A finitisztikusdimenzió-sejtés

Diplomamunka

Írta: Balogh János (Kaposvár)
Matematikus szak
2008.

Témavezető: Ágoston István
egyetemi docens
ELTE TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A homologikus algebra egyik leghíresebb, máig megoldatlan problémája a *finitisztikusdimenzió-sejtés*. Egy gyűrű globális dimenziójának vizsgálatakor felmerülhet a kérdés: mi okozhatja azt, hogy ez a dimenzió végtelen? Van-e olyan modulus a gyűrű fölött, melynek projektív dimenziója (pd) végtelen, vagy pedig mindegyik véges, de előfordul tetszőlegesen nagy? Emiatt célszerű bevezetni a finitisztikus dimenzió fogalmát. Egy gyűrűnek kétféle (jobb oldali, projektív) finitisztikus dimenziója van, az úgynevezett nagy és kicsi finitisztikus dimenzió:

$$\text{r-Fin.dim}\, R = \sup\{\text{pd}\, M\colon\ M \text{ jobb oldali } R\text{-modulus, pd}\, M < \infty\}$$
$$\text{r-fin.dim}\, R = \sup\{\text{pd}\, M\colon\ M \text{ végesen generált jobb oldali } R\text{-modulus, pd}\, M < \infty\}$$

Definiálhatóak ugyanezek a fogalmak injektív dimenzióval is, általában sem az így kapott értékek nem egyenlők a projektíven definiáltakkal, sem a bal és jobb oldali projektív finitisztikus dimenzió nem feltétlenül egyezik meg egymással. Ebben a dolgozatban általában csak a jobb oldali projektív változattal foglalkozom, hiszen minden tétel analóg módon megfogalmazható bal oldalira is. Néhány helyen viszont az injektíven definiáltat kell használni, ez viszont nem vihető át automatikusan projektívre.

H. Bass [B] 1960-ban tette közzé Rosenberg és Zelinsky két finitisztikus dimenzióra vonatkozó kérdését:

(1) Megegyezik-e a kis és nagy finitisztikus dimenzió?
(2) Mindig véges-e a kis finitisztikus dimenzió?

Általánosságban már mindkettőt megválaszolták: mindkettőre ,,nem” a válasz. Még kommutatív Noether-gyűrűk esetén is. Ilyen esetben az (1)-es pontosan akkor teljesül, ha a gyűrű úgynevezett *Cohen-Macaulay* (lásd: [BH]). Egy kommutatív Noether-gyűrű nagy finitisztikus dimenziója a Krull-dimenzióval egyenlő. Nagata adott példát olyan kommutatív Noether-gyűrűre, amelynek végtelen a Krull-dimenziója [NAG], ez tehát ellenpéldát szolgáltat a (2)-es sejtésre.

Sokkal érdekesebb viszont az a kérdés, hogy vajon mi a helyzet, ha R egy véges dimenziós algebra. Amikor Bass megfogalmazta a problémát, már akkor bebizonyította, hogy ha fin.dim$A = 0$, akkor Fin.dim$A = 0$ is teljesül, tehát akkor igaz az (1)-es. De egészen 1992-ig kellett várni egy példára, ami megmutatta, hogy az (1)-esre ekkor is negtív a válasz. Azonban a (2)-esre mind a mai napig csak részeredmények ismertek, és folyamatosan jelennek meg újabbak és újabbak is, de a teljes megoldás még várat magára.

Ennek a diplomamunkának a célja, hogy összefoglalja az eddig bizonyított eseteket, valamint mutasson néhány olyan más sejtést, melyek igazsága könnyen következne, ha valaki bizonyítaná a finitisztikusdimenzió-sejtést. 1994-ben jelent meg B. Zimmermann-Huisgen összefoglaló műve [ZH2] erről a témáról, melyre azóta is sokan hivatkoznak, de az 1994 óta eltelt időben rengeteg új eredmény született.

A továbbiakban A mindig véges dimenziós algebrát jelöl, J vagy rad$A$ fogja jelölni A Jacobson-radikálját, és ha M egy jobb oldali A-modulus, melynek egy minimális projektív feloldása:

$$\ldots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$$

akkor $\Omega^1(M)$ vagy $\Omega(M)$ jelöli M első szizigijét, vagyis Ker(f_0)-t, a további szizigik pedig iterálva kaphatók: $\Omega^{k+1}(M) = \Omega(\Omega^k(M))$. Sokszor használt nyilvánvaló állítás, hogy ha $\Omega^k(M) \neq 0$ és pd$M < \infty$, akkor pd$M = k+$ pd$\Omega^k(M)$.

Néhány megjegyzés az angol nyelvű cikkek magyarra fordításáról: A japán neveket a Magyar Tudományos Akadémia ajánlása szerinti magyaros átírásban használom, kivéve Igusa nevét, hiszen ő már az Amerikai Egyesült Államokban született és ott is él. A dolgozatban előforduló néhány kínai nevet is az úgynevezett magyar tudományos típusú átírás szerint használom. Az angol szakkifejezéseket is igyekeztem magyarra fordítani, bár ezeket olyan ritkán írják le nyelvünkön, hogy némelyiknek még nincs igazi fordítása. Példa erre a *szizigi* [syzygy] és a *valódi standard modulus* [proper standard module].

Végül szeretnék köszönetet nyilvánítani témavezetőmnek, Ágoston Istvánnak, aki egyrészt felhívta figyelmemet erre az érdekes témára, másrészt ötleteivel, megjegyzéseivel nagyban segítette, hogy a dolgozatnak mind a tartalma, mind a formája jobb legyen.

2. Alapvető fogalmak és eredmények

Ebben a fejezetben összefoglalom a legfontosabb tudnivalókat a gráfalgebrákról, hiszen az egész dolgozatban ezekről lesz szó. Gabriel tétele (lásd a fejezet végén) ugyanis kimondja, hogy algebrailag zárt test fölött minden véges dimenziós bázisalgebra izomorf egy faktorizált gráfalgebrával, ezért elég azokkal foglalkozni. Az itt kimondott állításokat nem bizonyítom, a bizonyítások és részletesebb leírás megtalálható például Assem, Simson és Skowroński könyvében [ASS]. A gráfalgebrák ismertetése után néhány egyszerű állítás bizonyítása következik a finitisztikus dimenzióval kapcsolatban.

2.1. A gráfalgebrák és a fölöttük vett modulusok

2.1. Definíció: *Legyen G egy irányított gráf, akár többszörös és hurokélekkel, T tetszőleges test. A G-hez tartozó gráfalgebra (TG) az az A vektortér T fölött, melynek bázisát adják G irányított útjai (beleértve a nulla hosszúságú utakat is), a báziselemek szorzata pedig az utak egymás után fűzése, ha ez lehetséges, ha pedig nem, akkor 0.*

A csúcsok száma legyen n, az éleket görög betűkkel jelöljük. A szorzást mindig *balról* kell olvasni, tehát $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta$. Az i-edik csúcshoz tartozó nulla hosszúságú út jele e_i. Nyilvánvaló, hogy $e_i^2 = e_i$, $e_i \cdot e_j = 0$, ha $i \neq j$, végül $1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$ az algebra egységeleme. Bizonyítható, hogy ezek az e_i-k primitív idempotensek teljes rendszerét alkotják, így $A = 1 \cdot A = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot A = \bigoplus_{i=1}^{n} e_i A$ az algebra (mint önmaga fölötti modulus) felbontása direkt felbonthatatlan projektív modulusok direkt összegére. Emiatt alkalmazzuk a következő jelölést: $P_i = e_i A$. (Néhol index nélküli e-vel is jelölünk egy-egy primitív idempotenst, ekkor a hozzá tartozó projektív modulus jele P_e lesz.) Különböző i-kre a P_i-k nem izomorfak, ezért A úgynevezett *bázisalgebra.*

Triviális, hogy az algebra pontosan akkor véges dimenziós, ha a gráf véges és nem tartalmaz irányított kört. Ebben az esetben az algebra Jacobson-radikálja az, amit a legalább 1 hosszúságú utak generálnak.

Végtelen dimenzióban azonban nem feltétlenül: ha például valós alaptest fölött tekintjük az egy pontot és egy α hurokélet tartalmazó gráfot, akkor az ehhez tartozó gráfalgebra generátorai $e_1, \alpha, \alpha^2, \ldots$, ez tehát izomorf a valós fölötti polinomalgebrával. Azonban az $\{\alpha - re_1 : r \in \mathbf{R}\}$ halmaz elemei végtelen sok maximális ideált generálnak, melyek metszete 0, tehát ennek radikálja 0, ami nem azonos a legalább 1 hosszú utak generátumával.

Leggyakrabban nem a teljes gráfalgebrát nézzük, hanem annak egy I ideál szerinti faktorát.

2.2. Definíció: *Az I ideált megengedettnek nevezzük, ha benne van J^2-ben és van olyan $m \geq 2$, hogy $J^m \subseteq I$.*

Más szóval: ha I-t legalább 2 hosszúságú utak kombinációi generálják, és van olyan $m \geq 2$, hogy minden legalább m hosszú út már benne van I-ben. Ekkor úgy tekinthetünk az A/I faktorra, hogy az ugyanolyan, mint maga az A, csak éppen minden I-beli út nullává válik benne. Az olyan utak T-beli együtthatókkal vett lineáris kombinációját, melyek ugyanonnan indulnak és ugyanoda vezetnek, *relációnak* nevezzük. Bizonyítható, hogy ha I megengedett ideál, akkor I-t véges sok reláció generálja, és ilyenkor ha a gráf véges, akkor a faktoralgebra mindenképpen véges dimenziós.

És hogy miért elég a gráfalgebrákkal foglalkozni? Először is: ha van egy Λ algebránk, ami nem bázisalgebra, akkor az $e_i\Lambda$-k közül kiválogatunk minden izomorfiatípusból egyet-egyet, és ezek direkt összegének endomorfizmusgyűrűjét jelöljük Λ'-vel. Ez Morita-ekvivalens lesz Λ-val, vagyis a fölöttük vett modulusok kategóriái ekvivalensek, tehát homologikus kérdések esetén (pl. reprezentációelmélet, finitisztikus dimenzió vizsgálata) ezentúl szorítkozhatunk csak bázisalgebrákra. Végül áttérhetünk gráfalgebrára is Gabriel tétele alapján:

2.3. Tétel: *Ha T algebrailag zárt, akkor minden véges dimenziós Λ bázisalgebrához létezik egy (egyértelmű) G irányított gráf és létezik I megengedett ideál, hogy $\Lambda \cong TG/I$.*

2.4. Megjegyzés: A gráf elkészíthető az alábbi módon: legyenek a gráf csúcsai az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számok, melyek egyértelműen felelnek meg az algebra primitív idempotenseinek! Az i-edik csúcsból a j-edikbe pedig pontosan akkor megy k darab él, ha $e_i \mathrm{rad} A e_j / e_i \mathrm{rad}^2 A e_j$ vektortérként éppen k dimenziós, hiszen $e_i \mathrm{rad} A e_j$-ben vannak az e_i-ből induló, e_j-be menő, legalább 1 hosszú utak, amivel faktorizálunk, abban meg az ugyanilyen, de legalább 2 hosszú utak, így a faktorban éppen az e_i és e_j közötti pontosan 1 hosszú utak (képei) maradnak.

Például a T fölötti 2×2-es alsóháromszög-mátrixok (3 dimenziós) Λ algebrájában a primitív idempotensek: $f_1 = E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $f_2 = E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Emiatt Λ gráfjának két csúcsa van. Λ radikálja azokból a mátrixokból áll, ahol csak a bal alsó sarokban lehet nullától különböző elem, a radikálnégyzet pedig már nulla, ennek ismeretében kiszámolható, hogy melyik csúcsból melyikbe hány nyíl vezet: kijön, hogy csak a 2-esből vezet az 1-esbe egyetlen nyíl. Emiatt tehát Λ izomorf az

$$2 \xrightarrow{\alpha} 1$$

gráfalgebra egy faktorával. Látható, hogy valójában nem is kell faktorizálni, hiszen ez a gráfalgebra már 3 dimenziós. Az izomorfizmusban a gráfalgebra e_1 és e_2 nulla hosszúságú útjainak f_1 és f_2 felel meg, α-nak pedig az $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix. Ellenőrizhető, hogy ugyanazok a szorzási szabályok ezekkel a mátrixokkal, mint a gráfalgebra útjaival.

Fontos leírni, hogy hogyan néznek ki egy A algebra fölötti modulusok. Ha veszünk egy M_A modulust, akkor felírható, hogy $M = M \cdot 1 = Me_1 \oplus Me_2 \oplus \ldots \oplus Me_n$, ahol a direkt összeg alterek direkt összegét jelenti. Egy i-ből j-be vezető α nyíl esetén az α-val való szorzás egy $Me_i \to Me_j$ lineáris leképezés lesz. Emiatt minden M modulust úgy képzelhetünk el, hogy a gráf csúcsaiba vektortereket teszünk, közöttük pedig a nyilaknak megfelelő lineáris leképezések mennek.

Ha egy M modulusnak a (V_i, ϕ_α) vektorterek és leképezések felelnek meg, egy M'-nek pedig a (V_i', ϕ_α'), akkor egy $f : M \to M'$ morfizmus nem más, mint olyan $f_i : V_i \to V_i'$ lineáris leképezések egy családja, melyek kompatibilisek a modulusok struktúrájával, azaz minden $\alpha : a \to b$ nyíl esetén $\phi_\alpha' f_a = f_b \phi_\alpha$.

Kiszámolható, hogy minden e_i primitív idempotenshez tartozik pontosan egy egyszerű modulus, jelesül $e_iA/e_i\mathrm{rad}A = P_i/\mathrm{rad}P_i$. Ezt mindig S_i-vel fogom jelölni. Vektortérként minden S_i pontosan 1 dimenziós.

Sokszor használjuk a D-vel jelölt $\mathrm{Hom}_T(-, T)$ funktort, ami a szokásos dualitás az A fölötti jobb oldali és bal oldali modulusok kategóriája között. Ez többek között a projektíveket injektívekké alakítja.

A modulusok szokásos jelölése során egy-egy i szám jelöli az i-edik csúcshoz tartozó vektortér egy generátorát, a számokat összekötő vonalak pedig az olyan lineáris leképezéseket, melyek a rajzon felül szereplő báziselemet viszik az alsóba. Így a részmodulusok mindig lent, a faktormodulusok fent helyezkednek el. Az ilyen ábrázolásból könnyen leolvasható a modulus *Loewy-magassága*, azaz az a minimális m szám, amire a radikál m-edik hatványa már nulla: ez a rajzon éppen a szintek száma, vagyis ténylegesen a modulus ,,magassága". Lássunk erre a jelölésre egy példát!

2.5. Példa: Legyen T algebrailag zárt test, G a következő irányított gráf:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, bend left, "\beta"] \arrow[r, bend right, "\gamma"'] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 4 \end{tikzcd}$$

Legyen $I = \langle \gamma\delta \rangle$ és tekintsük az $A = TG/I$ faktorizált gráfalgebrát! Ennek bázisa: $e_1, e_2, e_3, e_4, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma, \alpha\beta\gamma$, tehát ez az algebra 12 dimenziós. A projektív modulusok szerkezete (ezek direkt összege A_A):

$$P_1 = e_1A = \begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 \arrow[d, dash] & \\ & 2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ 3 & & 3 \arrow[d, dash] \\ & & 4 \end{tikzcd} \qquad P_2 = \begin{tikzcd}[column sep=small] & 2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ 3 & & 3 \arrow[d, dash] \\ & & 4 \end{tikzcd} \qquad P_3 = \begin{tikzcd} 3 \arrow[d, dash] \\ 4 \end{tikzcd} \qquad P_4 = 4$$

Tehát például $P_2 = e_2A$ jelölése azt jelenti, hogy a gráf 4 csúcsába helyezett vektorterek közül az 1-es dimenziója 0, a 2-esé 1, a 3-asé 2, a 4-esé pedig megint csak 1. Ebben az egyszerű esetben úgy lehet tekinteni, hogy a 2-es, 3-as és 4-es vektorterek bázisai sorban az $\{e_2\}$, a $\{\beta, \gamma\}$, és a $\{\beta\delta\}$. (Amikor a direkt felbonthatatlan projektív modulusokat nézzük, ott mindig használhatjuk bázisnak az adott csúcsból induló utakat.) A modulushoz hozzátartoznak a vektorterek között menő lineáris leképezések is: itt például a 2-es vektortérből a 3-asba két leképezés megy, az egyik

e_2-t a β báziselembe viszi, a másik γ-ba. Ebben a példában $e_2 \mathrm{rad} A e_3$ generátorai: β és γ, valamint $e_2 \mathrm{rad}^2 A e_3$ csak a nullából áll, így a faktor is $\langle \beta, \gamma \rangle$, tehát 2 dimenziós. És valóban, a 2-es csúcsból a 3-asba 2 él vezet.

