mathbf{A}\,| \cdot 6 \cdot V(T)$ összefüggést. Ezt hattal leosztva éppen a bebizonyítani kívánt összefüggéshez jutunk.■

Egy konvex poliéder felbontható véges sok tetraéderre, melyeknek páronként nincs közös belső pontjuk. Ily módon a poliéder térfogata előáll a felbontásban szereplő tetraéderek térfogatainak összegeként. Emiatt igaz a következő állítás is a tekintett $\varphi: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ affin transzformációra.

1.5.1. Következmény. *Bármely* Ω *konvex poliéder esetén a poliéder* $\Omega' = \varphi(\Omega)$ *képének térfogatára teljesül a* $V(\Omega') = |\,det\,\mathbf{A}\,| \cdot V(\Omega)$ *összefüggés.*

Az előző állításokból adódik még a következő eredmény is.

1.5.2. Következmény. *Bármely* K *korlátos konvex test esetén a test* $\mathrm{K}' = \varphi(\mathrm{K})$ *képének térfogatára teljesül a* $V(\mathrm{K}') = |\,det\,\mathbf{A}\,| \cdot V(\mathrm{K})$ *összefüggés.*

1.5.1. Definíció. Egy $\varphi: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ affin transzformáció térfogati arányszámának mondjuk a $\hat{\varphi}$ indukált lineáris leképezést leíró **A** mátrix determinánsának az abszolút értékét, azaz a $|det\,\mathbf{A}|$ pozitív számot.

Megjegyzés: Világos, hogy $|\,det\,\mathbf{A}\,|$ értéke nem függ a koordináta-rendszer megválasztásától.

1.5.2. Definíció. Egy $\varphi: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ affin transzformációt ekviaffinnak mondunk, ha a térfogati arányszáma az 1 értéket veszi fel.

Megjegyzés: Az ekviaffin transzformációk részcsoportot alkotnak az affin transzformációk *Aff(**X**)* csoportjában. Ez a részcsoport tartalmazza az egybevágóságok *Iso(**X**)* csoportját.

2. fejezet
A másodrendű felületek és az affin transzformációk kapcsolata

2.1. Másodrendű felületek fogalma

A továbbiakban feltesszük, hogy a térben rögzítve van egy Descartes-féle koordinátarendszer, melynek kezdőpontja O és alapvektorai az **i, j, k** ortonormált vektorok**.** Ily módon tetszőleges P ponthoz hozzá lehet rendelni az (x_P, y_P, z_P) a koordináta-hármast.

Elsőként idézzük fel, hogy mit értünk egy koordináta-egyenlettel leírt alakzaton.
Legyen adott egy $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ folytonos valós függvény. Az $f(x, y, z) = 0$ egyenlettel leírt alakzaton az $\mathcal{A} = \{P \in \boldsymbol{X} : \ f(x_P, y_P, z_P) = 0\}$ ponthalmazt értjük.
Ez esetben az $f(x, y, z) = 0$ egyenletet az $\mathcal{A}$ alakzat egyik egyenletének mondjuk.

Világos, hogy egyazon alakzat leírható különböző egyenletekkel. Ha veszünk egy $\lambda \neq 0$ számot, akkor a $\lambda \cdot f(x, y, z) = 0$ egyenlet ugyanazt az alakzatot írja le, mint az $f(x, y, z) = 0$ egyenlet.

Azokat a térbeli alakzatokat hívjuk másodrendű felületeknek, melyek leírhatóak olyan egyenlettel, amelyben a koordináták csak másodfokon és első fokon szerepelnek, továbbá a másodfokú tagok együtthatói közül legalább egy nem egyenlő nullával.

2.1.1. Definíció. Legyenek adottak a $c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}, d_1, d_2, d_3$ és e valós számok, melyekre teljesül a következő összefüggés:
$(c_{11})^2 + (c_{22})^2 + (c_{33})^2 + (c_{12})^2 + (c_{13})^2 + (c_{23})^2 > 0$. Ekkor az

$$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 + 2c_{12}xy + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + 2d_1x + 2d_2y + 2d_3z + e = 0$$

egyenlettel leírt alakzatot egy másodrendű felületnek mondjuk.

Megjegyzés: Vezessük be a következő jelöléseket: $c_{21} = c_{12},\ c_{31} = c_{13},\ c_{32} = c_{23}$. Ekkor a fenti egyenlet leírható egy mátrixegyenlet formájában is az alábbi módon:

$$(x, y, z, 1)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & d_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \qquad \text{(MRFE)}$$

A továbbiakban jelölje **C** a másodfokú tagok együtthatóiból képzett 3×3-as mátrixot, **D** pedig a fenti (MRFE) egyenletben szereplő 4×4-es szimmetrikus mátrixot.

2.1.2. Definíció. Egy térbeli $\mathcal{F}$ alakzatot másodrendű felületnek mondunk, ha megadhatóak hozzá olyan c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}, d_1, d_2, d_3, e együtthatók, hogy az általuk meghatározott (MRFE) egyenlet éppen az $\mathcal{F}$ ponthalmazt írja le.

Megjegyzés: Mint ismeretes, a lineáris koordináta-egyenletek síkokat írnak le. Vegyük az $a_1x + b_1y + c_1z + e_1 = 0$ és $a_2x + b_2y + c_2z + e_2 = 0$ egyenleteket, amelyekben a koordináták együtthatói közül legalább egy nem 0. Ezek az egyenletek írják le a ρ és σ síkokat. Tekintsük az $(a_1x + b_1y + c_1z + e_1) \cdot (a_2x + b_2y + c_2z + e_2) = 0$ egyenlettel leírt $\mathcal{F}$

alakzatot. Könnyű belátni, hogy az egyenlet által leírt $\mathcal{F}$ másodrendű felület megegyezik a két sík uniójával, azaz fennáll az $\mathcal{F} = \rho \cup \sigma$. Eszerint két metsző vagy párhuzamos sík uniója is egy másodrendű felületet ad, illetve egy sík is tekinthető másodrendű felületnek.

