Lineáris élszámú gráfok és hipergráfok Ramsey-számairól

Geleji János

2008. június 5.

Diplomamunka
Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar
Témavezető: Katona Gyula, MTA tag

köszönetnyilvánítás: Katona Gyulának a 4. részbeli probléma felvetéséért és sok szakmai tanácsáért a felvetések megoldási módjaival kapcsolatban, Jordán Tibornak a matroidok összegzési problémájának felvetéséért, az 5. fejezet nagy része egy TDK dolgozat amelynek ő a témavezetője, Hermann Györgynek a 3. fejezethez adott tanácsaiért és egy szerepeltetett probléma megoldását is tőle hallottam, Salát Máténak ábrák készítésében nyújtott segítségéért és ő különben is tipográfus is, Hubai Tamásnak aki megtanított az egyetemi számítógépes rendszer használatára

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Egy összejövetelen egy társaság tagjai közül néhányan ismerik egymást, néhányan nem. Megkérdezhetjük, mennyi embernek kell összegyűlnie ahhoz, hogy biztosan legyen 3 ember akik páronként ismerik egymást, vagy 3 ember akik közül senki senkit nem ismer. Ha már hatan összejöttek, akkor tetszőleges személynek van legalább 3 ismerőse vagy 3 nem-ismerőse. Ezen legalább három ember között ha kettő ismeretségi státusza megegyezik a kiindulási emberre vonatkozóval, máris megvan a 3 emberünk. Ha az ismeretségi státusz eltér a 3 ember között a kiindulási embertől, akkor ők hárman adják a klikket. Ha csak öt ember gyűlik össze és mindenkinek 2 ismerőse van úgy, hogy az ismeretségi gráf ötszög, akkor nem lesz hármas klikk sem hármas üres halmaz. Így lesz az $R(3,3) = 6$ Ramsey-szám. Ugyanezt a kérdést feltehetjük 3 helyén nagyobb ismeretségi vagy ismeretlenségi klikk létezésére.

Adott a síkon N általános helyzetű pont, keressünk n pontot közöttük úgy, hogy konvex sokszöget alkossanak. Ez a geometriai hangzású felvetés Ramsey-számos megoldást nyert. Az Erdős-Szekeres tétel szerint ha N elég nagy, akkor van konvex n-szög. Felveszünk egy irányt vízszintesnek. Tetszőleges 3 pontra, amelyek közül a középső a másik kettő egyenese felett van, rakjunk piros háromszöget, tetszőleges 3 pontra, amelyek közül a középső a másik kettő egyenese alatt van, rakjunk kék háromszöget. Ha van n darab pontunk csupa egyszínű háromszöggel, máris megvan a konvex n-szög.

Ezek és ezekhez hasonló eredmények ösztönözték a korai kutatásokat a Ramsey-elméletben. F. P. Ramsey 1930-as megjelenésű cikke óta ez lett a kombinatorika egyik legjobban kifejlesztett területe, amely messze meghaladta az eredeti indíttatásait.

Jelen diplomamunkában a 2. részben bevezetek néhány jelölést amely konzisztens az irodalomban használatossal, kicsit mégis más. A 3. fejezetben áttekintést adok a Ramsey-elmélet egy kis szeletének fejlődéséről.

A 4. részben vizsgált probléma nem tartozik szigorú értelemben a Ramsey-elmélethez, két külön térben választok ki halmazokat. Tekintsünk egy n pontú halmazt. Válasszunk ki néhány k és néhány $k-1$ elemű halmazt úgy, hogy ne tartalmazzák egymást, ne legyen u pont kiválasztott k-as nélkül és ne legyen v pont kiválasztott $(k-1)$-es nélkül. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha n elég nagy, akkor ezt nem lehet megtenni.

Az 5. rész a korábbiaktól teljesen független, a TDK dolgozatomban, más indítékkal felvetett kérdésre adott választ használom egy Ramsey-elméletre emlékeztető kérdésfeltevés alsó korlátjának. Hogy ugyanez a szám felső korlát is, az könnyen látható.

2. Jelölések

Legyen $\mathcal{T}_n$ az n pontú fa gráfok halmaza.

K_t a t pontú teljes gráf, K_t^u az u uniform teljes t pontú hipergráf. Ha a felső indexet nem tüntetem fel, akkor 2 értendő, vagy ami a környezetben egyértelmű. Legyen $K_t - e$ az a gráf amelyet K_t egy élének elhagyása eredményez. Majdnem teljes gráfnak fogom nevezni. $K_{m,n}$ a teljes páros gráf melynek osztályai m, n pontúak, nyilván $K_{i,1}$ az $i+1$ pontú csillag. P_i az i pontú út, C_i az i pontú kör. Legyen S_i az i pontú kettőscsillag gráfok halmaza, amelyet két, külön-külön nem megkötött pontszámú szokásos csillag középpontjának összekötése ad.

Legyen $H_1, H_2, \ldots$ gráfok illetve közös k-ra uniform hipergráfok (akár egyelemű) halmazai. Ekkor $R_k(H_1, H_2, \ldots H_t; t)$ legyen a legkisebb pozitív egész, melyre az ilyen pontszámú teljes gráf vagy k uniform hipergráf éleit t színnel színezve valamely i-hez lesz az i. színosztályban H_i-beli (hiper)gráf. Ha nem írom ki k-t vagy t-t, akkor 2-nek értendő. Ha H_i helyébe egyetlen gráfot írok, akkor az őt tartalmazó egyelemű halmaz, értelemszerűen, ha egy s pozitív egészt írok, akkor értsük $\{K_s^2\}$-nek.

$R_k(H_1, H_2, \ldots H_t; t)$ valamely $H_1, \ldots H_t$ k uniform hipergráfcsaládok esetén a legkisebb n amelyre az n pontú teljes k uniform hipergráf hiperéleit t színnel színezve valamely i-re az i-edik színosztályban lesz H_i-beli hipergráf (Nem feltétlenül feszített).

$H_{k,m,l}$ azon részgráfképzésre nézve minimális k uniform hipergráfok, amely $V(G)$ csúcshalmazára és $E(G)$ élhalmazára teljesül

$$|E(G)| = m|V(G)| + l.$$

Az iménti jelölésekkel $H_3 \subset H_2$ esetén $R_k(H_1, H_2) \leq R_k(H_1, H_3)$ és ha H_3 úgy kapható H_2-ből, hogy néhány eleméhez (hiper)éleket adunk, akkor is $R_k(H_1, H_2) \leq R_k(H_1, H_3)$ teljesül, egyszerűen azért mert egy $R_k(H_1, H_2) - 1$ pontú egyik problémára jó konstrukció megengedett lesz a másik feladatra is.

3. Néhány ismert Ramsey-szám

A Ramsey számokat a harmincas évek óta kutatják, kevés pontos szám ismert és sok cikkben vannak az eredmények szétosztva. A kutatott mennyiségek skálája jóval szélesebb, mint amivel itt foglalkozom. Ebben a diplomamunkában csak olyan kérdéseket vizsgálok, ahol egy teljes gráf vagy teljes uniform hipergráf él illetve hiperélhalmazát partícionáljuk és a partíció osztályaiban keresünk tiltott részgráfokat. Az ismert értékek felkutatásában nagy segítség volt egy [6] erre a célra készített összefoglaló. Nem célom az összes ismert eredmény felsorolása, csak a későbbiek szempontjából érdekes és a valamiért tetszetős eredményeket írom ki. Alapesetben $R(k, l)$-et vizsgáljuk. $R(k, l)$ mindig létezik és véges, könnyen látható rekurzió

$$R(k, l) \leq R(k-1, l) + R(k, l-1)$$

ugyanis egy pontot lerögzítve az ő kék és piros szomszédai között eggyel kisebb megfelelő színű teljes gráf kiegészül megfelelő méretűre. Ebből adódik

$$R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}.$$

Régóta ismert alsó becslés [7]

$$c \cdot 2^{\frac{k}{2}} \leq R(k, k).$$

A következő táblázatban $R(k,l)$ néhány ismert értékét tüntetem fel. A bent levő törtek számlálója a legjobb ismert alsó korlát, nevezője a legjobb ismert felső korlát, ha ezek különbözők.

k l	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4		18	25	$\frac{35}{41}$	$\frac{49}{61}$	$\frac{56}{84}$	$\frac{73}{115}$
5			$\frac{43}{49}$	$\frac{58}{87}$	$\frac{80}{143}$	$\frac{101}{216}$	$\frac{125}{316}$
6				$\frac{102}{165}$	$\frac{113}{298}$	$\frac{127}{495}$	$\frac{169}{780}$
7					$\frac{205}{540}$	$\frac{216}{1031}$	$\frac{233}{1713}$
8						$\frac{282}{1870}$	$\frac{317}{3583}$
9							$\frac{565}{6588}$

Két színnél maradva további sokat vizsgált kérdés bizonyos gráfok, gráfpárokhoz tartozó legkisebb csúcsszám, amely esetén G vagy komplementere tartalmazza a pár megfelelő elemét.

