Valós függvények metszéspontjainak vizsgálata

Szakdolgozat

Kiss Gergely
matematikus hallgató

Témavezető: *Laczkovich Miklós* egyetemi tanár
Analízis Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapest, 2008.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető

E dolgozat előzménye *C.Freiling, P.D.Humke* és *M.Laczkovich* cikke ([3]), amely 3 problémakör kapcsolatát tárgyalja. E három problémakör: az úgynevezett 3-szakasz tulajdonság (3.fejezet), a mérhető függvények véges dimenziós vektortereinek metszetei mérhető függvényekkel (4.fejezet), illetve az a kérdés, hogy mérhető függvények grafikonjai mindig metszhetők-e nem függőleges egyenessel (5.fejezet). A [3] vázlatosan tárgyalja a első és a harmadik kérdéskör szoros összefüggését, valamint a második és a harmadik kérdés egyirányú kapcsolatát.
Ebben a dolgozatban az a célunk, hogy e három kérdéskört a [3] cikkben tárgyaltakon túlmenő részleteiben dolgozzuk fel, illetve, hogy megmutassuk az imént említett kapcsolatokat.
Egyrészt kifejtünk olyan gondolatmeneteket, amelyek a [3]-ban csak vázlatosan szerepelnek (Bagemihl tétele, illetve az első kérdéskör konstrukciói).
Másrészt bebizonyítjuk a [3] Theorem 2 tételnek egy általánosítását. Ezt a tételt *Laczkovich Miklós* és *Petruska György* találták 1994-ben, de nem publikálták és a bizonyítás feledésbe ment.
A fentieken kívül a dolgozat 5. fejezetében bebizonyítjuk a mérhető függvények grafikonjára vonatkozó kérdést abban a speciális esetben, amikor a grafikonok reguláris halmazok. E fejezetben ismertetjük azokat a geometriai mértékelméleti fogalmakat és tételeket, amelyek a bizonyításhoz szükségesek.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Laczkovich Miklósnak az izgalmas témát, valamint a rengeteg időt és türelmet, melyet rám fordított. Értékes szakmai észrevételeiért, a megoldásokhoz közelebb vivő kérdésfelvetéseiért, és a hétfő délutáni eszmecserékért külön hálás vagyok. A számtalan formai javaslatával sokban segítette a jelen dolgozat elkészülését.

Továbbá köszönetemet fejezem ki Bede Márton barátomnak, aki hajlandó volt töretlen türelemmel meghallgatni a téma kapcsán felmerült számtalan megoldáskezdeményemet.

2. Ambigus pontok és Bagemihl tétele

Jelölje $\mathbb{H}$ a nyílt komplex felső félsíkot; $\mathbb{R}$ a valós számegyenest, amit egyúttal a felső félsík határával azonosítunk, tehát $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}$.
Legyen $f : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény.

2.1. Definíció. *Egy $x \in \mathbb{R}$ pontot az f függvény* ***ambigus*** *(vagy többértékű) pontjának nevezzük, ha léteznek α és $\beta \in \mathbb{H} \cup \{x\}$ ívek a következő tulajdonságokkal:*

1. $\alpha(1) = \beta(1) = x$,
2. $\alpha\,|_{[0,1)} \cup \beta\,|_{[0,1)} \in \mathbb{H}$,
3. $\mathcal{C}(f, \alpha, x) \cap \mathcal{C}(f, \beta, x) = \emptyset$,

ahol $\mathcal{C}(f, \alpha, x) = \{y \in \overline{\mathbb{R}} :$ *létezik olyan* $\{t_n\} \to 1, t_n < 1$, *hogy* $lim_{n\to\infty} f \circ \alpha(t_n) = y\}$.

Megjegyzés. Egyszerű, de a későbbiekben fontos tulajdonság: a $\mathcal{C}(f, \alpha, x)$ zárt halmaz, minden rögzített α és x érték mellett. Ez adódik abból az állításból, hogy:

2.2. Állítás. *Ha egy y érték torlódási pontja az y_n sorozatnak, és y_n torlódási pontja a t_n sorozatnak, akkor y torlódási pontja t_n-nek is.*

2.3. Definíció. *Egy $x \in \mathbb{R}$ ambigus pontja egy $E \subset \mathbb{H}$ halmaznak, ha az E halmaz karakterisztikus függvényének ambigus pontja.*

Ezen pontok vizsgálata közben a következő kérdések merülhetnek fel bennünk: Vajon van-e valamilyen felső korlátja az ambigus pontok számának, illetve, lehet-e valamit mondani az ambigus pontok halmazáról? A problémával először *H. Blumberg, M. Schmeiser*, és *V. Jarník* kezdtek el foglalkozni a '30-as években. Majd az ő módszerüket továbbfejlesztve *F. Bagemihl* a következő tételt bizonyította be.

2.4. Tétel. *(Bagemihl, '55) Tetszőleges $f : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$-nek legfeljebb megszámlálható sok ambigus pontja lehet.*

Bizonyítás.

a. Első lépésben az állítást egy tetszőleges E halmaz indikátor függvényére mondjuk el, aztán onnan általánosítjuk a gondolatot.
Indirekt, tegyük fel, hogy megszámlálhatónál több ilyen pont van.
Ha veszünk egy x ambigus pontot, található hozzá két ív, ami rendelkezik a