Megjegyzés: Amennyiben a ρ és σ síkok metszőek, akkor az $(a_1x + b_1y + c_1z + e_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z + e_2)^2 = 0$ egyenlettel leírt másodrendű felület megegyezik a két sík metszésvonalával. Eszerint az egyenesek is másodrendű felületeknek tekinthetőek a 2.1.2. Definíció alapján.

Megjegyzés: Tekintsük az $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ egyenletet. Ezt az egyenletet a tér egyetlen pontjának a koordinátái sem elégítik ki, emiatt az egyenlet által leírt alakzat az $\emptyset$ üres halmaz. Vegyünk egy $Q\ (q_1, q_2, q_3)$ pontot. Látható, hogy az $(x - q_1)^2 + (y - q_2)^2 + (z - q_3)^2 = 0$ másodfokú egyenletet csakis a Q pont koordinátái elégítik ki.

A továbbiakban a másodrendű felületeknél megkülönböztetjük egymástól a nem elfajuló és az elfajuló felületeket.

2.1.3. Definíció. Az (MRFE) egyenlettel leírt másodrendű felületet nem elfajulónak mondjuk, ha nem üres halmaz és az együtthatókból képzett **D** mátrix determinánsa nem nulla.

2.2. Másodrendű felületek származtatása

Általánosságban elmondható, hogy úgy is kaphatunk másodrendű felületet, ha egy másodrendű görbét megforgatunk valamely szimmetriatengelye körül, majd egy megfelelő merőleges alapsíkos affinitást alkalmazunk a kapott forgásfelületre.

Másodrendű görbe forgatása az egyik szimmetriatengelye körül

Az alábbiak során azt mutatjuk meg, hogy amennyiben egy másodrendű görbét megforgatunk az egyik szimmetriatengelye körül, akkor egy másodrendű felületet kapunk. Vegyünk egy kétváltozós $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos valós függvényt. A $z = 0$ és $G(x, y^2) = 0$ egyenletekkel leírt ponthalmazon a $\mathcal{G} = \{P \in \boldsymbol{X} : G(x_P, (y_P)^2) = 0,\ z_P = 0\}$ alakzatot értjük.

Az alább leírt tétel bizonyítása megtalálható a [2] tankönyv 50.3. alfejezetében.

2.2.1. Tétel. *Ha vesszük a $z = 0$ koordinátasík $G(x, y^2) = 0$ egyenletű alakzatát és azt megforgatjuk az x koordinátatengely körül, akkor a forgatással nyert alakzatot a $G(x, y^2 + z^2) = 0$ egyenlet írja le.*

2.1. Példa. Vegyük az a, b pozitív számokat és a $G(u, v) = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v}{b^2} - 1$ kifejezéssel leírt G függvényt. Világos, hogy a $G(x, y^2) = 0$ egyenletnek az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ egyenlet felel meg, amely egy ellipszis kanonikus egyenlete. A fenti tétel alapján, ha ezt megforgatjuk az *x* tengely körül, akkor a kapott forgásfelületet az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} - 1 = 0$ egyenlet írja le. A kapott forgásfelület egy másodrendű felület, melyet forgásellipszoidnak mondunk.

2.2. Példa. Tekintsük most a $G(u, v) = \frac{u}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} - 1$ kifejezéssel leírt G függvényt. A $G(x^2, z) = 0$ egyenletnek az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$ egyenlet felel meg, amely egy hiperbola kanonikus egyenlete az $y = 0$ síkban. A fenti tétel alapján ha ezt megforgatjuk a z tengely körül akkor a kapott forgásfelületet az $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$ egyenlet írja le. A kapott forgásfelület egy másodrendű felület, melyet egyköpenyű forgáshiperboloidnak mondunk.

Egy felület merőleges alapsíkos affinitással nyert képe

A továbbiakban azt tárgyaljuk, hogy amennyiben egy térbeli alakzat leírható az $f(x, y, z) = 0$ egyenlettel, akkor az alapsíkos merőleges affinitással nyert képének mi lesz az egyenlete.
Az alábbi tétel bizonyítása szintén megtalálható a [2] tankönyv 50.3. alfejezetében.

2.2.2. Tétel. *Legyen adott egy $f(x, y, z) = 0$ egyenlettel megadott alakzat. Vegyük azt a merőleges alapsíkos affinitást, melynek $z = 0$ sík az alapsíkja, λ nem nulla valós szám pedig az aránya. Ha ezt a merőleges affinitást alkalmazzuk az $f(x, y, z) = 0$ egyenlettel leírt alakzatra, akkor az*

$$f\left(x, y, \frac{z}{\lambda}\right) = 0$$

egyenletű alakzatot kapjuk.

2.3. Példa. Az $y = 0$, és $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$ egyenletekkel leírt hiperbolát forgassuk most meg az x tengely körül. Ekkor az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2+y^2}{b^2} - 1 = 0$ egyenletű kétköpenyű forgáshiperboloidhoz jutunk, melyet jelöljön $\mathcal{H}$. Tekintsük az $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2+y^2}{b^2} - 1$ kifejezéssel meghatározott $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ folytonos valós függvényt. Tehát a $\mathcal{H}$ forgáshiperboloidot az $f(x, y, z) = 0$ egyenlet írja le.

Válasszunk egy c $(c \neq b)$ pozitív valós számot. Vegyük azt a φ merőleges alapsíkos affinitást, melynek a $z = 0$ egyenletű koordinátasík az alapsíkja, $\lambda = \frac{c}{b}$ az aránya. Ha a fenti tételt alkalmazzuk, akkor a $\mathcal{H}$ kétköpenyű forgáshiperboloid $\mathcal{H}' = \varphi(\mathcal{H})$ képét az