Ugyanennek a modulusnak a szerkezete felrajzolható a gráf csúcsaiba helyezett vektorterekkel is:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & T \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & T \oplus T \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

A lineáris leképezéseket mátrixokkal adhatjuk meg, melyekkel jobbról kell szorozni. Itt a bal oldali nyílon menő leképezés mátrixa $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$, a középső fölsőn $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, a középső alsón $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, a jobb oldalin pedig $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

A 2.3. Tételben nem véletlenül nem szerepelt, hogy az I ideál egyértelmű lenne egy algebra esetén. Ebben a példában is lehet találni olyan $I' \neq I$ ideált, amivel faktorizálva egy ezzel izomorf algebrát kapunk, például $I' = \langle \gamma\delta - \beta\delta \rangle$. Könnyű ellenőrizni, hogy a következő leképezés egy $TG/I \to TG/I'$ izomorfizmust ad: $e_i \mapsto e_i$ minden $1 \leq i \leq 4$ esetén, $\alpha \mapsto \alpha$, $\beta \mapsto \beta$, $\gamma \mapsto \gamma - \beta$, $\delta \mapsto \delta$, és ez kiterjesztve a többi elemre is. Ha TG/I'-ben felrajzoljuk a projektív modulusokat, más ábrákat kapunk, mint eddig, legalábbis P_1 és P_2 esetében: ezeknek ugyanis összezáródik az alja: a lenti 4-esbe mindkét 3-asból fog vezetni egy-egy vonal. Erre az 5.2. fejezetben még fogunk példát látni.

Határozzuk meg ennek az algebrának a globális dimenzióját! Ismert tétel, hogy nem kell végignézni az összes A fölötti modulust, hanem elég csak az egyszerűekre szorítkozni. Itt 4 egyszerű modulus van, ezek közül $S_4 = P_4$ projektív, tehát $\mathrm{pd} S_4 = 0$.

S_3 projektív fedője P_3, ekkor a fedés magja, vagyis $\Omega(S_3)$ éppen P_4, ami már projektív, így $\mathrm{pd} S_3$=1.

S_2-t P_2 fedi le, ekkor a mag $S_3 \oplus P_3$, ennek projektív dimenziója, mint az előbb láttuk: 1, tehát $\mathrm{pd} S_2$=2.

S_1 fedője pedig P_1, a mag P_2, így $\mathrm{pd} S_3$=1.

Ezen projektív dimenziók szuprémuma 2, tehát a globális dimenzió 2, és mivel ez véges, így az is látszik, hogy $\mathrm{Fin.dim} A = \mathrm{fin.dim} A = 2$.

Végül lássunk egy példát arra is, hogy a globális dimenzió végtelen, de a finitisztikus dimenzió véges:

2.6. Példa: Legyen A gráfja a következő:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, bend left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

Az I ideált pedig generálják az $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ relációk! Ekkor $A_A = P_1 \oplus P_2$ szerkezete:

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ | & \oplus & | \\ 2 & & 1 \end{array}$$

Az összes direkt felbonthatatlan modulus ilyenkor S_1, S_2, P_1 és P_2. A globális dimenzió végtelen lesz, mert $\mathrm{pd}S_1 = \mathrm{pd}S_2 = \infty$, hiszen S_1 projektív feloldása így néz ki:

$$\ldots \to P_2 \to P_1 \to P_2 \to P_1 \to S_1 \to 0,$$

és hasonló S_2-é is. Mivel rajtuk kívül már csak projektívek vannak, ezért a finitisztikus dimenzió értéke 0.

2.2. Néhány egyszerű eset

Van néhány olyan algebraosztály, melyekre nagyon könnyen bebizonyítható, hogy a benne található algebrák finitisztikus dimenziója véges:

- *Féligegyszerű algebrák:* A féligegyszerű algebrák fölött minden modulus projektív, így már a globális dimenzió is nulla, természetesen ekkor a finitisztikus dimenzió is.
- *Reprezentációvéges algebrák:* Ez azt jelenti, hogy az algebra fölött csak véges sok különböző direkt felbonthatatlan modulus létezik. A finitisztikus dimenziót pedig elég csak a direkt felbonthatatlanokra nézni, hiszen $\mathrm{pd}(M \oplus N) = \max\{\mathrm{pd}M, \mathrm{pd}N\}$, illetve végtelen direkt összegre is $\mathrm{pd}(M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots) = \sup\{\mathrm{pd}M_i : 1 \leq i\}$.
- *Lokális algebrák:* Ha az A algebra lokális, akkor csak egy direkt felbonthatatlan projektív modulus van, legyen m ennek Loewy-magassága! Így ha egy M modulus nem projektív, akkor az őt fedő projektív modulus Loewy-magassága m, viszont $\Omega(M)$ ennek radikáljában van, így annak magassága legfeljebb $m-1$, vagyis ez a szizigi sem lehet projektív. Így M projektív dimenziója végtelen, ezért a finitisztikus dimenzió 0.
- *Öninjektív algebrák:* Ez azt jelenti, hogy A_A injektív modulus is, nem csak projektív. Ekkor minden A fölötti projektív modulus is injektív egyben. Ha feltennénk, hogy $0 < \mathrm{pd}M < \infty$, az azt jelentené, hogy M valamelyik szizigije projektív, tehát injektív is. A szizigi része valamilyen P projektívnek, de ha egy injektív része valaminek, akkor direkt összeadandó benne. Viszont akkor a faktor (ami az előző szizigivel izomorf) is direkt összeadandó P-ben, tehát az is projektív, ami lehetetlen.
- *Eltűnő radikálnégyzettel rendelkező algebrák:* Ha $J^2 = 0$, akkor minden modulus Loewy-magassága legfeljebb 2, hiszen $\mathrm{rad}^2 M = MJ^2 = 0$. Mivel a szizigik mindig benne vannak egy projektív modulus radikáljában, ezért azok magassága már csak legfeljebb 1 lehet, vagyis minden $\Omega(M)$ izomorf egyszerűek direkt összegével. Emiatt $\mathrm{pd}\Omega(M)$ vagy végtelen, vagy legfeljebb annyi, mint a véges projektív dimenziós egyszerű modulusok projektív dimenziójának szuprémuma. Tehát $\mathrm{Fin.dim}A \leq \sup\{\mathrm{pd}S : S$ véges projektív dimenziós egyszerű modulus$\} + 1$.

Végül bebizonyítok még egy (az 1. fejezetben már megemlített) egyszerű állítást a finitisztikus dimenzióról:

2.7. Állítás: *Ha* $\mathit{fin.dim}A = 0$, *akkor* $\mathit{Fin.dim}A = 0$ *is tejlesül.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\mathrm{Fin.dim}A \geq 1$! Ekkor tehát létezik egy véges, de nem nulla projektív dimenziós modulus, ennek utolsó előtti szizigijét M-mel jelölve $\mathrm{pd}M = 1$ teljesül. Legyen

$f : P \to M$ ennek a projektív fedője, ekkor f magja, az utolsó szizigi nem nulla, projektív, és benne van P radikáljában. Ekkor kell, hogy legyen rad$P$-ben egy eA alakú projektív is, ahol e egy primitív idempotens. Ez az eA benne van egy P_0 projektív modulus radikáljában is, ahol $P_0 \subseteq P$ egy végesen generált részmodulus. Nyilvánvalóan ekkor P_0/eA egy végesen generált modulus, melynek projektív dimenziója 1, emiatt fin.dim$A \geq 1$. $\square$

3. Monomiális algebrák

3.1. Definíció: *Egy A/I relációkkal faktorizált gráfalgebra monomiális, ha I-t (legalább 2 hosszú) utak generálják.*

Monomiális algebrák esetére a finitisztikusdimenzió-sejtést már bizonyították. Először 1991-ben jelent meg E. L. Green, E. Kirkman s J. Kuzmanovich cikke [GKK], ebben hosszú számolások után jött ki az eredmény: felső korlátot adtak a monomiális algebrák kis finitisztikus dimenziójára. A cikk utolsó mondatában megemlítik, hogy mire ezzel a munkával készen lettek, addigra kapták kézhez K. Igusa s D. Zacharia [IZ] cikkét, mely további eredményeket tartalmaz ebben a témakörben. Valójában egy sokkal egyszerűbb bizonyítást, melyből kiderül, hogy egy monomiális algebra finitisztikus dimenziójára felső korlát az algebra radikáljának vektortér-dimenziója. Ennek bizonyításához ők nem a projektív, hanem az injektív finitisztikus dimenziót számolják, de ez itt nem számít, hiszen a D funktor segítségével a projektív és az injektív modulusok megfelelnek egymásnak, és egy monomiális algebra oppozitja is monomiális.

3.1. A szizigipárok módszere

Igusa és Zacharia bizonyításához a következő fogalmakat és jelöléseket vezessük be: Legyen γ egy legalább 1 hosszúságú út az irányított gráfban, ami a faktorban nem nulla! Jelölje v a γ kezdőpontját és w a végpontját! Ekkor γ megad egy γ^* homomorfizmust P_w-ből P_v-be, jelesül a γ-val való balról szorzást. Ez w-ben nem nulla. A homomorfizmus képét P_v-ben jelöljük K_γ-val! Ekkor A egy *szizigipárjának* a $(P_v,\ K_\gamma)$ párt nevezzük. Egy (P, K) és egy (P', K') szizigipár izomorf, ha léteznek $f : K \to K'$ és $g : P \to P'$ izomorfizmusok úgy, hogy ι-val és ι'-vel jelölve K illetve K' kanonikus beágyazását P-be illetve P'-be, teljesül, hogy $g\iota = \iota' f$. A legalapvetőbb lemma a szizigipárokról a következő:

3.2. Lemma: *Különböző γ-khoz nem izomorf szizigipárok tartoznak*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $(P_u,\ K_\alpha) \cong (P_v,\ K_\beta)$! Teljesen nyilvánvaló, hogy ez csak úgy lehet, hogy $u = v$ és α és β v-ből ugyanabba a pontba vezető út, mondjuk w-be. Ekkor a $K_\alpha \cong K_\beta$ izomorfizmus felemelhető egy $f : P_w \cong P_w$ izomorfizmussá, úgy, hogy ha g-vel jelöljük a $P_v \cong P_v$ izomorfizmust, akkor $g\alpha^* = \beta^* f$. De $g\alpha^*(e_w)$ nem más, mint α valamilyen nem nulla együtthatóval szorozva, plusz esetleg hosszabb utak kombinációja, $\beta^* f(e_w)$ pedig β nem nullaszorosa plusz esetleges hosszabb utak. Mivel ez a kettő egyenlő, ezért α is egyenlő β-val. □

Emiatt a szizigipárokból pontosan annyi nem izomorf létezik, ahány nem nulla hosszúságú út van, vagyis ahány dimenziós a radikál vektortérként. A további számításokhoz szükséges meghatározni, hogy hogyan néz ki a γ^* leképezés magja.

3.3. Lemma: *γ^* magja P_w olyan K_{γ_i} részmodulusainak direkt összege, ahol γ_i végigfut az összes olyan úton, ami w-ből egy u_i pontba vezet, és $\gamma\gamma_i : v \to u_i$ pontosan egy u_i-ben végződő I-beli relációt tartalmaz.*

A lemma bizonyítása megtalálható [IZ]-ben, de formálisan leírva bonyolultabb, mint fejben végiggondolni. Szükség lesz ezután a következő definíciókra:

3.4. Definíció: *Egy $(P_v,\ K_\gamma)$ szizigipár esetén jelölje $\Omega^1(P_v,\ K_\gamma)$ az összes olyan $(P_w,\ K_{\gamma_i})$ szizigipár halmazát, ahol γ_i teljesíti az előző lemma feltételeit! Rekurzióval definiáljuk az $\Omega^k(P_v,\ K_\gamma)$ halmazt: készítsük el az $\Omega^{k-1}(P_v,\ K_\gamma)$ halmaz összes elemének az Ω^1-eit, és vegyük ezek unióját!*

3.5. Definíció: *Egy $(P,\ K)$ szizigipár periodikus, ha van olyan $n \geq 1$, hogy $(P,\ K)$ izomorf $\Omega^n(P,\ K)$ egy elemével. A legkisebb ilyen n-et hívjuk $(P,\ K)$ periódusának. $(P,\ K)$-t virtuálisan periodikusnak mondjuk, ha van olyan $n \geq 1$ és olyan $(P',\ K')$ periodikus szizigipár, hogy $(P,\ K)$ izomorf $\Omega^n(P',\ K')$ egy elemével.*

A következő lemma a kulcs ahhoz, hogy később a fő tétel bizonyításakor megkapjuk felső korlátként a radikál dimenzióját:

3.6. Lemma: *Ha $(P_0,\ K_0)$ tetszőleges szizigipár és $n \geq dim_T J$, akkor $\Omega^n(P_0,\ K_0)$ minden eleme virtuálisan periodikus.*

Bizonyítás: Legyen $(P_n,\ K_n) \in \Omega^n(P_0,\ K_0)$, erről kell megmutatni, hogy virtuálisan periodikus. Az Ω definíciója miatt van szizigipároknak egy olyan $(P_0,\ K_0),\ \dots\ ,\ (P_n,\ K_n)$ sorozata, hogy $(P_i,\ K_i) \in \Omega(P_{i-1},\ K_{i-1})$ minden $i = 1, \dots n$ esetén. Már megállapítottuk, hogy a szizigipárokból annyi nem izomorf van, ahány dimenziós a radikál, n pedig ennél nem kisebb, ezért ebben a sorozatban kell, hogy legyen ismétlődés, vagyis egy periodikus szizigipár. De akkor $(P_n,\ K_n)$ virtuálisan periodikus. □

Végül pedig jöjjön néhány újabb állítás, melyek eredményeit összevetve a végén gyorsan bizonyítható lesz a fő tétel! A következő lemma a 3.3. Lemmából egy n-re vonatkozó indukcióval gyorsan igazolható:

3.7. Lemma: *Ha $(P,\ K) \in \Omega^n(P',\ K')$ és K' egy minimális projektív feloldása*

$$\dots\ \to\ P_n(K') \overset{d_n}{\to} P_{n-1}(K') \to \dots \to P_0(K') \to K' \to 0,$$

akkor létezik $P_{n-1}(K')$-nek egy A-val jelölt, és $d_n P_n(K')$-nek egy B-vel jelölt direkt összeadandója, hogy $B \subseteq A$ és $(A,\ B) \cong (P,\ K)$.

3.8. Lemma: *Tegyük fel, hogy (P, K) egy virtuálisan periodikus szizigipár, M pedig olyan A-modulus, melynek injektív dimenziója véges! Ekkor minden $K \to M$ homomorfizmus kiterjeszthető $P \to M$ homomorfizmussá.*

Bizonyítás: Legyen (P', K') olyan periodikus szizigipár, melyre $(P, K) \in \Omega^n(P', K')$ és melynek p a periódusa! Ekkor definíció szerint $(P, K) \in \Omega^{n+pm}(P', K')$ is igaz minden $m \geq 1$-re is. De mivel M injektív dimenziója véges, ezért elég nagy m esetén $\mathrm{Ext}_A^{n+pm}(K', M')$ már nulla. De ekkor a 3.7. Lemma miatt $\mathrm{Hom}_A(P, M)$ rá kell, hogy képződjön $\mathrm{Hom}_A(K, M)$-re. □

3.9. Tétel: *Ha az A monomiális algebra fölötti M modulus injektív dimenziója véges, akkor erre az injektív dimenzióra felső korlát az algebra radikáljának vektortér-dimenziója.*

Bizonyítás: Legyen M olyan modulus, melynek injektív dimenziója véges, (P, K) tetszőleges szizigipár, és $n \geq \dim_T(\mathrm{rad}A)$! Ekkor a 3.6. Lemma miatt $\Omega^n(P, K)$ minden eleme virtuálisan periodikus, így a 3.8. Lemma miatt $\mathrm{Ext}_A^n(K, M) = 0$. Mivel az injektív dimenzió az a legnagyobb d szám, melyre még van olyan S egyszerű modulus, hogy $\mathrm{Ext}_A^d(S, M) \neq 0$, ezért nekünk most az kellene, hogy $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(S_v, M) = 0$ legyen minden v esetén. Ez pedig azért igaz, mert P_v radikálja pontosan azon K_γ-k direkt összege, ahol γ végigfut a P_v-ből induló éleken, tehát felírható a következő rövid egzakt sorozat:

$$0 \to \oplus K_\gamma \to P_v \to S_v \to 0$$

Erre pedig ráalkalmazzuk az Ext hosszú egzakt sorozatára vonatkozó ismert homologikus algebrai tételt, ezzel a bizonyítás kész. □

3.10. Következmény: *Monomiális algebrákra igaz a finitisztikusdimenzió-sejtés.*

3.2. A második szizigik vizsgálatának módszere

Egy teljesen más megközelítése a problémának a következő: Tudjuk, hogy a globális dimenzió meghatározásához elég megnézni az egyszerű modulusok projektív dimenziójának szuprémumát, egyszerű modulusból pedig csak véges sok van. De vajon tudunk-e találni olyan $\mathcal{S}$ és $\mathcal{S}'$ véges modulushalmazokat, hogy a finitisztikus dimenzió is meghatározható legyen legalább valamilyen ismert hibával úgy, hogy csak az ezekben a halmazokban előforduló modulusok projektív dimenzióját vizsgáljuk (például a kis finitisztikus dimenzióhoz $\mathcal{S}$ elemeit, a nagyhoz $\mathcal{S}'$-éit)? A válasz monomiális algebrákra: igen!

Zimmermann-Huisgen [ZH4]-ben felírja a monomiális algebrák fölötti modulusok *második* szizigiinek szerkezetét, ebből pedig már nagyon könnyen levezethető, hogy a nagy finitisztikus dimenzió (és ezáltal a kicsi is) véges, sőt, találunk is egy megfelelő $\mathcal{S}$ halmazt a becsléshez. Ez Rubinstein-Salzedo írásaban [SRS] olvasható.

3.11. Tétel: *Ha M egy monomiális A algebra fölötti modulus, akkor léteznek olyan q_i pozitív hosszúságú utak A-ban, hogy*

$$\Omega^2(M) \cong \bigoplus q_i A.$$

(Előfordulhat, hogy $q_i = q_j$, bár $i \neq j$.)

