Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Erdős Dóra
Matematikus hallgató

A Clar-szám és a koherens ciklikus sorrend kapcsolata

Szakdolgozat

Témavezető:
Frank András, tanszékvezető egyetemi tanár
Operációkutatási tanszék

Budapest, 2008.

Tartalomjegyzék

1 Bevezetés

Eric Clar vegyész nagy méretű szénhidrogén molekulák (Polycyclic aromatic hydrocarbons) vizsgálatával foglalkozott. Ezek a molekulák öt- és hatszögekből álló rácsot alkotnak, melyek csúcsaiban helyezkednek el a szénatomok. Minden atomnak három szomszédja van. Mivel az atomok négy kötést tudnak létesíteni, az egyik kötés kettős kötés lesz. Ilyen módon, ha gráfként tekintünk a molekulára, akkor egy három reguláris, öt- és hatszöglapokból álló síkgráfot látunk, melyben adott egy teljes párosítás. A molekula egy hatszöglapját aromásnak nevezik, ha minden második kötése kettős kötés, azaz gráfként tekintve minden második éle benne van a teljes párosításban. Clar kísérleti úton azt állapította meg (1964-ben), hogy ezek a molekulák akkor a legstabilabbak egyfajta kémiai értelemben, ha a páronként nem szomszédos (élidegen) aromás lapok száma a lehető legnagyobb. Az ő tiszteletére a molekulában lévő aromás lapok maximális számát a molekula Clar-számának nevezik.

Láthatjuk, hogy gyakorlati jelentősége is van egy molekula Clar-számának a meghatározásának. Jelenleg eredmények csak speciális alakú molekulákra ismertek. Az egyik legáltalánosabb eredmény, mely olyan molekulákkal foglalkozik, melyek rácsában csak hatszögek találhatók. Ezen molekulák Clar-számát először Abeledo és Atkinson [2] adta meg. Cikkükben lineáris programot írtak fel a molekula Clar-számára, majd ennek maximumát a dualitás tétel segítségével határozták meg.

Jelen dolgozat második fejezetében a Clar-szám kombinatorikus megfelelőjével és annak általánosításával foglalkozunk. Egy molekula Clar-száma megfeleltethető egy irányított gráfban a nyelő pontok számának. A kettős kötések átrendezése ebben a gráfban egy egyirányú vágás átfordításának felel meg. Így általában vizsgálhatjuk egy irányított gráf csúcsainak azon részhalmazait, melyek pontjai nyelővé alakíthatók egyirányú vágások átfordításával. Egy gráf Clar-számán a legnagyobb méretű ilyen halmazt értjük. Ismertetünk egy szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy adott halmaz pontjai nyelővé alakíthatók-e, és egy ismert algoritmust is bemutatunk az átfordítandó vágások megkeresésére. A gráf Clar-számát Cameron és Edmonds Coflow tételével [5] határozzuk meg. Definiáljuk a nyelővé alakítható halmazok és a Clar-szám egy általánosítását. Jellemzést adunk a megfelelő általánosabb csúcshalmazra és szintén a Coflow tétel segítségével meghatározzuk a halmaz maximális méretét. Érdekesség, hogy Minty tétele következik az általánosított Clar-számra vonatkozó eredményeinkből:

1.1. Tétel *[Minty, [1]]*:
Adott $G = (V, E)$ gráf csúcsai pontosan akkor színezhetőek k színnel, ha van az éleknek olyan irányítása, melyben minden körben mindkét irányba legalább az élek k-adrésze mutat.

Egy látszólag teljesen másik témához vezet Gallai Tibor 1964-es sejtése. A dolgozat fő célja a két téma közötti párhuzam bemutatása.

Rédei bizonyította 1934-ben, hogy minden erősen összefüggő tournamentben van Hamilton-út. 1959-ben Camion belátta, hogy egy tournament pontosan akkor erősen összefüggő, ha van benne Hamilton-kör. Ez utóbbi állítást úgy is megfogalmazhatjuk, hogy abban az erősen összefüggő gráfban, aminek a stabilitási száma 1 a csúcsok lefedhetők egy irányított körrel. Ebből az állításból természetesen adódik Gallai sejtése, melyet Stéphane Bessy és Stéphan Thomassé bizonyított 2004-ben, így most már tételként mondható ki:

1.2. Tétel *[Bessy, Thomassé [4]]*:
Ha egy erősen összefüggő gráfban a maximális stabil halmaz mérete α, akkor csúcsai lefedhetők α darab irányított körrel.

Először ennek a bizonyításnak a kapcsán definiálták egy gráf csúcsainak koherens ciklikus sorrendjét. A koherens ciklikus sorrendhez tartozó fogalom a csúcsoknak egy ciklikusan stabil részhalmaza. Az általunk ismert legteljesebb módon Sebő foglalkozott cikkében [8] a ciklikusan stabil halmazok tulajdonságaival. A dolgozat harmadik fejezetében ezt szeretnénk bemutatni. Bebizonyítunk egy halmaz ciklikus stabilságára vonatkozó szükséges és elégséges feltételt és megadjuk a maximális méretét. Általánosítás képpen beszélhetünk k ciklikusan stabil halmaz uniójáról. Ezekre is ismert szükséges és elégséges feltétel, valamint a maximális elemszámra vonatkozó tétel is.

A dolgozat fő eredményét a negyedik fejezetben ismertetjük. Bemutatjuk, hogy a Clar-szám témakörének fogalmai ekvivalensek a koherens ciklikus sorrend témakörének megfelelő fogalmaival. Így a struktúra és minmax tételek egy az egyben megfeleltethetőek egymásnak. Azért lehet ez az eredmény hasznos, mert így a két témában rejlő még megoldatlan kérdések bármelyik nyelven megfogalmazhatóak.

Az ötödik fejezetben a koherens ciklikus sorrendben szereplő *hátra-élek* egy átfogalmazásával nyert úgy nevezett *lapos lefogást* vizsgáljuk és ennek párhuzamát a koherens ciklikus sorrenddel.

Az utolsó fejezetben leírunk egy jelenleg még megoldatlan, de az eddigiekhez nagyon hasonló problémát, a gráf Fries-számának meghatározását.

Köszönettel tartozom Frank Andrásnak a rengeteg segítségért, rám szánt időért és a nagyon izgalmas témáért, amit tőle kaptam.

2 Nyelőstabil halmazok

2.1 Technikai bevezető

Jelen dolgozatunkban csak az olyan gráfok (molekulák) Clar-számával foglalkozunk, melyek rácsában nincsen öt- csak hatszög. Ez azért van, mert kihasználjuk, hogy a szóban forgó gráf páros.

Figyeljük meg, hogy azok a molekulák, amiknek a rácsa csak hatszögekből áll síkbarajzolt, 2-összefüggő páros gráfot határoznak meg, melyben van teljes párosítás. Vizsgálatunkhoz azonban gyengébb feltétel is elég lesz. Olyan síkbarajzolt páros gráfokkal foglalkozunk, amelyekben van teljes párosítás.

Definiáljuk ezen páros síkgráfoknak egy irányítását. Legyen $D = (S, T; A)$ a páros gráf, ahol S és T a csúcsok két osztálya, A az élek halmaza. Először irányítsunk minden élt S-ből T-be. Ez adja a $\overrightarrow{D}$ irányítást. Majd M-mel jelölve a gráf egy teljes párosítását kapjuk $\overrightarrow{D}_M$ irányítást M éleinek megfordításával. Így minden teljes párosítás él S-be, a többi él pedig T-be van irányítva. Figyeljük meg, hogy ezzel az irányítással az aromás lapok pontosan a jól irányított 6 hosszú körök lesznek.

2.1. Definíció:
A dolgozat további részében *irányított körnek* nevezzük a jól irányított köröket, és *körnek* az olyan köröket, melyeknek mindkét irányba mutathatnak élei.

Most vegyük a fenti irányítással ellátott síkgráf irányított síkduálisát. Azaz vegyük a síkgráf irányítatlan értelemben vett duálisát. Rögzítsük a síknak egy irányítását. Ezután a duális gráf éleit úgy irányítsuk,hogy a hozzá tartozó eredeti él óramutató járásával ellentétes elforgatottja legyen.

2.2. Definíció:
$D = (V, A)$ digráf $v \in V$ pontja *nyelő*, ha minden v-re illeszkedő él v-felé van irányítva. v *forrás*, ha minden rá illeszkedő él v-től elfelé mutat.

2.3. Megjegyzés:
Az eredeti gráf egy aromás lapja a gráf fent definiált irányításával egy jól irányított 6 hosszú kör. Mivel ezek a körök tartalmazásra nézve minimális körök is, ezért ez az irányított duálisban egy nyelő- vagy egy forráspontot határoz meg.

2.4. Definíció:
$G = (V, E)$ gráf adott M párosítással. Ekkor G gráf *alternáló* köre egy olyan kör, melynek élei felváltva M-beliek és $E \setminus M$-beliek.

2.5. Definíció:
$D = (V, A)$ digráf *egyirányú vágása* a gráf csúcsainak olyan $V = S \cup^* T$ felosztása két diszjunkt halmazra, melyek között minden él S-ből T-be van irányítva. Mi ebben a dolgozatban egyirányú vágásnak végig az S és T között futó élek halmazát nevezzük.

2.6. Megjegyzés:
Az eredeti gráf egy alternáló köre az irányított duális gráf egy irányított vágásának felel meg, mert minden duális él minden körbeli él óramutató járásával ellentétes elforgatottja. Ha az alternáló kör mentén kicseréljük a párosítás éleket, az az eredeti gráfban megfordítja e mentén a kör mentén az élek irányítását és ez ekvivalens a duális gráfban az egyirányú vágás átfordításával.