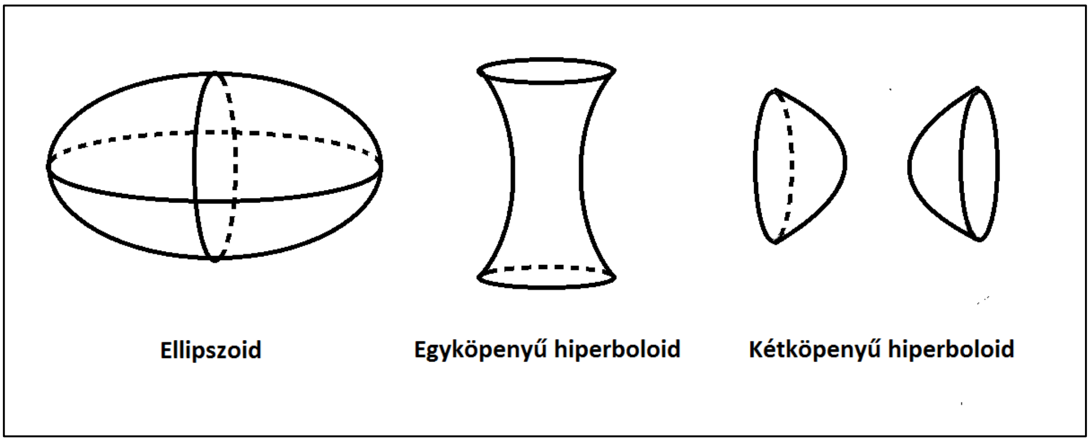
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{b^2}\left(\frac{z}{\frac{c}{b}}\right)^2 - 1 = 0$$

egyenlet írja le. Ez leegyszerűsítés után az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ egyenletet adja. Mely szintén egy kétköpenyű hiperboloidot ír le, de ez már nem lesz forgásfelület.

Megjegyzés: Világos, hogy az x, y, z koordináták szerepei felcserélhetőek a 2.2.1. és 2.2.2. Tételben.

A másodrendű görbéknek a szimmetriatengely körüli forgatásával majd pedig a merőleges tengelyes affinitás alkalmazásával konstruálhatóak meg a következő másodrendű felületek: *ellipszoid, egyköpenyű hiperboloid, kétköpenyű hiperboloid, elliptikus paraboloid.* (Lásd az 5. és 6. szemléltető ábrát.)

Forgatással és merőleges affinitással származtatható még egy másodrendű felület. Vegyünk a térben két metsző egyenest, melyek nem merőlegesek egymásra. Ha az elsőt elforgatjuk a második körül egy forgáskúpot kapunk. A merőleges affinitás alapsíkjának egy olyan síkot veszünk, amely tartalmazza a forgáskúp tengelyét. Ha a forgáskúpra elvégezzük az alapsíkos affinitást, akkor egy *másodrendű kúpot* kapunk. (Lásd a *6. ábrát.*)



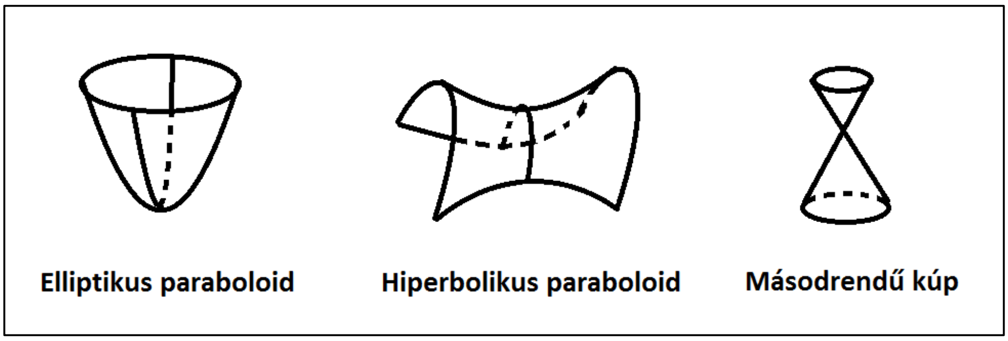
5. ábra – Másodrendű felületek 1.

A paraboloidok konstrukciója

A fent említett eljárás alól kivételt képez a hiperbolikus paraboloid (nyeregfelület) előállítása. Ezt a másodrendű felületet a következőképpen származtathatjuk.

Tekintsünk a térben két egymásra merőleges síkú és ellentétes tengelyirányú parabolát, melyeket jelöljön $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$. A $\mathcal{P}_1$ parabola legyen benne az $y = 0$ egyenletű koordinátasíkban és írja le az $\frac{x^2}{a^2} - 2z = 0$ egyenlet, a $\mathcal{P}_2$ parabola pedig legyen benne az $x = 0$ koordinátasíkban és írja le az $\frac{y^2}{b^2} + 2z = 0$ egyenlet. (Az egyenletekben szereplő a és b valamely pozitív valós számok.) Világos, hogy mindkét parabolának a z koordinátatengely adja a szimmetriatengelyét, de a közös O csúcspontból a fókuszokba mutató tengelyirányok ellnetétesek. Az első $\mathcal{P}_1$ parabolát folytonosan toljuk el a másodikon oly módon, hogy tengelypontja a $\mathcal{P}_2$ parabolát írja le (síkjának állása pedig változatlan legyen). Ekkor a $\mathcal{P}_1$ parabola eltolásaival nyert parabolák egy felületet határoznak meg. Belátható, hogy ezt a felületet az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$ egyenlet írja le. Az így nyert másodrendű felületet *hiperbolikus paraboloidnak* mondjuk. (Lásd a *6. ábrát.*)

Az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$ egyenletű hiperbolikus paraboloidnak csupán a z tengely a szimmetriatengelye. A felület elnevezése arra utal, hogy amennyiben a felületet a szimmetriatengelyre merőleges síkokkal metsszük el, akkor a síkmetszetek hiperbolák lesznek. (Kivételt képez a $z = 0$ koordinátasíkkal való metszés, amely két egymást metsző egyenest ad.)



6. ábra – Másodrendű felületek 2.

A fent megadott eltolási eljárással az elliptikus paraboloidot is meg lehet konstruálni. Ehhez két olyan merőleges síkú $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ parabolát kell venni, amelyek tengelyiránya megegyezik. Tekintsük az $y = 0$ és $\frac{x^2}{a^2} - 2z = 0$ egyenletekkel leírt $\mathcal{P}_1$ parabolát, továbbá az $x = 0$,

$\frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$ egyenletekkel meghatározott $\mathcal{P}_2$ parabolát. Ha az első parabolát eltoljuk a második mentén úgy, hogy a csúcspontja a $\mathcal{P}_2$ parabolát írja le, akkor egy olyan felületet nyerünk, melynek egyenlete $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$. Ezt a másodrendű felületet nevezik elliptikus paraboloidnak. Ennél is az egyedüli szimmetriatengely a z koordinátatengely.