fenti tulajdonságokkal.
Esetünkben ez azt jelenti, hogy az egyiken tartva x-hez a torlódási érték 0, a másikon 1 kell legyen. Látható, hogy a két ív egy idő után elválik egymástól (többet már nem metszik egymást), különben volna egy olyan sorozat, ami mindkét íven rajta van és tart x-hez, ellentmondva a fenti 3. tulajdonságnak. Tehát létezik k, hogy a két ív értelmezve is van és nincs metszetük az $U_k = \{x + iy \in \mathbb{H} : 0 < y \leq \frac{1}{k}\}$ halmazban. A k-ról még azt is feltehetjük, hogy a két ív U-ba eső részére igaz, hogy az egyik a halmazban halad, míg a másik végig a halmazon kívül, hiszen világos, hogy létezik olyan $k' < k$, amire ez teljesül. Ugyanis, ha nem létezne, akkor megint csak volna két olyan sorozat, most mindkettő csak az egyik íven, amelyek egyike a halmazon belül, a másik a halmazon kívül haladna és torlódnának az x ponthoz, de akkor x nem volna ambigus pont. Minden x ambigus ponthoz vegyük a legkisebb ilyen k-t.
A későbbiekhez fontos lesz a következő megszorítás: Vegyük az íveknek a $L_k = \{x + iy \in \mathbb{H} : y = \frac{1}{k}\}$ egyenessel vett első metszéspontjáig terjedő darabját, szorítkozzunk a további vizsgálatokban ezekre a részívekre.
Ezzel minden ambigus ponthoz egyértelműen hozzárendeltünk egy k egész számot. Továbbiakban jelöljük A_k-val azon pontok halmazát, melyekhez ugyanazt a k számot rendeltük.
Ekkor a skatulyaelv (vagy az általános skatulyaelv) szerint létezik olyan k, amit megszámlálhatónál több ponthoz rendeltünk hozzá. A következő állításban megmutatjuk, hogy ez lehetetlen.

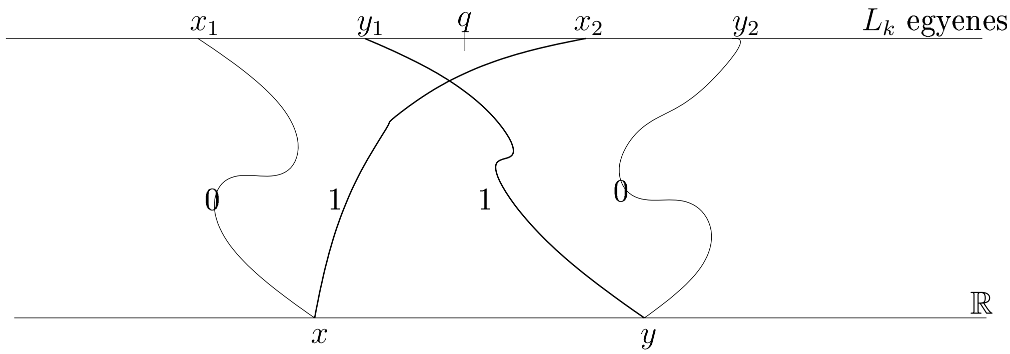
2.5. Állítás. *Az A_k halmaz legfeljebb megszámlálható sok pontból áll.*

Ha az állítást beláttuk, abból azonnal adódni fog, hogy nem lehet megszámlálhatónál több ambigus pont összesen sem. Mivel az A_k halmazok egy megszámlálható diszjunkt felbontását adják az ambigus pontok halmazának. Így megszámlálható sok legfeljebb megszámlálható elemszámú halmaz uniója is legfeljebb megszámlálható.

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg egy $x \in A_k$ ambigus ponthoz tartozó íveket és tekintsük az L_k egyenessel vett metszéspontjaikat. Feltevés szerint ezek különböző pontok. Létezik tehát L_k-n olyan racionális koordinátájú pont, mely elválasztja a két pontot egymástól. (Az imaginárius koordináta mindig racionális, mivel az éppen $\frac{1}{k}$.) Jelölje ennek a pontnak az valós részét a továbbiakban $q \in \mathbb{Q}$.

Eszerint minden ambigus ponthoz hozzá tudunk így rendelni egy racionális számot. Jelöljük $A_{k,q}$-val azon ambigus pontokat, melyekhez éppen a q számot rendeltük hozzá. Világos, hogy most az A_k halmaz elemeit particionáltuk megszámlálható sok részre, az előbbi gondolatmenethez hasonlóan elegendő bebizonyítani, hogy mindegyik $A_{k,q}$ legfeljebb megszámlálható sok elemből áll. Az $A_{k,q}$ halmazba eső két ambigus pont ívei közül kettő biztosan metszi egymást. Az, hogy esetleg több is, azt egyelőre nem tudjuk. Jelölje a két pontot x és y, a bal-, illetve jobboldali íveiket rendre α_x, α_y illetve β_x, β_y; valamint az ívek L_k egyenessel vett egyetlen metszéspontját rendre x_1, y_1, illetve x_2, y_2.

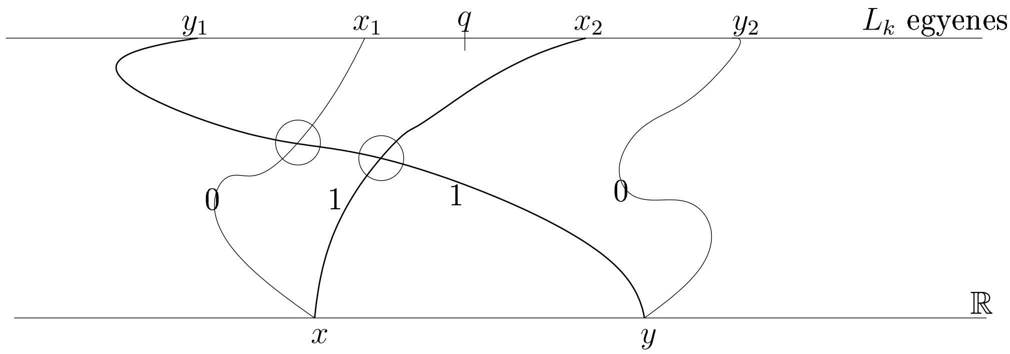
Ekkor, ha $x < y$ a valós számok szokásos rendezése szerint, akkor $\beta_x \cap \alpha_y \neq \emptyset$, mivel rajtuk lévő x_2 illetve y_1 valós részére teljesül, hogy $Re(y_1) < q < Re(x_2)$ (a q-ra tett feltétel szerint.)
Így a metszéspont létezése következik a Bolzano tételből.



1. ábra. Az $A_{k,q}$ halmaz tetszőleges x és y pontjához tartozó ívek közül legalább 2 metszi egymást.