A jelölések részben feltüntetett gráfok párosításait sokat vizsgálták, úgymint teljes és majdnem teljes gráfok egymás ellen, majdnem teljes gráfok egymás közt, teljes páros gráfok egymás közt. Ebbe a legutóbbiba beleértendő a csillagok teljes páros gráfok ellen és a csillagok egymás közt kérdései is. $R(K_{1,n}, K_{1,m}) = n + m - \varepsilon$ ahol ε értéke 1, ha n és m egyaránt párosak, egyébként 0. Végtelen sok n-re $R(K_{2,n}, K_{2,n}) = 4n - 2$ teljesül [1]

Az $R(G,H)$ Ramsey-szám már ismert minden legfeljebb 5 csúcsú G és H esetén kivéve 3 esetet: $R(K_5, K_5), R(K_5, K_5 - e), R(K_5, K_5 - P_3)$

Magasabb k-ra uniform teljes hipergráfok Ramsey-számainál a következő rekurzió érvényes:

$$R_k(m,l) \leq R_{k-1}(R_k(m-1,l), R_k(m,l-1))$$

Ebből $R_k(m,l)$ értékére egy k magasságú torony adódik [12] és létezik torony nagyságú konstrukció nagy teljes vagy üres rész nélkül.

Erdős megjegyzése, hogy egy gráf vagy a komplementere összefüggő, az én jelölésemmel $R(\mathcal{T}_n, \mathcal{T}_n) = n$. Szintén az összes fa tiltása mellett r szín használatánál $(r-1)n$ ponton már nem tudunk jólszínezni [4].

Tetszőleges rögzített fa esetén tehát valamely $T_n \in \mathcal{T}_n$-re a k színű $R(T_n, T_n, \ldots, T_n; k)$ nem ismert $k = 2$ esetben sem. Ismert azonban [5], hogy a k színű $R(T_n, T_n, \ldots, T_n; k) \leq (n-1)(k + \sqrt{k(k-1)}) + 2$. Ekkora pontszám esetén azonban már ugyanazon gráf egyik színosztályában megvan az összes n pontú fa.

Pontos érték ismert tetszőleges rögzített $T \in \mathcal{T}_n$ esetén $R(T, K_m)$-re [11]. Ha a kék élek osztályában tiltjuk a konkrét fát és a liláknál a teljes gráfot, akkor tekintsük a liláknál az $m-1$ osztályú, összesen $(n-1)(m-1)$ pontú Turán gráfot. A komplementer élei legyenek kékek. Ez jó konstrukció, ráadásul a pontszáma a lehető legnagyobb. A következő konstrukciót adhatjuk. Legyenek $T_1 \subset T_2 \subset \ldots \subset T_n$ egymásba skatulyázott fák sorozata ahol T_i pontszáma i. Értelemszerűen T_i-hez megfelelő helyen levelet hozzáadva kaphatjuk T_{i+1}-et. Teljes indukció m-re. Az $m = 2$ eset triviális. Indirekt bizonyítás, tegyük fel, hogy $(n-1)(m-1)+1$ pontunk van, az élek kiszínezve kékre és lilára, de nincs sem kék T_n sem lila K_m. Legyen a sorozat szerinti legnagyobb kék fa amit megtalálunk a gráfban T_i. T_1 biztos van. Rögzítsük le T_i egy előfordulását. Ebben van egy pont, ahol kék levél ragasztása T_{i+1}-et adna, tehát ennek a pontnak minden kék szomszédja a T_i rögzített előfordulásában van, tehát a lila szomszédainak halmaza legalább $(n-1)(m-1) - i \geq (n-1)(m-2) + 1$ pontú tehát az indukciós feltevés miatt van benne lila K_{m-1} vagy kék T_n. A lila teljes gráfot pedig ki tudjuk egészíteni azzal a ponttal, ahol a kék T_i illeszkedési pontja van.

Különböző színszámú Ramsey-számok között kapcsolatot teremthetünk:

$$R_k(H_1, H_2, H_3; 3) \leq R_k(K_{R_k(H_1,H_2)}, H_3; 2)$$

Egyszerűen az első két színosztály összevonása igazolja ezt az állítást. Ezt és a fa versus teljes gráf Ramsey-számot felhasználva kétszínű klasszikus (teljes gráfos) Ramsey-számokra becslést kaphatunk egy fákat felvonultató, háromszínű Ramsey-számon keresztül.

$$R(K_{(l-1)(m-1)+1}, K_n) \geq R(T_l, K_m, K_n)$$

Észrevehetjük továbbá, hogy az $R(K_m, T_n)$ számos bizonyítás kicsit általánosabban is alkalmazható.

$$R(T_l, K_m, K_n) \geq (R(K_m, K_n) - 1)(l - 1) + 1$$

Ezt úgy tudjuk bizonyítani, hogy veszünk egy $R(K_m, K_n) - 1$ pontú konstrukciót kék és sárga színekkel kék K_m és sárga K_n nélkül. Ennek minden csúcsa helyére befújunk egy $l - 1$ pontú zöld teljes gráfot, az új élek öröklik a megfelelő sárga és kék élszíneket. Számoljuk össze a pontokat és vegyük észre, hogy nincs zöld l pontú fa, sem kék K_m sem sárga K_n. Ezek érdekes speciális esete az $l = 3$, vagyis

$$R(2m - 1, n) \geq 2R(m, n) - 1$$

Ezt az okoskodást Hermann Györgytől hallottam. Ez a becslés csak lineáris, mégis sok esetben az ismert legjobb alsó becslést nyerhetjük vele.

Egyforma n pontú utakra [2] ismert 2 színnél $\lfloor \frac{3n-2}{2} \rfloor$, 3 színnél $2n - 1$ illetve $2n$ aszerint [3], hogy n páratlan vagy páros.

$R(S_n, S_n)$ értéke konstans hibától eltekintve $\frac{4n}{3}$

4. Baysa-feladat

A feladat neve onnan ered, hogy egy mongol hallgató gondolkozott először a problémán, az ő neve Balkhu Batbayasgalan, ezt idézi a mostani elnevezés. Rögzítsünk k, u, v paramétereket. Az alaphalmazon válasszunk ki néhány k és néhány $k - 1$ elemű részhalmazt úgy, hogy az alábbi három dolgot elkerüljük:

(i) u pont úgy, hogy nem tartalmaznak egyetlen kiválasztott k-ast sem,

(ii) v pont úgy, hogy nem tartalmaznak egyetlen kiválasztott $(k - 1)$-est sem,

(iii) Egy kiválasztott k-as tartalmaz egy kiválasztott $(k - 1)$-est.

A legkisebb egészt, amekkora alaphalmazon ezt nem lehet megtenni, jelölje $H_k(u,v)$. Feltehető, hogy $k \leq u,v$.

1. TÉTEL. *$H_k(u,v)$ véges.*

Bizonyítás. $H^{k,u}$ jelentse az olyan u pontú $k-1$ uniform hipergráfok halmazát, ahol bármely k ponthoz van őt részhalmazként lefogó hiperél. Egy Baysa-konstrukcióban a $k-1$ pontú halmazok között nem lehet $H^{k,u}$-beli részhipergráf, mert annak u pontján csak tartalmazással lehetne kiválasztott k-as, pedig nincs az üres u-as a k-asok között. Ha viszont nincs ilyen, akkor az összes k-as, aminek nem választottuk ki részhalmazát, jól egészíti ki a konstrukciót. H_k^v jelölje azon v pontú k uniform hipergráfok halmazát, ahol minden $k-1$ pontú részhalmazt tartalmaz valamely hiperél. Az előbbihez hasonlóan a k-asok között nem lehet H_k^v-beli részhipergráf mert ennek a v pontján csak tartalmazással lehetne kiválasztott $(k-1)$-es, ha pedig nincs, akkor üres v-esünk van a $(k-1)$-esek között. Ezenkívül felhasználjuk, hogy egy Ramsey-szám felső becslésének tekinthetjük, ha a tiltott hipergráf helyett egy őt részgráfként tartalmazó hipergráfot tiltunk meg, valamint ha a tiltott gráfok halmazának egy részhalmazát vesszük.

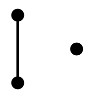
$$H_k(u,v) = R_{k-1}(K_v, H^{k,u}) = R_k(H_k^v, K_u) \leq R_k(K_v, K_u) \qquad \square$$

Ez alapján kijelenthető, hogy $H_k(u,v) \leq t_k(max\{u,v\})$ ahol $t_k(x)$ a k magasságú 2-esekből álló torony függvény a legtetején x-szel megtoldva.

Néhány esetben $H_k(m,l)$-et könnyű megadni. $H_k(k,v) = v$, $H_k(u,k) = u$. Egyszerű eset még $k = 2$, ekkor néhány élt és néhány csúcsot kell kiválasztani. Legfeljebb $v-1$ darab nem kiválasztott csúcs lehet. A nem kiválasztott csúcsokon feltehető, hogy az összes él ki van választva. A kiválasztott élek ekkor klikket alkotnak, rajta kívül legfeljebb $u-1$ csúcs van, tehát $H_2(u,v) = u+v-1$.

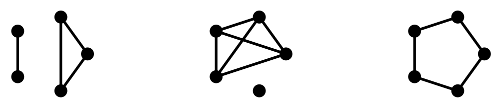
A következő esetekben arról van szó, hogy $H^{k,u}$ elemei közül csak egyet figyelembevéve tudunk felső becslést adni.

$H^{3,3}=$



$H^{3,4}=$

$H^{3,5}=$



$H^{3,6}=$

$k=3$ eset: háromszögeket és éleket választunk ki. $H^{3,u}$ elemei egyszerű gráfok. $u=4$ alesetben nem fordulhat elő két diszjunkt él, ezért a kiválasztott élek gráfja háromszög vagy csillag lehet. Háromszög esetén a háromszög pontjaihoz negyedik pont már nem választható, mert erre a négy pontra nem választható háromszög. Csillag alapján adható konstrukcióban a csillag középpontjától különböző csúcsok már nem feszítenek élt ezért legfeljebb $v-1$ darab van belőlük tehát legfeljebb összesen v pontunk lehet, vagyis $H_3(4,v)=v+1$.