Fontos észrevenni, hogy a fenti elliptikus paraboloid benne van a $z = 0$ egyenletű síkkal határolt egyik féltérben.

Megjegyzés: Az egyenletek alapján belátható, hogy az eddig tárgyalt másodrendű felületek, a másodrendű kúp kivételével, nem elfajulóak.

2.2.1. Definíció. Egy másodrendű felületet centrálisan szimmetrikusnak mondunk, ha van a térben olyan C pont, hogy az arra történő tükrözés a felületet önmagába képezi. A C pontot a felület centrumának (vagy középpontjának) nevezik.

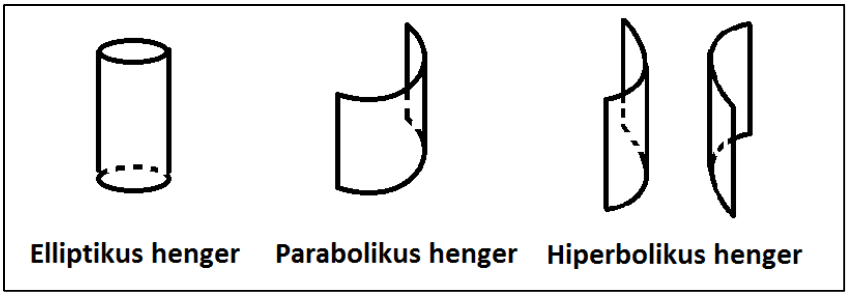
Megjegyzés: Látható, hogy az eddig tárgyalt nem elfajuló másodrendű felületek közül csupán a paraboloidok nem centrálisan szimmetrikusak. Az elliptikus paraboloidnak és a hiperbolikus paraboloidnak csak egyetlen szimmetriatengelye van, a fenti példáknál ez a z koordinátatengely.

A másodrendű hengerfelületek származtatása

A továbbiakban röviden tárgyaljuk a másodrendű hengerfelületeket, melyek elfajuló másodrendű felületek.

Egy felületet hengerfelületnek szokás mondani, ha bármely pontján áthalad egy adott iránnyal párhuzamos egyenes. Ezeket az egymással párhuzamos egyeneseket nevezik a hengerfelület alkotóinak.

A $z = 0$ egyenletű koordinátasíkban vegyünk egy nem elfajuló $\mathcal{G}$ másodrendű görbét, amely lehet ellipszis, hiperbola, vagy parabola. Ezt a görbét írja le a térben a $G(x, y) = 0$ másodfokú egyenlet és a $z = 0$ egyenlet. Vegyük az összes olyan egyenest, amelynek van közös pontja $\mathcal{G}$-vel és párhuzamos a z koordinátatengellyel. Ezen egyenesek uniója egy hengerfelületet ad, amelyet jelöljön $\mathcal{F}$. Világos, hogy egy $P(x, y, z)$ pont akkor van rajta az $\mathcal{F}$ felületen, ha a $z = 0$ egyenletű koordinátasíkra eső $P'(x, y, 0)$ merőleges vetülete rajta van a $\mathcal{G}$ görbén. Ebből már adódik, hogy a térbeli koordinátákra nézve a $G(x, y) = 0$ másodfokú egyenlet írja le az $\mathcal{F}$ felületet, tehát az $\mathcal{F}$ is egy másodrendű felület.



7. ábra – Másodrendű hengerfelületek

A $\mathcal{G}$ másodrendű görbét mondják vezérgörbének. Ha a kezdeti másodrendű görbénk egy ellipszis, akkor *elliptikus hengert*, ha hiperbola, akkor *hiperbolikus hengert*, ha pedig parabola, akkor *parabolikus hengert* kapunk. (Lásd a *7. ábrát.*)

Megjegyzés: Korábban már utaltunk rá, hogy a síkpárok, a síkok, az egyenesek, a pontok és az üres halmaz is a másodrendű felületek közé sorolhatóak a 2.1.2. Definíció alapján.

2.3. A másodrendű felületek affin képe

Ebben az alfejezetben azt mutatjuk meg, hogy egy affinitás másodrendű felületet másodrendű felületbe visz.

2.3.1. Tétel. *Másodrendű felület affin transzformációval nyert képe is egy másodrendű felület.*

Bizonyítás:

Vegyünk egy $\mathcal{F}$ másodrendű felületet, melynek egyenlete legyen $(x, y, z, 1) \cdot \mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$

Legyen adott egy $\varphi: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ affin transzformáció, melyet a koordinátákra vonatkozóan az $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ homogenizált mátrixegyenlet ír le. Az első fejezet tárgyalásának megfelelően alkalmazzuk az $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ jelölést. Vegyük ezen $\mathbf{M}$ mátrix inverzét, melyet jelöljön $\mathbf{N}$. Szorozzuk be balról az $\mathbf{N}$ mátrixszal a fenti egyenletet. Ekkor azt kapjuk, hogy $\mathbf{N} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$. Ha a mátrixos összefüggést transzponáljuk, akkor az $(x', y', z', 1) \cdot \mathbf{N}^{\mathrm{T}} = (x, y, z, 1)$ egyenlethez jutunk. Most helyettesítsük be ezeket a kifejezéseket az $\mathcal{F}$ másodrendű felület egyenletébe. Ily módon kapjuk az

$$(x', y', z', 1) \cdot \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{N} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{(KFE)}$$

egyenletet. Vegyük észre, hogy egy P pont koordinátái, akkor elégítik ki az $\mathcal{F}$ másodrendű felület (MRFE) egyenletét, ha a $P' = \varphi(P)$ képpont (x', y', z') koordinátái eleget tesznek a (KFE) egyenletnek. Eszerint az $\mathcal{F}$ felület $\mathcal{F}' = \varphi(\mathcal{F})$ képét az $(x, y, z, 1) \cdot \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{N} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ egyenlet írja le az adott koordináta-rendszerben. Ha alkalmazzuk a $\widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{N}$ mátrixot, akkor ez felírható az $(x, y, z, 1) \cdot \widetilde{\mathbf{D}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ formában. Látható tehát, hogy az $\mathcal{F}' = \varphi(\mathcal{F})$ képalakzat is egy másodrendű felület.■

Megjegyzés: Mivel $det\, \mathbf{M}$ értéke nem egyenlő nullával, ezért fennáll $det\, \mathbf{N} \neq 0$ is. Emiatt az előző bizonyításban szereplő $\mathbf{D}$ és $\widetilde{\mathbf{D}}$ mátrixok determinánsa vagy egyaránt 0, vagy pedig egyaránt nem egyenlő nullával. Ebből már következik, hogy az affin transzformáció nem elfajuló másodrendű felületet nem elfajuló másodrendű felületbe, elfajulót pedig elfajulóba képez.