Eddig lényegesen sehol sem használtuk, hogy indikátorfüggvényről van szó!
A fenti jelöléseket megtartva, ekkor nem lehet az, hogy az egyik ponthoz tartozó két ív metsze a másik ponthoz tartozó ívek valamelyikét egyszerre. (2. ábra) Hiszen, ekkor, például az α_y ívet metsző α_x íven az indikátor függvény értéke konstans 1, a β_x értéke a konstans 0 a k-ra tett feltétel szerint, holott az α_y íven a függvény értéke ezek közül csak az egyik lehet.

Az 2. ábrán a vonalerősség illetve az ív mellé írt számok jelzik, hogy a függvény azon az íven milyen értéket vesz fel, a bekarikázott pontok pedig azt mutatják,

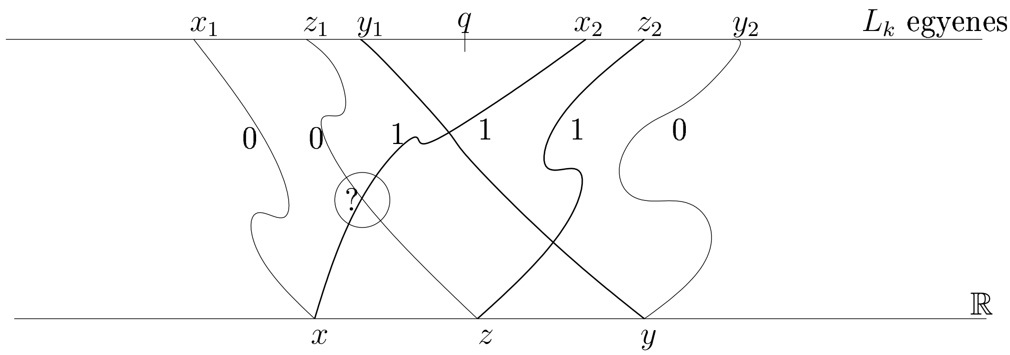


2. ábra. Az $A_{k,q}$ halmaz tetszőleges pontjához tartozó egyik ív sem metszheti egyszerre a halmaz tetszőleges másik pontjához tartozó két ívet egyszerre.

hogy a leírtaknak megfelelően nem létezik $x, y \in A_{k,q}$, melyekhez tartozó ívek az ábrán látható módon helyezkednének el.

Ebből az következik, hogy különböző x és y pontokból indított ívek közül legfeljebb kettőnek lehet metszete.
Megmutatjuk, hogy abban az esetben, ha van metszéspont, akkor nem lehet több ambigus pont, x és y-on kívül, ami eleme az $A_{k,q}$ halmaznak. Ugyanis, ha volna 3 ilyen pont, akkor lenne a szokásos rendezés szerint középső is, melynek mindkét íve metszené a másik két pont egymást metsző ívének valamelyikét. Az ívek találkozása és a k választása miatt, mind a két íven a karakterisztikus függvény értéke meg kell egyezzen, ez viszont lehetetlen (3.ábra).

Tehát $A_{k,q}$ elemszáma legfeljebb (pontosan) 2, ami persze legfeljebb megszámlálható.



3. ábra. Minden $A_{k,q}$ halmaz legfeljebb 2 elemű.

Ezzel a tételt indikátor függvényekre beláttuk. □

b. Most a tételt általános esetben is belátjuk.

A bizonyítás menete teljesen hasonló lesz a fentihez, először particionáljuk az ambigus pontok halmazát, majd a fentihez hasonló állítást bizonyítunk, melynek belátása valamivel komplikáltabb.

A korábbi jelöléseket megtartva x ambigus ponthoz tartozó íveket α, β jelöli, a torlódási pontok halmazát $\mathcal{C}(f, \alpha, x)$ illetve $\mathcal{C}(f, \beta, x)$. A tétel előtti megjegyzés szerint, ezek nemüres zárt halmazok, melyek metszete üres. Ekkor az $\overline{\mathbb{R}}$, ami a $+\infty$-nel és $-\infty$-nel kibővített számegyenes, az $arctg$ távolsággal egy teljes metrikus tér, melyben minden zárt halmaz kompakt, és az eddigi zárt halmazok továbbra is zártak maradnak. Így tudjuk értelmezni tetszőleges ilyen két zárt halmaz távolságát eszerint a metrika szerint. Ekkor $\mathcal{C}(f, \alpha, x)$ és $\mathcal{C}(f, \beta, x)$ távolsága pozitív és véges, mivel a metszetük üres. Jelöljük ezt D_x-szel.

Legyen k az a legkisebb egész szám, melyre az fenti ívek értelmezve vannak, nem metszik egymást U_k-ban és $\forall w$-re az α íven $d(f(w), \mathcal{C}(f, \alpha, x)) < \mathcal{D}_x/4$. Ugyanez elmondható β-ra is és persze most is csak a megfelelő részívekre szorítkozunk.

Ilyen k biztosan van, ha az utolsó feltétel nem teljesülne semmilyen k-ra, az azt jelentené, hogy az adott α íven van olyan x-hez torlódó sorozat, aminek van olyan torlódási pontja, ami nincs benne $\mathcal{C}(f, \alpha, x)$ halmazban. Ez a $\mathcal{C}(f, \alpha, x)$ definíciója miatt lehetetlen.

Ekkor $|f(w_1) - f(w_2)| > D_x/2$ teljesül minden $w_1 \in \alpha$ és $w_2 \in \beta$ pontra. Vezessük be a következő jelölést: Legyen $\mathcal{B}(f, \alpha, x) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : d(x, \mathcal{C}(f, \alpha, x)) \leq D_x/4\}$. Ekkor persze ez is zárt és így kompakt halmaz.

Így megint csak minden ambigus pontot besorolhatunk pontosan egy A_k osztályba, sőt aszerint is osztályozzuk a pontokat, hogy mely n-re teljesül, hogy $\frac{2\pi}{n} > D_x \geq \frac{2\pi}{n+1}$.

Jelöljük az A_k eszerinti diszjunkt felosztását $A_{k,n}$-nel. Ezeket az $(a.)$ részhez hasonlóan tovább particionáljuk $A_{k,n,q}$ szerint, ahol q, az az adott ambigus ponthoz rendelt racionális szám, mely az ambigus pont két ívének $L_k = \{x + iy \in \mathbb{H} : y = \frac{1}{k}\}$-val vett metszéspontját elválasztó pont valós része.