$k=3, u=5$-nél a gráfban nem fordulhat elő háromszög és tőle diszjunkt él, mert erre az 5 pontra nem férne háromszög.

1. eset: az élek gráfjában van háromszög. Ekkor minden további élnek van közös csúcsa a háromszöggel. A háromszögön kívüli csúcsoknak legfeljebb 2 élszomszédja lehet a háromszögben, különben K_4 lenne ami láthatóan

nem lehet. A háromszögön kívüli csúcsok száma legfeljebb $v-1$ mert ők nem feszíthetnek élt, vagyis a háromszöges konstrukció pontszáma legfeljebb $v+2$.

2. eset ha nincs háromszög. Ekkor a pontszám legfeljebb

$$H_3(5,v) \leq R_2(3,v) \leq \binom{3+v-2}{2} = \frac{v(v+1)}{2}.$$

$k=3, u=6$-nál a gráfban nem fordulhat elő két diszjunkt háromszög, ezért

$$H_3(6,v) \leq R_2(3,v)+3 \leq \binom{3+v-2}{2}+3 = \frac{v(v+1)}{2}+3.$$

Ilyen módszerrel általában kijelenthető, hogy

2. LEMMA.

$$H_3(u,v) \leq R_2\left(\left\lceil \frac{u}{2} \right\rceil, v\right) + \left\lfloor \frac{u}{2} \right\rfloor.$$

Bizonyítás. Tekintsünk egy $R_2\left(\left\lceil \frac{u}{2} \right\rceil, v\right) + \left\lfloor \frac{u}{2} \right\rfloor$ pontú Baysa-feladatra adott konstrukciót. Színezzük ugyanekkora ponthalmazon a teljes gráfot két színnel kékre színezve az éleit, lilára a neméleket. Van benne kék teljes gráf$\left\lfloor \frac{u}{2} \right\rfloor$ pontú, vagy van lila K_v. Ha benne van a kék dolog, akkor a többi pont gráfja még mindig elég nagy, hogy legyen benne kék teljes $\left\lceil \frac{u}{2} \right\rceil$ vagy lila teljes v, mindkét esetben készen vagyunk ugyanis a kék teljes gráfpár üres a konstrukció szerinti háromszögekben, a lila dolog üres az élek között. □

Általában a $H_3(u,v)$ kiszámolásához javasolt $H^{3,u}$ halmaz elemeit próbáljuk meghatározni. Nevezzünk egy hipergráfot lefogónak, ha minden k pontú csúcshalmazán van $k-1$ pontú hiperél. $k=3$ esetén van egy típusa ezeknek amelyek két diszjunkt teljes gráfból tevődnek össze, a fenti esetekben mindig ezek közül a középsőt vettük figyelembe. Tetszőleges hipergráfnak egy $k-1$ pontú hiperélét nevezzük kritikusnak, ha van olyan k pontú csúcshalmaz, amelyben ő az egyetlen hiperél. Egy hipergráf akkor és csak akkor van $H^{k,u}$-ban, ha lefogó és minden hiperéle kritikus. $H^{3,u}$-beli gráfoknak minden csúcshármasán van legalább egy él és mivel élelhagyásra nézve minimális gráfjaink vannak, ezért itt minden élhez van tanúháromszög, mely szerint ő kritikus. $H^{3,u-1}$-beli gráfból kaphatunk olyan gráfot, amelynek részgráfja(vagy egyenlő vele, ha szerencsénk van) valamely $H^{3,u}$-beli gráf a következőképpen: vegyünk egy új csúcsot és néhány pont kivételével vegyük fel az összes rá illeszkedő élt. A néhány régit, akihez nem kötöttük hozzá, ha nem voltak eddig is egymás szomszédai, kössük össze éllel, hogy klikket alkossanak. Könnyen látható, hogy ilyen módon lefogó gráfot kaptunk, amelynek lehetnek nem kritikus élei. Ha a kapott klikk tartalmazásra maximális klikk, akkor a kapott gráf minden hiperéle kritikus, vagyis $H^{3,u}$-ban vagyunk.

Adódik a kérdés: minden $H^{k,u}$-beli gráfot megkaphatunk $H^{k,u-1}$-beli gráfból ilyen módon? Egy u pontú lefogó hipergráf egy csúcsát elhagyva ismét lefogó hipergráfhoz jutunk. Az nem igaz, hogy egy $H^{k,u}$-beli hipergráf egy csúcsának elhagyása mindig $H^{k,u-1}$-beli hipergráfot ad, a kritikusságot tanúsító háromszögeknek kihagyhatjuk a csúcsait. Egy $H^{3,u}$-beli gráfban egy tetszőleges csúcs nemszomszédai klikket alkotnak. A klikk néhány élét elhagyva a maradék gráf minden éle kritikus, ugyanis a klikken kívüli élek tanúháromszöge nem tartalmazhatja az új csúcsot, lévén, hogy a klikken kívüli él egyik végpontja az új csúcsnak szomszédja. Tehát minden $H^{3,u}$-belit megkaphatunk ily módon $H^{3,u-1}$-beli gráfból.

Sajnos a klikkberajzolást nem mindig lehet megúszni, $H^{3,4}$-ben csak 2 komponensű gráfok vannak, a 2 diszjunkt él és a háromszög plusz egy ponttal, míg $H^{3,5}$-ben szerepel a C_5 ötszög is, ami 2-összefüggő tehát nem kapható meg egy 2 komponensű gráfból egy új csúcs és az új csúcsra illeszkedő élek felvételével.

Ha a berajzolt klikk része lesz egy nagyobb klikknek, akkor a nagyobb klikk csúcsait felesleges összekötni az új csúccsal.

3. TÉTEL. *Valamely k-tól függő, u-tól és v-től független $r > 1$ és $c > 0$ konstansokkal $H_k(u,v) \geq r^{c\cdot(\min\{u,v\})^{k-2}}$.*

Bizonyítás. Legyenek $p+q=1$ pozitív valós számok, tekintsük a $G_{k-1}(n,p)$ véletlen hipergráfot, azaz minden $k-1$ pontú halmazt egymástól függetlenül p valószínűséggel választok ki.

$p(\text{egy rögzített } v \text{ pontú halmaz üres}) = q^{\binom{v}{k-1}}$

A kitevőben szereplő darabszámú hiperélnek kell nem kiválasztva lenni. Ezek hiperélenként független események.

$p(\text{egy rögzített } u \text{ pontú halmaz minden } k\text{-asa le van fogva}) \leq$

Az egyik esemény maga után vonja a másikat.

$\leq p($egy rögzített u pontú halmazon egy független k-asokból álló rendszer minden eleme le van fogva$) =$

$= p(\text{egy } k\text{-as le van fogva})^a \leq$

Ugyanúgy, mint előbb, az a kitevő a független k-asokból álló rendszer elemszáma, $\frac{u}{k}$ ponton, az összes $(k-1)$-esre rakhatok k-ast és a maradék $\frac{(k-1)u}{k}$ ponton válogathatok k-adik csúcsokat hozzájuk úgy, hogy a k-asoknak ne legyen közös $(k-1)$-esük vagyis függetlenek legyenek.

$\leq (1-q^k)^{\binom{\frac{u}{k}}{k-1}}$

Egy u-asból a lefogott u-asok számának várható értéke a lefogottság valószínűsége, amit ezidáig becsültünk, hasonlóan van a helyzet az egy üres v-essel. Ezek alapján a lefogott u-asok és az üres v-esek számának várható értékére valamely pozitív c_1, c_2 konstansokkal a várható érték additivitása miatt érvényes a következő becslés:

$E(\text{üres } v\text{-esek}) \leq \binom{n}{v} q^{\binom{v}{k}} \leq n^v q^{c_1 v^{k-1}}$
$E(\text{lefogott } u\text{-asok}) \leq \binom{n}{u} (1-q^k)^{\binom{\frac{u}{k}}{k-1}} \leq n^u (1-q^k)^{c_2 u^{k-1}}$

Ha ezeknek a mennyiségeknek az összege kisebb, mint 1 akkor tudjuk, hogy van olyan kivitelezés amikor sem üres v-es sem lefogott u-asunk nincsen. Legyen $n < \frac{1}{\sqrt[v]{2}} \left(\frac{1}{q}\right)^{c_1 v^{k-2}}$ és $n < \frac{1}{\sqrt[u]{2}} \left(\frac{1}{1-q^k}\right)^{c_2 u^{k-2}}$. Ha q értékét növelem akkor a két korlát közül az első csökken, a második növekszik, értelemszerűen a két korlát minimuma akkor lesz a lehető legnagyobb, amikor a korlátok egyenlőek. Ha elvégezzük a behelyettesítést látjuk, hogy

$$E(\text{üres } v\text{-esek}) + E(\text{lefogott } u\text{-asok}) \leq n^v q^{c_1 v^{k-1}} + n^u (1-q^k)^{c_2 u^{k-1}} < \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}.$$

□

5. Lineáris élszámú gráfok halmazainak Ramsey számai

Ebben a fejezetben matroidokkal való kapcsolat révén megadjuk $R_k(H_{k,m_1,l_1}, H_{k,m_2,l_2})$ értékét pontosan, ha $\frac{m_1}{l_1}$ és $\frac{m_2}{l_2}$ törtek megegyeznek, vagy mindketten beleesnek ugyanabba az intervallumba az alábbiak közül: $[-1, 0]$ és $[0, +\infty)$.

A bebizonyított elmélet korábban is ismert speciális esete, ha minden színosztályban megtiltom, hogy létezzen kör, azaz csak fákat illetve erdőket engedek meg, tehát azt kérdezem, hogy hány darab erdővel lehet lefedni a teljes gráf élhalmazát, erre a kérdésre választ ad a Nash-Williams tétel. Ezt általánosítjuk. Ezeknek a korlátoknak az éles voltát megmutatjuk.