Megjegyzés: Belátható az is, hogy a térbeli affin transzformáció egy másodrendű síkgörbét egy másodrendű síkgörbébe képez.

Mivel az affin transzformáció megőrzi az osztóviszonyt, az affinitás egy szakasz felezőpontját a képszakasz felezőpontjába viszi. Emiatt igaz a következő állítás is.

2.3.2. Állítás. *Legyen adott egy olyan $\mathcal{F}$ másodrendű felület, amely centrálisan szimmetrikus és a C pont egy centruma. Vegyünk egy $\varphi: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ affin transzformációt. Ekkor a $\varphi(\mathcal{F})$ képfelület is centrálisan szimmetrikus és a $C' = \varphi(C)$ pont egy középpontja.*

Megjegyzés: Az affin transzformáció általában nem tartja meg a szimmetriatengelyt.

2.4. Másodrendű felületek kanonikus egyenletei

Az eddigiek során a transzformációkat és a másodrendű felületeket rendre egy rögzített derékszögű koordináta-rendszerben vizsgáltuk. Azonban lehetőség van arra, hogy az adott $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ koordináta-rendszerről áttérjünk egy új koordináta-rendszerre, melynek kezdőpontja O' és élvektorai az ortonormált $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ vektorok.
Ha veszünk egy tetszőleges P pontot, akkor annak új koordinátái az $\overrightarrow{O'P} = x'\,\mathbf{i}' + y'\,\mathbf{j}' + z'\,\mathbf{k}'$ lineáris kombinációban szereplő együtthatók lesznek. Az új x', y', z' koordinátákat lineáris kifejezésekkel kaphatjuk meg a régi x, y, z koordinátákból. Ugyancsak lineáris egyenletekkel lehet kifejezni a régi koordinátákat az újakból. A térbeli koordináta-transzformációk részletesen tárgyalva vannak a [2] tankönyv 34. és 51. paragrafusaiban. Azt célszerű megjegyezni, hogy ha vesszük a koordinátákra vonatkozó

$$x = b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}z' + t_1,$$
$$y = b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}z' + t_2,$$
$$z = b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}z' + t_3$$

lineáris egyenleteket, akkor az együtthatókból képzett $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$ négyzetes mátrix ortogonális.
Ha egy másodrendű felületet az (MRFE) egyenlet ír le, akkor az új koordinátákra vonatkozó egyenlethez jutunk, ha az x, y, z helyébe a fenti kifejezéseket írjuk. Az új egyenlet is felírható mátrixegyenlet formájában. Ez a mátrixegyenlet megfelel a (KFE) összefüggésnek, amelyben az $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & t_1 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & t_2 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix szerepel. Látható, hogy az új egyenlet is másodfokú lesz az x', y', z' koordinátákra nézve. A koordináta-transzformációval az a célunk, hogy az $\mathcal{F}$ másodrendű felület egyszerűbb alakot öltsön.

Az alábbi tétel a másodrendű felületek kanonikus egyenletére vonatkozik. A tétel részletes bizonyítása az [2] tankönyv 51. paragrafusában található meg, a tétel konkrét kimondására pedig a [2] tankönyv 575– 576. oldalain kerül sor.

2.4.1. Tétel. *Legyen adott egy $\mathcal{F}$ másodrendű felület az (MRFE) egyenlettel. Az új derékszögű koordináta-rendszer O' kezdőpontjának és $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ alapvektorainak alkalmas megválasztásával, továbbá egy megfelelő λ $(\lambda \neq 0)$ konstanssal történő beszorzással elérhető, hogy abban az $\mathcal{F}$ felületet az alább felsorolt kanonikus egyenletek egyike írja le. Az egyenletekben szereplő a, b, c paraméterek pozitív valós számokat jelölnek.*

(2.1) $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}+\frac{(z')^2}{c^2}-1=0$ (ellipszoid),

(2.2) $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}-\frac{(z')^2}{c^2}-1=0$ (egyköpenyű hiperboloid),

(2.3) $\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}-\frac{(z')^2}{c^2}-1=0$ (kétköpenyű hiperboloid),

(2.4) $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}-2z'=0$ (elliptikus paraboloid),

(2.5) $\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}-2z'=0$ (hiperbolikus paraboloid),

(2.6) $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}-(z')^2=0$ (másodrendű kúp),

(2.7) $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}-1=0$ (elliptikus henger),

(2.8) $\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}-1=0$ (hiperbolikus henger),

(2.9) $\frac{(x')^2}{a^2}-2y'=0$ (parabolikus henger),

(2.10) $\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}=0$ (metsző síkpár),

(2.11) $\frac{(x')^2}{a^2}-1=0$ (párhuzamos síkpár),

(2.12) $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}+\frac{(z')^2}{c^2}=0$ (egyetlen pont),

(2.13) $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=0$ (egyetlen egyenes),

(2.14) $\frac{(x')^2}{a^2}=0$ (egyetlen sík),

(2.15) $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}+\frac{(z')^2}{c^2}+1=0$ (üres halmaz),

(2.16) $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}+1=0$ (üres halmaz),

(2.17) $\frac{(x')^2}{a^2}+1=0$ (üres halmaz).