Ezek alapján megállapítható, hogy a molekula Clar-száma egyenlő az irányított síkduálisában lévő nyelőpontok számával.

Ezért mostantól még általánosabban aciklikus irányított gráfokat fogunk vizsgálni.

2.7. Definíció:
Tetszőleges aciklikus irányított gráf *Clar-száma* az egyirányú vágások egymás utáni átfordításával egyszerre kapható nyelőpontok maximális száma.

2.2 Nyelő-stabil halmazok

2.8. Definíció:
Adott $D = (V, A)$ irányított gráf csúcsainak $S \subseteq V$ részhalmaza *nyelő-stabil*,

ha irányított vágások egymás utáni átfordításával elérhető, hogy minden pontja egyszerre nyelővé váljon.

2.9. Definíció:

Egy C kör *értéke* a körben a két irányba menő élek számának a minimuma, melyet $c(C)$ jelöl.

2.10. Tétel:

Legyen $D = (V, A)$ aciklikus irányított gráf. Ekkor $S \subseteq V$ pontosan akkor nyelő-stabil, ha stabil és minden C körre $|S \cap C| \leq c(C)$.

Bizonyítás: A szükségesség nyilvánvaló, hiszen egyrészt nem létezhetnek szomszédos nyelő pontok. Másrészt csak egy kört tekintve, ott minden nyelő pontnál megfordul az élek irányítása, így legfeljebb annyi nyelő pont lehet rajta, ahány irányváltás lehetséges. Mivel egyirányú vágás átfordításával nem változik a körön az adott irányba menő élek száma, így az irányváltások száma pontosan $c(C)$.

Az elégségesség bizonyításához explicit módon meg lehet adni egyirányú vágások sorozatát, melyek egymás utáni átfordításával S pontjai nyelőkké válnak. Ha S-nek még egyetlen pontja sem nyelő, akkor válasszunk egy tetszőleges $s_1 \in S$ pontot. Legyen Z az s_1-ből irányított úton elérhető pontok halmaza, úgy értve, hogy Z nem tartalmazza s_1-et, mint az út kezdőpontja. Ekkor Z-ből nem lép ki él és $s_1 \notin Z$ (azaz "nem érünk körbe irányított úton"), így Z valódi egyirányú vágást határoz meg melynek átfordításával s_1 nyelővé válik. Ugyanis ha $s_1 \in Z$ lenne, akkor lenne egy jól irányított C kör D-ben, melynek s_1 csúcsa. De ekkor $0 = c(C) \geqq |S \cap C| \geq 1$, ami ellentmondás.

Ha S-nek már $k-1$ pontja nyelő akkor válasszunk a többi közül egy tetszőleges $s_k \in S$ pontot. Módosítsuk úgy D gráfot, hogy az $s_1 \ldots s_{k-1}$ pontokba menő összes élnek a fordítottját is vegyük bele az élek halmazába. Megint legyen Z az ilyen módon kibővített gráfban az s_k-ból irányított úton elérhető pontok halmaza, úgy értve, hogy Z nem tartalmazza s_k-t . Ekkor Z-ből nem jön ki él és $s_k \notin Z$, így valódi egyirányú vágást határoz meg, ami az új élek kihagyásával is az marad és aminek átfordításával s_k nyelővé tehető. Ha $s_k \in Z$ lenne, akkor s_k rajta van egy jól irányított U-beli C körön. Ha ezen rajta van valamelyik s_i $(i \leq k-1)$ pont, akkor ott az eredeti gráfban két ellentétes irányú él találkozik, így ez eggyel számít bele C értékébe. C bármely másik pontján az élek az eredeti irányítás szerint haladnak át, így ott az élek nem váltanak irányt és nem is számítanak bele az értékbe. Mivel s_k is rajta van C-n, de ott nincs irányváltás kapjuk, hogy az eredeti gráfban $c(C) \leq |C \cap S| - 1$, ami ellentmondás. Ezzel beláttuk, hogy a tétel feltétele elégséges is. □

A következőkben meg szeretnénk állapítani egy gráfben a maximális nyelő-stabil halmaz méretét, ami definíció szerint a gráf Clar-száma. Ez az érték könnyen leolvasható lesz Cameron és Edmonds 1992-ben megjelent *Coflow tételéből*.

2.11. Definíció:
Egy lineáris programot *teljesen duálisan egészértékűnek* (TDI) mondunk, ha duális optimuma minden egészértékű célfüggvényre egész vektoron is felvétetik.

Így egy lineáris program teljesen duálisan egészértékűségéből következik az is, hogy egész korlátozó vektor esetén az optimum értéke is egész.

2.12. Tétel *[Cameron,Edmonds [5], Coflow tétel]***:**
$D = (V, A)$ tetszőleges irányított gráf. $d = (d_v : v \in V)$, $d_v \in \mathbb{Q}$, $a = (a_v : v \in V)$, $b = (b_v : v \in V)$, $a_v, b_v \in \mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}$ d, a, b rögzítettek. Ekkor $w = (w_v : v \in V)$, $w_v \in \mathbb{Z}$ esetén az alábbi primál feladat TDI.

Primál:	*Duál:*
$\max\{\sum_{v\in V} w_v x_v\}$	$\min\{\sum_{C\in\mathcal{C}(D)} d(C)y_C + \sum_v a_v y_v - \sum_v b_v \bar{y}_v\}$
$x(C) \le d(C) : \forall C \in \mathcal{C}(D)$	$\sum_{v\in C \forall C \in \mathbb{C}} y_C + y_v - \bar{y}_v = w_v, \forall v \in V$
$b_v \le x_v \le a_v : \forall v \in V$	$y_C \ge 0 : \forall C \in \mathcal{C}(D), y_v \ge 0, \bar{y}_v \ge 0 : \forall v \in V$

Ahol $\mathcal{C}$ irányított körök egy halmaza.

A Coflow tétel duális oldalának a jelentése a gráf nyelvén az, hogy a csúcsoknak egy olyan fedését keressük körökkel, élekkel és csúcsokkal, hogy a köröket d értékük szerinti multiplicitással véve a fedő elemek száma minimális legyen.

Bizonyítás: [5] Azt látjuk be, hogy a primál rendszer teljesen duálisan egészértékű (TDI). Mint ismeretes ilyenkor ha a primál oldalon a korlátozó vektor egészértékű, akkor létzik egśzértékű primál optimum is. A TDI tulajdonságot úgy látjuk be, hogy több lépésben felírunk egy olyan lineáris programot, mely az eredeti primál feladattal ekvivalens, és melynek a duálisa egy egész áramot határoz meg.

$$z_v := \begin{cases} x_v - b_v & b_v > -\infty \\ x_v & b_v = -\infty \end{cases}$$

Ezt a jelölést használva az eredetivel ekvivalens primál feladat:

$$(\text{csúcs}) := \begin{cases} \max\{\sum_{v\in V} w_v z_v + \sum_{b_v > -\infty} w_v b_v\} & \\ z(C) \le \sum_{b_v > -\infty} d_v - b_v + \sum_{b_v = -\infty} d_v & \forall C \in \mathcal{C}(D) \\ 0 \le z_v \le a_v - b_v & b_v > -\infty, v \in V \\ z_v \le a_v & b_v = -\infty, v \in V \end{cases}$$

Figyeljük meg, hogy így olyan alakot kaptunk, amiben b_v értéke mindenhol 0 vagy $-\infty$. Most d_v-nek, illetve a_v-nek az így kapott értékeket tekintve kapjuk az alábbi feladatot:

Legyen $N \subseteq V$

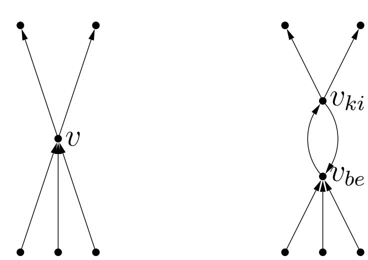
$$(\text{új csúcs}) := \begin{cases} \max\{\sum_{v\in V} w_v x_v\} & \\ x(C) \le d(C) & \forall C \in \mathcal{C}(D) \\ 0 \le x_v \le a_v & \forall v \in N \\ x_v \le a_v & \forall v \in V - N \end{cases}$$

Legyen $D' = (V', A')$ gráf, $F \subseteq A'$, és definiáljuk a költség és a korlátozó függvényt az élekre. $w = (w_a : a \in A')$, $d = d_a : a \in A')$, $w_a \in \mathbb{Q}$, $d_a \in \mathbb{Q} \cup \pm\infty$ Írjuk fel a következő programot:

$$(\text{él}) := \begin{cases} \max\{\sum_{a\in A'} w_a x_a\} & \\ x(C) \le d(C) & \forall C \in \mathcal{C}(D') \\ x_a \ge 0 & \forall a \in F \end{cases}$$

2.13. Állítás:
Az (új csúcs) feladat az (él) feladat egy speciális esete.