3.12. Következmény: $Fin.dimA < \infty$.

Bizonyítás: Legyen M egy A fölötti modulus véges projektív dimenzióval. Ha pd$M < 2$, akkor nem is kell figyelembe vennünk, ha legalább 2, akkor viszont második szizigije nem 0, tehát felírható az előző tétel szerinti alakban. Egy direkt összeg projektív dimenziója az összeadandók projektív dimenzióinak szuprémuma, de csak véges sok q_i lehetséges, ezért egy véges halmaz szuprémumát kell venni. Azt eddig is tudtuk, hogy ez véges, de most egy korlátot is kaptunk rá: pd$\Omega^2(M) = \sup\{\text{pd}(q_iA)\}$, így pd$M$-re egy ennél 2-vel nagyobb korlát adódik. □

3.13. Következmény: *Legyen* $\mathcal{S}= \{qA : q$ *pozitív hosszúságú út* A*-ban, pd*$(qA) < \infty\}$ *és legyen* $s = -1$*, ha* $\mathcal{S}$ *üres,* $s = max\{pd\ (qA) : qA \in \mathcal{S}\}$*, ha* $\mathcal{S}$ *nem üres! Ekkor*

$$s + 1 \leq fin.dimA \leq Fin.dimA \leq s + 2.$$

Bizonyítás: A jobb oldali egyenlőtlenséget már láttuk az előbb, és az is nyilvánvaló, hogy a bal oldalra s odaírható. Ezt kellene megnövelni $s + 1$-re. Ha $\mathcal{S}$ üres, akkor triviális. Ha nem, akkor vegyünk belőle egy qA elemet, melyre pd$(qA) = s$, és tegyük fel, hogy a q út az e pontban kezdődik! Ekkor $qA \subseteq eA$, így felírható az alábbi természetes rövid egzakt sorozat:

$$0 \to qA \to eA \to eA/qA \to 0$$

Emiatt $\Omega(eA/qA) = qA$, és ennek s a projektív dimenziója, ezért eA/qA-nak $s + 1$. □

Innen egy pillanat alatt kihozható az is, hogy a felső korlát kapcsolatban van a radikál dimenziójával, igaz, itt 1-gyel rosszabb becslést kapunk, mint a szizigipáros módszerrel:

3.14. Következmény: *Ha* A *monomiális algebra, akkor fin.dim* $A \leq$ *Fin.dim* $A \leq dim_T J + 1$.

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy az M modulus projektív dimenziója véges, de $\geq \dim_T J+2$! Tekintsük az alábbi sorozatot: $\Omega^2(M), \Omega^3(M), \Omega^4(M), \ldots$! Ezek mind valaminek a második szizigii, ezért mindegyik qA-k direkt összege. A triviális tulajdonságokból következik, hogy ha $\Omega^k(M) = \oplus M_i$, akkor pd$M = k+\sup\{\text{pd}M_i\}$. Jelen esetben a különböző qA-k száma $\dim_T J$, hiszen ennyi pozitív hosszúságú út létezik. Emiatt ez a szuprémum egy maximum, legyen minden $k \geq 2$ esetén p_k olyan út, amire ez a maximum felvétetik, azaz pd$M$=k+pd(p_kA)! Ha vesszük a $p_2, p_3, \ldots, p_{dim_T J+2}$ utakat, akkor a skatulyaelv miatt lesz köztük két egyforma, mondjuk $p_i = p_j$, ahol $i < j$. De akkor pd$M = i+\text{pd}p_iA = i+\text{pd}p_jA < j+\text{pd}p_jA =pdM$, ami ellentmondás. □

3.3. Az eredeti, számolós módszer

Röviden szólok most Green, Kirkman és Kuzmanovich bizonyításáról is [GKK], mely történetileg első volt, de jóval bonyolultabb, sokkal több számolást tartalmaz, mint az újabbak. Ezért itt csak a főbb ötleteket, gondolatokat ismertetem belőle.

Legyen G_0 a gráf csúcsainak halmaza, G_1 az élek halmaza, G_2 az I ideál egy generátorhalmaza! Definiáljuk a G_{m+1} halmazokat rekurzív módon: Először is legyen U azon G-beli irányított utak halmaza, melyek képe a faktorban nem nulla, és $m \geq 2$ esetén nevezzünk egy α utat *m-lánckezdetnek*, ha felírható $\alpha = \beta\delta\tau$ alakban, ahol $\beta \in G_{m-1}$, $\beta\delta \in G_m$, $\tau \in U\backslash G_0$, és $\delta\tau$ tartalmaz G_2-beli részutat! Egy m-lánckezdetet *m-láncnak* hívunk, ha egyik valódi kezdőszelete sem m-lánckezdet. Az összes m-lánc halmaza lesz G_{m+1}. Ennek azt a részhalmazát, mely az i-edik csúcsból induló m-láncokból áll, G^i_{m+1}-vel jelöljük. Könnyen látható, hogy $m \geq 0$-ra minden β m-lánc egyértelműen felírható $\beta_1\beta_2$ alakban, ahol $\beta_1 \in G_m$ és $\beta_2 \in U \backslash G_0$.

Legyen TG_m az a T fölötti vektortér, melynek bázisát alkotják G_m elemei! Ez egy altér TG-ben, sőt, $R = A/\mathrm{rad}A$-bimodulus is. Kiszámítható, hogy $TG^i_m = e_i(TG_m)$ és $TG^i_m \otimes_R A \cong \oplus e_j A$, ahol e_j végigfut a G^i_m-beli utak végpontjain. Ez tehát egy jóldefiniált projektív A-modulus. Egy α út végpontját $t(\alpha)$-val jelölve $m \geq 1$-re vezessük be a következő leképezéseket: $\delta_i : TG^i_m \otimes_R A \to TG^i_{m-1} \otimes_R A$, ahol $\delta_i(\beta \otimes_R v_{t(\beta)}) = \beta_1 \otimes_R \beta_2$, ahol $\beta = \beta_1\beta_2$, mint az előbb, és ez kiterjesztve a teljes értelmezési tartományra. Látható, hogy $TG^i_0 \otimes_R A \cong e_i A = P_i$, így ha δ_0 jelöli a természetes $P_0 \to S_0$ homomorfizmust, akkor felírható S_i egy minimális projektív feloldása:

$$\ldots \to TG^i_1 \otimes_R A \xrightarrow{\delta_1} TG^i_0 \otimes_R A \xrightarrow{\delta_0} S_i \to 0.$$

Ennek felhasználásával és sok formális számolással bizonyítható a következő fontos tétel:

3.15. Tétel: *Tegyük fel, hogy egy A monomiális algebra esetén c olyan szám, hogy minden $w \in G_c$ $c-1$-láncra létezik elég nagy n és egy $w' \in G_n$ $n-1$-lánc, hogy egy α út esetén $w\alpha \in G_{c+1}$ pontosan akkor teljesül, amikor $w'\alpha \in G_{n+1}$! Ekkor ha M egy bal oldali A-modulus véges projektív dimenzióval, akkor pd$({}_AM) \leq c$.*

Vegyük észre, hogy itt az S_i jobb oldali modulus feloldását tekintettük, de a tétel már bal oldali modulusok projektív dimenziójáról szól!

Ebből a tételből akkor következne a (bal) nagy finitisztikus dimenzió végessége, ha tudnánk, hogy minden monomiális algebrára van a feltételnek megfelelő c. Szintén számolós bizonyítással kijön az is, hogy mindig van ilyen c, sőt, konkrétan meg is tudjuk határozni, hogy mennyi: tekintsük azokat a 2-lánckezdeteket, melyek felírásában τ egy végszelete megegyezik egy I-t generáló reláció kezdőszeletével! Az ilyen τ-k számát d-vel jelölve megmutatható, hogy $c = d + 3$ teljesíti az előző tétel feltételét.

Végül megemlítem, hogy ez a módszer valamiben mégis jobb, mint a korábban leírt egyszerűbbek: ezzel ugyanis alsó becslés is adható az ℓ-Fin.dim-re. Egy $w = \beta\delta\tau \in G_n$ láncot tekintve kiszámolható, hogy $\mathrm{pd}(Ae_{t(w)}/A\tau) \geq n$ teljesül. Ha még azt is tudjuk, hogy $\tau \neq \tau'$ semmilyen $w' = \beta'\delta'\tau'$, $w \in G_{n+1}$, $r \geq 1$ esetén, sőt, τ-nak még csak semmilyen kezdőszelete sem egyezik meg egy ilyen τ'-vel $r \geq 0$ esetén, akkor $\mathrm{pd}(A\tau) = n - 1$ és $\mathrm{pd}(Ae_{t(w)}/A\tau) = n$.

4. A $J^3 = 0$ eset

Ha egy algebrára $J = 0$, akkor az féligegyszerű, fölötte minden modulus projektív, így már a globális dimenziója is 0. Ha csak annyit tudunk, hogy $J^2 = 0$, akkor ha maga az algebra nem is féligegyszerű, de bármely modulus első szizigije már az. Ezért a finitisztikus dimenzió vizsgálatakor elég az egyszerű modulusokat tekinteni, de azokból meg véges sok van, így ilyenkor is triviális, hogy a nagy finitisztikus dimenzió is véges. Ezt Mocsidzuki már 1965-ben észrevette [MOC]. 1968-ban L. W. Small egy újabb trükk alkalmazásával [SMA] erősítette az előző eredményt: elég, ha J^2 projektív dimenziója véges, ha *bal oldali* modulusnak tekintjük.

Sokkal bonyolultabb viszont, ha csak a radikál magasabb hatványáról tudjuk, hogy eltűnik. Egyelőre csak arra az esetre ismert a teljes bizonyítás, amikor $J^3 = 0$. Először E. Green és B. Zimmermann-Huisgen cikkében [GZH] olvashattunk erről. Ugyanúgy, mint a $J^2 = 0$ esetben, most is gyengíthető a feltétel arra, hogy ha J^3-öt bal oldali modulusnak tekintjük, akkor elég, ha projektív dimenziója véges. P. Dräxler és D. Happel a kicsit gyengébb Nakajama-sejtést bizonyították azzal a feltétellel, hogy $J^{2l+1} = 0$ és A/J^l reprezentációvéges [DH]. Igusa és Todorov egy teljesen más módszert alkalmazva [IT] szintén találtak egy bizonyítást a $J^3 = 0$ esetre, aztán Y. Wang egy rövid kiegészítéssel belátta a finitisztikusdimenzió-sejtést azokkal a feltételekkel is, amit Dräxler és Happel használtak. Ezekre még ebben a fejezetben később visszatérek. Most először Zimmermann-Huisgenék módszerének fő ötleteit ismertetem.

4.1. Első speciális eset

Tekintsük azt az esetet, amikor J^2 minden (egyszerű) direkt összeadandójának végtelen a projektív dimenziója! Ekkor minden legfeljebb 2 Loewy-magasságú M modulushoz hozzárendelünk egy $[M]$-mel jelölt, n soros, 2 oszlopos mátrixot a következő módon: $[M]$ k-adik sorának első eleme legyen S_k multiplicitása M/MJ-ben, a második elem pedig S_k multiplicitása MJ-ben! Speciálisan $[e_iJ]$ elemeit jelöljük így:

$$[e_iJ] = \begin{pmatrix} u_{i1} & v_{i1} \\ \vdots & \vdots \\ \\ u_{in} & v_{in} \end{pmatrix}$$

Végül definiálunk egy L^* lineáris endomorfizmust $\mathbf{Z}^{n\times 2}$-n:

$$L^*\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ \\ a_n & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i u_{i1} - b_1 & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_{i1} \\ \vdots & \vdots \\ \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i u_{in} - b_n & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_{in} \end{pmatrix}$$

Ha ezt az L^*-ot ismételten alkalmazgatjuk egy tetszőleges B mátrixra, akkor előfordulhat, hogy egy idő után a csupa nulla mátrixot kapjuk. Ha ez megtörténik, akkor jelöljük $\tau(B)$-vel azt, hogy hányadikra kaptuk meg! Ha soha nem kapunk nullmátrixot, akkor legyen $\tau(B) = \infty$! Mivel L^* lineáris, ezért azok a mátrixok, melyekre $\tau(B)$ véges, részcsoportot alkotnak $\mathbf{Z}^{n\times 2}$-ben, ennek a csoportnak a jele: $G_0^*(A)$. Tegyük fel, hogy az egyszerű modulusok úgy vannak számozva, hogy az első p egyszerű modulus fordul elő J/J^2-ben, míg az első q fordul elő J/J^2-ben és J^2-ben egyszerre! Tekintsük $G_0^*(A)$-nak azt a részcsoportját, melynek első oszlopában csak az első p sorban szerepelhetnek nullától különböző elemek, a második oszlopban pedig az első q sorban! Ezt $G^*(A)$-val szokás jelölni. Triviális, hogy ez a csoport izomorf legfeljebb $p+q$ darab $\mathbf{Z}$ direkt összegével. Hogy hányéval, azt jelöljük r^*-gal! (Ez a rangja.) Ez a leképezés és ez a csoport a következő állítások miatt fontos:

4.1. Lemma: *Ha M legfeljebb 2 Loewy-magasságú modulus, melynek projektív dimenziója véges, akkor $[\Omega^k(M)] = (L^*)^k[M]$. Emiatt pd$M = t$ ekvivalens azzal, hogy $(L^*)^{t+1}[M] = 0$, de kisebb kitevőre még nem nulla.*

4.2. Tétel: r-fin.dim $A \le r^* \le p+q \le 2n$

4.3. Példa: Legyen az A algebra, mint önmaga fölötti modulus szerkezete:

$$\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 1 \end{array} \quad \oplus \quad \begin{array}{c} 2 \\ | \\ 1 \\ | \\ 1 \end{array}$$

Ekkor $e_1J = 1$ és $e_2J = \begin{array}{c} 1 \\ | \\ 1 \end{array}$

Emiatt $[e_1J] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $[e_2J] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ezért

$$L^*\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2-b_1 & a_2 \\ -b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(L^*)^2\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1-b_1-b_2 & -b_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(L^*)^3\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

És innentől kezdve L^* magasabb hatványai is már ugyanezt az eredményt adják. Vagyis pontosan akkor nullázódik le egy mátrix L^* ismételgetésekor, ha $a_1 = b_1$ volt benne. Mivel $J^2 \cong J/J^2 \cong S_1$, ezért $p = q = 1$, így $G^*(A)$ azokból a 2×2-es mátrixokból áll, ahol az első sorban 2 egyforma egész szám áll, lent pedig két darab 0. Emiatt $r^* = 1$, tehát fin.dim$A \leq 1$. Mivel pd$(S_2) = 1$, ezért fin.dim$A \geq 1$ is igaz, tehát fin.dim$A = 1$.

4.2. Az általános eset

Most már nem kell feltennünk, hogy J^2 minden direkt összeadandójának projektív dimenziója végtelen. Hanem csoportosítsuk az összes egyszerű modulust: legyenek közülük a végtelen projektív dimenziósok $S_1, \ldots, S_m$, a végesek pedig $\tilde{S}_{m+1}, \ldots, \tilde{S}_n$, és szintén tegyünk hullámot azon primitív idempotensek fölé, melyek hullámos S-ekhez tartoznak! Ezenkívül legyen $e = e_1 + \ldots + e_m$ és $\tilde{e} = \tilde{e}_{m+1} + \ldots + \tilde{e}_n$, végül legyen d a hullámozott S-ek projektív dimenzióinak szuprémuma! Ez tehát véges. Módosítjuk az $M \mapsto [M]$ leképezésünket is: most nem az összes egyszerű modulus multiplicitásait írjuk be a mátrixba, hanem a jelenlegi S_i-kéit, vagyis a végtelen projektív dimenziós egyszerűkéit. Az L^* endomorfizmus csak annyiban változik, hogy n helyett m soros mátrixokra alkalmazzuk. Megkülönböztetésül a jele ezentúl csak L lesz.

Jelöljük $L_2(A)$-val a legfeljebb 2 Loewy-magasságú modulusok kategóriáját, ennek egy M eleme esetén legyen π a természetes $M/MJ\tilde{e} \to M/MJ$ epimorfizmus, ϵ pedig legyen a következő: $\epsilon(M) = \pi^{-1}((M/MJ)e)$! Ekkor $\epsilon(M)$ a legnagyobb olyan részmodulusa $M/MJ\tilde{e}$-nak, melynek kompozíciófaktorai $S_1, \ldots, S_m$ közül kerülnek ki. Az $Me \to M$ beágyazás indukál egy $Me \cong \epsilon(M)$ eAe-modulusok közti izomorfizmust, így Me örököl egy természetes A-modulus struktúrát, ami kiterjeszti az eAe-struktúrát.