2.5. A másodrendű felületek affin osztályozása

Az előző részben felírt 17 kanonikus egyenlet alapján 15 különböző osztályba lehet sorolni a másodrendű felületeket. Ezek a következők: az *ellipszoidok* osztálya, az *egyköpenyű hiperboloidok* osztálya, a *kétköpenyű hiperboloidok* osztálya, az *elliptikus paraboloidok* osztálya, a *hiperbolikus paraboloidok* osztálya, a *másodrendű kúpok* osztálya, az *elliptikus hengerek* osztálya, a *hiperbolikus hengerek* osztálya, a *parabolikus hengerek* osztálya, a *metsző síkpárok* osztálya, a *párhuzamos síkpárok* osztálya, a *síkok* osztálya, az *egyenesek* osztálya, a *pontok* osztálya és az *üres halmaz*.

Ha veszünk egy hasonlósági transzformációt, akkor az gömböt mindig gömbbe képez. Világos tehát, hogy két ellipszoidot általában nem lehet egymásba vinni hasonlósággal. Azt mondhatjuk, hogy az ellipszoidok a hasonlóságokra nézve már végtelen sok osztályt alkotnak. Ugyanez vonatkozik az egyköpenyű és a kétköpenyű hiperboloidokra is.

A célunk most annak megmutatása, hogy ha a kanonikus egyenleteik alapján két másodrendű felületet egyazon osztályba soroltunk, akkor mindig van olyan affin transzformáció, amely az első felületet a másodikba képezi. Ehhez felhasználjuk a következő állítást.

2.5.1. Állítás: *A térben legyen adott két koordináta-rendszer* $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$ *és* $(O',\ \mathbf{i}',\ \mathbf{j}',\ \mathbf{k}')$. *Valamely* $a,\ b,\ c$ *és* $\tilde{a},\ \tilde{b},\ \tilde{c}$ *pozitív számokat véve tekintsük azon* $A,\ B,\ C$ *és* $A',\ B',\ C'$ *pontokat, melyek helyvektoraira fennáll* $\overrightarrow{OA} = a\,\mathbf{i}$, $\overrightarrow{OB} = b\,\mathbf{j}$, $\overrightarrow{OC} = c\,\mathbf{k}$, *illetve* $\overrightarrow{O'A'} = \tilde{a}\,\mathbf{i}'$, $\overrightarrow{O'B'} = \tilde{b}\,\mathbf{j}'$, $\overrightarrow{O'C'} = \tilde{c}\,\mathbf{k}'$. *Legyen* $\varphi\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ *azon affin transzformáció, amely az* O, A, B, C *pontnégyest az* O', A', B', C' *pontnégyesbe képezi.*
(1) Ha veszünk egy tetszőleges P *pontot és annak a* $P' = \varphi(P)$ *képét, akkor a pontoknak az* $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ *és* $\overrightarrow{O'P'} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$ *helyvektorokkal megadott koordinátáira teljesül* $x' = \dfrac{\tilde{a}x}{a}$, $y' = \dfrac{\tilde{b}y}{b}$, $z' = \dfrac{\tilde{c}z}{c}$.
(2) Ha egy $\mathcal{F}$ *másodrendű felületet az* $(O, \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$ *koordináta-rendszerben az* $f(x,y,z) = 0$ *egyenlet ír le, akkor az* $\mathcal{F}' = \varphi(\mathcal{F})$ *képfelületet az* $f\left(\dfrac{ax'}{\tilde{a}}, \dfrac{by'}{\tilde{b}}, \dfrac{cz'}{\tilde{c}}\right) = 0$ *egyenlet fogja leírni.*

Bizonyítás:
(1) Alkalmazzuk a $\varphi\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ affinitás által indukált $\hat{\varphi}\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ leképezést. Erre fennállnak a $\hat{\varphi}(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{O'A'}$, $\hat{\varphi}(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{O'B'}$, $\hat{\varphi}(\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{O'C'}$ összefüggések. Ezen egyenlőségekből adódik, hogy

$$\hat{\varphi}(\mathbf{i}) = \frac{\tilde{a}}{a}\,\mathbf{i}', \qquad \hat{\varphi}(\mathbf{j}) = \frac{\tilde{b}}{b}\,\mathbf{j}', \qquad \hat{\varphi}(\mathbf{k}) = \frac{\tilde{c}}{c}\,\mathbf{k}'.$$

Mivel a $\hat{\varphi}$ leképezés lineáris, igazak a következők:

$$\overrightarrow{O'P'} = \hat{\varphi}(\overrightarrow{OP}) = \hat{\varphi}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = x\hat{\varphi}(\mathbf{i}) + y\hat{\varphi}(\mathbf{j}) + z\hat{\varphi}(\mathbf{k}) = x\frac{\tilde{a}}{a}\,\mathbf{i}' + y\frac{\tilde{b}}{b}\,\mathbf{j}' + z\frac{\tilde{c}}{c}\mathbf{k}'.$$

Az $\overrightarrow{O'P'}$ helyvektor egyértelműen áll elő az $\mathbf{i}',\ \mathbf{j}',\ \mathbf{k}'$ bázisvektorok lineáris kombinációjaként, így teljesül $x' = \frac{\tilde{a}x}{a}$, $y' = \frac{\tilde{b}y}{b}$, $z' = \frac{\tilde{c}z}{c}$.
(2) Legyen adott a térben egy olyan $\mathcal{F}$ másodrendű felület, melyet az $f(x,y,z) = 0$ másodfokú egyenlet ír le az $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$ koordináta-rendszerben. Vegyük az $\mathcal{F}$ felületnek a φ affinitással nyert $\mathcal{F}' = \varphi(\mathcal{F})$ képét. Vegyük észre, hogy egy P' pont, amelynek az O' kezdőpontra vonatkozó helyvektora $\overrightarrow{O'P'} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$, akkor van rajta az $\mathcal{F}'$ képfelületen, ha a

$P = \varphi^{-1}(P')$ pont rajta van az eredeti $\mathcal{F}$ másodrendű felületen. Azonban a P pontnak az $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$ rendszerbeli $x,\ y,\ z$ koordinátái kifejezhetőek a P' pont $(O',\ \mathbf{i}',\ \mathbf{j}',\ \mathbf{k}')$ rendszerbeli $x',\ y',\ z'$ koordinátáiból az $x = \frac{ax'}{\tilde{a}},\ y = \frac{by'}{\tilde{b}},\ z = \frac{cz'}{\tilde{c}}$ összefüggésekkel. Emiatt a P' pont illeszkedik az $\mathcal{F}'$ felületre akkor és csak akkor, ha a koordinátái kielégítik az $f\left(\frac{ax'}{\tilde{a}}, \frac{by'}{\tilde{b}}, \frac{cz'}{\tilde{c}}\right) = 0$ egyenletet.