Bizonyítás: Minden $v \in V$ csúcsot hüzzunk szét egy v_{be}, illetve v_{ki} csúccsá úgy, hogy minden v-be menő él v_{be}-be menjen, minden v-ből induló v_{ki}-ből induljon, és legyen köztük egy $v_{be}vki$ és egy $v_{ki}vbe$ él.



$$w_e := \begin{cases} w_v & \text{ha } e = (v_{be}, v_{ki}) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$d_e := \begin{cases} d_v & \text{ha } e = (v_{be}, v_{ki}) \\ a_v - d_v & \text{ha } e = (v_{ki}, v_{be}) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ezekkel a jelölésekkel $x_e \geq 0$ (azaz $e \in F$) kivéve, ha $e = (v_{be}, v_{ki})$ és $v \in V - N$ $\square$

Írjuk fel az (él) feladatnak a duálisát:

$$\begin{cases} \min \sum_{C \in \mathcal{D}'} d(C) y_C & \\ \sum_{a \in C} y_C \geq w_e & \forall a \in F \\ \sum_{a \in C} y_C = w_e & \forall a \in A' - F \end{cases}$$

A fenti duálissal ekvivalens:

$$(*) := \begin{cases} \min \sum_{a \in A'} d_a z_a & \\ \sum_{h(e)=v} z_e - \sum_{t(e)=v} z_e = 0 & \forall v \in V \\ z_e \geq w_e & \forall a \in F \\ z_e = w_e & \forall a \in A' - F \\ z_e \geq 0 & \forall a \in A' \end{cases}$$

Az ekvivalencia igazolásához tekintsük az (él) duálisának egy y megoldását. $z_a := \sum a \in C y_C$ Ez a z kielégíti (*) rendszert és az optimum is megegyezik, mivel $\sum_{a \in A'} d_a z_a = \sum_{a \in A'} (d_a \sum_{a \in C} y_C) = \sum_{C \in \mathcal{C}} d(C) y_C$.

(*) feladatnak már könnyű megtalálni egy optimális megoldását. Ugyanis legyen z (*) egy megoldása. Ekkor z áramot határoz meg D'-ben. Az áramokról pedig tudott, hogy előállnak irányított körök uniójaként, valamint ha a kapacitások egészek, akkor az áram is egész és előáll egész körök uniójaként.

Ilyen módon a korábbi átalakításokat és ekvivalenciákat visszafelé olvasva az eredeti duál feladatnak is megkapjuk egy egész megoldását. $\square$

A Clar-szám meghatározásáról szóló tételben a Coflow tétel alábbi változatát használjuk, ahol az élekre van adva a d függvény.

2.14. Tétel *[Coflow tétel él változata]***:**
$D = (V, A)$ tetszőleges irányított gráf. $d = (d_a : a \in A)$, $d_a \in \mathbb{Q}$. $a = (a_v : v \in V)$, $b = (b_v : v \in V)$, $a_v, b_v \in \mathbb{Q}$ rögzítettek. Ekkor $w = (w_v : v \in V,$ $w_v \in \mathbb{Z})$ esetén az alábbi primál feladat TDI.

Primál:	*Duál:*
$\max\{\sum_{v\in V} w_v x_v\}$	$\min\{\sum_{C\in\mathcal{C}(D)} d(C)y_C + \sum_v a_v y_v - \sum_v b_v \bar{y}_v\}$
$x(C) \le d(C) : \forall C \in \mathcal{C}(D)$	$\sum_{v\in C \forall C\in\mathbb{C}} y_C + y_v - \bar{y}_v = w_v, \forall v \in V$
$b_v \le x_v \le a_v : \forall v \in V$	$y_C \ge 0 : \forall C \in \mathcal{C}(D), y_v \ge 0, \bar{y}_v \ge 0 : \forall v \in V$

Ahol $\mathcal{C}$ irányított körök egy halmaza.

Bizonyítás: A tétel következik a 2.12 Coflow tételből. Ugyanis készítsük el azt a gráfot az eredetiből, ahol a gráf minden élére teszünk egy új csúcsot. Definiáljuk a Coflow tételben szereplő d függvényt a következő képpen

$$d_v := \begin{cases} d_a & \text{ha v az a élen lévő új csúcs} \\ 0 & \text{ha v eredeti csúcs} \end{cases}$$

$a := 0$, $b := 0$ az új csúcsokon. Erre a gráfra a Coflow tétel által adott megengedett megoldás az eredeti élsúlyozott feladatnak is megengedett megoldása lesz. $\square$

2.15. Tétel:
$D = (V, A)$ digráf, $U \subseteq V$ a csúcsok egy részhalmaza. Ekkor az U-ba eső maximális nyelő-stabil halmaz elemszáma megegyezik az U pontjait fedő körök és élek minimális összértékével, ahol egy él értéke 1.

2.16. Megjegyzés:
Ha $U = V$, akkor a legnagyobb U-ba eső nyelő-stabil halmaz elemszáma a gráf Clar-száma.

Bizonyítás: A tétel a Coflow tétel 2.14 élváltozatából következik. $w_v := 1$, $\forall v \in V$,

$$a_v := \begin{cases} 1 & \text{ha } v \in U \\ 0 & \text{ha } v \in V \setminus U \end{cases}$$

$b_v := 0$, $\forall v \in V$. $d_a := 1$, $\forall a \in A$ választással. Ekkor a primál feltétel pontosan a nyelő-stabilitás feltétele. Hiszen a primál oldalon szereplő $x(C) \leq d(C)$ sor azt mondja, hogy $|S \cap C| \leq c(C)$. Ahol S azon csúcsok halmaza, amire $x(v) = 1$. A duál oldal pedig a gráf csúcsainak egy körökkel, élekkel és csúcsokkal való minimális fedését adja. Tehát az így kapott minimális fedésben még szerepelhetnek csúcsok is, de figyeljük meg, hogy ha minden ilyen csúcsot egy rá illeszkedő éllel helyettesítünk, akkor nem változik a minimum értéke, így megkapva a tétel állítását. □

2.17. Következmény *[Dilworth, [9]]*:
Tetszőleges véges részben rendezett halmazban a maximális antilánc mérete megegyezik a minimális láncfelbontás elemszámával.

Bizonyítás: Tekintsük a P részben rendezett halmaznak azt a reprezentációját, ahol a gráf csúcsai a P elemei, és a, b pontok között pontosan akkor van ab irányított él, ha $a \leq b$ és $\nexists c : a \leq c \leq b$. Most vegyünk fel egy új u pontot, és P minden b maximális elemére vegyünk fel egy bu élt. Valamint vegyünk fel egy új v pontot, és minden a minimális elemre vegyünk fel egy va élt. Végül vegyünk egy vu élt. Jelölje $G(P)$ az így kapott gráfot. $G(P)$-ben minden antilánc egy nyelő-stabil halmaznak felel meg, mivel tetszőleges pont benne van egy láncban és így rajta van 1 körülfordulási számú körön. A minimális láncfelbontás pedig egy 1 körülfordulási számú körökből álló körfedésnek felel meg. □

A nyelő-stabilitás általánosítását adja az alábbi definíció:

2.18. Definíció:
$D = (V, A)$ irányított gráf $k \in \mathbb{N}$. A csúcsok egy $S \subseteq V$ részhalmaza *k-nyelőstabil*, ha felbontható k darab nyelő-stabil halmaz diszjunkt uniójára.

Tudtunkkal korábban senki nem vizsgálta a k-nyelőstabil halmazok tulajdonságait, így a következő tétel sem volt ismert.

2.19. Tétel:
$D = (V, A)$ aciklikus digráf, $k \in \mathbb{N}$. Ekkor $S \subseteq V$ részhalmaz pontosan akkor k-nyelőstabil, ha $|S \cap C| \leq k \cdot c(C)$ minden C körre.

Bizonyítás: Tekintsük azt az irányított D' gráfot, melyet úgy kapunk D-ből, hogy egyrészt minden D-beli élt fordítva is beveszünk, másrészt S csúcsait széthúzzuk egy v_{be}, illetve v_{ki} csúcssá, úgy hogy a fordított élekkel bővített gráf minden v-be menő éle v_{be}-be menjen, a v-ből indulók pedig v_{ki}-ből induljanak. Közéjük pedig egy $v_{be} \rightarrow v_{ki}$ irányú -1 súlyú él, és egy $v_{ki} \rightarrow v_{be}$ irányú 1 súlyú él kerül. Továbbá a gráf eredeti D-ben is szereplő élei kapjanak 0 súlyt, a fordított (azaz az új) élek pedig k súlyt.

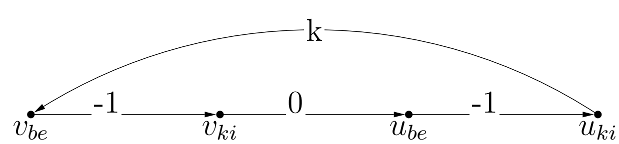
Ekkor a kör értékére vonatkozó feltétel ekvivalens azzal, hogy nem létezik negatív súlyú kör. Ugyanis a kibővített gráfban tetszőleges jól irányított kör esetén a negatív élek az S halmaz pontjainak felelnek meg. A k súlyú élek összege pedig vagy a kör értékének a k-szorosa, vagy $k(|C| - c(C))$, ami az előző számnál nem kisebb. Így ha a kör összsúlya negatív lenne, az azt jelenti, hogy $|S \cap C| \geq kc(C)$, ami ellentmond a tétel feltételének. Az olyan súlyozást, ahol nincsen negatív súlyú kör szokták *konzervatív súlyozásnak* nevezni. Ismert, hogy konzervatív súlyozás pontosan akkor létezik, ha van megengedett potenciál. Sőt, egészértékű súlyfüggvény esetén a potenciál is választható egésznek.

2.20. Definíció:

$D = (V, A)$ digráf adott $w : A \to \mathbb{R}$ súlyfüggvénnyel. Ekkor $\pi : V \to \mathbb{R}$ potenciál *megengedett*, ha $\pi(v) - \pi(u) \le w(uv)$ minden uv élre.