Ellenőrizhető, hogy ez az ϵ egy $L_2(A) \to L_2(A)$ funktor is, és ha N A-részmodulusa M-nek, amire $Ae = Me$, akkor $\epsilon(A) \cong \epsilon(M)$. A következő lemmák segítségével további észrevételeket tehetünk:

4.4. Lemma: *Ha $M \in L_2(A)$, akkor M projektív dimenziója pontosan akkor véges, amikor $\epsilon(M)$-é véges. Sőt: $pd(\epsilon(M)) \leq max\{pdM, d+1\}$ és $pd(M) \leq max\{pd(\epsilon(M)), d\}$.*

4.5. Lemma: *Ha $c \geq 1$ és $(\epsilon\Omega)^c$ az $\epsilon\Omega : L_2(A) \to L_2(A)$ leképezés c-szeres iteráltja, akkor ha $(\epsilon\Omega)^c(\epsilon(M)) = 0$, akkor $pdM \leq d + c$.*

A 4.4-es Lemmából azonnal látszik, hogy ha M és N két $L_2(A)$-beli elem, melyekre $\epsilon(M) = \epsilon(N)$, akkor M és N projektív dimenziója pontosan egyszerre végtelen. A következő lemmák kapcsolják össze a most elmondottakat a korábbiakkal, vagyis a mátrixleképezéssel:

4.6. Lemma: *Ha $M \in L_2(A)$ projektív dimenziója véges, és N olyan részmodulusa M-nek, melyre $Me = Ne$, akkor $[N] = [M] = [\epsilon(M)]$. Emellett minden $k \geq 1$ esetén $[(\epsilon\Omega)^k(\epsilon(M))] = L^k[M] = L^k[\epsilon(M)]$.*

4.7. Lemma: *Ha $M \in L_2(A)$ projektív dimenziója véges, N olyan részmodulusa M-nek, melyre $(N + MJ)/MJ = (M/MJ)e$, és N-nek nincs semmilyen $\tilde{S}_j$-mal izomorf direkt összeadandója, akkor $[N] = [M]$, $Me = Ne$, $pdN < \infty$ és N minden nullától különböző direkt összeadandójának*

Loewy-magassága 2.

Nemtriviális számolásokkal, az előbbiekre alapuló rekurzív konstrukciót használva kihozható az alábbi fontos lemma is, mely speciális projektív feloldások létezését bizonyítja:

4.8. Lemma: *Ha feltesszük, hogy $M \in L_2(A)$ projektív dimenziója véges, mondjuk k, akkor létezik M-nek egy olyan minimális projektív feloldása, mely a következőképp írható fel:*

$$0 \to R_k \oplus Q_k \overset{\alpha_k}{\to} \dots \overset{\alpha_2}{\to} R_1 \oplus Q_1 \overset{\alpha_1}{\to} R_0 \oplus Q_0 \overset{\alpha_0}{\to} M \to 0,$$

ahol minden R_i az $e_1A, e_2A, \dots, e_mA$ modulusok példányainak direkt összegeként áll elő és teljesül, hogy $\alpha_i(R_i) \subseteq Ker(\alpha_{i-1}|_{R_{i-1}})$. Sőt, ekkor a következő eAe-modulusokból álló sorozat Me-nek egy minimális projektív feloldását adja:

$$0 \to R_k e \to \dots R_1 e \to R_0 e \to Me \to 0.$$

4.9. Következmény: *Ha $M \in L_2(A)$ projektív dimenziója véges, akkor $pd_{eAe}(Me) \leq pd_A M$.*

Ebből már nem nehéz levezetni a következőket:

4.10. Következmény: *Ha $M \in L_2(A)$ projektív dimenziója véges, akkor létezik olyan k nemnegatív egész, hogy $(\epsilon\Omega)^k(\epsilon(M)) = 0$.*

4.11. Következmény: *Legyen M véges projektív dimenziós A-modulus! Legyen $C(M) = [M]$, ha $M \in L_2(A)$, $C(M) = [\Omega(M)]$ máskülönben! Ekkor létezik olyan c egész, hogy $L^c(C(M)) = 0$. Az első esetben $pdM \leq c + d$ is teljesül, a másodikban $pdM \leq c + d + 1$.*

Most érkezett el az ideje a $G(A)$ csoport definiálásának. Mint régebben, most is tekintsük azokat az $m \times 2$-es mátrixokat, melyekre L megfelelően sokszor való alkalmazásával eljutunk a nullmátrixig! Ezek részcsoportjának jele $G_0(A)$. Megint legyen p az a szám, ahány különböző végtelen projektív dimenziós S_i egyszerű modulus fordul elő J/J^2-ben, q pedig ahány J^2-ben és J/J^2-ben egyszerre. Végül legyen $G(A)$ az a részcsoportja $G_0(A)$-nak, ahol az első oszlopban csak az első p elem, a második oszlopban csak az első q elem különbözhet nullától, és legyen r ennek a $G(A)$ szabad Abel-csoportnak a rangja! Válasszuk c-t annak a legkisebb nemnegatív egésznek, melyre $L^c(G(A)) = 0$! Ekkor az eddigi következményeket az alábbi tétellel foglalhatjuk össze:

4.12. Tétel: *Ha A olyan jobb-Artin-gyűrű, hogy $J^3 = 0$, akkor finitisztikus dimenziója véges, sőt:*

$$fin.dimA \leq c + d + 1,$$

ahol $c \leq r \leq p + q \leq 2m$. Ha minden egyszerű jobb oldali A-modulusnak végtelen a projektív dimenziója, akkor $fin.dimA \leq r$ is igaz.

Felmerülhet a kérdés, hogy lehet-e gyengíteni a $J^3 = 0$ feltételt valahogyan. A válasz az, hogy többféleképpen is!

Az első módszer Small eredményére támaszkodik [SMA], melyet kombinálva a most kapott tétellel, kapjuk az alábbit:

4.13. Tétel: *Ha A-ban van egy olyan I' kétoldali ideál, melyre $J^3 \subseteq I' \subseteq J$, és melyet bal oldali modulusnak tekintve projektív dimenziója egy k véges szám, akkor is véges A finitisztikus dimenziója, még pontosabban: $fin.dim(A) \leq rang(G(A/I')) + d + k + 2$, ahol d azon A/I' fölötti jobb oldali egyszerű modulusok projektív dimenzióinak szuprémuma, melyeknek projektív dimenziója véges.*

Ennek az a hátránya, hogy mindkét oldali modulusstruktúráról kell információval rendelkeznünk hozzá, ráadásul a becslés is elég durva. Van viszont egy más módszer, ahol elég mindent csak jobb oldali modulusként tekinteni. Ez is Green és Zimmermann-Huisgen cikkében [GZH] olvasható, lényege a következő:

Mostantól kezdve tehát J^3-nek nem kell nullának lennie. Tegyük fel, hogy a G gráf tartalmaz egy olyan H részgráfot, amely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy bármely két H-beli pont között vezető él is benne van H-ban (azaz H *feszített részgráf*), H-ból nem vezet kifelé él (azaz H úgynevezett *nyelő*), és hogy minden H-beli csúcshoz tartozó e_i esetén $e_i J^3$-ben csak véges projektív dimenziós egyszerű kompozíciófaktorok fordulnak elő! Ugyanúgy, mint korábban, most is vezessük be az e_i, $\tilde{e}_j$, S_i, $\tilde{S}_j$ és d jelöléseket, de csak a H-beli csúcsoknak megfelelő primitív idempotenseket és egyszerű modulusokat vegyük bele a felsorolásba és a csoportosításba!

Mivel H egy nyelő, ezért ha egy M modulus tetején, azaz M/MJ-ben csak az előbb felsorolt S_i és $\tilde{S}_j$ modulusok fordulnak elő direkt összeadandóként, akkor M és M összes szizigijének minden kompozíciófaktora is ezek közül az egyszerűek közül kerül ki. Az ilyen jobb oldali végesen generált modulusok kategóriájának jele a továbbiakban mod$-H$ lesz. $L_2'(H)$ pedig ennek az a részkategóriája, melyben az olyan M-ek fordulnak elő, melyekre MJ^2 minden egyszerű kompozíciófaktora véges projektív dimenziós, azaz az $\tilde{S}_j$-ok között szerepel. A kezdeti feltevés miatt minden $k \geq 1$ és minden $N \in$ mod$-H$ esetén $\Omega^k(N) \in L_2'(H)$ teljesül.

Az $M \mapsto [M]$ leképezés is lényegében az lesz, mint korábban: egy $M \in L_2'(H)$ modulus esetén a k-adik sor első eleme S_k multiplicitása M tetején, azaz M/MJ-ben, második eleme pedig a multiplicitás a második szinten, azaz MJ/MJ^2-ben. A hullámozott S-ekkel nem foglalkoztunk, így az eredmény egy $m \times 2$-es mátrix lesz.

Módosítanunk kell az ϵ funktort is. Egy $M \in L_2'(H)$ modulus esetén legyen $F(M)$ a legnagyobb olyan részmodulusa MJ-nek, melynek kompozíciófaktorai $\tilde{S}_{m+1}, \ldots, \tilde{S}_n$ közül valók! Definíció szerint ekkor MJ^2 részmodulus $F(M)$-ben. Legyen π a természetes leképezés $M/F(M)$-ből M/MJ-be, végül definiáljuk ϵ-t a következőképpen: $\epsilon(M) = \pi^{-1}((M/MJ)e)$! Nyilvánvaló, hogy ahol a régi ϵ értelmezve volt, ott megegyezik ezzel az újjal. Ellenőrizhető, hogy a 4.4-es, 4.5-ös és 4.6-os Lemmák szó szerint igazak, ha feltételüket úgy módosítjuk, hogy $M \in L_2'(H)$ szerepeljen benne. Ezekből az következik, hogy ha egy ilyen M-re $L^c[M] = 0$, akkor M projektív dimenziója vagy végtelen, vagy legfeljebb $c + d$. Megint csak azt kell megmutatni, hogy létezik olyan $c \geq 1$, hogy ha egy $L_2'(H)$-beli M projektív dimenziója véges, akkor $L^c[M] = 0$. Ehhez további számolások szükégesek, melyeket itt nem részletezek. A számolások segítségével a 4.9-es és 4.10-es Következmények megfelelői ezután igazolhatók.

A $G_0(H)$, majd a $G(H)$ mátrixcsoportok hasonlóan definiálhatók, mint eddig, különbség csak p és q meghatározásában van: p legyen az a szám, ahány egyszerű modulus fordul elő

$eJ/eJ^2 \oplus \tilde{e}J/\tilde{e}J^2$-ben $S_1, \ldots, S_m$ közül, q pedig az, ahány előfordul $eJ/eJ^2 \oplus \tilde{e}J/\tilde{e}J^2$-ben és $eJ^2/eJ^3 \oplus \tilde{e}J^2/\tilde{e}J^3$-ben egyszerre.

Végül vezessük be a G' jelölést arra a gráfra, melyet G-ből úgy kapunk, hogy elhagyjuk belőle a H-beli éleket! Ekkor az alábbi tétel mondható ki:

4.14. Tétel: *Tegyük fel, hogy G-ben van egy H feszített részgráf, amely nyelő, és minden pontjához tartozó e_i esetén e_iJ^3-nek csak véges projektív dimenziós egyszerű kompozíciófaktorai vannak! Ha emellett még az is teljesül, hogy H'-ben nincs irányított kör, akkor l-lel jelölve a H'-beli leghosszabb irányított út hosszát, igaz a következő:*

$$fin.dimA \leq rang(G(H)) + d + l + 1 \leq p + q + d + l + 1 \leq 2m + d + l + 1.$$

Mindent összefoglalva tehát:

4.15. Következmény: *Ha J^3-nek, mint jobb oldali modulusnak minden egyszerű kompozíciófaktora véges projektív dimenziós, akkor fin.dim$A \leq r + d + 1$, ahol r a $G(A)$ szabad Abel-csoport rangja, d pedig a véges projektív dimenziós egyszerű modulusok projektív dimenzióinak szuprémuma. Az is igaz, hogy $r \leq p + q$, ahol p azon különböző egyszerű, végtelen projektív dimenziós modulusok száma, melyek J/J^2-ben előfordulnak, q pedig azoké, melyek J/J^2-ben és J^2/J^3-ben is egyszerre.*

Az eddig ismertetett módszer bebizonyítja ugyan a finitisztikus dimenzió végességét, de a kapott korlát egyrészt sok esetben gyenge, másrészt nehezen számítható ki, a becslésben szereplő d miatt ismerni kell hozzá az egyszerű modulusok projektív dimenzióit. Zimmermann-Huisgen egy későbbi cikkében [ZH3] azonban kiküszöböli ezeket a problémákat. Egy n-től, vagyis a különböző egyszerű modulusok számától függő felső becslést ad az eltűnő radikálköbbel rendelkező véges dimenziós algebrák finitisztikus dimenziójára: fin.dim$A \leq n^2 + 1$. Sőt, véges globális dimenzió esetén azt is bebizonyítja, hogy ekkor fin.dim$A \leq n^2 - n$. Schofield [SCH] korábban bizonyította már egy olyan g természetes számokon értelmezett függvény létezését, hogy az alaptesttől függetlenül minden olyan algebrának, melynek dimenziója vektortérként k, globális dimenziója vagy végtelen, vagy legfeljebb $g(k)$. Erről a függvényről azonban szinte semmit sem lehet tudni. Ebben a speciális esetben viszont a kapott eredmény azt jelenti, hogy $g(k) = k^2 - k$ megfelelő függvény.

Az új cikk alapötlete nem változott a korábbihoz képest, csak a technikai része: itt is a mátrixleképezéseken alapul a bizonyítás, mint korábban, de újabb mátrixcsoportokat is definiál. Tegyük fel, hogy az $S_1, \ldots, S_n$ egyszerű modulusok úgy vannak számozva, hogy $i \leq j$ esetén pd$S_i \leq$ pdS_j, természetesen végtelen is lehet közöttük. A rövidség kedvéért S_i projektív dimenzióját ezentúl d_i-vel jelölöm, a következetességért pedig legyen $d_0 = -1$! A leglényegesebb új definíciók a következők:

Minden $0 \leq t \leq n-1$ esetén különböző mátrixokat rendelünk M-hez, ezeket $[M]_t$-vel jelölöm. A mátrixok megint 2 oszloposak, de most $n - t$ sorból állnak. Az i-edik sor első oszlopában S_{i+t} multiplicitása áll M/MJ-ben, a második oszlopban ugyanez MJ-ben. Az L endomorfizmus helyett is lesz $L_0, \ldots, L_{n-1}$, értelemszerűen definiálva őket az $(n-t) \times 2$-es egész számokból álló mátrixok halmazain.

Ezután az $S_{t+1}, \ldots, S_n$ egyszerű modulusok közül válogassuk ki azokat, melyek előfordulnak

$(e_{t+1} + \ldots + e_n)J^2$-ben, és jelöljük ezek halmazát $\{S_{t(1)}, \ldots, S_{t(q_t)}\}$-vel!

Vezessük be az U_t mátrixcsoportokat, melyekben azok az $(n-t) \times 2$-es mátrixok az elemek, melyeknek a második oszlopának i-edik sorában csak akkor szerepelhet nullától különböző elem, ha S_{i+t} szerepel az előbb megadott halmazban! Látható, hogy ennek a csoportnak a rangja $n - t + q_t$, ami $2(n-t)$-vel becsülhető felülről.

Végül $G_t(A)$ legyen U_t-nek az a részcsoportja, melyben minden elemhez van olyan pozitív egész szám, hogy ennyiszer alkalmazva az L_t leképezést rá, már a nullmátrixot kapjuk! Lineáris algebrai tételek alapján tudható, hogy ha r_t-vel jelöljük ennek a szabad Abel-csoportnak a rangját, akkor $L_t^{r_t}$ már lenulláz benne minden elemet.

Ismét több, itt nem ismertetett technikai lemma segítségével juthatunk el a fő tételig:

4.16. Tétel: *Ha* $0 \leq t \leq n-1$, *akkor a következő becslések igazak:*

Ha $d_{t+1} < \infty$ *és* $G_t(A) = 0$, *akkor* $d_{t+1} \leq d_t + 1$.

Ha $d_{t+1} < \infty$ *és* $G_t(A) \neq 0$, *akkor* $d_{t+1} \leq d_t + min\{r_t, 2(n-t) - 1\}$.

Pontosabban: Ha $d_{t+1} < \infty$, *akkor vagy* $d_{t+1} \leq d_t + 1$, *vagy* $[S_{t+1}]_t \in G_t(A)$ *és* $d_{t+1} \leq d_t + a_{t+1}$, *ahol* a_{t+1} *az a minimális szám, amire* $L_t^{a_{t+1}}[S_{t+1}]_t = 0$.

Ha $d_t < \infty$, *de* $d_{t+1} = \infty$, *akkor fin.dim*$A \leq d_t + r_t + 1 \leq d_t + 2(n-t) + 1$.

Ez a legutóbbi eset, ahol $d_t < \infty$, de $d_{t+1} = \infty$, egybeesik a korábbi cikkben előforduló esettel, tehát ekkor $[M]_t = [M]$ és $G_t(A) = G(A)$. Ha ez $t = 0$-ra teljesül, azaz ha minden egyszerű modulus projektív dimenziója végtelen, akkor azt kapjuk, hogy fin.dim$A \leq 2n$, ami megegyezik a 4.2. Tétellel.