Ezzel beláttuk, hogy az $(O',\ \mathbf{i}',\ \mathbf{j}',\ \mathbf{k}')$ koordináta-rendszerben az $f\left(\frac{ax'}{\tilde{a}}, \frac{by'}{\tilde{b}}, \frac{cz'}{\tilde{c}}\right) = 0$ egyenlet éppen az $\mathcal{F}'$ képfelületet írja le.■

2.5.2. Tétel. *Legyen adott két másodrendű felület $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$, melyek egyazon osztályba tartoznak a kanonikus egyenleteik alapján. Ekkor van olyan $\varphi\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ affin transzformáció, amely az $\mathcal{F}$ felületet az $\mathcal{F}'$ másodrendű felületbe képezi.*

Bizonyítás:

(1) Tekintsük először azt az esetet, amikor az $\mathcal{F}$, és $\mathcal{F}'$ felületek nem elfajulóak és a kanonikus egyenletükben három paraméter is szerepel. Ekkor a két felület vagy ellipszoid, vagy egyköpenyű hiperboloid, vagy pedig kétköpenyű hiperboloid.
Az $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ felületekhez válasszunk olyan $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$ és $(O',\ \mathbf{i}',\ \mathbf{j}',\ \mathbf{k}')$ koordináta-rendszereket, hogy azokban $\mathcal{F}$ és az $\mathcal{F}'$ egyaránt egy kanonikus másodfokú egyenlettel írható le. Tegyük fel, hogy jelen esetben az $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ másodrendű felületek kétköpenyű hiperboloidok, melyeket az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $\frac{(x')^2}{\tilde{a}^2} - \frac{(y')^2}{\tilde{b}^2} - \frac{(z')^2}{\tilde{c}^2} - 1 = 0$ egyenletek határoznak meg.
Tekintsük most azon $A,\ B,\ C$ és $A',\ B',\ C'$ pontokat, melyekre fennáll $\overrightarrow{OA} = a\,\mathbf{i}$, $\overrightarrow{OB} = b\,\mathbf{j}$, $\overrightarrow{OC} = c\,\mathbf{k}$, illetve $\overrightarrow{O'A'} = \tilde{a}\,\mathbf{i}'$, $\overrightarrow{O'B'} = \tilde{b}\,\mathbf{j}'$, $\overrightarrow{O'C'} = \tilde{c}\,\mathbf{k}'$. Ezen pontok tehát rajta vannak a koordinátatengelyeken.
Az 1.4. fejezetben igazoltuk az 1.4.2. Tételt, amely kimondja, hogy ha a térben adott két általános helyzetű pontnégyes, akkor egy alkalmas affinitás használatával átvihető az első pontnégyes a másodikba. Tekintsük most azt a $\varphi\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ affin transzformációt, amely az O, $A,\ B,\ C$ pontnégyest az $O',\ A',\ B',\ C'$ pontnégyesbe képezi. Alkalmazzuk a 2.5.1. Állítást az $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ egyenletű $\mathcal{F}$ felületre. Eszerint a $\varphi(\mathcal{F})$ képfelületet az $f\left(\frac{ax'}{\tilde{a}}, \frac{by'}{\tilde{b}}, \frac{cz'}{\tilde{c}}\right) = 0$ egyenlet írja le. Látható, hogy a $\varphi(\mathcal{F})$ képfelületnek az $\frac{(x')^2}{\tilde{a}^2} - \frac{(y')^2}{\tilde{b}^2} - \frac{(z')^2}{\tilde{c}^2} - 1 = 0$ egyenlet felel meg, amely megegyezik az $\mathcal{F}'$ másodrendű felület egyenletével. Ezzel a $\varphi\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ affin transzformáció az $\mathcal{F}$ hiperbolidot az $\mathcal{F}'$ hiperboloidba képezi.
Amennyiben az $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ felületek egyaránt ellipszoidok vagy egyköpenyű hiperboloidok, akkor is érvényben marad a fenti bizonyítási eljárás.

(2) Nézzük azt az esetet, amikor az $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ felületek kanonikus egyenletében két paraméter, a és b szerepel. Ilyen felületek a paraboloidok, a másodrendű kúpok, az elliptikus és hiperbolikus hengerek.
Az $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ felületekhez válasszunk olyan $(O,\ \mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$ és $(O',\ \mathbf{i}',\ \mathbf{j}',\ \mathbf{k}')$ koordináta-rendszereket, melyekben $\mathcal{F}$ és az $\mathcal{F}'$ egyaránt egy kanonikus másodfokú egyenlettel adható meg. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ másodrendű felületek jelen esetben hiperbolikus paraboloidok, melyeket az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$, $\frac{(x')^2}{\tilde{a}^2} - \frac{(y')^2}{\tilde{b}^2} - 2z' = 0$ egyenletek írnak le. Tekintsük most azon $A,\ B,\ C$ és $A',\ B',\ C'$ pontokat, melyekre fennáll, hogy $\overrightarrow{OA} = a\,\mathbf{i}$, $\overrightarrow{OB} = b\,\mathbf{j}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{k}$,