Adott gráfban $H_m(k,l)$ valamely elemével izomorf részgráfok halmaza legyen $\mathcal{C}$. Ez a halmaz kielégíti a matroid köraxiómákat, nevezetesen

- $\emptyset \notin \mathcal{C}$,
- sosem lesz különböző halmazokra $A \subset B$ és $A, B \in \mathcal{C}$,
- ha A, B két különböző $\mathcal{C}$-beli elem és $e \in A \cap B$ egy él a metszetből, akkor van $C \in \mathcal{C}$ melyre $C \subset A \cup B \setminus \{e\}$.

Az ilyen módszerrel kapott matroid a count matroid. A köraxiómákat nem közvetlenül szokás belátni, hanem a rangfüggvény felhasználásával.

5.1. Motiváció

Definíció. Adott G gráf E élhalmazán az $M_{k,l}$ count matroidot adjuk meg: valamely $F \subset E(G)$ esetén vegyük az $r^*(F) = k|V(F)| + l$ függvényt, ahol

$V(F)$ jelöli az F élhalmaz által feszített csúcsok halmazát. Ez metsző szubmoduláris függvény, vegyük az alsó reszeltjét. Az alsó reszeltet metszeni kell a csupa 1 vektorral. Ez adja meg $M_{k,l}$ rangfüggvényét.

A count matroidok nyelvén le lehet írni Nash-Williams tételét, amely szerint egy $G(V,E)$ irányítatlan gráf élhalmaza pontosan akkor fedhető le k erdővel, ha a csúcsok minden X részhalmazára

$$i_G(X) \leq k|X| - k$$

itt $i_G(X)$ az X csúcshalmaz által feszített élek halmazának elemszámát jelenti.

Count matroidként megadható egy gráf grafikus matroidja, ez $M_{1,-1}$, ennek függetlenjei a körmentes élhalmazok.

Az írásban vizsgált kérdés nyelvén ez úgy hangzik, hogy

$$M_{k,-k} = \bigvee_{k \text{ db}} M_{1,-1}$$

itt k darab count matroid összegeként állítunk elő egy másik count matroidot.

Egy gráf síkon vett merevségi matroidja az $M_{2,-3}$ count matroid, sima tóruszra vagy hengerpalástra rajzolt gráf merevségi matroidja $M_{2,-2}$, n-dimenziós tóruszon $M_{n,-n}$, kúpon tekintett hurokmentes gráfra ez $M_{2,-1}$, konvex poliéderen szintén hurokmentes gráfra $M_{2,0}$ [10].

Ezt a kérdést vizsgálták korábban is, egy tévedést [8] eloszlatunk. Egy ott hivatkozott cikk kimondja a következő állítást

4. TÉTEL. *Ha μ_1, μ_2 nem-csökkenő egészértékű nemnegatív szubmoduláris függvények 2^S-en, akkor $M(\mu_1) \vee M(\mu_2) = M(\mu_1 + \mu_2)$*

Ebből téves következtetésre jut:

5. TÉTEL. *Ha $m = m_1 + m_2$ és $k = k_1 + k_2$ ahol $\frac{m_1}{k_1} > -2, \frac{m_2}{k_2} > -2$, akkor $M_{m_1,k_1} \vee M_{m_2,k_2} = M_{m,k}$*

Erre a tételre ellenpélda adható, legyen G egy 4 pontú kör amelynek minden éle kétszeres, $m_1 = 1, m_2 = 2, k_1 = -1, k_2 = -3$. A teljes élhalmaz rangja $M_{2,-3}$-ban 4, $M_{1,-1}$-ben 3 és $M_{3,-4}$-ben 8. Egyszerű gráf ellenpélda is adható.

5.2. Gráfok count matroidjai

Megfigyelés. $\frac{l}{k} \leq -2$ *esetén* $M_{k,l}$ *csupa hurkokból áll, ugyanis egy él rangja* $2k + l \leq 0$. *A továbbiakban feltesszük, hogy* $\frac{l}{k} > -2$. $k < 0$ *esetén* r^* *nem lesz metsző szubmoduláris.* $k = 0$ *eset az uniform matroid.*

Ha valamelyik tételben, lemmában osztok k, k_1, k_2 valamelyikével, akkor azt az állítást csak pozitív esetre értelmezzük. $M_{k_1+k_2,l_1+l_2}$ rangfüggvénye a következő [9]:

$$r_+(E_1) = \min_{F \subset E_1, \mathcal{F}} \left\{ |E_1 \setminus F| + \sum_{F_i \in \mathcal{F}} ((k_1 + k_2)|V(F_i)| + l_1 + l_2) \right\}$$

Itt a minimumot F összes lehetséges $\mathcal{F}$ partíciójára tekintjük.

$M_{k_1,l_1} \vee M_{k_2,l_2}$ rangfüggvénye a következő [9]:

$$r_\vee(E_1) = \min_{F \subset E_1} \{|E_1 \setminus F| + r_1(F) + r_2(F)\} =$$

$$= \min_{F \subset E_1} \left\{ |E_1 \setminus F| + \min_{H_1 \subset F, \mathcal{F}_1} \left\{ |F \setminus H_1| + \sum_{F_i \in \mathcal{F}_1} (k_1|V(F_i)| + l_1) \right\} + \right.$$

$$\left. + \min_{H_2 \subset F, \mathcal{F}_2} \left\{ |F \setminus H_2| + \sum_{F_j \in \mathcal{F}_2} (k_2|V(F_j)| + l_2) \right\} \right\} =$$

itt a minimumoknál $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ halmazcsaládok H_1 és H_2 összes partícióin futnak. A belső minimumok monotonok arra a halmazra nézve, amelyre kiértékeljük őket, lévén, hogy ők M_{k_1,l_1} és M_{k_2,l_2} rangfüggvényei. emiatt feltehető, hogy a minimum olyan halmazokon (is) felvétetik, ahol $H_1 = H_2 = F$. Emiatt egy minimummal a következőképp írható a rangfüggvény:

$$= \min_{F\subset E_1, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2} \left\{ |E_1 \setminus F| + \sum_{F_i \in \mathcal{F}_1} (k_1|V(F_i)| + l_1) + \sum_{F_j \in \mathcal{F}_2} (k_2|V(F_j)| + l_2) \right\}$$

itt a minimumoknál $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ halmazcsaládok F összes partícióin futnak.

A két matroid pontosan akkor egyezik meg, ha a két rangfüggvény minimum képletben minden élhalmazra ugyanazt a számot kapjuk. Vagyis: $\forall E_1 \subset E$

$$\min_{F\subset E_1, \mathcal{F}} \left\{ |E_1 \setminus F| + \sum_{F_i \in \mathcal{F}} (k_1|V(F_i)| + l_1) + \sum_{F_j \in \mathcal{F}} (k_2|V(F_j)| + l_2) \right\} =$$

$$= \min_{F\subset E_1, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2} \left\{ |E_1 \setminus F| + \sum_{F_i \in \mathcal{F}_1} (k_1|V(F_i)| + l_1) + \sum_{F_j \in \mathcal{F}_2} (k_2|V(F_j)| + l_2) \right\} \quad (1)$$

A két képlet között az a különbség, hogy az elsőben(amelyik a paraméterek összegzésével kapott count matroid) a két szummában ugyanaz a partíció szerepel, míg a count matroidok összegzésével kapott matroid rangfüggvényénél ez a két partíció nem feltétlenül azonos.

6. LEMMA. *$r_\vee = r_+$ pontosan akkor teljesül minden G gráfra, ha bármilyen G_1 gráf E_1 élhalmazára*

$$\min_{\mathcal{F}} \left\{ \sum_{F_i \in \mathcal{F}} (k_1|V(F_i)| + l_1) + \sum_{F_j \in \mathcal{F}} (k_2|V(F_j)| + l_2) \right\} =$$

$$= \min_{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2} \left\{ \sum_{F_i \in \mathcal{F}_1} (k_1|V(F_i)| + l_1) + \sum_{F_j \in \mathcal{F}_2} (k_2|V(F_j)| + l_2) \right\} \quad (2)$$

Itt $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ tetszőleges partíciói E_1-nek.

Bizonyítás. Ha (2) tetszőleges élhalmazra teljesül, akkor az (1) képletben az $|E_1 \setminus F|$ -től különböző tagok egyenlősége miatt a minimumértékek ezzel a - két képletben azonos - taggal megtoldva egyenlőek maradnak.

Másfelől, ha adunk egy G példát, amelyre (2) nem teljesül, akkor ezt felhasználva megadható olyan gráf konstrukciója, amelyre $r_\vee(G) \neq r_+(G)$.

Ezen a ponton a bizonyítást kétfelé ágaztatom, az első ág sokkal egyszerűbb, hátránya annyi, hogy nem egyszerű gráfot ad konstrukcióként.

Egyszerűbb bizonyítás. Az éleket mindenütt többszörözzük meg. Ezzel elérhetjük, hogy a minimum képlet értékét olyan részpartíción vegye fel, amely lefedi az összes élt. Ezzel kész is a lemma.

Egyszerű gráfos bizonyítás. Legyen $\frac{l_2}{k_2} < \frac{l_1}{k_1}$ A 0-val osztás eredményét itt vegyük $+\infty$-nek. Tegyük fel, hogy a (2) képletben a minimumot adó partíciók $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$.