Ha viszont van véges és végtelen is közöttük, akkor m-mel jelölve a végtelen projektív dimenziósak számát, indukcióval könnyen bizonyítható az alábbi végső következtetés:

4.17. Következmény: *fin.dim*$A \leq n^2 - m(m-2) \leq n^2 + 1$.

Véges globális dimenziós esetben további számolásokkal kihozható az is, hogy ilyenkor $d_1 \leq 2n - 3$, $d_n \leq d_{n-1} + 1$, végül $2 \leq t \leq n-1$ esetén $d_t \leq d_{t-1} + 2(n-t)$. Mivel tudjuk azt, hogy gl.dim$A$ = pdS_n, ezért ezeket a becsléseket sorban összeadva kijön a felső korlát a globális dimenzióra:

4.18. Következmény: *gl.dim*$A \leq n^2 - n$.

4.3. Igusa és Todorov módszere

Nem sokkal az előző módszer megjelenése után Igusa és Todorov egy teljesen új ötletet alkalmazva, egyszerűbb módon jutott el a finitisztikus dimenzió végességének bizonyításához. A cikk fő ötlete, melyet a további általánosításhoz Wang is felhasznált [WAN]: Tekintsük azt a K szabad Abel-csoportot, melyet az összes $[M]$ szimbólum generál, ahol M végesen generált A-modulus, és faktorizáljuk K-t ezekkel a relációkkal:

1. $[A \oplus B] - [A] - [B]$
2. $[P] - [0]$, ha P projektív

Jelöljük ezt a faktort K_0-val! Ekkor tehát ez egy olyan szabad Abel, melyet a végesen generált, direkt felbonthatatlan, nem projektív A-modulusok izomorfiaosztályai generálnak. Mivel az Ω-val jelölt szizigiképzés felcserélhető a direkt összeggel és a projektív modulusokat nullába viszi, ezért az $L[M] = [\Omega(M)]$ leképezés egy $K_0 \to K_0$ homomorfizmus. A következő jelölés bevezetéséhez idézzük fel a Fitting-lemmát:

4.19. Lemma: *1. Ha R egy Noether-gyűrű, M egy R-modulus és f egy $M \to M$ endomorfizmus, akkor minden $X \subseteq M$ részmodulushoz van egy olyan $\eta_f(X)$ nemnegatív egész szám, hogy $\forall m \geq \eta_f(X)$ esetén $f^m(X)$ izomorf $f^{m+1}(X)$-szel.*

2. Ha $Y \subseteq X$ részmodulus, akkor $\eta_f(Y) \leq \eta_f(X)$.

3. Ha R Artin-algebra, akkor $M = Kerf^m \oplus Imf^m$, ha $m \geq \eta_f(M)$.

Jelöljük most K_0-nak egy végesen generált M modulus direkt összeadandói által generált részcsoportját $\langle addM \rangle$-mel, végül definiáljuk az alábbi két mennyiséget:

$\Phi(M) := \eta_L(\langle addM \rangle)$

$\Psi(M) := \Phi(M) + \sup\{\text{pd}N : \text{pd}N < \infty, N \text{ direkt összeadandója } \Omega^{\Phi(M)}(M)\text{-nek}\}$

Igusa és Todorov fő tétele a következő:

4.20. Tétel: *Ha $0 \to A \to B \to C \to 0$ egy rövid egzakt sorozat, ahol pd$(C) < \infty$, akkor pd$(C) \leq \Psi(A \oplus B) + 1$.*

Wang eredményéhez egy további egyszerű lemmára lesz szükség:

4.21. Lemma: *Ha $0 \to A \to B \to C \to 0$ egy rövid egzakt sorozat, ahol pd$(B) < \infty$, akkor pd$(B) \leq \Psi(\Omega A \oplus \Omega^2 C) + 2$.*

Bizonyítás: Van egy olyan, több helyen alkalmazott lemma, miszerint minden $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ rövid egzakt sorozathoz létezik egy P projektív modulus, hogy a következő sorozat is rövid egzakt: $0 \to \Omega Y \to \Omega Z \oplus P \to X \to 0$. Ezt kétszer alkalmazzuk a mi adott sorozatunkra, és kapunk egy Q projektívet, amire

$$0 \to \Omega^2 C \to \Omega A \oplus Q \to \Omega B \to 0$$

rövid egzakt. Itt ΩB-nek véges a projektív dimenziója, ezért erre alkalmazhatjuk a 4.20. Tételt. Így kapjuk, hogy $\text{pd}(\Omega B) \leq \Psi(\Omega^2 C \oplus \Omega A \oplus Q) + 1 = \Psi(\Omega A \oplus \Omega^2 C) + 1$.
Ebből pedig azonnal látszik, amit bizonyítani akartunk. □

4.22. Tétel: *Ha R Artin-gyűrű, melyre $J^{2l+1} = 0$ és R/J^l reprezentációvéges, akkor R kis finitisztikus dimenziója véges.*

Bizonyítás: Vegyünk egy M végesen generált R-modulust, melynek projektív dimenziója véges! Mivel $J^{2l+1} = 0$ és ΩM egy projektív modulus radikáljában van, ezért $\Omega(M)J^{2l} = 0$. R/J^l reprezentációvéges, legyen tehát az összes végesen generált, direkt felbonthatatlan R/J^l-modulus $C_1, C_2, \ldots, C_t$! Ekkor $\Omega(M)J^l$ és $\Omega M/\Omega(M)J^l$ is felépíthető ezek direkt összegeként: alkalmas a_i és b_i $(1 \leq i \leq t)$ nemnegatív egész számokkal $\Omega(M)J^l \cong \oplus C_i^{a_i}$ és $\Omega M/\Omega(M)J^l \cong \oplus C_i^{b_i}$. Ezekből felépíthető egy természetes egzakt sorozat: $0 \to \Omega(M)J^l \to \Omega M \to \Omega M/\Omega(M)J^l \to 0$, ahol a középső tag projektív dimenziója véges. Ezért alkalmazhatjuk rá a 4.21. Lemmát, így ezt kapjuk:

$$\mathrm{pd}(\Omega M) \leq \Psi(\Omega(\oplus C_i^{a_i}) \oplus \Omega^2(\oplus C_i^{b_i})) + 2 = \Psi((\oplus(\Omega C_i)^{a_i}) \oplus (\oplus(\Omega^2 C_i)^{b_i})) + 2 \leq$$
$$\leq \Psi(\oplus(\Omega C_i \oplus \Omega^2 C_i)) + 2$$

Itt az utolsó egyenlőtlenség azért igaz, mert a Φ definíciójából könnyen látszik, hogy $\Phi(A) \leq \Phi(A \oplus B)$ és $\Phi(A^m) = \Phi(A)$, ez pedig átvihető Ψ-re is.

Kaptunk tehát egy M-től független korlátot ΩM projektív dimenziójára, ezt 1-gyel megnövelve $\mathrm{pd}M$-re is, tehát $\mathrm{fin.dim}R < \infty$. □

Ez az eredmény picit általánosabban is megfogalmazható, a bizonyítás teljesen ugyanígy működik, részletesen megtalálható Smalø munkájában [SOS2].

4.23. Tétel: *Ha A Artin-algebra, I olyan ideál, hogy A/I reprezentációvéges, akkor*

$$sup\{pdM : pdM < \infty, I^2 M = 0\} < \infty.$$

A $J^3 = 0$ esetben a finitisztikus dimenzió végessége megkapható a 4.22. Tétel alkalmazásával $l = 1$ választással, hiszen $J^{2\cdot 1+1} = 0$ és R/J^1 reprezentációvéges. Konkrét felső becslést az alábbi állítás segítségével kaphatunk:

4.24. Állítás: *Ha M egy végesen generált, véges projektív dimenziós A-modulus, melynek Loewy-magassága 2, akkor* $pdM \leq \Psi(A/radA \oplus A/(radA)^2)+1$.

Bizonyítás: Ha P M-nek egy projektív fedője, akkor mivel M Loewy-magassága 2, $P/\mathrm{rad}^2 P$ is fedi M-et. Ekkor ha K-val jelöjük a magot, kapjuk a következő rövid egzakt sorozatot:

$$0 \to K \to P/rad^2 P \to M \to 0$$

Alkalmazva erre a 4.20. Tételt, kapjuk, hogy $\mathrm{pd}M \leq \Psi(K \oplus P/\mathrm{rad}^2 P) + 1$. De mivel a mag féligegyszerű, ezért direkt összeadandója $A/\mathrm{rad}A$ valamilyen hatványának, ezenkívül $P/\mathrm{rad}^2 P$ is direkt összeadandója $A/\mathrm{rad}^2 A$-nak, így a korábban már alkalmazott megjegyzés szerint $\Psi(K \oplus P/\mathrm{rad}^2 P) \leq \Psi(A/\mathrm{rad}A \oplus A/\mathrm{rad}^2 A)$. □

Végül lássuk, milyen felső korlát következik ebből a $J^3 = 0$ esetben a finitisztikus dimenzióra!

4.25. Tétel: *Ha A Artin-algebra, melyre* $J^3 = 0$*, akkor* $fin.dimA \leq \Psi(A/radA \oplus A/rad^2 A)+2$.

Bizonyítás: Minden M A-modulus első szizigijének Loewy-magassága legfeljebb 2, így alkalmazható az előző állítás. □

5. Rétegezett algebrák

A rétegezett algebrákra vonatkozó eredmények nagy része az ezredforduló tájáról és későbbről származik, emiatt ezekről nem esik szó Zimmermann-Huisgen összefoglaló művében [ZH2]. Kváziöröklődő algebrákra könnyű megmutatni, hogy azoknak már globális dimenziója is véges (legfeljebb $2(n-1)$). A standardul rétegezett algebrák egyfajta általánosítását adják a kváziöröklődőknek, ezekre Ágoston István, Lukács Erzsébet, D. Happel és L. Unger 2000-es cikkükben [ÁHLU] bizonyítják a finitisztikusdimenzió-sejtést. Egy még bővebb osztályra, a szigorúan rétegezett algebrákra is már majdnem megvan a bizonyítás: C. Paquette egy jelenleg (2008 elején) még ki nem adott munkájában [PAQ] megcsinálta az injektív finitisztikusdimenzió-sejtést. Ahhoz, hogy a projektív is azonnal meglegyen, az kellett volna, hogy a szigorúan rétegezett algebrák oppozitja is ilyen típusú legyen, de amint látni fogjuk, ez nem igaz.

5.1. Standardul rétegezett és kváziöröklődő algebrák

Rögzítsük az e_i primitív idempotensek sorrendjét, majd vezessük be a következő jelöléseket: legyen $\epsilon_i = e_i + e_{i+1} + \ldots + e_n$, ha $1 \leq i \leq n$, és $\epsilon_{n+1} = 0$!

5.1. Definíció: *Az i-edik (jobb oldali) standard modulus:* $\Delta_i = e_iA/e_iA\epsilon_{i+1}A$, *az i-edik valódi standard modulus:* $\overline{\Delta}_i = e_iA/e_i radA\epsilon_iA$.

Vagyis $\Delta_n = P_n$, ezután Δ_{n-1}-et úgy kapjuk, hogy P_{n-1}-ben kifaktorizálunk P_n homomorf képeivel, azaz az Ae_nA idempotens ideál képével P_{n-1}-ben (ami $e_{n-1}Ae_nA$), aztán Δ_{n-2} nem más, mint P_{n-2} faktorizálva P_n és P_{n-1} homomorf képeivel, azaz $e_{n-2}Ae_nA$-val és $e_{n-2}Ae_{n-1}A$-val, röviden $e_{n-2}A\epsilon_{n-1}A$-val, és így tovább. Látható, hogy így Δ_i a P_i maximális olyan faktora, melynek nincs S_j-vel izomorf kompozíciófaktora, ha $j > i$. Hasonló egyszerű meggondolásokkal látható, hogy $\overline{\Delta}_i$ pedig Δ_i olyan maximális faktora, melynek S_i pontosan egyszer fordul elő a kompozícióláncában. Emiatt a $\overline{\Delta}$-ok endomorfizmusgyűrűje féligegyszerű. Egy szemléletes példa az 5.1. rész végén található.

5.2. Definíció: *Egy A algebra standardul rétegezett, ha létezik olyan*

$$A_A = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_k \supset M_{k+1} = 0$$

úgynevezett standard filtrálása, hogy $\forall i\ \exists j : M_i/M_{i+1} \cong \Delta_j$

5.3. Definíció: *Egy A algebra kváziöröklődő, ha standardul rétegezett és minden i-re* $\Delta_i = \overline{\Delta}_i$.

Az előzőek szerint ez ekvivalens azzal, hogy standardul rétegezett és minden i-re S_i kompozíciómultiplicitása Δ_i-ben éppen 1. Kváziöröklődő algebrákra nem nehéz bizonyítani a finitisztikus dimenzió végességét, sőt, ennél többet sem:

5.4. Tétel: *Ha A egy kváziöröklődő algebra, akkor $pd\Delta_i \leq n-i$, $pdS_i \leq n+i-2$, ez utóbbi miatt pedig $gl.dimA \leq 2n-2$.*

Bizonyítás: Minden i-re felírható az alábbi rövid egzakt sorozat: $0 \to V_i \to P_i \to \Delta_i \to 0$, ahol V_i a kváziöröklődőség definíciója miatt felépíthető a $\Delta_{i+1}, \ldots, \Delta_n$ modulusokból. Emiatt $\mathrm{pd}\Delta_i \leq 1{+}\max\{\mathrm{pd}\Delta_j : j > i\}$. Mivel Δ_n projektív, ezért $\mathrm{pd}\Delta_n = 0$, ebből pedig indukcióval adódik az első állítás.

A másodikhoz írjuk fel minden i esetén a $0 \to U_i \to \Delta_i \to S_i \to 0$ egzakt sorozatot! Ebben U_i definíció szerint csak $S_1, \ldots S_{i-1}$-ből épül fel. Emiatt $\mathrm{pd}S_i \leq 1{+}\max\{\mathrm{pd}S_j, \mathrm{pd}\Delta_i : j < i\}$. Mivel $S_1 \cong \Delta_1$, ezért $\mathrm{pd}S_1 \leq n-1 = n+1-2$, ebből pedig indukcióval kijön $i \geq 1$ esetére is. □

Általában ha $\mathcal{H}$ modulusok egy halmaza, akkor az alábbi jelölést alkalmazzuk: $M_A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$, ha van olyan M-mel kezdődő filtrálás, hogy a faktorok mind $\mathcal{H}$-beliek. Így ha Δ jelöli az összes Δ_i halmazát, akkor a definíció átfogalmazva: A standardul rétegezett, ha $A_A \in \mathcal{F}(\Delta)$. Könnyen látható, hogy egy standardul rétegezett algebrában az alábbi részmoduluslánc megfelelő filtrálássá finomítható:

$$A = A\epsilon_1 A \supset A\epsilon_2 A \supset \ldots \supset A\epsilon_n A \supset A\epsilon_{n+1} A = 0$$

Emiatt ha az ilyen algebrák finitisztikus dimenziójának végességét akarjuk bizonyítani, akkor elég belátni az alábbi tételt:

5.5. Tétel: *Legyen e egy primitív idempotens, és tegyük fel, hogy az AeA_A idempotens ideál projektív! Ekkor ha fin.dim $A/AeA = k < \infty$, akkor fin.dim $A \leq k+2$.*

Ebből ugyanis indukcióval következik, hogy fin.dim$A \leq 2n-2$, hiszen rétegenként maximum 2-vel nőhet a finitisztikus dimenzió. A tétel bizonyításához az alábbi technikai lemma szükséges:

5.6. Lemma: *Ha $e \in A$ primitív idempotens, AeA_A projektív, és egy M_A modulus projektív dimenziója véges, akkor ha vesszük M-nek egy projektív fedőjét és az ebből készített*

$$0 \to \Omega \to P \to M \to 0$$

rövid egzakt sorozatot, akkor $\Omega \cap PeA \cong X \oplus (\oplus eA)$ valamilyen X-re, amire $Xe = 0$ teljesül.