Ekkor megint elegendő belátni, hogy $A_{k,n,q}$ legfeljebb megszámlálható, hiszen az ambigus pontok A halmazát megszámlálható sok diszjunkt partícióra bontottuk, melyek mindegyike legfeljebb megszámlálható, tehát A maga is legfeljebb megszámlálható.

Elég a következő állítást belátni.

2.6. Állítás. *$A_{k,n,q}$ legfeljebb megszámlálható elemszámú.*

Ezután a fentihez hasonlóan ellentmondásra jutunk.

Bizonyítás. Fedjük le az egész $\overline{\mathbb{R}}$-et legfeljebb $r = \frac{\pi}{2(n+1)}$ átmérőjű nyílt intervallumokkal úgy, hogy két ilyen nyílt halmaznak a metszete legfeljebb $r/2$ átmérőjű legyen.
Ezek száma legfeljebb megszámlálható, mivel az egész tér mérete is véges, az $arctg$ metrika szerint.
Jelöljük ezeket $\{G_s : s \in \mathbb{Z}\}$-vel.
Ekkor $\forall x \in A_{k,n,q}$-ra a $\mathcal{B}(f,\alpha,x)$ és $\mathcal{B}(f,\beta,x)$ két kompakt halmaz, így az ezeket fedő rendszerből kiválasztható véges sok halmaz, ami szintén fedi őket. Vegyük a lehető legkevesebb elemszámú mindkettőt fedő rendszert. Ha több ilyen minimális rendszer is van, rögzítsünk egyet. Jelöljük ezeket a véges fedő rendszereket G_α-val illetve G_β-val. Ekkor azt is feltehetjük a fedőrendszer speciális választása, a két torlódási halmaz diszjunktsága és az $x \in A_{k,n,q}$ választása miatt, hogy

$$d(\overline{G_\alpha}, \overline{G_\beta}) > \frac{\pi}{2n} > r > 0,$$

ahol a d az $arctg$ metrika szerinti távolságot jelenti.

Tegyük fel *indirekt* módon, hogy megszámlálhatónál több eleme van valamely $A_{k,n,q}$ halmaznak. Ha mindegyik ilyen x pontra igaz a fenti okoskodás, akkor létezik minden pontra egy G_{α_x} és G_{β_x} véges fedő rendszer. Ekkor azonban létezik megszámlálhatónál több olyan $x \in A_{k,n,q}$ pont, amelyhez tartozó $\mathcal{B}(f,\alpha,x)$, illetve $\mathcal{B}(f,\beta,x)$ halmazokat ugyanaz a G_α, illetve G_β fedőrendszer fed le.
Valóban, hiszen a $\{G_s : s \in \mathbb{Z}\}$-ből minden lehetséges módon kiválasztva véges sok halmazt, belátható, hogy ezen halmazrendszerek száma is csak megszámlálható lehet. Sőt, ha ezután ezen véges sok halmazból álló halmazrendszereket két partícióra szedjük, minden lehetséges módon az is csak megszámlálható lehetőség.

Mivel minden ponthoz pontosan egy ilyen halmazrendszert és partíciót rendeltünk, ezért megint alkalmazhatjuk a skatulya-elvet, melyből adódik, hogy van olyan rendszer, melyhez megszámlálhatónál több pont tartozik.
A fenti feltétel azt jelenti, hogy minden ilyen x ambigus ponthoz ugyanazt a nyílt halmazt rendeltük hozzá, amely fedi a $\mathcal{B}(f, \alpha_x, x)$-et, az α_x megfelelő választásával és teljesen hasonló igaz a megfelelő β_x ívre is.
Ebből az $(a.)$ részhez teljesen hasonlóan látható, hogy $A_{k,n,q}$-ban legfeljebb két ilyen ambigus pont lehet, ellentmondva a feltevésnek (3. ábrához hasonlóan). Hiszen, ha volna 3 pont, akkor a rendezés szerinti két szélső ponthoz tartozó metsző íveken felvett függvényértéket ugyanaz a G_α halmaz fedné, mivel van metszete a két ívnek és G_α-t úgy választottuk, hogy tartalmazza a megfelelő íveken felvett függvényértékeket is. Tekintve ezek után a középső pontot - ezt z-vel jelölve - akkor a fenti indoklás itt is működik, azaz ennek mindkét íve metszi valahol az előbb említett kettőt. Így az ezeken lévő függvényértékeket is ugyanaz a G_α halmaz fedi. Ez pedig az $A_{k,n,q}$ választása miatt lehetetlen.
Így adódik, hogy az ambigus pontok halmaza az általános esetben is legfeljebb megszámlálható.

■

2.7. Definíció. *Legyen A és B két halmaz $\overline{\mathbb{H}}$-ban úgy, hogy $A \cap B = \mathbb{R}$. Egy $x \in \mathbb{R}$ pontra azt mondjuk, hogy rendelkezik a* ***két-ív tulajdonsággal*** *erre a két halmazra nézve, ha léteznek $\alpha \subset A$ és $\beta \subset B$ ívek úgy, hogy $x = \alpha(1) = \beta(1)$.*

Tekintve azon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ függvényt, mely az A pontjaiban 1, a B pontjaiban 0 értéket vesz fel, egyébként tetszőlegeset, megállapíthatjuk, hogy azon $x \in \mathbb{R}$ pontok, amelyekre teljesül a 2-ív tulajdonság egyben az f ambigus pontjai is kell legyenek. Ebből láthatjuk, hogy az A és B halmazt tetszőlegesen választva a két ív tulajdonságnak eleget tevő pontok halmaza $\mathbb{R}$-ben legfeljebb megszámlálható elemszámú.
Ezek után érthetően merül fel a kérdés, hogy igaz marad-e az előbbi észrevétel, ha 2.7. Definícióban szereplő kettő helyett három halmazt vizsgálunk?
A következő fejezetben ezt a kérdést fogjuk körüljárni.