Nézzük G helyett a következő gráfot: G minden élére ragasszunk rá két csúcsával egy-egy K_t nagy teljes gráfot, nevezzük a kapott gráfot G'-nek. Legyen t elég nagy. $\mathcal{F}_2$ alapján kaphatunk egy $\mathcal{F}'$ partíciót G' élhalmazán, amelyet úgy kapunk, hogy a ragasztással hozzáadott élek a G-beli eredetijükkel azonos részbe kerülnek. G élhalmazának partícióiból ily módon kapható G' élpartíciók közt ez biztosan legjobb. Legyen G' élhalmazának optimális részpartíciója M_{k_2,l_2} rangfüggvényében azaz az (1) képletben $\mathcal{F}''$.

1. állítás. $\mathcal{F}''$ lefedi G' teljes élhalmazát és nem osztja szét semelyik ragasztott K_t élhalmazát sem(és emiatt $\mathcal{F}' = \mathcal{F}''$).

2. állítás. Az 1. állítás és az M_{k_1,l_1} és $M_{k_1+k_2,l_1+l_2}$-re vonatkozó analogonjai (közös, nagy t választásra) együtt igazolják a 3. lemmát.

2. állítás bizonyítása. A G'-beli (1) szerinti, 1. állításnak megfelelő alakú különféle partíciók eltérései ugyanazok, mint a nekik megfelelő G-beli (2) szerintiek, mert a részek száma ugyanaz, a régi csúcsok szerepeltetése a partíciók részeiben ugyanaz és az új csúcsok mind pontosan 1 részben vannak benne az összes partícióban.

1. állítás bizonyítása. Elég a $G = K_2, G' = K_t$ esetre igazolni, ugyanis ha ott minden másfajta részpartíciót érdemes az egyrészes teljesre becserélni, akkor nagyobb gráfok esetén ezt minden ragasztott K_t-ben érdemes megtenni. A részpartícióban minden osztálynak legfeljebb egy közös csúcsa van egy másik osztállyal vagy a részpartíción kívüli éllel. Ezért a részpartícióban minden osztály élhalmaza teljes gráfot feszít.

Nézzük, mikor éri meg egy K_r teljes gráfot részpartícióbeli élekre bontani: $rk_2 + l_2 - \frac{r(r-1)}{2}(2k_2 + l_2) < 0$ ez pontosan akkor teljesül ($r \geq 2$), ha $r < -\frac{l_2}{2k_2+l_2}$. Hasonlóan megvizsgáljuk, hogy mikor éri meg egy K_r teljes gráfot részpartíción kívüli élekre bontani: $rk_2 + l_2 > \binom{r}{2}$ ez pontosan akkor teljesül, ha $r < \frac{2k_2+1+\sqrt{4k_2^2+4k_2+1+8l_2}}{2}$ Jelöljük $r_0 = \max\left\{\left\lceil -\frac{l_2}{2k_2+l_2}\right\rceil, \left\lceil \frac{2k_2+1+\sqrt{4k_2^2+4k_2+1+8l_2}}{2}\right\rceil\right\}$, ekkor minden r_0-nál kisebb teljes részgráfot érdemes valahogy bontani, ezért az optimális partícióban ilyenek nincsenek.

$\mathcal{F}''$ nem lehet élenkénti(ez az üres részpartícióval egyenértékű a mi esetünkben), mert akkor érdemes lenne becserélni egyrészesre. Tehát van benne egy $H \in \mathcal{F}''$ élosztály. $H = K_t$ esetben készen vagyunk. Egyébként van rajta kívül egy v csúcs. Ekkor az összes olyan osztályt és részpartíción kívüli élt, amelynek van H-val közös csúcsa és illeszkedik v-re is, hozzáragasztjuk H-hoz. Összesen $|V(H)|$ ilyen objektum van. Ezek között a partíción kívüli élek száma legyen s. A ragasztás nyeresége:

$$(|V(H)| + 1)k_2 + l_2 - s - |V(H)|k_2 - l_2 - (|V(H)| - s)(2k_2 + l_2)) \leq$$

$$\leq k_2 - s - (|V(H)| - s)(2k_2 + l_2) < 0$$

Felhasználtuk, hogy $|V(H)| \geq r_0 > k_2$ A részpartíció összsúlyát csökkentettük, tehát az nem lehetett optimális. Emiatt csak az egyrészes teljes részpartícióra adódik az optimum. □

A következőkben mindenhol a (2) képletet használjuk, az $r_\vee$ és r_+ közötti összefüggés megállapításához elég annyit eldönteni, hogy van-e a teljes élhalmazt lefedő közös optimális $\mathcal{F}$ partíció minden G-re M_{k_1,l_1} és M_{k_2,l_2} szerinti következő képletben

$$\min_{\mathcal{F}} \left\{ \sum_{F_i \in \mathcal{F}} (k|F_i| + l) \right\} \tag{3}$$

7. LEMMA. *Ha $l \geq 0$, akkor* (3) *képletben az egyrészes partíció optimális. Ha $l > 0$, akkor csak ez a partíció optimális.*

Bizonyítás. legyen $\mathcal{F}_1$ tetszőleges nem egyrészes partíció és legyen $\mathcal{F}_2$ ebből úgy származtatva, hogy $\mathcal{F}_1$-ben két részt(F_i és F_j) összevonunk. Ezáltal az összeg $k|V(F_i) \cap V(F_j)| + l$-el csökken. $l > 0$ esetén ez szigorú csökkenés. $l = 0$ esetén az összeg biztosan nem növekedett. □

8. LEMMA. *Ha $-1 \leq \frac{l}{k} \leq 0$, akkor* (3)*-ban az összefüggőségi komponensenkénti partíció optimális. Ha $-1 < \frac{l}{k} < 0$, akkor csak ez a partíció optimális.*

Bizonyítás. Adott $\mathcal{F}$ partícióra, ha van olyan $F \in \mathcal{F}$ amelyre F nem összefüggő, akkor F-et szétbonthatjuk két csúcsokban is diszjunkt F_1, F_2 részre. Legyen $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{F_1, F_2\}$ ekkor $\mathcal{F}_1$-re az összeg l-el csökkent, $l = 0$ esetben nem növekedett. Ha van olyan $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, amelyre $V(F_1) \cap V(F_2) \neq \emptyset$, akkor legyen $F = F_1 \cup F_2$ és $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \setminus \{F_1, F_2\} \cup \{F\}$, ezáltal az összeg $k|V(F_1) \cap V(F_2)| + l$-el csökken. $\frac{l}{k} > -1$ ez szigorú csökkenés, $l = -k$ esetén ez nem növekedés. □

9. TÉTEL. *Ha $\frac{l_1}{k_1} = \frac{l_2}{k_2}$, akkor $r_\vee = r_+$*

Bizonyítás. Ilyenkor a kétféle (3) típusú képletben az összes lehetséges partícióra egymás konstansszorosait kapjuk, tehát a minimumok felvétetnek ugyanazon a partíción. □

10. TÉTEL. *Ha $l_1 \geq 0$ és $l_2 \geq 0$, akkor $r_\vee = r_+$*

Bizonyítás. Ilyenkor a 7. lemma szerint a kétféle (3)-képletben az egyrészes partíció optimális. □

11. TÉTEL. *Ha* $0 \geq \frac{l_1}{k_1} \geq \frac{l_2}{k_2} \geq -1$*, akkor* $r_\vee = r_+$

Bizonyítás. Ilyenkor az 8. lemma szerint a gráf összefüggőségi komponensei szerinti partíció optimális mindegyik (3) típusú képletben. □

12. TÉTEL. *Ha* $l_1 > 0 > \frac{l_2}{k_2}$*, akkor van olyan* G *amelyre* $r_\vee \neq r_+$

Bizonyítás. Legyen E_1 két diszjunkt él egymás mellett. Ekkor (k_1, l_1) szerinti (3) képletben az egyetlen optimális partíció az egyrészes, ám a (k_2, l_2) szerintiben csak az összefüggőségi komponensek szerinti. □

13. LEMMA. *Ha* $\frac{l}{k} \leq -1$ *és* G *fa, akkor a* (3) *képletben az élenkénti partíció optimális. Ha* $\frac{l}{k} < -1$ *és* G *fa, akkor a* (3) *képletben csak az élenkénti partíció optimális.*

Bizonyítás. Legyen az optimális partíció $\mathcal{F}$. Ha ez nem élenkénti, akkor ismételgessük a következőt, amíg élenkénti partíciónk lesz. Egy fa gráf minden részgráfja erdő. Ebben mindig akad 1 fokú csúcs. Ha ezt leválasztjuk, a (3) képlet értékének megváltozása $k+l$, ez ≤ 0 az első esetben, a másodikban < 0. □

14. TÉTEL. *Ha* $\frac{l_1}{k_1} \geq -1 > \frac{l_2}{k_2}$*, akkor van olyan* G *amelyre* $r_\vee \neq r_+$

Bizonyítás. Ilyenkor van olyan n, amelyre $\frac{l_1}{k_1} > -\frac{n}{n-1} > \frac{l_2}{k_2}$ Legyen G egy n csúcsú kör. Ekkor a 7. és 8. lemmák miatt M_{k_1,l_1} szerinti (3) képlet optimális partíciója az egyrészes. Minden nem élenkénti partíció vagy az egyrészes, vagy tartalmaz fát, amit M_{k_2,l_2}-ben az 13. lemma miatt élekre érdemes bontani. Ha az egyrészes partíciót élenkéntire cseréljük, a változás:

$$n(2k_2 + l_2) - nk_2 - l_2 = nk_2 + (n-1)l_2 < 0$$

ezért itt az élenkénti partíció a legjobb. □

5.3. Konstrukció

Ebben a részben példát adok olyan G gráfra, amelynek a rangja különböző lesz $M_\vee$ és M_+ matroidokban $-1 \geq \frac{l_1}{k_1} > \frac{l_2}{k_2} > -2$ esetén. Ez a konstrukció egyszerű gráfot ad.