Ennek segítségevel már nem túl bonyolult az *5.5. Tétel bizonyítása:* Ha adott egy M_A véges projektív dimenziós modulus, akkor az előző lemma jelöléseit használva van olyan X, melyre $Xe = 0$ és $\Omega \cap PeA \cong X \oplus (\oplus eA)$. Mivel $\Omega eA = (\Omega \cap PeA)eA$, ezért $\Omega eA \cong (X \oplus (\oplus eA))eA = \oplus eA$, vagyis ΩeA projektív. Felírhatjuk az alábbi természetes rövid egzakt sorozatot is:

$$0 \to \Omega eA \to \Omega \to \Omega/\Omega eA \to 0.$$

Mivel $\mathrm{pd}M < \infty$, ezért $\mathrm{pd}\Omega < \infty$, így $\mathrm{pd}(\Omega/\Omega eA_A) < \infty$. Van egy könnyű állítás, miszerint ha I egy idempotens ideál, amely A-modulusként projektív, akkor ha X és Y két tetszőleges A/I fölötti modulus, akkor minden $i \geq 0$ esetén $\mathrm{Ext}^i_A(X,Y) = \mathrm{Ext}^i_{A/I}(X,Y)$. Ebből persze azonnal látszik, hogy ha $\Omega/\Omega eA$-t nem A fölötti, hanem A/AeA fölötti modulusnak tekintjük, akkor is véges a projektív dimenziója. A tétel feltételét figyelembe véve kapjuk, hogy nem csak hogy véges, hanem $\leq k$ is igaz rá. Mivel AeA projektív, ezért tudjuk azt is, hogy ha egy $P'_{A/AeA}$ modulus projektív, akkor $\mathrm{pd}P'_A \leq 1$. Emiatt ha elkészítjük egy tetszőleges $N_{A/AeA}$ modulus projektív feloldását, és ez t hosszúságú, akkor A-modulusként tekintve legfeljebb $t+1$ hosszú lesz, így $\mathrm{pd}N_A \leq \mathrm{pd}N_{A/AeA} + 1$. Ezt a mostani esetre alkalmazva kapjuk, hogy $\mathrm{pd}(\Omega/\Omega eA_A) \leq k+1$. Már láttuk, hogy ΩeA_A projektív, ezt figyelembe véve tehát kijön, hogy $\mathrm{pd}\Omega_A \leq k+1$, emiatt pedig $\mathrm{pd}M \leq k+2$. □

A következő módszerrel a standardul rétegezett algebrák bal oldali finitisztikus dimenziójára is megkapjuk az előbbi $2n-2$-es korlátot. Ehhez olyan algebrákat tekintünk, melyek a valódi standard modulusokkal vannak rétegezve, azaz melyekre $A_A \in \mathcal{F}(\overline{\Delta})$. Bizonyítható, hogy ez ekvivalens azzal, hogy A^{opp} standardul rétegezett, vagyis ${}_AA \in \mathcal{F}(\Delta^o)$, ahol Δ^o a bal oldali standard modulusok halmaza. (Bizonyítás pl. [D]-ben.) A két legfontosabb lemma ebben a részben szintén bizonyítva van [ÁHLU]-ban:

5.7. Lemma: *Ha $A_A \in \mathcal{F}(\overline{\Delta})$, akkor minden M_A modulusra $\Omega^{n-1}(M) \in \mathcal{F}(\overline{\Delta})$.*

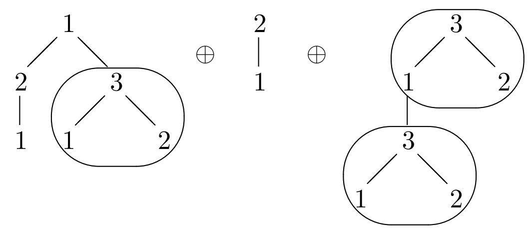
5.8. Lemma: *Ha $M \in \mathcal{F}(\overline{\Delta})$ és pd$M < \infty$, akkor pd$(M) \leq n-1$.*

Ennek a két lemmának az összekombinálásából már triviális a fő tétel:

5.9. Tétel: *Ha $A_A \in \mathcal{F}(\overline{\Delta})$, akkor fin.dim$A \leq 2n-2$.*

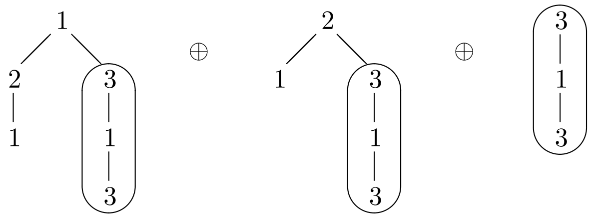
Végül következzen egy példa, ami bemutatja, hogy rajzban hogyan látszik a Δ-kkal és $\overline{\Delta}$-okkal való rétegezettség, és ami azt is szemlélteti, hogy ha $A_A \in \mathcal{F}(\overline{\Delta})$, akkor ${}_AA \in \mathcal{F}(\Delta^o)$:

5.10. Példa: Legyen A_A szerkezete a következő:



A bekarikázott részek izomorfak $\overline{\Delta}_3$-mal, hiszen P_3-nak ez a maximális olyan faktora, melyben csak egy darab S_3-mal izomorf egyszerű kompozíciófaktor szerepel. A három bekarikázott rész együtt alkotja az Ae_3A rétegező ideált. Ha ezzel faktorizálunk, a maradékban látható, hogy $\overline{\Delta}_2$ izomorf lesz P_2-vel, végül pedig $\overline{\Delta}_1 \cong S_1$. Tehát $A_A \in \mathcal{F}(\overline{\Delta})$. Viszont Δ-kkal már nem filtrálható, hiszen $\Delta_3 \cong P_3$, de P_1-ben nem ez szerepel részmodulusként.

Kiszámolható, hogy ${}_A A$ a következőképpen néz ki:



Itt Δ_3^o példányai vannak bekarikázva, látható, hogy Ae_3A ezekből felépíthető. Az A/Ae_3A algebra kettes típusú bal oldali projektívje lesz Δ_2^o, végül Δ_1^o pedig az 1-es egyszerű modulussal izomorf. Tehát ${}_AA \in \mathcal{F}(\Delta^o)$, viszont $\overline{\Delta}^o$-kkal már nem filtrálható, mert $\overline{\Delta}_3^o \cong \Delta_3^o/\mathrm{rad}^2\Delta_3^o$, ilyenekből viszont nem építhető fel egy réteg.

5.2. Szigorúan rétegezett algebrák

A standardul rétegezett algebráknál bővebb osztályt alkotnak az úgynevezett *szigorúan rétegezett* algebrák. Ezek definiálásához nem szükséges, de a hamarosan következő észrevételekhez jól jön, ha bevezetjük egy e primitív idempotens esetén a $\mathcal{P}_e$ halmazt, melynek elemei azok a modulusok, melyeknek egy minimális projektív feloldásában csak P_e valahány példányban vett direkt összegei fordulnak elő!

5.11. Definíció: *Ha e egy primitív idempotens, akkor az $I = AeA$ idempotens ideált szigorúan rétegező ideálnak nevezzük, ha létezik hozzá egy $\Lambda(e)$ lokális modulus, melyre minden e' primitív idempotens esetén $e'I \in \mathcal{F}(\Lambda(e))$.*

Fontos megjegyezni, hogy ekkor speciálisan teljesül, hogy $eI \in \mathcal{F}(\Lambda(e))$, tehát $\Lambda(e)$ faktora $eI = eA$-nak, tehát direkt felbonthatatlan. Egy későbbi lemmából könnyen látható lesz, hogy az is automatikusan igaz, hogy $\Lambda(e) \in \mathcal{P}_e$.

5.12. Definíció (1): *Egy A algebra szigorúan rétegezett, ha van olyan*

$$A = I_n \supset \ldots \supset I_1 \supset I_0 = 0$$

ideállánc, ahol $0 \leq i \leq n-1$ esetén I_{i+1}/I_i szigorúan rétegező ideál A/I_i-ben.

Azonnal látszik egy ezzel ekvivalens, rekurzív definíció is, illetve egy olyan, ami kikerüli a rétegező ideálok fogalmát:

5.12. Definíció (2): *Egy A algebra szigorúan rétegezett, ha lokális, vagy ha van olyan e primitív idempotens, hogy egyrészt AeA szigorúan rétegező ideál A-ban, másrészt A/AeA szigorúan rétegezett algebra.*

5.12. Definíció (3): *Egy A algebra szigorúan rétegezett, ha léteznek olyan $\Lambda(1), \Lambda(2), \ldots, \Lambda(n)$ modulusok, melyekre teljesül, hogy egyrészt minden $\Lambda(i)$ faktora a Δ_i standard modulusnak, más-*

részt minden $P_i \in \mathcal{F}(\Lambda(i), \Lambda(i+1), \dots, \Lambda(n))$.

A továbbiakhoz szükség lesz néhány lemmára, ami arra ad feltételt, hogy egy modulus $\mathcal{P}_e$-ben legyen. Az első lemma bizonyítása megtalálható [ÁDL]-ben, a másiké [APT]-ben.

5.13. Lemma: *Ha az* M *és* N *modulusokra igaz, hogy* $M \in \mathcal{F}(N)$*, akkor* $M \in \mathcal{P}_e$ *pontosan akkor teljesül, amikor* $N \in \mathcal{P}_e$.

Ebből már az is látszik, hogy mivel triviális módon $P_e \in \mathcal{P}_e$, és egy AeA szigorúan rétegező ideál esetén definíció szerint $P_e \in \mathcal{F}(\Lambda(e))$, ezért $\Lambda(e) \in \mathcal{P}_e$ is tejlesül. Ebből persze $AeA \in \mathcal{P}_e$ is következik.

5.14. Lemma: *Ha* M *egy* A*-modulus,* e *pedig egy idempotens elem, akkor* $M \in \mathcal{P}_e$ *pontosan akkor teljesül, ha minden* $i \geq 0$ *és minden* A/AeA *fölötti injektív* J *modulus esetén* $\mathrm{Ext}^i_A(M, J) = 0$.

Ezeket felhasználva és sok Ext-tel való számolással kihozható az alábbi lemma, és annak következményei is (ami most jön, az már [PAQ]-ban olvasható):

5.15. Lemma: *Tegyük fel, hogy* $I = AeA$ *szigorúan rétegező ideál* A*-ban,* M *pedig véges injektív dimenzióval rendelkező* A*-modulus. Ha* DM *első szizigijét* Ω*-val jelöljük, akkor* $I\Omega \in \mathcal{P}_e$.

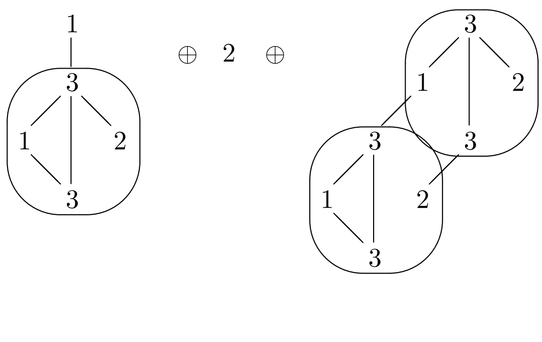
5.16. Következmény: *Ha* $I = AeA$ *szigorúan rétegező ideál* A*-ban, és* A/I *injektív finitisztikus dimenziója* m*, akkor* $\mathrm{fin.dim}A \leq m + 2$.

Tudjuk, hogy egy lokális algebra finitisztikus dimenziója 0, így indukcióval azonnal adódik a fő eredmény:

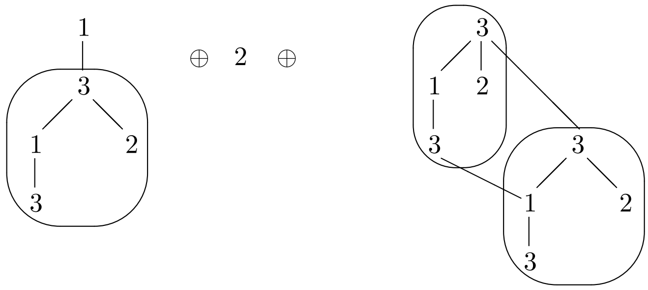
5.17. Tétel: *Egy szigorúan rétegezett algebra injektív finitisztikus dimenziója legfeljebb* $2n - 2$.

A fejezet bevezetőjében említettem, hogy ebből azért nem következik a projektív finitisztikus dimenzió végessége, mert egy szigorúan rétegezett algebra oppozitja nem feltétlenül szigorúan rétegezett. Erre nem könnyű példát találni, de nem is lehetetlen:

5.18. Példa: Legyen A_A a következő szerkezetű:

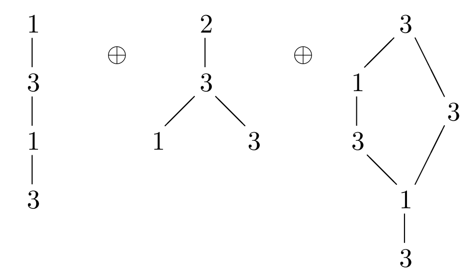


Erről ránézésre nem látszik, hogy miért szigorúan rétegezett, hiszen a bekarikázott építőelemek szerkezete nem ugyanaz. De megadható egy izomorfizmus, ami egy szemmel láthatóan szigorúan rétegezettbe viszi. Ha elkészítjük a gráfot és felírjuk a faktorizáló ideált generáló relációkat, majd a gráfban megfordítjuk a nyilakat, és a relációkat is fordított sorrendben írjuk fel, akkor megkapjuk ${}_A A$ vagy $A^{opp}_{A^{opp}}$ szerkezetét. Azért volt célszerű az algebrát ebben az alakban felírni, mert ha ebből az alakból készítjük majd el az oppozitot, akkor annak szebb struktúrája lesz. De előbb lássuk be, hogy ez az algebra izomorf egy szigorúan rétegezettel! Az algebra gráfjában 3 csúcs van és 4 él: legyen az 1-esből a 3-asba vezető nyíl β, a 3-asból az 1-esbe α, a 3-asból a 2-esbe γ, végül a 3-asból önmagába vezető hurokél a δ! Ekkor úgy kaphatjuk meg az algebrát, ha az $I = \left\langle \delta\alpha, \delta^2, \beta\alpha\beta\alpha, \alpha\beta\gamma, \beta\alpha\beta - \beta\delta \right\rangle$ ideállal faktorizálunk. Tekintsük azt az izomorfizmust, ami helyben hagyja $e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta$ és γ mindegyikét, δ-t viszont az $\alpha\beta - \delta$ elembe viszi! Ekkor az új relációk a következők lesznek: $\beta\alpha\beta\alpha, \alpha\beta\gamma, \beta\delta$ és $\alpha\beta\alpha - \delta\alpha$. Ha ez alapján rajzoljuk fel A_A szerkezetét, ezt kapjuk:



Ez pedig láthatóan szigorúan rétegezett, hiszen a bekarikázott részek itt már ugyanolyanok, tehát jók lesznek $\Lambda(e_3)$-nak.

Az eredeti algebrából elkészítve ${}_A A$-t, annak szerkezete a következő lesz:



Megfigyelhető, hogy erre ugyan nem teljesül a szigorúan rétegezettség definíciója, de nem sok hiányzik hozzá. Ezért édemesnek tűnik bevezetni az *általánosított szigorúan rétegezett algebrák* fogalmát:

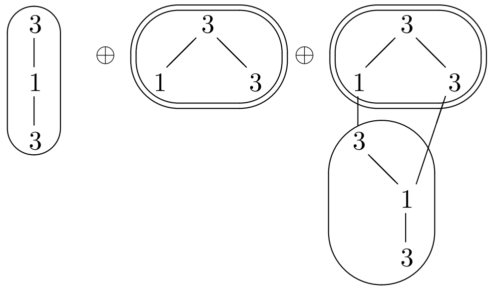
5.19. Definíció: *Egy AeA idempotens ideált általánosított szigorúan rétegező ideálnak nevezünk, ha vannak olyan $\Lambda_1(e), \Lambda_2(e), \ldots \Lambda_k(e)$ lokális modulusok, melyekre igaz, hogy minden $1 \leq i \leq k$ esetén $\Lambda_i(e) \in \mathcal{P}_e$ és $I \in \mathcal{F}(\Lambda_1(e), \ldots, \Lambda_k(e))$. Egy A algebra általánosítottan szigorúan* *rétegezett, ha van olyan*

$$A = I_n \supset \ldots \supset I_1 \supset I_0 = 0$$

ideállánc, ahol $0 \leq i \leq n-1$ *esetén* I_{i+1}/I_i *általánosított szigorúan rétegező ideál* A/I_i*-ben.*

Látható, hogy ez tényleg általánosítása a szigorú rétegezettségnek. Sejtés, hogy ezekre egyrészt hasonló módon igazolható az injektív finitisztikus dimenzió végessége, másrészt az is, hogy az általánosított szigorúan rétegezett algebrák oppozitja is ilyen típusú. Ha ezt tudnánk, akkor természetesen a projektíven definiált finitisztikusdimenzió-sejtés is igaz lenne erre az algebraosztályra.

Az előző példában (e_i-vel az oppozit idempotenseit jelölve) az $A^{opp}e_3A^{opp}$ ideál szerkezete:



Itt a bekarikázott részek jelentik a kétféle Λ modulust: az egyszeres karika $\Lambda_1(e_3)$-at, a dupla $\Lambda_2(e_3)$-at. Ha megvizsgáljuk a harmadik projektív modulus szerkezetét, láthatjuk, hogy az felépíthető két darab $\Lambda_1(e_3)$-ból is, ezért $\Omega(\Lambda_1(e_3)) \cong \Lambda_1(e_3)$, így a projektív feloldás során tényleg csak a hármas számú projektív modulusok fordulnak elő. Ha $\Lambda_2(e_3)$-at fedjük le, az első szizigi akkor is $\Lambda_1(e_3)$-mal izomorf, ezért onnantól kezdve már azok ismétlődnek a szizigik sorozatában. Emiatt teljesül tehát, hogy $\{\Lambda_1(e_3), \Lambda_2(e_3)\} \subseteq \mathcal{P}(e_3)$. Az $A^{opp}e_3A^{opp}$-tal faktorizálva pedig már csak

$$1 \oplus 2$$

marad, az pedig jól láthatóan általánosítottan szigorúan rétegezett.

6. A reprezentációdimenzió

A reprezentációdimenzió (rep.dim) fogalmát már 1970 előtt bevezették, de csak az utóbbi évtizedben derült ki, hogy milyen jól alkalmazható a finitisztikus dimenzió problémakörben.

6.1. Definíció: *Egy N_A modulus generátor, ha direkt összeadandóként tartalmazza az összes A fölötti direkt felbonthatatlan projektív modulust, kogenerátor pedig akkor, ha az összes direkt felbonthatatlan injektívet.*

6.2. Definíció: *A reprezentációdimenziója az összes olyan modulus endomorfizmusgyűrűjének globális dimenziójának minimuma, mely generátor és kogenerátor is, azaz:*

$$\mathrm{rep.dim}(A) = \min\{\mathrm{gl.dim}(\mathrm{End}_A(N)) : N = A \oplus DA \oplus M,\ M \text{ egy } A\text{-modulus}\}$$

Ezzel kapcsolatban a legalapvetőbb észrevételeket Auslander fogalmazta meg már 1970-ben:

6.3. Tétel: *1. A reprezentációdimenzió pontosan akkor 0, ha A féligegyszerű.*
2. A reprezentációdimenzió nem lehet 1.
3. A reprezentációdimenzió pontosan akkor 2, ha A reprezentációvéges.

Ennél többet azonban nagyon sokáig senki sem tudott róla mondani. Csak 2003-ban bizonyította Oszamu Ijama, hogy minden A véges dimenziós algebrára rep.dim$A < \infty$, de az továbbra is kérdés maradt, hogy például lehet-e az értéke 3-nál nagyobb. Hamarosan Raphaël Rouquier adott példát minden n-re olyan algebrára, melynek reprezentációdimenziója éppen n.

Igusa és Todorov cikkében [IT] a végső következtetés az, hogy ha rep.dim$A \leq 3$, akkor fin.dim$A < \infty$. 2008-ban A. Csang és S. Csang [ZZ] azt is bebizonyították, hogy ekkor fin.dim(eAe) is véges minden e idempotens elem esetén.