3. A 3-ív és a 3-szakasz tulajdonságok

3.1. A 3-ív tulajdonság

3.1. Definíció. *Legyen A, B és C három halmaz $\overline{\mathbb{H}}$-ban úgy, hogy $A \cap B \cap C = \mathbb{R}$. Egy $x \in \mathbb{R}$ pontra azt mondjuk, hogy rendelkezik a* ***három-ív tulajdonsággal*** *erre a három halmazra nézve, ha létezik $\alpha \subset A, \beta \subset B$ és $\gamma \subset C$ ívek úgy, hogy $x = \alpha(1) = \beta(1) = \gamma(1)$.*

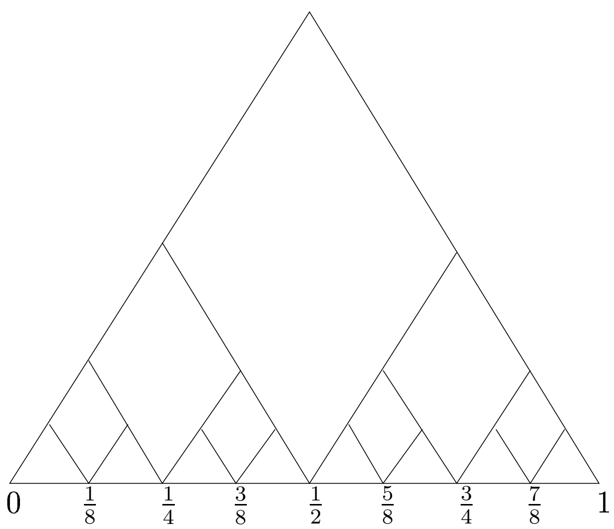
Megmutatjuk, hogy a 2. fejezet zárásaként említett 2-ív tulajdonsággal ellentétben a 3-ív tulajdonságnak eleget tevő pontok halmaza akár az egész valós számegyenes is lehet. Speciálisan ezeket a halmazokat még zártaknak is választhatjuk. Ennek az észrevételnek a későbbiekben lesz fontos szerepe.

3.2. Állítás. *Létezik 3 zárt halmaz, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ pont rendelkezik a három-ív tulajdonsággal.*

Bizonyítás.

Mindhárom halmaz hasonló szerkezetű lesz. Úgy fogjuk megkonstruálni a halmazokat, hogy a $[0, 1]$ intervallumon definiáljuk őket, majd az egész $[0, 1]$-en kapott képet eltoljuk minden egész számmal, így definiálhatjuk tetszőleges $[n, n+1]$ intervallumon (úgymond periodikusan kiterjesztjük).

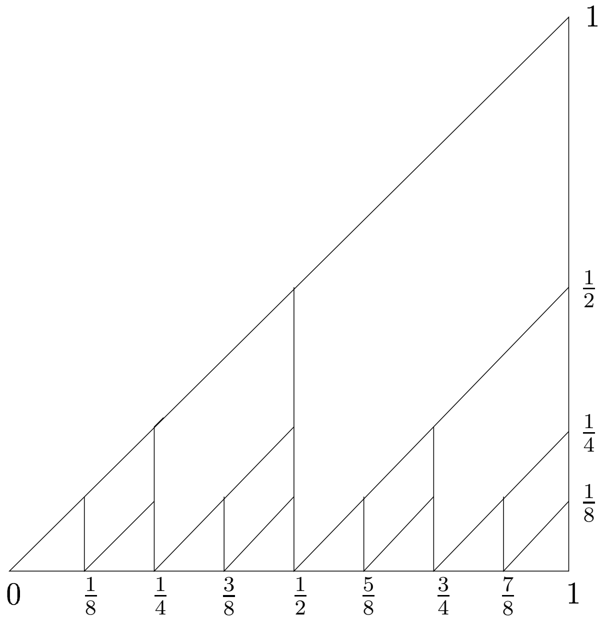
Az A halmaz álljon azon szabályos háromszögekből, melyek alapján fekvő csúcsok szomszédos diadikus racionális számok, azaz $\frac{k}{2^n}$ és $\frac{k+1}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n - 1$.



4. ábra. Az A halmaz elnagyolt ábrája a $[0, 1]$ intervallumon

Megjegyzés. A $\frac{k}{2^n}$ törtnek azt az alakját, ahol k páratlan, azaz ha $(k, 2^n) = 1$, nevezzük a továbbiakban *egyszerű alaknak*, mivel nem lehet tovább egyszerűsíteni.

A 5. ábrán a B halmaz képe látható, mely ugyanezen talppontokra állított egyenlőszárú derékszögű háromszögekből áll, melyeknek a derékszöge mindig a háromszög jobb talppontjában található.
A C halmaz teljesen hasonló, csak a bal végpontokban található a derékszögű csúcs. (6. ábra)



5. ábra. Az B halmaz ábrája a $[0, 1]$ intervallumon

Ekkor a következőket kell ellenőrizni:

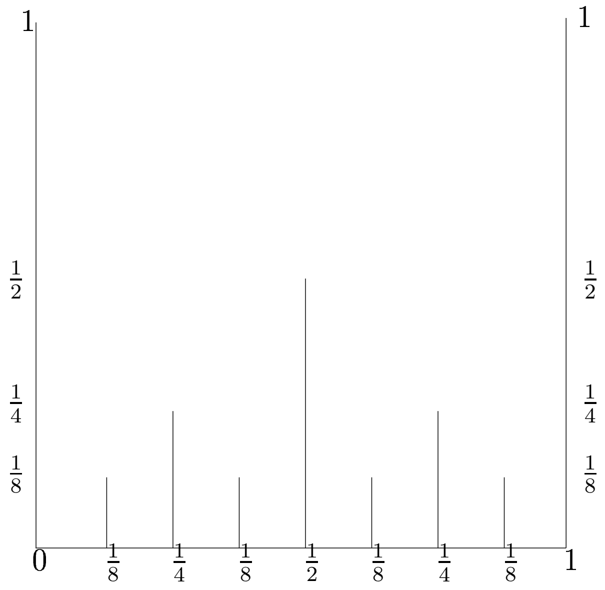
1. $A \cap B \cap C = \mathbb{R}$
   Ehhez két dolgot kell belátni: Egyrészt, minden valós pont benne van mind a 3 halmazban; ez triviális a konstrukcióból.
   Másrészt, hogy nincsen más közös pontja a 3 halmaz metszetének, ezt is nagyon könnyen be tudjuk bizonyítani. Ehhez tekintsük először a $B \cap C$ halmazt (7. ábra). Ez egy olyan zárt halmaz, amelynek minden pontja vagy $\mathbb{R}$-beli vagy egy $\frac{k}{2^n}$ diadikus számból indított $\mathbb{H}$-beli $\mathbb{R}$-re merőleges, $\frac{1}{2^n}$ hosszúságú szakaszon helyezkedik el. Valóban, két adott típusú derékszögű háromszög csak úgy metszheti egymást ha, vagy valamelyik befogójuk egybeesik, vagy a két átfogónak van közös metszéspontja. Vegyük azonban észre, hogy egy ilyen metszés "alatti" szakasznak benne kell lennie a metszetben, hiszen az éppen