Tekintsük ezt a megengedett egészértékű π potenciált. Színezzük ki a gráf csúcsait az $1, 2, \ldots, k$ színekkel úgy, hogy $v \in V \setminus S$ esetén v a $\pi(v) \mod (k)$ színt, $v \in S$ esetén $\pi(v_{be}) \mod (k)$ színt kapja. ($\pi(v) \equiv 0 \mod (k)$ esetén a k színt.) Ez a színezés S-nek egy partícióját adja, mely megfelel a feladatban megkívántnak. Ennek bizonyításához két dolgot kell belátni:
1. Az egy színosztályba eső S-beli csúcsok egymástól függetlenek D-ben,
2. Minden kör minden színosztályból legfeljebb annyit tartalmaz, mint az értéke.

1. Tegyük fel, hogy D-ben az $uv \in A$ élre $u, v \in S$ csúcsok, melyek azonos színt kaptak. Figyeljük meg, hogy minden széthúzott csúcsra $\pi(v_{ki}) = \pi(v_{be}) - 1$. Mert megengedett potenciálról van szó, es $v_{be}v_{ki}$ él költsége -1. Így az u, v csúcsokra



$\pi(u_{be}) - \pi(v_{ki}) \le 0$

$\pi(v_{be}) - \pi(u_{ki}) \le k$

$\pi(v_{ki}) = \pi(v_{be}) - 1$

$\pi(u_{ki}) = \pi(u_{be}) - 1$

Ezekből $\pi(v_{be}) - \pi(v_{be}) + k - 1 \le k$, ami ellentmondás.

2. Tekintsük azt a D'' gráfot, melyben S csúcsai nincsenek széthúzva, de az eredeti élek fordítva is be vannak húzva a fent megadott súlyozással. Itt tetszőleges jól irányított C körben S azonos S_j színosztályba eső csúcsai legyenek $v_1, v_2, \dots, v_t$, melyek ebben a sorrendben követik egymást C-n. Minden i-re a v_i és v_{i+1} között menő k súlyú élek száma a_i. Ekkor $\pi(v_{i+1}) \leq \pi(v_i) + k \cdot a_i - 1$ (ahol $v_{t+1} = v_1$) D' gráfben $v_{i_{ki}}$-ből v_{ibe} csúcsba -1 értékű él mutat, ezért írhatunk az egyenlőtlenség jobb oldalára -1-et. Továbbá $\pi(v_{i+1}) \equiv \pi(v_i) \mod (k)$, ezért $\pi(v_{i+1}) \leq \pi(v_i) + k \cdot (a_i - 1)$ is fennáll. Így az egész körre összegezve $\pi(v_1) \leq \pi(v_1) + k \cdot (a_1 - 1 + a_2 - 1 + \ldots + a_t - 1)$ adódik, amiből következik, hogy $\sum_{i=1}^{t} a_i \geq t$, ha a potenciál megengedett.

$\square$

Ezzel a tétellel jellemzést adhatunk egy digráf kromatikus számának meghatározására is.

2.21. Következmény:

$D = (V, A)$ kromatikus száma megegyezik a $\max_{C kör}\{c(c)/|C|\}$ értékkel.

Bizonyítás: Legyen $k := \max_{C \text{ kör}}\{c(C)/|C|\}$. Ekkor $|V \cap C| \leq c(C)$ minden C körre, így V a fenti 2.19 tétel alapján k-nyelőstabil, azaz felbomlik k darab stabil halmaz uniójára, így k színnel színezhető. $\square$

A fenti következmény ugyanazt mondja, mint Minty tétele, melyre ilyen módon új bizonyítást adunk.

2.22. Következmény *[Minty,[1]]*:

$G = (V, E)$ irányítatlan gráf csúcsai pontosan akkor színezhetőek k színnel, ha létezik az éleknek olyan irányítása, amelyre minden körben mindkét irányba az éleknek legalább a k-adrésze megy.

Bizonyítás: Ha a gráf csúcsait kiszíneztük az $1, 2, \dots, k$ színekkel, akkor irányítsuk úgy az éleit, hogy a kisebb sorszámú színt kapott csúcsból a nagyobb felé mutasson. Ez megfelel a tétel feltételeinek.

Fordítva, ha adva van egy ilyen irányításunk, akkor az így kapott $G^{\rightarrow}$ irányított gráf aciklikus. Erre alkalmazzuk a 2.19 tételt $V = S$ halmazra. Az, hogy minden körben mindkét irányba az éleknek legalább a k-adrésze mutat azzal ekvivalens, hogy $|C| \leq k \cdot c(C)$ minden C körre. Emiatt V k-nyelőstabil. Ugyanis ekkor $|V \cap C| = |C| \leq k \cdot c(C)$. $\square$

Hasonlóan ahhoz, ahogyan megadtuk egy gráfban a maximális nyelőstabil halmaz méretét megadhatjuk a legnagyobb k-nyelőstabil halmaz elemszámát is:

2.23. Tétel:

Tetszőleges $D = (V, A)$ aciklikus irányított gráfban

$$\max\{|S| : S \subseteq V, S \textit{ k-nyelőstabil}, k \geq 2\} =$$
$$= \min\{\sum_{C \in \mathcal{C}} k \cdot c(C) + |X| : X \subseteq V, \mathcal{C} \textit{ körök egy halmaza}, \cup\mathcal{C} \cup X \textit{ fedi } V\textit{-t}\}$$

Bizonyítás: A $max \leq min$ triviálisan következik S k-nyelőstabil voltából. Az egyenlőség az 2.14 Élcoflow tételből következik. Vegyük be a gráf minden élét fordítva is. $w_v := 1$, $a_v := 1$, $b_v := 0$ $\forall v \in V$.

$$d_a := \begin{cases} k & \text{ha a eredeti él} \\ 0 & \text{ha a fordított él} \end{cases}$$

Ekkor a primál feltétel pontosan megegyezik a k-nyelőstabilitás feltételével. $\square$

2.24. Megjegyzés:

A coflow tételben a duális oldalon körök, csúcsok és élek egyaránt szerepelnek. Könnyű végig gondolni, hogy a k-nyelőstabil halmazra vonatkozó feladatnál $k = 1$ esetén a minimális fedésben nem szerepelnek csúcsok, $k > 1$ esetén pedig nem szerepelnek élek. Mivel a csúcsok mindig egyszeres multiplicitással szerepelnek, az élek pedig k-szorossal. Így $k = 1$ esetben mivel egy él két csúcsot is lefog, ezért ezzel járunk jobban, $k > 1$ esetben viszont ha az él két végpontját vesszük be, az mindig legfeljebb 2-vel növeli az összeget (mivel ha csak az egyik végpontját kellett fedni, akkor persze csak azt vesszük be), míg az él k-val, mivel azt a saját fordított élével kettő hosszú, k értékű körnek tekintettük.

3 Koherens ciklikus sorrend

A koherens ciklikus sorrend fogalmát először Bessy és Thomassé [4] vezették be.

3.1. Definíció:
Adott $D = (V, A)$ digráf csúcsainak egy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ lineáris sorrendje. Ebben a sorrendben egy irányított él *előre-él*, ha töve előbb következik a sorrendben, mint a feje. *Hátra-él*, ha a feje következik előbb.

3.2. Definíció:
$D = (V, A)$ digráf csúcsainak adott egy lineáris sorrendje. *Elemi cserének* nevezzük, ha felcseréljük a sorrendjét két olyan egymás utáni csúcsnak, melyek között nem megy él. Két lineáris sorrendet *ekvivalensnek* mondunk, ha az egyikből előáll a másik elemi cserék egymás utáni végrehajtásával.

3.3. Definíció:
$D = (V, A)$ digráf csúcsainak *ciklikus sorrendje* a csúcsok egy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ lineáris sorrendjéből keletkezik a $v_{n+1} = v_1$ feltétel hozzávételével. A ciklikus sorrend egy *(u,v) megnyitása* az a lineáris sorrend, melynek első eleme v, utolsó eleme u, és a csúcsok a ciklikus sorrend szerint követik egymást v és u között. Egy lineáris sorrend *ciklikus shiftjének* nevezzük azt a műveletet, ahol bezárjuk ciklikus sorrenddé, majd valahol máshol újból megnyitjuk.

3.4. Definíció:
$D = (V, A)$ adott ciklikus sorrenddel. Tetszőleges $a = uv \in A$ él *hossza*

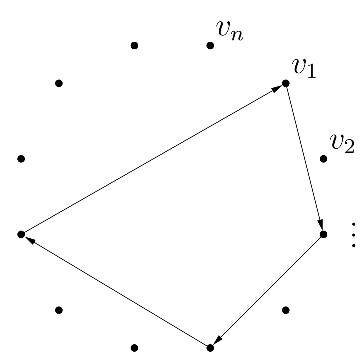
$length(a) = [u, v] + 1$, ahol $[u, v]$ jelöli a sorrendben u és v között lévő pontok számát.