Van egy olyan tétel is (lásd: [A] és [DR]), miszerint minden A Artin-algebrához van olyan kváziöröklődő A' algebra és ebben olyan e idempotens, hogy $A \cong \mathrm{End}(eA') = eA'e$. Emiatt ha igaz lenne az, hogy minden kváziöröklődő algebra reprezentációdimenziója legfeljebb 3, akkor igaz lenne a finitisztikusdimenzió-sejtés is! Bizonyítás nélkül megadom az A' algebra konstrukcióját: Mivel A Artin, ezért van olyan m, hogy $J^m = 0$, ahol $J = \mathrm{rad}(A)$. Legyen k a minimális ilyen tulajdonságú szám! Ekkor $A' = \mathrm{End}_A(A/J \oplus A/J^2 \oplus \ldots \oplus A/J^k)$ jelöléssel teljesülni fog, hogy $A \cong eA'e$, ahol e a direkt összeg vetítését jelenti az utolsó összeadandóra, vagyis $A/J^k = A$-ra. Ahhoz, hogy A kváziöröklődő legyen, nem mindegy, hogy milyen sorrendben vannak benne a primitív idempotensek. A helyes számozás a következő: Bontsuk fel lokális modulusok direkt összegére az előbbi direkt összeget! Ekkor nyilván az összeadandók $M_{r,s} = f_r A / f_r J^s$ alakúak lesznek, ahol f_r-ek a primitív idempotensek A-ban. Az $M_{r,s}$ modulusokat rendezzük úgy sorba, hogy $M_{r,s}$ előrébb legyen, mint $M_{r',s'}$ pontosan akkor, ha $s > s'$, vagy ha $s = s'$, de $r \geq r'$! Ha ebben a sorrendben írjuk fel a direkt összeget, akkor az endomorfizmusgyűrűben kapott primitív idempotensek (vagyis a megfelelő komponensre való vetítések) olyan sorrendben fognak szerepelni, hogy A' kváziöröklődő lesz.

Csangék cikkükben egyéb feltételeket is megfogalmaznak arra, hogy mikor lesz fin.dim(eAe) véges. Összefoglalva néhány példát:

6.4. Tétel: *Ha A egy Artin-algebra, e egy idempotens eleme, akkor fin.dim(eAe)-ről tudjuk, hogy véges, ha az alábbiak valamelyike teljesül:*

1. rep.dim$A \leq 3$.

2. Az összes A fölötti modulus harmadik szizigijének összes direkt összeadandóinak halmaza véges.

3. gl.dim$A \leq 3$.

4. Minden direkt felbonthatatlan projektív modulus minden direkt felbonthatatlan része projektív vagy egyszerű, minden direkt felbonthatatlan injektív modulus minden direkt felbonthatatlan faktora injektív vagy egyszerű (vagyis A stabilan öröklődő).

5. Minden direkt felbonthatatlan projektív modulus minden direkt felbonthatatlan része projektív vagy egyszerű (vagyis A gyengén stabilan öröklődő).

Ezek közül az 1-es bizonyítását írom le. A 2-es rész hasonló számolásokkal jön ki (ez megtalálható [ZZ]-ben), a 2-esből a 3-as pedig azonnal következik. A 4-es bizonyítása megtalálható [XI1]-ben, de következik az 5-ösből is, ami viszont szintén benne van [ZZ]-ben. Az 1-es bizonyítása előtt néhány megjegyzést teszek: egy M modulus direkt felbonthatatlan összeadandóiból képzett direkt összegek kategóriáját add(M)-mel jelölöm, eA-t pedig $eAe-A$-bimodulusnak tekintjük majd mindig. Itt is felhasználjuk a 4.3. szakaszban használt Igusa-Todorov-féle Ψ függvényt, mely jelen esetben az eAe-modulusokon lesz értelmezve. A tétel bizonyításhoz szükség lesz az alábbi két lemmára, melyeknek bizonyítása [A]-ban és [XI]-ben olvasható:

6.5. Lemma: *Ha V_A egy generátor-kogenerátor és $n \geq 3$, akkor gl.dim(End(V)) $\leq n$ ekvivalens az alábbi állítással:*
Minden direkt felbonthatatlan X A-modulus esetén létezik egy olyan

$$0 \to V_{n-2} \to \ldots \to V_1 \to V_0 \to X \to 0$$

egzakt sorozat, melyben minden $V_i \in add(V_A)$, és melyre

$$0 \to Hom_A(V, V_{n-2}) \to \ldots \to Hom_A(V, V_0) \to Hom_A(V, X) \to 0$$

is egzakt.

6.6. Lemma: *Ha M egy tetszőleges eAe-modulus és $i \geq 0$, akkor van olyan (M-től függő) P projektív A-modulus, hogy*

$$\Omega^{i+2}_{eAe}(M) \cong \Omega_A(eA \otimes_{eAe} \Omega^{i+1}_{eAe}(M))e \cong \Omega^2_A(eA \otimes_{eAe} \Omega^i_{eAe}(M))e \oplus Pe.$$

A 6.4. Tétel 1. részének bizonyítása: Mivel rep.dim$A \leq 3$, ezért létezik egy olyan V generátor-kogenerátor, melynek globális dimenziója legfeljebb 3. Így a 6.5. Lemma $n = 3$ választással alkalmazható: van tehát olyan V_1 és V_0 add(V)-ben, hogy $0 \to V_1 \to V_0 \to X \to 0$ és $0 \to \mathrm{Hom}_A(V, V_1) \to \mathrm{Hom}_A(V, V_0) \to \mathrm{Hom}_A(V, X) \to 0$ is egzakt. Ha M egy véges projektív dimenziós eAe-modulus, akkor $\Omega_A^2(eA \otimes_B M)$ egy A-modulus, így ezt X helyébe behelyettesítve kapunk két egzakt sorozatot. Az elsőre alkalmazva a $\mathrm{Hom}_A(eA, -)$ funktort, kapjuk:

$$0 \to V_1 e \to V_0 e \to \Omega_A^2(eA \otimes_{eAe} M)e \to 0.$$

A 6.6 Lemmát $i = 0$-val alkalmazva kapunk egy P projektív modulust, melyre $\Omega_{eAe}^2(M) \cong \Omega_A^2(eA \otimes_{eAe} M)e \oplus Pe$. Ha az imént kapott rövid egzakt sorozatunk második és harmadik tagjához hozzáteszünk egy $\oplus Pe$ direkt összeadandót, továbbra is egzakt marad, de így a harmadik tagban már felismerhető a lemma alkalmazásával kapott modulus. Így végeredményben az alábbi rövid egzakt sorozatot kapjuk:

$$0 \to V_1 e \to V_0 e \oplus Pe \to \Omega_{eAe}^2(M) \to 0.$$

Most alkalmazhatjuk a 4.20. Tételt, kihasználjuk, hogy $V_0, V_1 \in \mathrm{add}(V)$, valamint a Ψ-re vonatkozó egyszerű észrevételeket (melyek szerint $\Psi(Y^m) = \Psi(Y)$ és $\Psi(Y) \leq \Psi(Y \oplus Z)$), így azt kapjuk, hogy $\mathrm{pd}(\Omega_{eAe}^2(M)) \leq \Psi(V_1 e \oplus V_0 e \oplus Pe) + 1 \leq \Psi(Ve \oplus Ae) + 1$, M projektív dimenziója pedig ennél 2-vel nagyobb. Végeredményben tehát $\mathrm{fin.dim}(eAe) \leq \Psi(Ve \oplus Ae) + 3$. $\square$

Ebben a témában az utóbbi években (beleértve 2008-at is) egyre több cikk jelenik meg, de talán ez volt az, amelyik a legtöbbet adja hozzá a finitisztikusdimenzió-sejtés megoldásához. A többi cikkel ebben a dolgozatban nem foglalkozom. Talán azt érdemes megemlíteni még, hogy a kínai J. Wei 2008. áprilisi munkájában [WEI] már tovább megy annál, mint amiről most szóltam: bebizonyítja, hogy a finitisztikusdimenzió-sejtés nem csak abból következne, ha minden kváziöröklődő algebra reprezentációdimenziója legfeljebb 3 lenne, hanem már abból is, ha minden kváziöröklődő A algebrának létezne olyan $A \subseteq A'$ kiterjesztése, hogy azonos az egységelemük, rad$A$ balideál A'-ben, és A' vagy monomiális algebra, vagy rep.dim$A' \leq 3$.

7. A finitisztikusdimenzió-sejtések cáfolatai

A bevezető részben említettem, hogy általánosságban már megválaszolták a finitisztikus dimenzióra vonatkozó sejtéseket: mindegyikre készítettek ellenpéldát. Ebben a fejezetben kettőt írok le közülük, először azt, ami bizonyítja, hogy a kis és a nagy finitisztikus dimenzió nem feltétlenül egyezik meg még véges dimenziós algebrák esetén sem, vagyis hogy számít, hogy csak a végesen generált modulusokat vesszük-e bele a definícióba. Ezután pedig ismertetek egy gyűrűt, ami ugyan nem véges dimenziós algebra, de egy erős végességi feltételnek eleget tesz, nevezetesen: *szemiprimér* gyűrű (vagyis radikálja nilpotens és a radikál szerinti faktora Artin), de finitisztikus dimenziója mégis végtelen. Ez általánosságban cáfolja meg majd a második sejtést.

7.1. Az első finitisztikusdimenzió-sejtés cáfolata

Tekintsük tehát a kis és nagy finitisztikus dimenzió megegyezőségét állító sejtést! Az ezt megcáfoló legelső példát B. Zimmermann-Huisgen készítette [ZH1], ebben az eltérés a kétféle érték között 1 volt. Hat évvel később S. O. Smalø adott példát [SOS1] minden n természetes szám esetén olyan algebrára, amire a különbség éppen n. Rádaásul az első példában (ami egy bonyolult monomiális algebra volt) a kis finitisztikus dimenzió nagyobb volt, mint 1, és a radikál köbe sem volt nulla. Egyébként is, ha egy monomiális algebrában $J^3 = 0$, akkor bizonyítható, hogy a kétféle érték megegyezik. Smalø példájában azonban teljesül, hogy $J^3 = 0$, és az is, hogy a kis finitisztikus dimenzió értéke csak 1.

Van más mód is arra, hogy tetszőlegesen nagy különbséget kapjunk a két érték között, legalábbis ha ismerjük azt a példát, ahol a különbség 1. Hiszen könnyen bizonyítható, hogy ha A_1 és A_2 véges dimenziós algebrák a T algebrailag zárt test fölött, akkor $\mathrm{fin.dim}(A_1 \otimes A_2) = \mathrm{fin.dim}A_1 + \mathrm{fin.dim}A_2$, és ugyanez igaz a nagy finitisztikus dimenzióra is. Emiatt a példa n-edik tenzorhatványában a különbség éppen n lesz. Persze az így kapott algebra sem rendelkezik az előbb említett egyszerű tulajdonságokkal.

Most arra adunk egy A_n-nel jelölt példát, hogy $\mathrm{fin.dim}A_n = 1$ és $\mathrm{Fin.dim}A_n = n$ (tehát a különbség $n-1$). Legyen G_n a következő irányított gráf:

$$\begin{tikzcd}
n \arrow[r, bend left, "\rho_n"] \arrow[r, "\sigma_n"] \arrow[r, bend right, "\tau_n"'] & n-1 \arrow[r, bend left, "\rho_{n-1}"] \arrow[r, "\sigma_{n-1}"] \arrow[r, bend right, "\tau_{n-1}"'] & \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \arrow[r, bend left, "\rho_3"] \arrow[r, "\sigma_3"] \arrow[r, bend right, "\tau_3"'] & 2 \arrow[r, bend left, "\rho_2"] \arrow[r, "\sigma_2"] \arrow[r, bend right, "\tau_2"'] & 1 \arrow[r, bend left, "\rho_1"] \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[r, bend right, "\tau_1"'] & 0 \arrow[loop above right, "\beta"] \arrow[loop below right, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Legyen I_n az az ideál, amit a következő utak generálnak: α^2, β^2, $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, $\rho_1\alpha$, $\sigma_1\alpha$, $\tau_1\beta$, valamint minden $1 \le i \le n-1$ és $x, y \in \{\rho, \sigma, \tau\}$ esetén $x_{i+1}x_i - y_{i+1}y_i$, végül ugyanilyen i-kre és x, y-ra: $y_{i+1}x_i$, de itt most feltéve, hogy $x \neq y$. Jelölje A_n a TG_n/I_n relációkkal faktorizált gráfalgebrát! Ekkor A_n, mint önmaga fölötti modulus szerkezete:

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ / & & \backslash \\ 0 & & 0 \end{array} \oplus \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & / & | & \backslash & \\ 0 & & 0 & & 0 \\ | & & | & & | \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array} \oplus \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & / & | & \backslash & \\ 1 & & 1 & & 1 \\ & \backslash & | & / & \\ & & 0 & & \end{array} \oplus \cdots \oplus \begin{array}{ccccc} & & n & & \\ & / & | & \backslash & \\ n-1 & & n-1 & & n-1 \\ & \backslash & | & / & \\ & & n-2 & & \end{array}$$

7.1. Állítás: *A_n kis finitisztikus dimenziója* 1.

Bizonyítás: Abból indulunk ki, hogy ha egy M modulusnak a projektív dimenziója 1, akkor annak olyan Q projektív fedése van, hogy a P mag is projektív, vagyis ilyenkor a modulusunk egy olyan $P \to Q$ projektív modulusok között menő beágyazás komagja, ahol a kép Q radikáljában van. Be fogjuk látni, hogy egy ilyen komag Loewy-magassága szükségképpen 3. Márpedig ha M egy másik modulus szizigije volna, akkor benne lenne egy projektív modulus radikáljában, de itt szemmel láthatóan a projektívek radikáljának magassága legfeljebb 2. Tehát semmilyen ΩN projektív dimenziója nem lehet 1, tehát ha valaminek véges a projektív dimenziója, akkor csak legfeljebb 1 lehet, így a fin.dim$A \le 1$. Azért nem 0, mert akkor a nagy finitisztikus dimenzió is 0 lenne, de mindjárt bizonyítva lesz, hogy nem annyi.

De miért 3 egy ilyen komag hosszúsága? Egyáltalán: milyen lehet egy $f : P \to Q$ projektív modulusok közötti beágyazás, ahol a kép a radikálban van? Mivel csak P_0 Loewy-magassága 2, a többié 3, ezért nyilvánvaló, hogy P csak P_0-ok valahány példányban vett direkt összege lehet. P_0-ból pedig csak önmagába, P_1-be és P_2-be megy nemnulla homomorfizmus, tehát a szituáció a következő:

$$f : P_0^m \to P_0^{m_0} \oplus P_1^{m_1} \oplus P_2^{m_2}$$

Itt a kép tehát a radikálban van benne. Jelölje π_i a vetítést $P_0^{m_0} \oplus P_1^{m_1} \oplus P_2^{m_2}$-ről $P_i^{m_i}$-re! Ekkor $\pi_0 f$ és $\pi_2 f$ képe is féligegyszerű (magassága 1), ez látszik, ha megnézzük a P_i-k szerkezetét. Tehát tulajdonképpen egy $\pi_1 f : P_0^m \to P_1^{m_1}$ beágyazásunk van. De ez csak úgy lehet, ha $m_1 \ge m$. Viszont $P_1^{m_1}$ radikálnégyzetének $3m_1$ a vektortér-dimenziója, ezzel P_0^m képenek a metszete viszont csak $2m$ dimenziós, tehát a kép nem fedi le az egész radikálnégyzetet, így a komag Loewy-magassága nem lehet 2. □

7.2. Állítás: *A_n nagy finitisztikus dimenziója n.*

Bizonyítás: Az, hogy a Fin.dim nem haladhatja meg n-et, abból látszik, hogy a nullás csúcs kivételével a gráfban egyik csúcs sem tartozik irányított körhöz, így ha valahol egy szizigi projektív fedésében előfordul direkt összadandóként egy projektív modulus, akkor mivel itt a mag már benne van a radikálban, ezért ennek fedésében a továbbiakban már nem fordul elő ugyanez a projektív. Emiatt legfeljebb n lépésben vagy elfogynak a projektívek (és ekkor a pd $\le n$), vagy csak a P_0 marad, ami viszont végtelen projektív dimenziót okoz.