6. ábra. Az C halmaz ábrája a $[0, 1]$ intervallumon

egy jobboldalára, illetve egy baloldalára rajzolt derékszögű háromszögben van benne, melyek B-nek, illetve C-nek elemei, és akár egyszerű számolással meggyőződhetünk arról is, hogy efölött a magasság fölött sem lehet más pontja a metszetnek.

Ezek után a $B \cap C$ halmazt elmetszük az A halmazzal, amely szomszédos diadikus számpárokra rajzolt szabályos háromszög vonalakból áll. Két tetszőleges A-beli háromszög vagy diszjunkt, vagy az egyik tartalmazza a másikat (4.ábra). Ha veszünk egy tetszőleges függőleges szakaszt $B \cap C$-ből, akkor az vagy az előbbi háromszögek közül valamelyiknek a belsejében halad, esetleg elmetszve azt, vagy a talpponttól eltekintve diszjuntak, ez utóbbi a bizonyítandó állítás szempontjából érdektelen.

Ezek után vegyük a legkisebb olyan háromszöget, melyre igaz, hogy van a szakasznak egy, a háromszögbe eső darabja (8.ábra). Ha azt belátjuk, hogy a háromszög vonalnak nincs metszete a szakasszal (eltekintve a szakasz talppontjától), akkor persze készen vagyunk, hiszen, mint megállapítottuk, két ilyen háromszög vagy tartalmazza egymást, vagy a metszetük legfeljebb egy szakasz talppontja.
A legkisebb ilyen háromszögnek éppen a felező merőlegesére esik a szakasz -

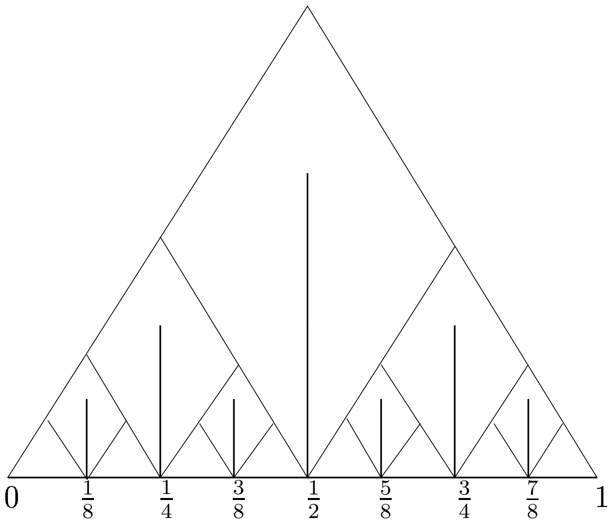


7. ábra. A $B \cap C$ halmaz elnagyolt ábrája

különben tudnánk a háromszögön kicsinyíteni úgy, hogy a szakasz egy darabja a kisebb háromszögnek is a belsejében haladjon. Ennek a háromszögnek az alapja, aminek a felező merőlegesére esik a szakasz, legalább kétszerese a szakasz hosszának, hiszen a szakasz talppontja egyszerű alakú, ezért van olyan két háromszög, melyek alapjának hossza megegyezik a szakasz hosszával és melyek csak az egyik csúcsukban érintkeznek a szakasszal és egymással. (Ez az érintkezési pont a szakasz talppontja.)

Ezen kisebb háromszögek a feltevés szerint diszjunktak a szakasztól az előbbi talpponttól eltekintve, így az a háromszög, ami tartalmazza a szakasz egy darabját szükségképpen kell, hogy tartalmazza ezt a két háromszöget is, különben csak metszené őket, amit kizártunk. Tehát a legkisebb olyan háromszög, amelyben a szakasz egy darabja benne van, olyan, melynek az alapja legalább kétszer akkora, mint a szakasz hossza. Így, mivel a háromszög magassága $\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2^n}$ nagyságú, az egész szakaszt kell, hogy tartalmazza, ezért a háromszög vonalnak és a szakasznak, csak a talppontjában lehet metszete, éppen, ahogy igazolni szerettük volna.

2. Azt kell belátni, hogy minden ponthoz léteznek folytonos ívek a különböző halmazokból. Ezt is két lépésben igazoljuk, egyrészt mutatunk 3 ívet a 3 halmazból $\forall x \in \mathbb{R}$-hez, másrészt megmutatjuk, hogy az folytonos.
   Legyen az adott halmazhoz az ív olyan, hogy az adott halmaz "legfelső" pont-



8. ábra. Az A és $B \cap C$ halmaz együttes képe

jából kiindulva, végig a halmazban mozogva mindig azon a részíven haladjon tovább egészen a következő elágazásig, ami közelebb visz az adott x ponthoz. Ez azt jelenti, hogy utána egy kisebb hasonló háromszög határán megyünk tovább. Tehát azon pontok, melyekhez tartani tudunk, már egy "eggyel" kisebb háromszög alapjának pontjai lehetnek csak, mely pontok halmazának x eleme. Mivel az osztópontok, azaz a diadikus törtek sűrűn vannak, ezért ilyen lépegetéssel tetszőleges előre rögzített x pontra "rázsugorodhatunk".
Be kell látnunk, hogy a megfelelő ív folytonos, egyrészt az adott valós x pontra ez világos, másrészt tetszőleges akárhogyan lefelé menő ívről be fogjuk látni, hogy folytonos. Sőt, azon túl, hogy a folytonosságot igazolnánk, megmutatjuk, hogy az így kiválasztott ív egy Lipschitz-leképezés, azaz, hogy létezik K, hogy $|\alpha(x_1) - \alpha(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$ teljesül tetszőleges, az íven található x_1, x_2 pontokra. Ez is nyilvánvaló, ha meggondoljuk, hogy bármely pontból indított, a függőlegessel $+45°$-os, illetve $-45°$-os szöget bezáró, lefelé haladó félegyenesek által határolt szögtartomány tartalmazza az összes az adott pontból "lefelé" íven elérhető pontot az adott halmazban. Ez pedig ekvivalens az adott halmazokon lévő ívek Lipschitz-tulajdonságával.