3.5. Definíció:

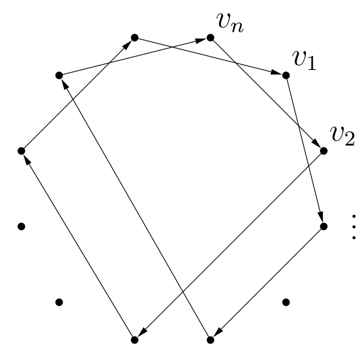
$D = (V, A)$ egy C irányított körének *körülfordulási száma* $ind(C) = (\sum_{a \in A(C)} length(a))/n$

3.6. Megjegyzés:

A definícióból nyilvánvaló, hogy $ind(C)$ egész szám és $ind(C) \geq 1$. $ind(C)$ szemléletesen azt jelenti, hogy az irányított C kör élein haladva az alábbi ábrán hányszor "lépjük át" a képzeletbeli választóvonalat v_n és v_1 között. Ebből a szemléletből az is jól látszik, hogy a ciklikus sorrend (v_1, v_n) megnyitása esetén $ind(C)$ megegyezik a C körön lévő hátra-élek számával.



1. ábra: $ind(C) = 1$



2. ábra: $ind(C) = 2$

3.7. Definíció:

$D = (V, A)$ digráf két ciklikus sorrendje *ekvivalens*, ha az egyik előáll a másikból ciklikus shiftek és elemi cserék egymás utáni végrehajtásával.

3.8. Megjegyzés:

Figyeljük meg, hogy két ekvivalens lineáris sorrendben az előre- és hátra-élek száma megegyezik. Továbbá, hogy egy ciklikus sorrend két különböző megnyitásából származó lineáris sorrend ekvivalens. Így azt is észrevehetjük, hogy a körülfordulási szám ekvivalens azzal, hogy a ciklikus sorrend tetszőleges megnyitása esetén az irányított kör hány hátra-élt tartalmaz. Ezért ekvivalens ciklikus sorrendekben minden irányított kör körülfordulási száma megegyezik.

3.9. Definíció Bessy, Thomassé, [4]**:**

Adott $D = (V, A)$ digráf csúcsainak ciklikus sorrendje *koherens*, ha minden olyan él, ami benne van irányított körben az benne van egy 1 körülfordulási számú körben is, azaz egy olyan irányított körben, melyben csak egy hátra-él van. (Vannak, akik azt mondják, hogy a ciklikus sorrend kompatibilis D-vel.

Ennek az az előnye, hogy az elnevezés a gráfra is utal. Mi mégis inkább Bessy és Thomassé eredeti elnevezését fogjuk használni.)

3.10. Tétel *[Bessy, Thomassé, [4]]*:
Minden irányított gráfnak van koherens ciklikus sorrendje.

Bizonyítás (Iwata, Matsuda, [6]): A bizonyítás Knuth [7] partíciós tételét használja. Mivel egy körmentes gráfban a csúcsoknak bármilyen sorrendje koherens ciklikus sorrend, ezért elég a gráf erősen összefüggő komponenseiben megadni a csúcsok koherens ciklikus sorrendjét. Ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a gráf erősen össefüggő.

Legyen $D = (V, A)$ erősen összefüggő gráf, $v \in V$ rögzített, tetszőleges csúcs. Mint ismeretes minden erősen összefüggő gráfnak van fülfelbontása. Ennek a segítségével egy rögzített $v \in V$ esetén megadható az éleknek egy olyan $A = F \cup^* B$ partícióját, amire

(i) D minden irányított köre tartalmaz F-beli élt,

(ii) minden $a \in A$ él benne van egy olyan irányított körben, ami pontosan egy F-beli élt tartalmaz,

(iii) minden $u \in V, u \neq v$ csúcsra létezik irányított út u-ból v-be, ami nem tartalmaz F-beli élt.

Legyen $D_0, D_1, \dots D_k$ D tetszőleges fülfelbontása. Tegyük fel, hogy (i) és (ii) fennáll D_j-re. Belátjuk, hogy ekkor D_{j+1}-re is fennállnak, amit D_j-ből kaptunk a P_j irányított fül hozzáadásával.

3.11. Lemma:
Legyen $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráf. $A = (F \cup^* B)$ a csúcsok egy

partíciója a fenti (i) és (ii) tulajdonsággal és $v \in V$ tetszőleges rögzített csúcs. Ekkor módosítható úgy a partíció, hogy v-re a fenti (iii) is teljesüljön.

Bizonyítás: Legyen $X \subset V$ azon csúcsok halmaza, ahonnan v B-beli éleken elérhető. Ha $X = V$, akkor a partíció kielégíti (iii)-at. Ha $X \neq V$, akkor az X-be belépő élek F-beliek és ezért (ii) miatt a kilépő élek pedig B-beliek. Ha most az X-be belépő és kilépő éleket kicseréljük a partícióban, akkor (i) és (ii) továbbra is fennáll, de X mérete nő. Tehát ilyen cserékkel $O(n)$ lépésben olyan partíciót kapunk, ami (i), (ii) és (iii)-at is kielégíti. □

Legyen $v \in V(D_j)$ P_j első csúcsa. Alakítsuk át D_j csúcsainak partícióját a lemmának megfelelően v-vel, mint kitüntetett csúccsal. Ezek után D_{j+1} éleinek partícióját úgy kapjuk, hogy P_j v-re illeszkedő éle legyen F-beli, P_j többi éle B-beli, D_{j+1} többi éle pedig vegye át a D_j-től örökölt partíciót. Az így kapott partíció kielégíti (i), (ii)-t.

Ha ilyen módon megkaptuk az élek $A = (F \cup^* B)$ partícióját, akkor F-et elhagyva (i) miatt aciklikus irányított gráfot kapunk. Ennek van topologikus sorrendje. Ebben a sorrendben beszámozva a csúcsokat (i) és (ii) miatt az eredeti gráf csúcsainak koherens ciklikus sorrendjét kapjuk.

□

3.12. Megjegyzés:

Vegyük észre, hogy a bizonyítás egyben egy $O(nm)$ futásidejű algoritmust is ad a koherens ciklikus sorrend meghatározására. (Ahol n a csúcsok, m az élek száma.) Ugyanis a fenti F halmaz éleit $O(nm)$ időben kaphatjuk meg. Hiszen a lemma szerinti átrendezése az aktuális partíciónak legfejebb n lépés. Ezt az átrendezést legfeljebb annyiszor kell végrehajtani, ahány fülből áll a fülfelbontás, ez pedig legfeljebb élszámnyi.

3.13. Definíció:

$D = (V, A)$ erősen összefüggő digráf adott ciklikus sorrenddel. $S \subseteq V$ halmaz *ciklikusan stabil*, ha stabil, és pontjai intervallumot alkotnak, valamely, az adottal ekvivalens ciklikus sorrendben.

3.14. Állítás:
$D = (V, A)$ erősen összefüggő digráf adott koherens ciklikus sorrenddel. Adott $S \subseteq V$ ciklikusan stabil. Ekkor $|S \cap C| \leq ind(C)$ minden C irányított körre.

Bizonyítás: Tekintsük azt az eredetivel ekvivalens ciklikus sorrendet, ahol S intervallumot alkot, és ennek azt a megnyitását vegyük, aminek S pontjai vannak a legelején. Nyilván tetszőleges C körre leszűkítve is S-nek C-re eső pontjai lesznek a sorrend elején. Mivel S stabil, ezért minden $S \cap C$-beli pontba belépő él $C \setminus S$-ből indul és így hátra-él. Tehát legalább annyi hátra-éle van C-nek, mint $|S \cap C|$, ami az állítás. $\square$

4 A nyelő-stabilitás és a koherens ciklikus sorrend kapcsolata

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy adott aciklikus gráfban egy kör értéke a megfelelő erősen összefüggő gráfban ugyanannak az (itt már irányított) körnek a körülfordulási számával lesz ekvivalens. Valamint, hogy az aciklikus gráf nyelő-stabil halmaza az erősen összefüggő gráf ciklikusan stabil halmaza. Fordítva egy adott erősen összefüggő gráfhoz is van megfelelő aciklikus gráf, melyben az irányított kör körülfordulási száma itt a kör értéke és adott cikliksan stabil halmaz nyelő-stabil. Ezt az érdekes párhuzamot Frank András vette észre először. Ebben a fejezetben szereplő bizonyítások mind újak, kivéve, ahol külön hivatkozunk egy korábbi cikkre. Először ezt a megfeleltetést mutatjuk be. A fejezet második felében ennek fényében az előző fejezetekben látott tételek ekvivalenciáját bizonyítjuk.

4.1 Ciklikusan stabil és nyelő-stabil halmazok kapcsolata

Legyen $D = (V, A)$ egy erősen összefüggő gráf adott koherens ciklikus sorrenddel. Fordítsuk meg D minden hátra-élét. Így egy $D' = (V, A')$ gráfot kapunk. D' aciklikus, mivel D-ben minden irányított kör tartalmaz hátra-élt.

4.1. Állítás:
$D = (V, A)$ erősen összefüggő digráf adott koherens ciklikus sorrenddel, $S \subseteq V$ ciklikusan stabil. Ekkor a fenti módon kapott D' digráfban S nyelő-stabil halmaz.

Bizonyítás: Tekintsük D-ben azt az eredetivel ekvivalens koherens ciklikus sorrendet, ahol S pontjai intervallumot alkotnak, és vegyük azt a megnyitását, ahol S a sorrend végén van. Ekkor D'-ben S pontjai nyelő pontok, mivel S stabil és pontjai egy topologikus sorrend végén vannak. □

Most induljunk ki $D' = (V, A')$ aciklikus digráfból. Mivel D' aciklikus, ezért létezik a csúcsainak topologikus sorrendje. E sorrend szerint számozzuk a csúcsokat és $v_{n+1} := v_1$. Ezután vegyük bele D' gráfba minden élét fordítva is. Így erősen összefüggő gráfot kaptunk, melynek az előbb egy ciklikus sorrendjét definiáltuk. Ez a sorrend koherens is, mivel minden él benne van egy körülfordulási számú körben, nevezetesen abban a kettő hosszú körben, melyet saját megfordított élével alkot.