Fin.dim $\ge n$: Itt csak a konstrukciót írom le, ennek helyességét nem túl bonyolult számolásokkal ellenőrizni lehet. Jelölje P_a^∞ a P_a projektív modulus megszámlálhatóan végtelen sok példányban vett direkt összegét, és legyen $e_{0,i}$ illetve $e_{1,i}$ P_0^∞ illetve P_1^∞ azon eleme, amelyben minden helyen nulla áll, kivéve az i-edik helyet, ahol e_0 illetve e_1! Definiáljuk a $\Phi : P_0^\infty \to P_1^\infty$ homomorfizmust, amelyre $\Phi(e_{0,2i-1}) = e_{1,2i-1}\tau_1 + e_{1,i}\sigma_1$ és $\Phi(e_{0,2i}) = e_{1,2i}\tau_1 + e_{1,i}\rho_1$ teljesül! Kiszámolható, hogy ez egy olyan beágyazás, melynek komagját ha X_1-gyel jelöljük, akkor X_1 talpa S_0^∞-nel izomorf. Megvizsgálva az algebra szerkezetét, észrevehetjük, hogy ez az X_1 beágyazható P_2^∞-be úgy, hogy talpaik megegyeznek. Az ezáltal kapott faktormodulust jelöljük X_2-vel, ennek Loewy-magassága 2 és talpa S_1^∞-nel izomorf. Ezt beágyazhatjuk P_3^∞-be, ezt az eljárást pedig X_n-ig folytathatjuk, itt ér véget. Így megkapjuk az alábbi egzakt sorozatot:

$$0 \to P_0^\infty \to P_1^\infty \to \ldots \to P_n^\infty \to X_n \to 0,$$

ezzel tehát készítettünk egy olyan modulust, melynek projektív dimenziója n. □

7.2. Egy végtelen finitisztikus dimenziós gyűrű

Az itt leírt példát E. Kirkman és J. Kuzmanovich adta 1990-ben [KK]. Nemcsak azért érdekes ez a példa, mert finitisztikus dimenziója végtelen, hanem azért is, mert könnyen átalakítható véges globális dimenziós algebrákká, melyeknek globális dimenziója tetszőlegesen nagy, ám Loewy-magasságuk csak 4, a fölöttük vett különböző egyszerű modulusok izomorfiaosztályainak száma pedig csak kettő. Ez bizonyítja azt is, hogy a 4. fejezetben már említett Schofield-féle g függvény, amely a vektortér-dimenziótól függő korlátot ad a globális dimenzióra, nem fejezhető ki csupán a Loewy-magassággal és az egyszerű modulusok számával.

A példa gráfja két csúcsból áll, melyek között mindkét irányban megszámlálhatóan végtelen sok él megy. Jelöljük az 1-es csúcsba érkező éleket a_i-vel, a 2-esbe menőket b_i-vel. A gráfalgebrát faktorizáljuk azzal az ideállal, melyet az alábbi relációk generálnak:

$b_ia_jb_k = 0$ minden i, j, k esetén,
$a_ib_{i+j} - a_{i+j}b_{i+j} = 0$, ha $j \geq 1$,
$a_ib_j = 0$, ha $i > j$, és
$b_ia_i = 0$ minden i-re.

Könnyen látható, hogy ekkor a következő halmaz megfelelő bázist ad: $\{e_i, a_i, b_i, a_ib_i, b_ia_j, a_ib_ia_j : i \neq j\}$. Hogy tudjunk projektív dimenziókat számolni, érdemes felírni az alábbi jobb oldali annullátorokat (rövid számolással ellenőrizhető a helyességük):

$\mathrm{Ann}^R(a_1) = e_2A$,
$\mathrm{Ann}^R(b_1) = a_1A \oplus e_1A$,
$\mathrm{Ann}^R(a_2) = b_1A \oplus e_2A$,
$\mathrm{Ann}^R(b_2) = a_2A \oplus a_1b_1A \oplus e_1A$,
$\mathrm{Ann}^R(a_1b_1) = \mathrm{Ann}^R(b_1)$,

$i \geq 3$ esetén:

$\mathrm{Ann}^R(a_i) = b_1A \oplus \ldots \oplus b_{i-1}A \oplus e_2A$,
$\mathrm{Ann}^R(b_i) = a_iA \oplus a_1b_1A \oplus \ldots \oplus a_{i-1}b_{i-1}A \oplus e_1A$, végül
$\mathrm{Ann}^R(a_ib_i) = \mathrm{Ann}^R(b_i)$.

Ezek után tekintsük az alábbi, bármilyen x-re felírható rövid egzakt sorozatot:

$$0 \to Ann^R(x) \to A \to xA \to 0$$

Ebből rögtön látszik az előbbi felsorolás figyelembevételével, hogy $\mathrm{pd}(a_1A) = 1$, $\mathrm{pd}(b_1A) = 2$,

$\mathrm{pd}(a_2A) = 3$ és így tovább. Emiatt tehát r-fin.dim$A = \infty$.

Ha nem végtelen sok nyilat teszünk bele a gráfba, hanem minden irányba csak i darabot, és a relációkat is ennek megfelelően kiválogatjuk, akkor véges dimenziós algebrákat kapunk, legyen ezek jele A_i! Látszik, hogy ezekben az esetekben is csak kétféle egyszerű modulus van, és hogy $(\mathrm{rad}A_i)^4 = 0$. Be fogjuk látni, hogy a globális dimenzió nem végtelen, viszont i növelésével tetszőlegesen naggyá tehető.

Tudjuk, hogy gl.dim$A_i = \sup\{\mathrm{pd}S_1, \mathrm{pd}S_2\}$, és hogy S_1 első szizigije $b_1A_i + \ldots + b_iA_i$, S_2-é pedig $a_1A_i + \ldots + a_iA_i$, ezért elég tehát ezeknek a projektív dimenzióját tudni.

Kiszámolható, hogy $\Omega(S_1)$-ben az összeg helyett direkt összeget is írhatunk, így elég az összeadandók projektív dimenzióját tudni. De az annullátorok pontosan ugyanazok, mint a végtelen dimenziós esetben, ezért az itt szereplő modulusok projektív dimenziói is, emiatt tehát $\mathrm{pd}(b_1A_i \oplus \ldots \oplus b_iA_i) = 2i$, ezért $\mathrm{pd}S_1 = 2i + 1$.

$\Omega(S_2)$-nél egy picit bonyolultabb a helyzet. Itt egy indukciós bizonyítás adható az alábbi, általában is felírható rövid egzakt sorozat figyelembevételével:

$$0 \to I' \cap xA_i \to I' \oplus xA_i \to I' + xA_i \to 0$$

Az indukciós lépésben a korábban kiszámolt projektív dimenziókat is felhasználjuk: $\mathrm{pd}(a_jA_i) = 2j - 1$ és $\mathrm{pd}(a_jb_jA_i) = 2j$, valamint kihasználjuk azt is, hogy $(a_1A_i + \ldots + a_{j-1}A_i) \cap a_jA_i = a_jb_jA_i$. Ezekből kijön, hogy $\mathrm{pd}(\Omega(S_2)) = 2i + 1$, tehát $\mathrm{pd}S_2 = 2i + 2$. Emiatt tehát gl.dim$A = 2i + 2$.

8. Rokon problémák, sejtések

Több olyan sejtés ismert, melyek levezethetőek lennének, ha tudnánk, hogy igaz a finitisztikusdimenzió-sejtés. Ezek a gyengébb sejtések sincsenek még általánosságban bizonyítva, csak speciális esetekben. Ebben a fejezetben egy rövid áttekintést adok a legfontosabbakról.

A legismertebb közülük minden bizonnyal az 1958-ból származó klasszikus Nakajama-sejtés [N], melyet 1975-ben M. Auslander és I. Reiten általánosított [AR]. Még ezek sincsenek bizonyítva, pedig gyengébbek, mint a finitisztikusdimenzió-sejtés, hiszen abból következnek. Természetesen az általánosítottból is következne a klasszikus. Kimondásukhoz célszerű definiálni a kvázi-Frobenius gyűrűk fogalmát:

8.1. Definíció: *Egy R gyűrű kvázi-Frobenius, ha ${}_RR$ vagy R_R injektív, és R bal- vagy jobb-Artin. (A négy lehetséges kombináció ekvivalens.)*

8.2. Sejtés (A klasszikus Nakajama-sejtés): *Ha A egy véges dimenziós algebra egy T test fölött, melyre igaz, hogy ${}_AA$ egy minimális injektív feloldásában a szereplő injektív modulusok mind projektívek is, akkor A kvázi-Frobenius.*

8.3. Sejtés (A (jobb oldali) általánosított Nakajama-sejtés): *Ha A egy véges dimenziós algebra, akkor A_A egy minimális injektív feloldásában minden direkt felbonthatatlan injektív jobb A-modulus előfordul direkt összeadandóként.*

Az utóbbi a D funktor segítségével úgy is megfogalmazható, hogy ${}_{DA}DA$ egy minimális projektív feloldásában minden direkt felbonthatatlan bal oldali projektív modulus előfordul. Ez még úgy is mondható, hogy minden bal oldali egyszerű S modulushoz van olyan nemnegatív i, hogy $\mathrm{Ext}^i_A(DA, S) \neq 0$. Ezt nevezik az S-re vonatkozó *Nunke-feltételnek.*

Ha a legutóbbi ekvivalens megfogalmazásban nem követeljük meg, hogy S egyszerű legyen, hanem minden $M \neq 0$ modulusra állítjuk a Nunke-feltétel teljesülését, akkor egy erősebb sejtést kapunk, ezt szokták Nunke-sejtésnek is nevezni, és még ez is következne a finitisztikusdimenzió-sejtésből:

8.4. Állítás: *Ha igaz a finitisztikusdimenzió-sejtés, akkor minden $M \neq 0$ modulusra van olyan nemnegatív i, hogy $\mathrm{Ext}^i_A(DA, M) \neq 0$.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy valamilyen X modulusra nem teljesül a Nunke-feltétel, azaz minden $i \geq 0$ esetén $\mathrm{Ext}^i_A(DA, X) = 0$! Tudjuk, hogy DA nem más, mint a direkt felbonthatatlan injektívek direkt összege, ezért ha X injektív lenne, akkor létezne nullától különböző homomorfizmus DA-ból X-be, így $i = 0$-ra mégsem lenne $\mathrm{Ext}_A^0(DA, X) = 0$. Tehát X nem injektív, és indukcióval az is bizonyítható, hogy véges injektív dimenziós sem lehet. Ha vesszük X egy injektív kofeloldását:

$$0 \to X \to I_0 \to I_1 \to \ldots \to I_k \xrightarrow{f_k} \ldots,$$

és erre alkalmazzuk a $\mathrm{Hom}(DA, -)$ funktort, akkor a kezdeti feltétel miatt egzakt sorozatot kapunk:

$$0 \to Hom(DA, X) = 0 \to Hom(DA, I_0) \to Hom(DA, I_1) \to \ldots \to Hom(DA, I_k) \xrightarrow{(f_k)_*} \ldots.$$

Ismert, hogy $\mathrm{Hom}(DA, DA) \cong A$, tehát ennek a direkt összeadandóiból összeállítható, a sorozatban szereplő $\mathrm{Hom}(DA, I_j)$-k A fölötti projektív modulusokkal izomorfak. Emiatt ez a sorozat minden k esetén $(f_k)_*$ komagjának egy projektív feloldása. Méghozzá minimális, mert ha lehetne rövidebb, akkor már X feloldása is valahol felhasadt volna. Így minden k-ra találtunk k projektív dimenziós modulust, ami ellentmond a finitisztikus dimenzió végességének. $\square$

H. Tacsikava 1973-as cikkében [T] szintén megfogalmaz két sejtést, melyekről ő és Jamagata [Y] bebizonyítják, hogy a két sejtés együttes igazsága ekvivalens a Nakajama-sejtés igazságával.

8.5. Sejtés (Első Tacsikava-sejtés): *Ha minden $i > 0$ esetén $Ext_A^i(DA, A) = 0$, akkor A kvázi-Frobenius.*

8.6. Sejtés (Második Tacsikava-sejtés): *Ha A kvázi-Frobenius algebra, M pedig olyan A-modulus, melyre minden $i > 0$ esetén $Ext^i(M, M) = 0$, akkor M projektív.*

Ránézesre egyszerűnek tűnik, de mégsincs bizonyítva a *Gorenstein-féle szimmetria-sejtés* sem:

8.7. Sejtés: *Ha A véges dimenziós algebra, akkor $id(A_A) < \infty \iff id({}_AA) < \infty$.*

A finitisztikusdimenzió-sejtésből nem következne, de a gráfalgebrás témához és a projektív dimenziókhoz szorosan kapcsolódik a most következő, csak néhány speciális esetben (pl. monomiális algebrák esetén) bizonyított sejtés:

8.8. Sejtés (Erős huroknélküliség-sejtés): *Ha az A algebra gráfjában egy csúcsnál van hurokél, akkor az ahhoz a csúcshoz tartozó egyszerű modulus projektív dimenziója végtelen. Ebből következik, hogy ha a globális dimenzió véges, akkor a gráfban nem lehet hurokél.*

Irodalomjegyzék

[A] M. Auslander, *Representation dimension of Artin Algebras*, Queen Mary College Math. Notes, Queen Mary College, London, 1971.

[ÁDL] Ágoston I., V. Dlab, Lukács E., *Strictly stratified algebras*, Algebra Proc. Intern. Alg. Conf. on the Occassion of the 90th birthday of A. G. Kurosh, Moscow, 1998 (2000) 17-26.

[ÁHLU] Ágoston I., D. Happel, Lukács E., L. Unger, *Finitistic dimension of standardly stratified algebras*, Comm. Algebra, 28 (2000) 2745-2752.

[APT] M. Auslander, M. I. Platzeck, G. Todorov, *Homological Theory of Idempotent Ideals*, Trans. Amer. Math. Soc., 332 (1992) 667-692.

[AR] M. Auslander, I. Reiten, *On a generalized version of the Nakayama conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc., 52 (1975) 69-74.

[ASS] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, *Elements of Representation Theory of Associative Algebras*, Toruń, 1997.

[B] H. Bass, *Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings*, Trans. Amer. Math. Soc., 95 (1960) 466-488.

[BH] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 39, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1993.

[D] V. Dlab, *Quasi-hereditary algebras revisited*, An. St. Univ. Ovidius Constantza, 4 (1996), 43-54.

[DH] P. Dräxler, D. Happel, *A proof of the generalized Nakayama conjecture for algebras with* $J^{2l+1} = 0$ *and* A/J^l *representation finite*, J. Pure and App. Algebra, 78 (1992) 161-164.

[DR] V. Dlab, C. M. Ringel, *Every semiprimary ring is the endomorphism ring of a projective module over a quasi-hereditary ring*, Proc. Amer. Math. Soc., 107 (1) (1989) 1-5.

[GKK] E. L. Green, E. Kirkman, J. Kuzmanovich, *Finitistic dimensions of finite-dimensional monomial algebras*, J. Algebra, 136 (1) (1991) 37-50.

[GZH] E. Green, B. Zimmermann-Huisgen, *Finitistic dimension of artinian rings with vanishing radical cube*, Math. Zeit., 206 (1991), 505-526.

[IT] K. Igusa, G. Todorov, *On the finitistic global dimension conjecture for Artin algebras*, Representations of algebras and related topics, 201-204, Fields Inst. Commun., 45, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[IZ] K. Igusa, D. Zacharia, *Syzygy pairs in a monomial algebra*, Proc. Am. Math. Soc., 108 (1990), 601-604.

[KK] E. Kirkman, J. Kuzmanovich, *Algebras with large homological dimensions*, Proc. Am. Math. Soc., 109 (1990), 903-906.

[MOC] H. Mochizuki, *Finitistic global dimension for rings*, Pacific J. Math., 15 (1965), 249-258.

[N] T. Nakayama, *On algebras with complete homology*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 22 (1958), 300-307.

[NAG] M. Nagata, *Local rings*, Wiley, New York, USA, 1962.

[PAQ] C. Paquette, *Strictly stratified algebras revisited*, kézirat

[SCH] A. H. Schofield, *Bounding the global dimension in terms of the dimension*, Bull. London Math. Soc., 17 (1985) 393-394.

[SMA] L. W. Small, *A change of rings theorem*, Proc. Am. Math. Soc., 19 (1968) 662-666.

[SOS1] S. O. Smalø, *The supremum of the difference between the big and little finitistic dimensions is infinite*, Proc. Am. Math. Soc., 126, (9) (1998), 2619-2622.

[SOS2] S. O. Smalø, *Finitistic dimension conjectures*, 1991 Mathematics Subject Classification. 16E10, 16G10, 16G20, 16P10.

[SRS] S. Rubinstein-Salzedo, *Finitistic Dimensions of Monomial Algebras*, 2007., http://www.albanyconsort.com/simon/monalg.pdf

[T] H. Tachikawa, *Quasi-Frobenius rings and generalizations. QF-3 and QF-1 rings*, Springer-Verlag, Berlin, 1973, Notes by Claus Michael Ringel, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 351.

[WAN] Y. Wang, *A note on the finitistic dimension conjecture*, Comm. Algebra, 22 (7) (1994) 2525-2528.

[WEI] J. Wei, *Finitistic and Representation Dimensions*, 2008., http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0803/0803.3364v3.pdf

[XI] C. Xi, *On the finitistic dimension conjecture III: Related to the pair $eAe \subseteq A$*, J. Algebra (2008), kézirat

[XI1] C. Xi, *Representation dimension and quasi-hereditary algebras*, Adv. Math., 168 (2002), 193-212.

[Y] K. Yamagata, *Frobenius algebras*, Handbook of algebra, Vol. 1, North-Holland, Amsterdam, (1996), 841-887

[ZH1] B. Zimmermann-Huisgen, *Homological domino effects and the first finitistic dimension conjecture*, Invent. Math., 108 (1992) 369-383.

[ZH2] B. Zimmermann-Huisgen, *The finitistic dimension conjectures - A tale of 3.5 decades*, Abelian Groups and Modules (Padova 1994.), Math. Appl., Vol. 343, Kluwer Academic Pudlishers, Dordrecht 1995., pp. 501-517.

[ZH3] B. Zimmermann-Huisgen, *Bounds on finitistic and global dimension for artinian rings with vanishing radical cube*, J. Algebra, 161 (1993) 47-68.

[ZH4] B. Zimmermann-Huisgen, *Predicting syzygies over monomial relations algebras*, Manuscripta Math., 70 (1991) 157-182.

[ZZ] A. Zhang, S. Zhang, *On the finitistic dimension of Artin algebras*, J. Algebra, (2008), doi: 10.1016/j.jalgebra.2007.12.011