∎

3.2. A 3-szakasz tulajdonság

Definíció. Legyen A, B és C három halmaz $\overline{\mathbb{H}}$-ban úgy, hogy $A \cap B \cap C = \mathbb{R}$. Egy $x \in \mathbb{R}$ pontra azt mondjuk, hogy rendelkezik a ***három szakasz tulajdonsággal*** erre a három halmazra nézve, ha léteznek $\alpha \subset A, \beta \subset B$ és $\gamma \subset C$ szakaszok úgy, hogy $x = \alpha(1) = \beta(1) = \gamma(1)$.

3.3. Állítás. *Létezik 3 halmaz, ami teljesíti a 3-szakasz tulajdonságot minden $x \in \mathbb{R}$ pontra.*

Bizonyítás. A bizonyítás transzfinit indukcióval zajlik, és a jólrendezési tételt használjuk. Rendezzük jól a valós egyenes pontjait, jelöljük ezt $\{x_\alpha : \alpha < c\}$-vel. Majd az x_0 pontra vegyünk három tetszőleges $\mathbb{H}$-ban haladó, de az x_0-ból induló félegyenest, és ezt a három félegyenest soroljuk be a három különböző halmazba.

Tegyük fel, hogy valamely α rendszámra igaz, hogy minden $\beta < \alpha$-ra az x_β ponthoz már találtunk megfelelő három félegyenest. Szeretnénk találni x_α-hoz 3 félegyenest, hogy mindegyiket besorolva egy halmazba, az ne rontsa el a halmazokra megkövetelt tulajdonságot. A 3-szakasz tulajdonság csak úgy romlik el, ha van három félegyenes, amelyeknek van közös metszéspontjuk a valós tengelyen kívül. Az indukciós feltevés szerint ez csak az épp aktuális "lépésből" adódhatott. (Az, hogy kettőnek lesz, az az esetek egy jó részében részében teljesül is, a bizonyítás szempontjából azonban nem lényeges kérdés.)
Tehát csak azt lehet, sőt kellene garantálni, hogy létezik olyan félegyenes, ami minden, a másik két halmaz félegyeneseinek metszéspontját elkerüli. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy ez utóbbi két halmaz B és C. Eddig minden halmaz kevesebb, mint kontinuum sok félegyenest tartalmazott. A két halmazból bármely kettőt tekintve, azoknak legfeljebb 1 metszéspontja lehet, tehát ez $\kappa \times \kappa$ sok metszéspontot eredményez, ahol κ a α rendszámig terjedő halmaz számossága, ami így kisebb, mint kontinuum. (Ez persze még mindig csak κ.) Tehát emiatt, κ sok irányt ki kell zárnunk, amerre az x_α pontból nem indulhat olyan félegyenes, amely az A halmazhoz tartozik. Mivel összesen kontinuum sok irány van, melyből most κ-t kizártunk, így is a marad kontinuum sok. Tehát létezik olyan félegyenes, ami x_α-ból indul és amit az A halmazhoz hozzávéve nem rontja el a halmazok 3-szakasz tulajdonságát. Ezt a halmazok különböző szereposztására megismételve adódik, hogy létezik 3 félegyenes az x_α pontból, hogy a megfelelőt hozzávéve A-hoz, B-hez, illetve C-hez, ezek megtartják a 3-szakasz tulajdonságot. ■

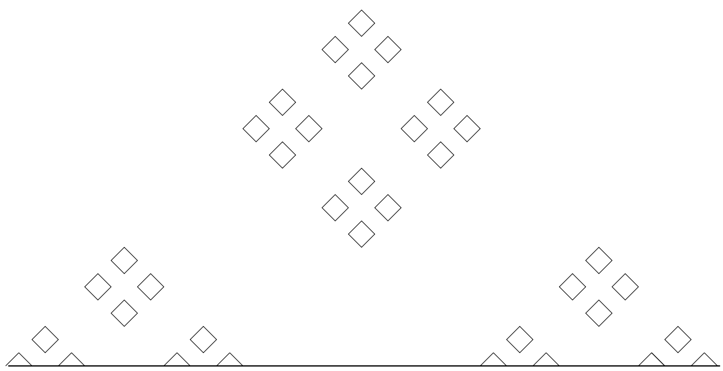
Megjegyzés. A bizonyításban nem használtuk $\mathbb{H}$ speciális választását. Ugyanígy megy a bizonyítás $\mathbb{C}$-re, a komplex síkra is egyenesekkel bővítve a három halmazt félegyenesek helyett. Sőt $\mathbb{R}$ pontjai helyett tetszőleges Jordan-tartomány határát is vehettük volna.