4.2. Állítás:
$D' = (V, A')$ aciklikus digráf, $S \subseteq V$ nyelő-stabil halmaz. Ekkor S a fenti módszerrel kapott D erősen összefüggő gráfban a topologikus sorrendből kapott koherens ciklikus sorrenddel ciklikusan stabil halmazt alkot.

Bizonyítás: Azt kell belátni, hogy van olyan, az adottal ekvivalens koherens ciklikus sorrend, amiben S pontjai intervallumot alkotnak. S pontjaiból D'-ben egyirányú vágások egymás utáni átfordításával nyelő pontokat lehet csinálni. Azt látjuk be, hogy ezek a vágás átfordítások megfelelő sorrendben elvégezve D gráfban elemi cseréknek és ciklikus shifteknek felelnek meg. Ismert, hogy aciklikus gráfban tetszőleges egyirányú vágás úgy is átfordítható, hogy mindig csak nyelőpontok által meghatározott egyirányú vágásokat fordítunk át. Tetszőleges topologikus sorrendben két szomszédos, független pont sorrendjét felcserélve szintén topologikus sorrendet kapunk. Így elérhető, hogy mindig a sorrend végén lévő nyelőket fordítsunk át. ezek a cserék felelnek meg az elemi cseréknek. Ha a topologikus sorrend végén lévő nyelőt átfordítunk, akkor forrás lesz, és így a sorrend elejére kerül. Ez pont egy ciklikus shiftnek felel meg D-ben. Mivel D-ben D' minden éle mindkét irányban be van húzva, ezért ezek az átfordítások nem változtatnak D élhalmazán. Tehát ilyen módon amikor D'-ben S pontjai mind nyelőkké váltak, akkor D-ben olyan, az erdetivel ekvivalens koherens ciklikus sorrendet kapunk, amiben S pontjai intervallumot alkotnak. □

Ezzel a szemlélettel új bizonyítást kapunk Sebő tételére.

4.3. Következmény *[Sebő, [8]]*:
$D = (V, A)$ erősen összefüggő digráf adott koherens ciklikus sorrenddel. Ekkor $S \subseteq V$ pontosan akkor ciklikusan stabil, ha $|S \cap C| \leq ind(C)$ minden C körre.

Bizonyítás: Ha S ciklikusan stabil, akkor már láttuk a 3.14 állításban, hogy teljesül rá a feltétel. Most tegyük fel, hogy minden C körre teljesül a fenti felső becslés. Azt látjuk be, hogy ebben az esetben S a megfelelő D' aciklikus gráfban nyelő-stabil halmazt alkot. Ehhez elég azt belátni a 2.10 tétel szerint, hogy D'-ben $|S \cap C| \leq c(C)$ minden C körre. D'-ben adott C kör értéke D-ben mindig vagy a C-ben lévő előre- vagy a hátra-élek számának felel meg. Ha a hátra-éleknek, akkor $ind(C) = c(C)$ és így készen vagyunk. Ha az előre élek számának, akkor tekintsük azt a C' kört D-ben, amit a következő módon kapunk: Ha $a \in C(A)$ hátra-él, akkor a koherens ciklikus sorrend definíciója szerint a benne van pontosan egy körülfordulási számú körben is. Mivel ennek a az egyetlen hátra éle, így ekkor a helyett vegyük bele C'-be ennek a körnek az a-t nem tartalmazó körívét. Most legyen $a \in C(A)$ előre-él. Ekkor szintén véve az a-t tartalmazó egy körülfordulási számú kört, annak az a-t nem tartalmazó ívét vegyük C'-be. Ilyen módon $ind(C') \leq ind(C)$. Tehát mivel $|S \cap C'| \leq ind(C')$ és $V(C) \subseteq V(C')$ ezért D'-ben $|S \cap C| \leq c(C)$. Tehát beláttuk, hogy S D'-ben nyelő-stabil és így D-ben ciklikusan stabil. □

4.2 Nyelő-stabil és ciklikusan stabil halmazokra vonatkozó tételek ekvivalenciája

4.4. Tétel *[Sebő, [8]]*:
$D = (V, A)$ erősen összefüggő digráf adott koherens ciklikus sorrenddel. Ekkor

$$\max\{|S| : S \subseteq V \text{ ciklikusan stabil}\} =$$
$$= \min\{\sum_{C \in \mathcal{C}} ind(C) + |Y| : Y \text{ élek halmaza, } \mathcal{C} \cup V(Y) \text{ fedi } V\text{-t}\}$$

Bizonyítás: [8] A tétel következik a 2.14 élcoflow tételből és a ciklikusan stabil halmazokra vonatkozó 4.3 állításban szereplő szükségés és elégséges feltételből. Ugyanis tekintsük az adott koherens ciklikus sorrend egy megnyitását. Erre a megnyitásra alkalmazzuk az élcoflow tételt úgy, hogy

$$b_a := \begin{cases} 0 & \text{ha } a \in A \text{ előre-él} \\ 1 & \text{ha } a \in A \text{ hátra-él} \end{cases}$$

Valamint $a := 1, b := 0$ $\forall v \in V$ választással. Ezzel a választással az élcoflow tétel primál feltétele pontosan a ciklikusan stabilitás feltételével egyezik meg. A primál feladat duálisa pedig a fenti minimum. □

4.5. Állítás:
A fenti Sebő tétel ekvivalens a 2.15 maximális nyelő-stabil halmazokra vonatkozó tétellel.

Bizonyítás: Ugyanis egy aciklikus $D' = (V, A')$ gráfhoz a fejezet elején vázolt módon készítsük el a megfelelő $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráfot a kompatibilis ciklikus sorrenddel. Erre alkalmazhatjuk a 2.15 tételét. Így a módosított gráfban a maximális ciklikusan stabil halmaz méretére kapunk egy minmax értéket. Mint láttuk az itt kapott ciklikusan stabil halmaz ekvivalens az eredeti D' egy nyelő-stabil halmazával. Ráadásul a kapott körfedésnél a 2 hosszú körök megfelelnek a 2.15 tételbeli fedés éleinek, a hosszabb körök pedig a köreinek.

Fordítva egy koherens ciklikus sorrenddel adott $D = (V, A)$ digráf esetén fordítsuk meg a sorrend által meghatározott hátra éleket. Az így kapott gráfra alkalmazzuk a 2.15 tételt. □

Ebből az állításból következik Gallai sejtésének bizonyítása.

4.6. Következmény *[Bessy, Thomassé, [4]]*:
Legyen $D = (V, A)$ erősen összefüggő gráf stabilitási száma α. Ekkor D csúcsai lefedhetők α irányított körrel.

Bizonyítás: [8] D erősen összefüggő, ezért csúcsainak van koherens ciklikus sorrendje. Ezzel a sorrenddel alkalmazva Sebő fenti 4.4 tételét vegyük észre, hogy a min oldalon szereplő élek a koherens sorrend definíciója szerint mind benne vannak egy körülfordulási számú körben is. Tehát a fedésben az éleket ezekre a körökre kicserélve továbbra is fedést kapunk és a minimum érték nem változik. Mivel $\alpha = \max\{|S| : S \text{ stabil}\} \geq \max\{|S_c| : S_c \text{ ciklikusan stabil}\} = \min\{\sum_{C \in \mathcal{C}} ind(C) : \mathcal{C} \text{ fedi a csúcsokat}\}$ ezért $\mathcal{C}$ egy legfeljebb α elemszámú körfedését adja D-nek. □

A k-nyelőstabil halmazok mintájára

4.7. Definíció:

$D = (V, A)$ erősen összefüggő digráf adott koherens ciklikus sorrenddel. Ekkor $S \subseteq V$ *k-ciklikusan stabil*, ha előáll k darab ciklikusan stabil halmaz diszjunkt uniójaként.

4.8. Tétel *[Sebő, [8]]*:

Legyen $D = (V, A)$ *erősen összefüggő digráf adott kompatibilis ciklikus sorrenddel, és* $k \in \mathbb{N}$ *tetszőleges.*

Ekkor $\max\{|S| : S \subseteq V,\ S \text{ k-ciklikusan stabil}\} = \min\{\sum_{c \in \mathcal{C}} k \cdot ind(C) + |X| : X \subseteq V, \mathcal{C} \text{ egy körfedése } V \setminus X\text{-nek}\}$

Bizonyítás: [8] Szintén a 2.14 élcolflow tétel következménye. Tekintsük az adott koherens ciklikus sorrend egy megnyitását. Definiáljuk b-t az éleken a kѷetkező képpen

$$b_a := \begin{cases} 0 & \text{ha } a \in A \text{ előre-él} \\ k & \text{ha } a \in A \text{ hátra-él} \end{cases}$$

Valamint $a := 1$, $b := 0\ \forall v \in V$. Ezzel a választással az élcoflow tétel primál feltétele pontosan a k ciklikusan stabilitás feltételével egyezik meg. A primál feladat duálisa pedig a fenti minimum. □

4.9. Állítás:

A fenti 4.8 Sebő tétel ekvivalens a 2.23 k-nyelőstabil halmazokra vonatkozó tétellel.