Legyen G csúcshalmaza $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Az átlagos fokszám($d^*$) legyen

$$\frac{2k_1}{2k_1 + l_1} < d^* = \frac{2k_2 - \varepsilon}{2k_2 + l_2}$$

racionális szám ($d^* > 2$). Nemüres intervallumban keressük d^*-ot. Válasszuk úgy, hogy ne legyen egész szám. $\frac{l_2}{k_2} > -2$ miatt a nevező pozitív. d^* racionális, tehát felírható két egész hányadosaként. A nevezője legyen t_0. Legyen $h_0 = \left\lceil \frac{1}{\{d^*\}} - 1 \right\rceil$. Sűrűn vannak olyan számok, amelyekre h_0 relatív prím t_0-hoz, legyen d^* ilyen. Ebben a fejezetben valamilyen ε_i mindig az itteni ε lineáris függvényét jelöli. Egy ilyen gráfban az élenkénti partíció M_{k_2,l_2}-ben jobb, mint az egyrészes, ellenben kellően nagy n-re M_{k_1,l_1}-ben az egyrészes partíció jobb, mint az élenkénti. m az élszám.

$$2mk_2 + ml_2 < nk_2 + l_2$$

$$2mk_1 + ml_1 > nk_1 + l_1$$

$$(2m - n)k_2 + (m - 1)l_2 < 0$$

felhasználva, hogy $nd^* = 2m$

$$n(d^* - 1)k_2 + \left(\frac{1}{2}nd^* - 1\right) l_2 < 0$$

$$d^* < \frac{2k_2 + 2\frac{l_2}{n}}{2k_2 + l_2}$$

ez elég nagy n-re teljesül, d^* definíciója miatt.

Minden v_i csúcs d_i fokszámát a kisebb indexűek fokszámainak ismeretében definiáljuk a következőképpen:

$$\left| id^* - \sum_{j=1}^{i} d_j \right| \leq \frac{1}{2}$$

Legyen $f = \left\lfloor \frac{1}{2} d^* \right\rfloor$

Legyen $\{v_1, v_2, \ldots, v_t\}$ az első néhány csúcs úgy, hogy rájuk éppen

$$td^* = \sum_{j=1}^{t} d_j$$

Feltehető, hogy $t = t_0$

Legyen h egy indexek szerinti távolság, amely előfordulhat két $\lceil d^* \rceil$ fokszámú csúcs között. Ekkor h-ra adhatunk becslést:

$$(h+1)d^* + 1 \geq (h-1)\lfloor d^* \rfloor + 2\lceil d^* \rceil$$

$$h \geq \frac{1}{\{d^*\}} - 1$$

Itt $\{d^*\}$ a d^* törtrészét jelenti. Ez ihlette h_0 definícióját, $h \geq h_0$.

Vegyünk egy nagy N számot. Legyen n a csúcsszám többszöröse $h_0 N t_0$-nak. Nézzünk néhány számot a következőképpen:

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_f$$

páratlanok, Nt-vel együtt $\{Nt, t_1, t_2, \ldots, t_f\}$ elemei páronként relatív prímek, $t_i \equiv 1 \pmod{t}$ minden i-re és a

$$Nt\lambda_0 + \sum_{j=1}^{f} t_i \lambda_i = 0$$

diofantikus egyenlet nemtriv(azaz nem csupa 0) megoldásaira

$$\sum_{i=0}^{f} |\lambda_i| \geq N$$

Legyen $\forall i$-re $n \equiv 1 \bmod t_i$ és legyen n legalább N-szerese ugyanezen számok legnagyobbikának. Először minden v_i-re illesszünk $d_i - 2f$ élt: amelyik csúcsokra ez 1 vagy 2, azokat kössük össze az Nt-vel utána következőkkel, kivéve, ha ez 1 és korábban összekötöttük az Ntvel előtte levővel. $d_i - 2f$ megegyezik bármely két egymástól Nt távolságra levő csúcsra. Most minden csúcsra fennmaradt $2f$ fokszám. mindet kössük össze az őt $t_1, t_2, \ldots t_f$ indexre követő csúcsokkal. Tekintsük a $d_i - 2f = 1$ csúcsokat. Ezek között Nt (behúzott vagy be nem húzott) húrélű körök szerint partíciót adhatunk meg. Egy ekvivalenciaosztályon belül az Nt távolságú pontpárok összekötöttségét és össze-nem-kötöttségét felcserélve az előírt fokszámoknak továbbra is megfelelő gráfot kapunk. Alkalmazzuk ezt úgy, hogy bármely két, egymástól h_0 távolságra lévő $d_i - 2f = 1$ csúcsból a kivezető Nt élek közül az egyik előre, a másik mindig hátra mutasson. Ha t_0 és h_0 relatív prímek, akkor N választható úgy, hogy Nt_0 relatív prím h_0-hoz és ekkor ez megtehető lesz.

M_{k_1,l_1} -ben nem optimális partíció az élenkénti:

$$\frac{2k_1 + 2\frac{l_1}{n}}{2k_1 + l_1} < \frac{2k_1}{2k_1 + l_1} < d^*$$

ebből számolható

$$2mk_1 + ml_1 > nk_1 + l_1$$

ez pedig azt jelenti, hogy az egyrészes partíció jobb, mint az élenkénti.

Megmutatjuk, hogy G-nek M_{k_2,l_2}-ben optimális partíciója az élenkénti. Legyen adott egy tetszőleges $\mathcal{F}$ finomítható partíció. Ezen javítunk egy picit. Legyen $H \in \mathcal{F}$ egy nem egyélű rész.

Ha H-ban van legfeljebb f fokú csúcs, akkor érdemes a ráilleszkedő éleket leszedni és külön-külön venni a partícióba, ehhez kell:

$$2k_2 f + l_2 f < k_2$$
$$f < \frac{k_2}{2k_2 + l_2}$$

ez pedig teljesül, ugyanis a baloldal kétszerese kisebb, mint d^*, a jobboldal kétszerese pedig nagyobb nála.

15. TÉTEL. *Bármilyen H-t érdemes élekre lebontani.*

Bizonyítás. Nevezzünk ívnek egy olyan élhalmazt, amelyek azonos indextávolságú pontokat összekötő húrokból álló út élei. Ez az azonos távolság legyen $t_1, t_2, \dots t_f$ valamelyike. H-ban nem lehet olyan ív, amely körbezáródik, mert akkor H az összes pontra illeszkedne, vagyis $H = G$ lenne. H-ban minden csúcsra f darab tartalmazásra nézve maximális ív illeszkedik. Mivel $t_i \equiv 1 \pmod t$ ezért egy J ív mentén a G-beli fokszámok ugyanúgy következnek, mint szomszédos pontok esetén, tehát a J-beli fokszámok összege

$$\sum_{v \in V(J)} d_v = \sum_{i=1}^{s+q} d_i - \sum_{i=1}^{s} d_i \leq (s+q)d^* + \frac{1}{2} - sd^* + \frac{1}{2} = |V(J)|d^* + 1$$

Ezt minden tartalmazásra nézve maximális H-beli ívre összegezzük. 0 élű H-beli íveket is megengedünk. K jelentse a H-beli tartalmazásra nézve maximális ívek számát. Minden ilyen ív két végén van egy H-ból kivezető ugyanolyan hosszúságú él, és minden H-ból kivezető él legfeljebb egy tartalmazásra maximális ívnek a folytatása.

$$\sum_{v \in H} d_v = \sum_{J \subset H} \sum_{v \in V(J)} \frac{d_v}{f}$$

Legyen a H-ból kivezető Nt hosszú élek száma m^-. H élszámáról a következőt tudjuk mondani(J ívet jelöl, az összes H-t érintő ívre összegzek)

$$m_H = \sum_{J \subset H} \sum_{v \in V(J)} \frac{d_v}{2f} - \sum_{J \subset H} 1 - \frac{m^-}{2} = \sum_{J \subset H} \left(\left(\frac{1}{2f} \sum_{v \in V(J)} d_v \right) - 1 \right) - \frac{m^-}{2} \leq$$

$$\leq \sum_{J \subset H} \left(\frac{1}{2f} \left(|V(J)|d^* + 1 \right) - 1 \right) - \frac{m^-}{2} = \frac{1}{2f} f n_H d^* + \sum_{J \subset H} \left(\frac{1}{2f} - 1 \right) - \frac{m^-}{2}$$

Felhasználva, hogy $2m_H = n_H d_H$, és d_H alsó becsléséből

$$\frac{2k_2 + 2\frac{l_2}{n_H}}{2k_2 + l_2} n_H \leq n_H d_H \leq \frac{1}{f} f n_H d^* + \sum_{J \subset H} \left(\frac{1}{f} - 2 \right) - m^-$$

Ha d^* definíciójából elhagyjuk az ε-t, akkor felső becslését kapjuk d^*-nak, ezzel

$$\frac{2k_2 + 2\frac{l_2}{n_H}}{2k_2 + l_2} n_H \leq n_H \frac{2k_2}{2k_2 + l_2} + \sum_{J \subset H} \left(\frac{1}{f} - 2 \right) - m^-$$

$$\frac{2l_2}{2k_2+l_2} \le \sum_{J\subset H}\left(\frac{1}{f}-2\right) - m^- \tag{4}$$

Mindkét oldalon negatív számok állnak. Ez akkor adja a keresett ellentmondást, ha a tartalmazásra nézve maximális ívek száma, amikre összegzünk, az nagy. Legyen K a H tartalmazásra nézve maximális részíveinek száma. Jelölés $c = \frac{l_2}{k_2}$, ekkor $d^* = \frac{2k_2-\varepsilon}{2k_2+l_2} = \frac{2}{2+c} - \varepsilon_1$

1. eset. $\frac{l_2}{k_2} = c > -\frac{3}{2}$ Tudjuk, hogy $f \ge 1$

$$-K - m^- \ge \frac{2l_2}{2k_2+l_2} > \frac{-2\cdot\frac{3}{2}}{2-\frac{3}{2}} = -6$$

Ilyenkor $f = \left\lfloor \frac{1}{2}d^* \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2+c} - \varepsilon_1\right)\right\rfloor \le \left\lfloor \frac{1}{2-\frac{3}{2}} - \frac{\varepsilon_1}{2}\right\rfloor = 1$ és a gráfunk olyan, hogy az ívek és az íven kívüli, H-ra egy végponttal csatlakozó élek számának összege legfeljebb 5. $d^* < \frac{2}{2+c} \le 4$

1.a eset. H-ban minden ív rövidebb, mint $\frac{n}{2t_1}$

1.a.i) eset H-ban 1 ív van: ilyenkor H fa, tehát van legfeljebb f fokú csúcsa.