illetve $\overrightarrow{O'A'} = \tilde{a}\,\mathbf{i}'$, $\overrightarrow{O'B'} = \tilde{b}\,\mathbf{j}'$, $\overrightarrow{O'C'} = \mathbf{k}'$. Vegyük azt a $\varphi: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ affin transzformációt, amely az $O,\ A,\ B,\ C$ pontnégyest az $O',\ A',\ B',\ C'$ pontnégyesbe képezi. Az $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$ egyenletű $\mathcal{F}$ felületre alkalmazzuk a 2.5.1. Állítást. (Azt a speciális esetet alkalmazzuk, amikor a c és $\tilde{c}$ pozitív számok értéke éppen 1.) Az említett állítás szerint a $\varphi(\mathcal{F})$ képfelület az $f\left(\frac{ax'}{\tilde{a}}, \frac{by'}{\tilde{b}}, z'\right) = 0$ egyenlettel írható le, aminek jelen esetben az $\frac{(x')^2}{\tilde{a}^2} - \frac{(y')^2}{\tilde{b}^2} - 2z' = 0$ egyenlet felel meg. Látható, hogy ez megegyezik az $\mathcal{F}'$ másodrendű felület egyenletével. Tehát a φ affin transzformáció az $\mathcal{F}$ hiperbolikus paraboloidot az $\mathcal{F}'$ hiperbolikus paraboloidba képezi.
Ez a bizonyítási eljárás érvényes akkor is, ha az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$másodrendű felületek egyaránt elliptikus paraboloidok, másodrendű kúpok, elliptikus hengerek vagy hiperbolikus hengerek.
(3) A fennmaradt felületosztályok esetére már analóg módon bizonyítható a tétel. ■

Megjegyzés: Ha olyan felületosztályt veszünk, ahol a kanonikus egyenletben csak egy paraméter szerepel, akkor az osztály bármely két felülete hasonlósági transzformációval is átvihető egymásba. A parabolikus hengerek egy ilyen osztályt alkotnak.

Végül megmutatjuk, hogy amennyiben két másodrendű felület a kanonikus egyenlete alapján különböző osztályokba tartozik, akkor azok nem vihetőek át egymásba affin transzformációval.

2.5.3. Állítás. *Legyen adott egy $\mathcal{F}$ másodrendű felület és egy $\varphi: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ affin transzformáció. Ekkor a kanonikus egyenlete alapján a $\varphi(\mathcal{F})$ képfelület ugyanahhoz az osztályhoz tartozik, mint az $\mathcal{F}$ másodrendű felület.*

Bizonyítás:
A 2.3. fejezetben már beláttuk, hogy az affin transzformáció nem elfajuló másodrendű felületet nem elfajuló másodrendű felületbe, elfajulót pedig elfajulóba képez. Tekintsük először a nem elfajuló másodrendű felületeket. A nem elfajuló másodrendű felületek közé tartoznak az ellipszoidok, az egyköpenyű hiperboloidok, a kétköpenyű hiperboloidok, az elliptikus paraboloidok és a hiperbolikus paraboloidok.
(1) Legyen az $\mathcal{F}$ másodrendű felület nem elfajuló és centrálisan szimmetrikus. Ha az $\mathcal{F}$ egy ellipszoid, akkor az $\mathcal{F}' = \varphi(\mathcal{F})$ képe is korlátos, tehát $\mathcal{F}'$ csakis ellipszoid lehet, mivel a hiperboloidok nem korlátosak. Ha az $\mathcal{F}$ másodrendű felület egy *kétköpenyű hiperboloid*, akkor annak két darabját (a két köpenyt) egy síkkal el lehet választani egymástól. Mivel ez fennáll a $\mathcal{F}' = \varphi(\mathcal{F})$ képalakzatra is, az $\mathcal{F}'$ hiperboloid is kétköpenyű. Ebből már adódik, hogy a φ affinitás egyköpenyű hiperboloidot egyköpenyű hiperboloidba képez.
(2) Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}$ másodrendű felület egy paraboloid. A nem elfajuló másodrendű felületek közül csak a paraboloidok nem centrálisan szimmetrikusak. Emiatt egy paraboloid képe csakis paraboloid lehet. A hiperbolikus paraboloidnak van metsző egyenespárt adó síkmetszete, viszont az elliptikus paraboloidnak nincs. Mivel az affinitás egyenest egyenesbe képez, a hiperbolikus paraboloid képe csakis hiperbolikus paraboloid lehet. Ebből következik, hogy egy elliptikus paraboloid affin képe is elliptikus paraboloid.
(3) Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}$ egy hengerfelület, amely vagy elliptikus, vagy hiperbolikus, vagy pedig parabolikus. Ekkor az $\mathcal{F}$ minden pontján átmegy egy adott iránnyal párhuzamos egyenes. Mivel az affinitás párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe képez az $\mathcal{F}' = \varphi(\mathcal{F})$ felület is egy hengerfelület. Innen már könnyű belátni, hogy amennyiben az $\mathcal{F}$ hiperbolikus, parabolikus, illetve elliptikus, akkor az $\mathcal{F}' = \varphi(\mathcal{F})$ is ugyanolyan típusú hengerfelületet ad.

Ugyanis, csak a hiperbolikus hengerfelület áll két darabból, továbbá a parabolikus hengerfelületnek nincs ellipszismetszete.
(4) Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}$ egy másodrendű kúp. Ekkor az $\mathcal{F}$ csúcspontját (illetve centrumát) a felület pontjaival összekötő egyenesek uniója adja a teljes felületet, továbbá az $\mathcal{F}$ kúp nem tartalmaz síkot. Mivel ezen egyedi tulajdonságokat az affin transzformáció megőrzi, a $\mathcal{F}' = \varphi(\mathcal{F})$ képfelület csakis egy másodrendű kúp lehet.
(5) A többi elfajuló másodrendű felületnél már könnyű belátni, hogy az affin transzformáció megőrzi a felület típusát.■

Megjegyzés: A fenti állítások alapján tehát kimondhatjuk, hogy a másodrendű felületeknek a kanonikus egyenletekkel történő osztályozása valójában az affin transzformációk szerinti osztályozásnak felel meg.

Irodalomjegyzék

[1] Freud Róbert: *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004.

[2] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999

[3] H. S. M. Coxeter: *A geometriák alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

[4] Reiman István: *A geometria és határterületei*, Gondolat Kiadó, Budapest, 1986.

[5] Verhóczki László: *Euklideszi geometria,* ELTE TTK Matematikai Intézet Geometriai Tanszék, Budapest, 2012, elektronikusan elérhető jegyzet http://www.cs.elte.hu/geometry/vl/EukGeoJe.pdf