Bizonyítás: $D' = (V, A')$ aciklikus gráfhoz készítsük el a fejezet elején leírt módon a hozzá tartozó $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráfot. Erre alkalmazzuk a fenti tételt. Mivel a 4.3 állítás szerint egy halmaz pontosan akkor ciklikusan stabil, ha nyelő-stabil, ezért $S \subseteq V$ pontosan akkor k-nyelőstabil D'-ben, ha D-ben felbomlik k ciklikusan stabil uniójára. Ráadásul $ind(C) = c(C')$ ahol $C' \subseteq A'$ kör D'-ben, C pedig az a kör D-ben, amire $V(C') = V(C)$ és C ezeken a csúcsokon a nem nagyobb körülfordulási számú irány. (D gráfban a minimális fedésben résztvevő körök nyilván minden adott csúcshalmazon a kisebb körülfordulási számú éleket használják.)

Fordítva $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráfból kiindulva definiáljuk V egy koherens ciklikus sorrendjét, majd fordítsuk meg a vissza-éleket. Így egy $D' = (V, A')$ aciklikus digráfot kapunk, amire alkalmazva 2.23 tételt visszakapjuk a fenti Sebő tétel állítását. $\square$

A 4.8 tételből könnyen bebizonyítható Greene és Kleitman tétele is.

4.10. Tétel *[Greene,Kleitman, [10]]*:
Adott P részben rendezett halmaz. Jelölje $\mathcal{C}_q$ P-nek egy q elemű lánccsaládját. Ekkor P legnagyobb olyan részhalmazának mérete, mely előáll α antilánc egyesítéseként megegyezik a $\min_q\{q \cdot \alpha + |P - \cup \mathcal{C}_q|\}$ értékkel.

Bizonyítás: Tekintsük P összehasonlítási gráfját, melyben irányított él van a részben rendezésben egymás után következő pontok között. Vegyünk fel egy új t pontot. Minden pontból t-be, és t-ből minden pontba vegyünk fel irányított élt. Így erősen összefüggő gráfot kaptunk. Tekintsük a pontoknak azt a lineáris sorrendjét, ahol először a részben rendezett halmaz pontjait soroljuk fel nem csökkenő sorrendben (azaz két nem összehasonlítható elem tetszőleges sorrendben kerülhet egymás után, két összehasonlítható elem csak növő sorrendben.) Majd t legyen a sorrend utolsó eleme. Ha ezt a lineáris sorrendet bezárjuk ciklikus sorrenddé, akkor koherens sorrendet kapunk. Ugyanis minden irányított kör tartalmazza t-t és így 1 lesz a körülfordulási száma, mivel csak a t-ből induló éle lesz hátra-él. Ebben a gráfban tetszőleges k antilánc egyesítéséből álló halmaz k-ciklikusan stabil, mivel teljesíti a körülfordulási számokkal adott szükséges és elégséges feltételt. Ugyanis bármelyik C irányított kör a t ponton kívül csak egy lánc elemeit tartalmazhatja. Tetszőleges antilánc viszont egy láncból csak egy pontot tartalmazhat, α antilánc legfeljebb α pontot. Így a maximális α antilánc egyesítéséből álló halmaz pontosan a maximális α-ciklikusan stabil halmaz. Erre alkalmazva a 4.8 tételt kapjuk, hogy

$$\max\{|U| : U \ \alpha \text{ antilánc uniója}\} = \min\{\sum_{C \text{ kör}} \alpha \cdot ind(C) + |X| : V \subseteq \cup C \cup X\}$$

Mivel ebben a gráfban minden irányított C körre $ind(C) = 1$ (mivel minden irányított körben a t-ből induló él az egyetlen hátra-él.), ezért ez pont a tétel állítását adja. $\square$

5 Körök lapos lefogása

5.1. Definíció:
Adott $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráf. $F \subseteq A$ az irányított körök egy *lapos lefogása*, ha minden él benne van F-által pontosan egyszer fedett körben.

5.2. Megjegyzés:
Tetszőleges irányított gráfban is van értelme a definíciónak. Akkor úgy kell definiálni, hogy minden él, ami benne van irányított körben, az benne van F által pontosan egyszer fedett körben is. A gráf tetszőleges erősen összefüggő komponensére ez visszaadja az előző definíciót.

5.3. Tétel:
Minden erősen összefüggő gráfnak van lapos lefogása.

Bizonyítás: Adott $D = (V, A)$ erősen összefüggő gráf. Bessy és Thomassé tétele (3.10 tétel) szerint minden erősen összefüggő gráfnak van koherens ciklikus sorrendje. Tekintsük a koherens ciklikus sorrend tetszőleges megnyitását. Ebben a sorrendben a hátra-élek halmaza olyan élhalmaz, ami lapos lefogását adja a gráfnak a koherens ciklikus sorrend definíciója miatt. $\square$

5.4. Állítás:
$D = (V, A)$, $F \subseteq A$ lapos lefogás. Ekkor F meghatározza a gráf csúcsainak egy koherens ciklikus sorrendjét.

Bizonyítás: Hagyjuk el F éleit. Mivel F a köröknek egy lefogása volt, ezért acikikus gráfot kapunk. Aciklikus gráfnak van topologikus sorrendje. Ebben a sorrendben számozzuk a csúcsokat. Ezzel a számozással F minden éle hátra-él lesz. Ugyanis tegyük fel, hogy $f \in F$ előre él. Ekkor f is benne van egyszer (saját maga) által fedett körben. De ez esetben ebben a körben minden él előre él lenne, ami lehetetlen. Mivel F minden éle hátra-él és F definíciója miatt minden irányított kört lefog, valamint minden él benne van pontosan egyszer fedett körben, ezért tényleg a gráf koherens ciklikus sorrendjét határozta meg. □

5.5. Definíció:

$D = (V, A)$ erősen összefüggő gráf, $F \subseteq A$ lapos lefogás. Ekkor egy irányított kör *F-értéke* a körben lévő F-beli élek száma. Ezt a számot $F(C)$-vel jelöljük.

5.6. Definíció:

$D = (V, A)$ erősen összefüggő gráf, $F \subseteq A$ lapos lefogás. Egy $S \subseteq V$ halmaz *F-stabil*, ha stabil és minden irányított körön legfeljebb annyi pontja van, mint a kör F-értéke.

5.7. Állítás:

$D = (V, A)$ aciklikus digráf, $F \subseteq A$ lapos lefogással. Adott $S \subseteq V$ halmaz pontosan akkor F-stabil, ha stabil és $|S \cap C| \leq F(C)$ minden C körre.

Bizonyítás: A bizonyítás triviális, mivel pontosan ez volt az F-stabil halmazok definíciója. □

Figyeljük meg, hogy ez az állítás ekvivalens Sebő 4.3 következményével. Hiszen tekintsük azt a $D' = (V, A')$ erősen összefüggő gráfot, amit F éleinek a megfordításával kapunk az F által definiált koherens ciklikus sorrenddel. Ebben minden $C' \subseteq A'$ irányított körre $F(C) = ind(C')$, ahol C a C' körnek D-ben megfelelő irányítatlan kör. Így az is látszik, hogy adott F lapos lefogásra tetszőleges F-stabil halmaz ciklikusan stabil az F segítségével így megadott erősen összefüggő gráfban.

5.8. Tétel:
$D = (V, A)$ erősen összefüggő digráf, $U \subseteq V$, $F \subseteq A$ az élek lapos lefogása. Ekkor az U-ban fekvő maximális F-stabil halmaz elemszáma egyenlő $\min\{\sum_{C \in \mathcal{C}} F(C) + |A'|\}$, ahol $F(C)$ jelöli C irányított kör F-értékét, $A' \subseteq A$ és $V \subseteq V(\mathcal{C}) \cup V(A')$.

Bizonyítás: A tétel ekvivalens a ciklikusan-stabil halmazok maximális számára vonatkozo 4.4 Bessy-Thomassé tétellel. Mivel az előbb láttuk, hogy a lapos lefogás megad egy koherens ciklikus sorrendet is a gráfban. □

5.9. Definíció:
Adott $D = (V, A)$ erősen összefüggő gráf, $F \subseteq A$ lapos lefogás. $S \subseteq V$ halmaz *k-F-stabil*, ha előáll k darab F-stabil halmaz uniójaként.

5.10. Tétel:
$D = (V, A)$ erősen összefüggő digráf, $F \subseteq A$ lapos lefogás. Ekkor

$$\max\{|U| : U \text{ } k\text{-}F\text{-stabil}\} = \min\{\sum_{C \in \mathcal{C}} k \cdot F(C) + |X| : X \subseteq V, V \subseteq X \cup \mathcal{C}\}$$

.

Bizonyítás: A tétel ekvivalens Sebő 4.8 k-ciklikusan stabil halmazokra vonatkozó tételével. □

A fenti tételekből jól látható, hogy a lapos lefogás tulajdonképpen csak egy átfogalmazása a koherens ciklikus sorrendnek. Ám itt az élekre, vagyis a koherens ciklikus sorrend hátra-éleire tesszük a hangsúlyt.

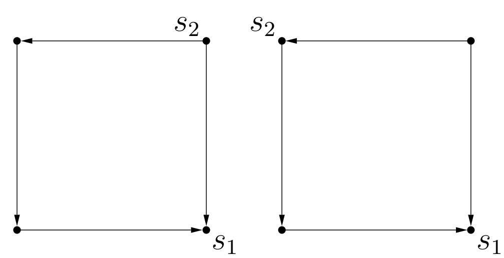
6 Nyitott kérdés: A Fries-szám

6.1. Definíció:
Egy gráf *Fries-száma* az egyirányú vágások átfordításával egyidejűleg nyerhető nyelő- és forráspontok maximális száma. A gráf csúcsainak egy

olyan részhalmazát, aminek a pontjai egyirányú vágások egymás utáni átfordításával egyszerre nyelő-, illetve forráspontokká alakíthatók *Fries-halmaznak* nevezzük.