1.a.ii) eset H-ban 2 ív van: legalább 2 összekötő él kell közöttük, különben H ismét fa lenne.

1.a.ii.α) eset $d^* < 3$ Ezeknek az összekötőknek a távolsága $h > h_0$ mert két t_1h_0 távolságra levő csúcsból kivezető Nt él különböző irányba mutat ugyanis bármely h_0 távolságra lévő párra ez igaz és t_1 páratlan. Tehát a két ív összekötése között legalább h_0+1 él van külön-külön az íveken. H ilyenkor „létra" alakú. az egyik kezdő fül nagysága $2h_0+3$ él. Ezt a fület érdemes lebontani, ha $c < -1 - \frac{1}{2h_0+3}$ ezt átrendezve $h_0 > -\frac{4+3c}{2+2c}$ ámde ilyenkor $\{d^*\} = d^* - 2$ tehát

$$h_0 \ge \frac{1}{d^*-2} - 1 > \frac{1}{\frac{2}{2+c}-2} - 1 = -\frac{4+3c}{2+2c}$$

vagyis a fül lebomlik, az optimális partícióban nem lehetett ilyen H - ellentmondás.

1.a.ii.β) eset $d^* > 3$ ilyenkor $c < -2 + \frac{2}{d^*} = -\frac{4}{3}$ Ebben az esetben minden legalább 3 élből álló fület érdemes lebontani, a létra végén mindig van egy ilyen.

1.a.iii) eset H-ban 3 ív van. A három közül az egyik középen van, a másik kettő legalább két-két Nt éllel kapcsolódik hozzá. Ha az egyik szélső kapcsolatai közrefogják a másik szélső két kapcsolatát, akkor vagy a közrefogó kapcsolatú ív egy hosszú fület ad ki, vagy ez fel van osztva, ilyenkor azonban lesz 3 H-ra illeszkedő külső Nt él a 3 ívvel együtt az 6, ellentmondás. Ha nem fogják közre, akkor 8-ashoz hasonló alakzatunk van. Itt van egy $3h+2$ hosszúságú fül, bomlik, mert $3h_0+2 \geq 2h_0+3$ és ez a nem nagyobb típusú fül is bomlik, mint az 1.a.ii) esetben.

1.a.iv) eset H-ban 4 ív van. Ilyenkor két középső ív van. Az egyik szélső ív kapcsolódása nem lehet kijjebb, mint a két középső között, mert az $3h+2$ fül lenne. A korábbiak alapján még nem kizárható felállás csak az, amikor a két középső ív két kapcsolata közrefogja a két szélső rész kapcsolatait. ilyenkor 4 darab harmadfokú csúcs van sok másodfokú között, az élszám legalább $8h+6$, a bontás nyereségének becslésénél felhasználjuk, hogy a $2h_0+3$ fülek bomlanak, azaz $(2h_0+3)(2+c) < 2h_0+4+c$

$$(8h+6)(2k_2+l_2)-(8h+4)k_2-l_2 < \frac{1}{k_2}((6h+3)(2+c)+2h)_0+4+c-(8h+4)-c) < 0$$

tehát érdemes bontani.

1.a.v) 5 ív eset a korábbiakhoz hasonló.

1.b eset. van $\frac{n}{2t_1}$-nél nem rövidebb ív. H ponthalmazának komplementálása esetén olyan halmazhoz jutunk, amelyben ugyanannyi ív van, mint H-ban és a kivezető Nt élek száma is egyezik, ezek az élek ugyanazok. Ezért elég megmutatni, hogy minden legfeljebb $\frac{n}{2}$ csúcsú részgráfra az ívek és a kivezető élek számának összege legalább 6. Nézzük az egyik leghosszabb ívet. A hossza t-nek tetszőlegesen nagy többszöröse, mert n-ben lineáris. Emiatt feltehető, hogy tetszőlegesen sok Nt él vezet ki belőle. Lehetnek Nt élek a pontjai között is, de mindenképp van az utolsó $\frac{n}{2t_1}$ pontján $\frac{n}{2tt_1}$ darab $\lceil d^* \rceil$ fokú csúcs, ezek között minden, az íven élenként számolt h_0 hosszú szakaszon van irányváltás tehát legalább $\frac{n}{2th_0t_1}$ darab Nt él vezet kifelé. Kellően nagy n-re ez szintén tetszőlegesen nagy lehet, tehát ezek legalább 1, legfeljebb 4 darab új ívre vezetnek amelyek leghosszabbikának a hossza n-ben lineáris függvény lesz, a műveletet ismételhetjük, amíg elérjük a 6 ívet.

2. eset. $c < -\frac{3}{2}$, ekkor $f \geq 2$

$$K\left(2 - \frac{1}{f}\right) + m^- \leq -\frac{2c}{2+c} = \frac{4}{2+c} - 2 = 2d^* - 2 + \varepsilon_2 < 4f + 2$$

2.a eset. Minden H-beli ív rövidebb $\frac{n}{t_f}$-nél. Feltehető, hogy $\forall i \in \{1, 2, \ldots f-1\}$-re $t_i < 12t_{i+1}$

2.a.i) eset Van legalább 9 csúcsú ív, akkor a csúcsain szereplő ívek közül mind különböző kivéve a legalább 9 csúcsút, ami alapján választottunk. Ha az ív csúcsszáma s, akkor ez összesen $1 + s(f-1) \geq 4f + 2$ darab ív.

2.a.ii) eset Minden ív legfeljebb 8 csúcsú. Ekkor H egy fa.

2.b eset. van $\frac{n}{t_f}$-nél nem rövidebb ív. Ugyanúgy kezelhető mint az 1.b eset.

5.4. Hipergráfok count matroidjai

Definíció. Adott $\mathcal{H}$ hipergráf E hiperélhalmazán az $M_{k,l}$ count matroidot adjuk meg: valamely $F \subset E$ esetén vegyük az $r^*(F) = k|V(F)| + l$ függvényt, ahol $V(F)$ jelöli az F hiperélhalmaz által feszített csúcsok halmazát. Ez metsző szubmoduláris függvény, vegyük az alsó reszeltjét. Az alsó reszeltet messük a csupa 1 vektorral, ez adja meg $M_{k,l}$ rangfüggvényét.

Megfigyelés. $\frac{l}{k} \leq -r$ *esetén* $M_{k,l}$*-ben minden legfeljebb* r *csúcsú él hurok, ugyanis rangja* $rk + l \leq 0$ *A továbbiakban feltesszük, hogy* $\frac{l}{k} > -r$ *ahol* r *a legkisebb hiperél csúcsszáma.* $k < 0$ *esetén* r^* *nem lesz metsző szubmoduláris.* $k = 0$ *eset az uniform matroid.*

Azt vizsgáljuk, mikor lesz $M_{k_1,l_1} \vee M_{k_2,l_2} = M_{k_1+k_2,l_1+l_2}$ két count matroid összegmatroidja a paraméterek összegzésével kapott count matroid.

$M_{k_1+k_2,l_1+l_2}$ rangfüggvénye a következő:

$$r_+(E_1) = \min_{F \subset E_1, \mathcal{F}} \left\{ |E_1 \setminus F| + \sum_{F_i \in \mathcal{F}} ((k_1 + k_2)|V(F_i)| + l_1 + l_2) \right\}$$

Ahol a minimumot F összes lehetséges $\mathcal{F}$ partíciójára tekintjük.

$M_{k_1,l_1} \vee M_{k_2,l_2}$ rangfüggvénye, mint láttuk, a következő:

$$r_\vee(E_1) = \min_{F\subset E_1, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2} \left\{ |E_1 \setminus F| + \sum_{F_i\in\mathcal{F}_1} (k_1|V(F_i)| + l_1) + \sum_{F_j\in\mathcal{F}_2} (k_2|V(F_j)| + l_2) \right\}$$

itt a minimumoknál $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ halmazcsaládok F összes partícióin futnak.

Szokás szerint kiiktatjuk a $|E_1 \setminus F|$ tagot. Ebben a lemmában az a jó, hogy a konstrukciót úgy is meg lehet csinálni, hogy r-gráfból továbbra is r-gráfunk lesz, de vegyes elemszámú hiperélek esetén is igaz marad.

16. LEMMA. *$r_\vee = r_+$ pontosan akkor teljesül minden $\mathcal{H}$ hipergráfra, ha bármilyen $\mathcal{H}_1$ hipergráf E_1 élhalmazára*

$$\min_{\mathcal{F}} \left\{ \sum_{F_i\in\mathcal{F}} (k_1|V(F_i)| + l_1) + \sum_{F_j\in\mathcal{F}} (k_2|V(F_j)| + l_2) \right\} =$$

$$= \min_{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2} \left\{ \sum_{F_i\in\mathcal{F}_1} (k_1|V(F_i)| + l_1) + \sum_{F_j\in\mathcal{F}_2} (k_2|V(F_j)| + l_2) \right\} \tag{5}$$

Itt $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ tetszőleges partíciói E_1-nek.

Bizonyítás. Ha (5) tetszőleges hiperélhalmazra teljesül, akkor az eredeti képletben az $|E_1 \setminus F|$ -től különböző tagok egyenlősége miatt a minimumértékek ezzel a - két képletben azonos - taggal megtoldva egyenlőek maradnak.

Másfelől, ha adunk egy $\mathcal{H}'$ példát, amelyre (5) nem teljesül, akkor ezt felhasználva megadható olyan hipergráf konstrukciója, amelyre $r_\vee(\mathcal{H}) \neq r_+(\mathcal{H})$. A sima gráfos esetnek megfelelően lehet a hiperéleket többszörözni vagy $\binom{t}{r}$ alakú gubancokat ragasztani a hiperélekre.

A következőkben mindenhol a 16. lemma szerinti képletet használjuk, az $r_\vee$ és r_+ közötti összefüggés megállapításához elég annyit eldönteni, hogy van-e a teljes élhalmazt lefedő közös optimális $\mathcal{F}$ partíció minden $\mathcal{H}$-ra M_{k_1,l_1} és M_{k_2,l_2} szerinti következő képletben

$$\min_{\mathcal{F}} \left\{ \sum_{F_i \in \mathcal{F}} (k|F_i| + l) \right\} \tag{6}$$

Szó szerint, bizonyítással együtt másolhatóak a 7. és 8. lemmák illetve a a 9-12. Tételek.

17. LEMMA. *Ha $l \geq 0$, akkor (6) képletben az egyrészes partíció optimális. Ha $l > 0$, akkor csak ez a partíció optimális.*

18. LEMMA. *Ha $-1 \leq \frac{l}{k} \leq 0$, akkor (6)-ben az összefüggőségi komponensenkénti partíció optimális. Ha $-1 < \frac{l}{k} < 0$, akkor csak ez a partíció optimális.*

19. TÉTEL. *Ha $\frac{l_1}{k_1} = \frac{l_2}{k_2}$, akkor $r_\vee = r_+$*

20. TÉTEL. *Ha $l_1 \geq 0$ és $l_2 \geq 0$, akkor $r_\vee = r_+$*

21. TÉTEL. *Ha $0 \geq \frac{l_1}{k_1} \geq \frac{l_2}{k_2} \geq -1$, akkor $r_\vee = r_+$*

22. TÉTEL. *Ha $l_1 > 0 > \frac{l_2}{k_2}$, akkor van olyan $\mathcal{H}$ amelyre $r_\vee \neq r_+$*

A maradék állítások is másolhatóak. Hipergráfot itt akkor célszerű fának tekinteni, ha bármely két u, v csúcsa között egyértelműen van $v = v_0 \in H_0 \ni v_1 \in H_1 \ni, \ldots, H_{n-1} \ni v_n = u$ ismétlődésmentes sorozat felváltva csúcsokból és hiperélekből.

23. LEMMA. *Ha $\frac{l}{k} \leq -1$ és $\mathcal{H}$ fa, akkor a (6) képletben az élenkénti partíció optimális. Ha $\frac{l}{k} < -1$ és $\mathcal{H}$ fa, akkor a (6) képletben csak az élenkénti partíció optimális.*

Bizonyítás. Legyen az optimális partíció $\mathcal{F}$. Ha ez nem élenkénti, akkor ismételgessük a következőt, amíg élenkénti partíciónk lesz. Egy fa gráf minden részgráfja erdő. Ebben mindig akad a többihez csak egy csúcsban illeszkedő hiperél. Ha ezt leválasztjuk, a (6) képlet értékének megváltozása $k + l$, ez ≤ 0 az első esetben, a másodikban < 0.

Mondjuk n hosszú körnek az olyan hipergráfot, amely a sima n hosszú kör gráfból kapható néhány csúcs egy-egy élhez hozzávételével, tehát minden csúcsot csak 1 élhez vehetünk hozzá.

24. TÉTEL. *Ha* $\frac{l_1}{k_1} \geq -1 > \frac{l_2}{k_2}$*, akkor van olyan* G *amelyre* $r_\vee \neq r_+$

Bizonyítás. Mint gráfoknál.

25. TÉTEL. *Ha* $\frac{l_1}{k_1} < \frac{l_2}{k_2} \leq -1$*, akkor van oyan hipergráf, amelyen a matroidok nem összegződnek.*

Bizonyítás. A $[-2,-1]$ intervallumon sűrűn megadtunk elválasztópontokat az 5.3. alfejezetben. A hipergráf minden pontját megkettőzzük úgy, hogy minden hiperél egy másolat pontot pont akkor tartalmaz, amikor az eredetit. Ezzel a módszerrel konstruálhatunk ellenpéldát amikor a hányadosok a $[-4,-2]$ intervallumba esnek, azt megint megkettőzhetjük, stb.

5.5. $H_{k,m,l}$ típusú gráfhalmazok Ramsey-számainak meghatározása count matroidok összegzésével

Egy teljes hipergráf élhalmazát akarjuk felbontani néhány részre úgy, hogy az i-edik részben ne legyen H_{k,m_i,l_i+1}-beli elem, ez pontosan azt jelenti, hogy az i-edik hiperélhalmaz független M_{m_i,l_i}-ben. Legyen t a legnagyobb pozitív egész, amelyre teljesül a következő.

$$\binom{t}{k} \leq \sum_{i=1}^{r}(tm_i + l_i) \tag{7}$$

Észrevétel. $R_k(H_{k,m_1,l_1+1}, H_{k,m_2,l_2+1}, \ldots, H_{k,m_r,l_r+1}; r) \leq t+1$

Azért igaz ez, mert $t+1$ ponton valamelyik színosztályban már biztosan túl sok hiperél lesz egyszerű skatulyaelv okán. Egy k-uniform hipergráfon az M_{m_i,l_i} count matroidban H_{k,m_i,l_i} elemei még függetlenek, de H_{k,m_i,l_i+1} elemei már függők. Ha a megfelelő count matroidok összege a paraméterek összegzésével kapott count matroid, akkor a Ramsey-szám pontosan ennyi. Ha ez nem teljesül, a felső becslés akkor is érvényben marad, a tényleges Ramsey-szám azonban ennél kisebb lehet.

26. TÉTEL. *Legyen* $(m_1, l_1), \ldots, (m_t, l_t)$ *olyan egész számpárok, hogy* $\forall i$*-re* $1 \leq i \leq r$ *esetén* $m_i > 0$ *és az* $\frac{l_i}{m_i}$ *hányadosok mind egyenlőek vagy mind benne vannak az alábbi két intervallum közül ugyanabban:* $[-1, 0]$ *és* $[0, +\infty)$*. Legyen* t *a legnagyobb pozitív egész amely kielégíti* (7) *egyenlőtlenséget. Ekkor*

$$R_k(H_{k,m_1,l_1+1}, H_{k,m_2,l_2+1}, \ldots, H_{k,m_r,l_r+1}; r) = t + 1$$

□

Hivatkozások

[1] Exoo, Geoffrey; Harborth, Heiko; Mengersen, Ingrid On Ramsey numbers of $K_{2,n}$. Graph theory, combinatorics, algorithms, and applications (San Francisco, CA, 1989), 207–211, SIAM, Philadelphia, PA, 1991.

[2] Gyárfás, András; Gerencsér, László; On Ramsey-type problems. Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math 10 1967,167-170.

[3] Gyárfás, András; Ruszinkó, Miklós; Sárközy, Gábor N.; Szemerédi, Endre Three-color Ramsey numbers for paths. Combinatorica 27 (2007), no. 1, 35–69. (Reviewer: R. H. Schelp)

[4] Gyárfás, András; Partíciófedések és lefogó halmazok hipergráfokban Communications of the Computer and Automation Institute of the Hungarian

[5] Gyárfás, András; Tuza, Zsolt An upper bound on the Ramsey number of trees. Discrete Math. 66 (1987), no. 3, 309–310. Academy of Sciences 71 (1977) 62 pp.

[6] Radziszowski, Stanisław P. Small Ramsey numbers. Electron. J. Combin. 1 (1994), Dynamic Survey 1, 30 pp.

[7] Erdős, P. Some remarks on the theory of graphs. Bull. Amer. Math. Soc. 53, (1947). 292–294.

[8] Whiteley, Walter: Some Matroids from Discrete Applied Geometry, Contemporary Mathematics, Volume 197 (1996) proposition A.2.1

[9] Frank András: http://www.cs.elte.hu/∼frank/jegyzet/matroid/ulmat.2007.pdf

[10] Whiteley, Walter: The Union of Matroids and the Rigidity of Frameworks, SIAM J. Disc. Math Vol.1, No 2, May 1988, Society for Industrial and Applied Mathematics

[11] Chvátal, V. Tree-complete graph Ramsey numbers. J. Graph Theory 1 (1977), no. 1, 93.

[12] Graham, Ronald L.; Rothschild, Bruce L.; Spencer, Joel H. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990. Ramsey theory.