A Fries-szám meghatározása eddig megoldatlan probléma. Abeledo és Atkinson cikkükben [2] utalnak rá, hogy a feladatot leíró lineáris program mátrixa unimoduláris. Mutatnak azonban példát rá, amikor nem teljesen unimoduláris. Cél lenne a Clar-számhoz hasonló gráf nyelven leírható szükséges és elégséges feltétel találása. Sejtésünk szerint jól felírva a feltételt ugyanolyan egyszerűen kaphatnánk a halmaz maximális elemszámára min-max tételt a Coflow tétel segítségével, mint a Clar-szám esetén.

Triviálisan látszik, hogy adott gráfban tetszőleges Fries-halmaz két nyelő-stabil halmaz uniója, vagyis 2-nyelőstabil. Ugyanis az átfordítás után kapott nyelőpontok alkotják az egyik nyelő-stabil halmazt, a forráspontok pedig a másikat. Ezzel szemben nem minden 2-nyelőstabil halmaz Fries-halmaz. Példaként tekintsük az alábbi két ábrát. Az $\{s_1, s_2\}$ halmaz mindkettőben 2-nyelőstabil halmazt alkot. Míg az első ábrán s_1 nyelő s_2 pedig forrás, addig a második ábrán adott s_1, s_2 pontokból egyirányú vágások átfordításával nem lehet egyszerre nyelő-, illetve forráspontot csinálni:



Ennek ellenére adott aciklikus digráfban lévő Fries-halmaz maximális méretére azt sejtik, hogy ez megegyezik a maximális 2-nyelőstabil halmaz elemszámával.

6.2. Sejtés:
Adott $D = (V, A)$ aciklikus digráf. Ekkor

$$\max\{|S| : S \subseteq V,\ \text{S Fries-halmaz}\} = \max\{|S| : S \subseteq V, S \text{ 2-nyelőstabil}\} =$$
$$= \min\{\sum_{C \in \mathcal{C}} 2 \cdot c(C) + |X| : X \subseteq V, \mathcal{C} \text{ körök egy halmaza}, \cup\mathcal{C} \cup X \text{ fedi } V\text{-t}\}.$$

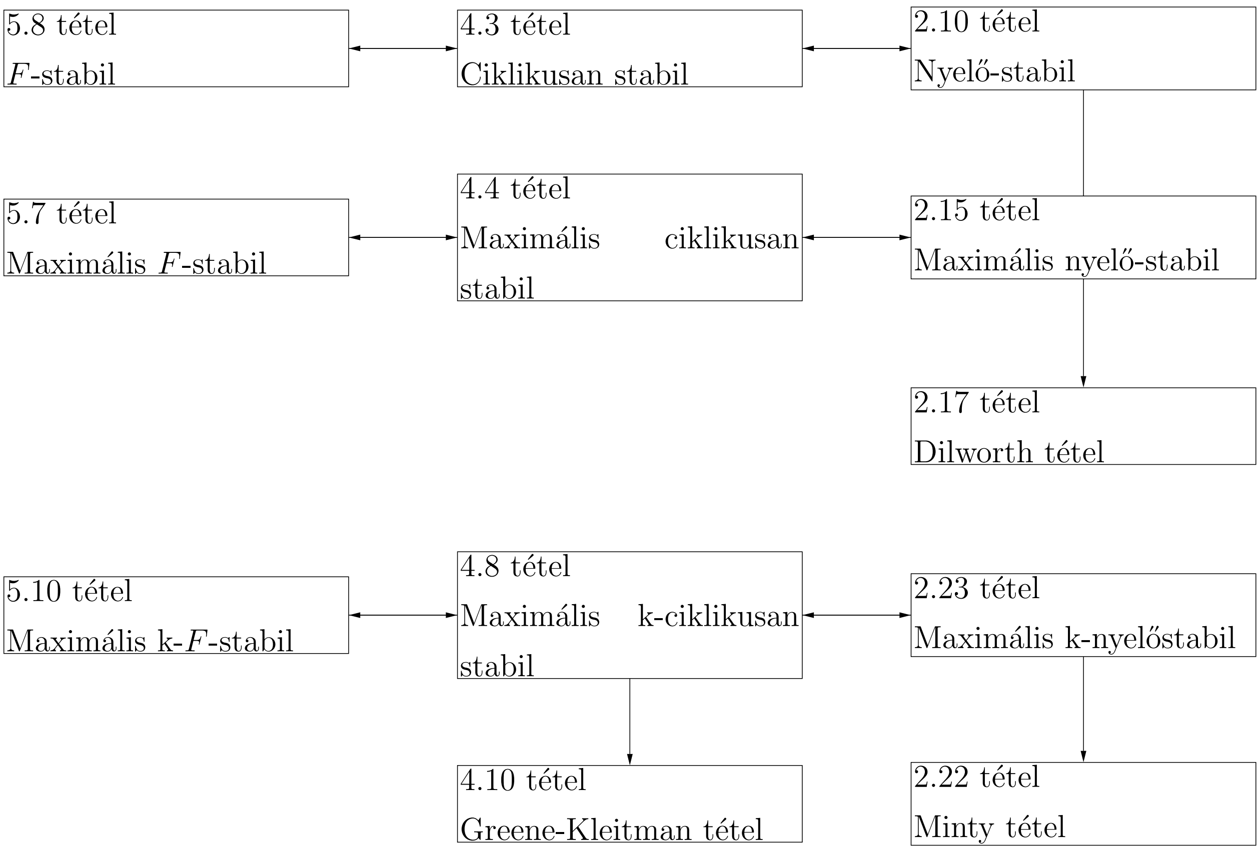
Sebő András [8] cikkében szerepel az alábbi tétel:

6.3. Tétel:
$D = (V, A)$ erősen összefüggő digráf adott koherens ciklikus sorrenddel. Ekkor csúcsai színezhetőek $k := \max_{C \text{ irányított kör}}\{\lceil |C|/ind(C) \rceil\}$ színnel. Sőt olyan k színnel való színezés is létezik, ahol az adottal ekvivalens koherens ciklikus sorrendben az egy színosztályba tartozó csúcsok mind egyszerre intervallumot alkotnak.

6.4. Megjegyzés:
A k színnel színezhetőség következik abból, hogy a fenti k választással V k-ciklikusan stabil halmaz.

Ennek segítségével alsó becslést kaphatunk a Fries-számra. Ugyanis tekintsük azt a fenti tétel által adott színezést és a csúcsoknak azt a koherens ciklikus sorrendjét, ahol az egyes színosztályok intervallumot alkotnak. Jelöljük a színosztályokat $S_1, S_2, \cdots, S_k \subseteq V$-vel. Vegyük a ciklikus sorrendnek egy olyan megnyitását, ahol valamelyik i-re S_i pontjai vannak a sorrend elején. Ekkor természetesen egy másik $i \neq j$ S_j pontjai lesznek a sorrend végén. A lineáris sorrend által kapott hátra-éleket megfordítva aciklikus gráfot kapunk, mely csúcsainak ez a lineáris sorrend egy topologikus sorrendje. Azt már láttuk korábban, hogy ekkor S_i pontjai források, S_j pontjai nyelők. Most használjuk a 4. fejezet eredményeit nevezetesen azt, hogy tetszőleges D aciklikus gráfhoz definiálható olyan D' erősen összefüggő digráf, hogy D nyelőstabil halmazai pontosan D' ciklikusan stabil halmazainak felelnek meg. Így adott $D = (V, A)$ aciklikus gráf csúcsainak vegyük azt a színezését, amit a fenti Sebő tétel D'-re ad. Ebben az előbbi elgondolással látható, hogy a Fries-szám legalább $\max_{i=1\cdots k}\{|S_i| + |S_{i+1}|\}$ ahol $k + 1 := 1$.

Az alábbi ábra a dolgozatban tárgyalt főbb tételek közötti viszonyt mutatja:



Felhasznált irodalom

[1] G. J. Minty, *A theorem on n-coloring the points of a linear graph*, Amer. Math. Monthly, 69, 623-624, (1962)

[2] H. Abeledo, G.W. Atkinson, *Unimodularity of the Clar number problem*, Linear Algebra and its Applications 420 (2007) 441-448

[3] T. Gallai, *Problem 15* in: M. Fiedler *Theory of Graphs and its Applications*, Czech. Acad. Sci. Prague,1964, 161.

[4] S. Bessy, S. Thomassé, *Spanning a strong digraph by α circuits: A proof of Gallai's conjecture*, Bienstock, Nemhauser (Eds.), Integer Programming and Combinatorial Optimization, vol. 10, New York, 2004.

[5] K. Cameron, J. Edmonds, *Coflow Polyhedra*, Discrete Mathematics 101 (1992) 1-21 North-Holland.

[6] S. Iwata, T. Matsuda, *Finding Coherent cyclic orders in strong digraphs*, Combinatorica, 28(1): 83-88 (2008)

[7] D. E. Knuth, *Wheels within wheels*, J. Combinatorial Theory, Ser. B, 16 (1974), pp. 42-46.

[8] A. Sebő, *Minmax relations for cyclically ordered digraphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 97 (2007) 518-552.

[9] R. P. Dilworth, *A Decomposition Theorem for Partially Ordered Sets*, Annals of Mathematics 51 (1950) 161-166.

[10] C. Greene, D.J. Kleitman, *The structure of Sperner k-families*, J. Combin. Theory Ser. A 20(1) (1976) 41-68.