3.4. Állítás. *Létezik 3 zárt halmaz, ami teljesíti a 3-szakasz tulajdonságot egy Cantor-halmazbeli perfekt halmaz minden pontjára.*

Bizonyítás. Legyen adva a Cantor-halmaz a $[0,1]$ intervallumon. Az A, a B, illetve a C halmazok álljanak azokból félegyenesekből, melyek a Cantor-halmaz pontjaiból indulnak, a felső félsíkban haladnak és a valós tengellyel rendre $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, illetve $\frac{3\pi}{4}$ szöget zárnak be.
Ezek valóban zárt halmazok, hiszen a Cantor-halmaz zárt, így a B halmaz nem más, mint $C \times [0,\infty)$, ahol persze $[0,\infty)$ is zárt $\mathbb{R}$-en. Két zárt halmaz direkt szorzata nyilván zárt a szorzattopológia szerint, ami éppen a B halmaz zártságát eredményezi.
Az A és a C halmaz esetét visszavezetjük az előzőre. Észrevehetjük, hogyha az A halmazt a $\frac{3\pi}{4}$ irányú, a C-t a $\frac{\pi}{4}$ irányú origóból induló egyenesre vetítjük, akkor egy-egy Cantor-halmazt kapunk, amit az eredeti (különböző irányú 45°-os) elforgatásával, majd az origóból $\frac{1}{\sqrt{2}}$-szeres nagyítással nyerünk. Így ezen vetületek a Cantor-halmaz zártsága okán zártak, felhasználva, hogy a lineáris transzformációk homeomorfizmusok. Ebből az eredeti A és C halmazokat úgy kapjuk, hogy a megfelelő vetületet direkt szorozzuk a rá merőleges egyenessel, majd elmetszük a zárt $\overline{\mathbb{H}}$ halmazzal. Tehát az előbbi gondolatból ugyanúgy adódik, hogy az A és C halmazok is zártak.

Ezek után vegyünk a Cantor-halmazban egy nem-üres perfekt halmazt úgy, hogy az ne tartalmazza a kiegészítő intervallumok végpontjait. Ilyet tudunk venni, mivel elhagyva ezeket a pontokat, olyan $U \in \mathbb{R}$ G_δ halmazt kapunk, ami mint egy teljes metrikus tér G_δ részhalmaza, maga is homeomorf egy teljes metrikus térrel.
U valóban G_δ, mivel azt úgy kaphatjuk meg, hogy a $(0,1)$ nyílt halmazból elindulva kihagyjuk a középső $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ zárt halmazt, majd a megmaradó nyílt intervallumoknak is középső zárt darabját is, stb. Így végül U-t kapjuk, ami nem más, mint egy $\mathbb{R}\setminus F_\sigma$ halmaz metszete a $(0,1)$ intervallummal. A metszet első tagja egy G_δ halmaz definíció szerint, a $(0,1)$ pedig nyílt. Tehát a metszet is G_δ.
Tehát az U halmaz tartalmaz nem-üres perfekt halmazt. Az is világos, hogy ez csak 0-mértékű halmaz lehet, hiszen maga a Cantor-halmaz is az volt, és egy 0-mértékű halmaznak tetszőleges része is 0 mértékű. (Az itt használt állítások megtalálhatók

[4] 24.-25. oldalán.)
Jelöljük a továbbiakban ezt a perfekt halmazt P-vel.
Az előzőekhez hasonlóan erre az új perfekt halmazra is definiálhatunk egy A', B' és C' zárt halmazt, ami rendre a perfekt halmaz pontjaiból indított, a valós tengellyel $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ vagy $\frac{3\pi}{4}$ szöget bezáró félegyenesekből áll. A zártságot ugyanúgy láthatjuk, mint A, B, és C esetén.
Ezekre teljesül a 3-szakasz tulajdonság. Ehhez elegendő megmutatni, hogy $A' \cap B' \cap C' = P$. Egyrészt triviális, hogy a három halmaz metszete tartalmazza P-t, mivel így konstruáltuk a halmazokat, sőt azt is látjuk, hogy $A' \cap B' \cap C' \cap (\mathbb{R} \setminus P) = \emptyset$. Másrészt az is világos, hogy a P minden pontja elérhető a három különböző halmazból szakasszal, hiszen minden pontból indul egy félegyenes, ami a 3 különböző halmazban halad.
Elég lenne tehát a $A' \cap B' \cap C' \cap \mathbb{H} = \emptyset$ teljesülése. Ezt a Cantor-halmazra visszavezetve tudjuk belátni.
A definíciójukból közvetlen következik, hogy $A' \subset A$, $B' \subset B$ és $C' \subset C$, ezért elegendő igazolni, hogy a $A \cap B \cap C \cap \mathbb{H}$ olyan halmaz, aminek nincs pontja $A' \cap B' \cap C'$-ben. Az A és C halmazok metszéspontjai a valós egyenes illetve olyan egyenlőszárú derékszögű háromszögek derékszögű csúcsai, melyek átfogója a valós tengelyre esik, és az egyik befogója az A halmazhoz tartozik, a másik a C-hoz.



9. ábra. Az $A \cap C$ halmaz az ábrán is látható módon egy Cantor $\times$ Cantor halmaz (Cantor-por) metszete a zárt felső félsíkkal.

Ugyanis, ha van a metszetnek pontja az A halmaz egy félegyenesén, akkor az csak úgy lehet, hogy a C halmaznak egy félegyenese metszi ezt a félegyenest. Így

kialakul a fent leírt háromszög és metszéspont.
Azt fogjuk, és elég megmutatni, hogy ilyen csúcspont x koordinátája vagy nincs benne az eredeti Cantor-halmazban, vagy egy kiegészítő intervallum végpontja, és így maga a pont a B halmaznak csak akkor eleme, ha a második eset teljesül.
Ezek a pontok viszont nincsenek benne a B' halmazban, mert P nem tartalmazza a kiegészítő intervallumok végpontjait, így a hozzájuk tartozó merőleges félegyenest nem tartalmazza B', tehát már $A \cap B' \cap C \cap \mathbb{H} = \emptyset$ is teljesül, igazolva az állítást.
A fenti derékszögű csúcsok x koordinátái meg kell, hogy egyezzenek a megfelelő két talppont x koordinátájának számtani közepével. Tekintsük a Cantor-halmaz konstrukcióját és vegyünk benne két tetszőleges pontot, mint a fent leírt derékszögű háromszögek lehetséges talpponjai. Induljunk ki a $[0,1]$ intervallumból, és minden lépésben hagyjuk el a meglévő intervallumok középső nyílt harmadát. Világos, hogy a legelső lépésben mind a két pont benne van az intervallumban, ám, egy idő után a megmaradó intervallumok közül különbözőbe esnek, hiszen különböző pontokról van szó, köztük fix távolsággal, míg a kimaradó intervallumok egymásba skatulyázottak és a hosszuk 0-hoz tart. Adódik tehát egy legkisebb intervallum, amelyben a pontok még benne vannak, de az intervallum középső harmadát elhagyva már különbözőekben lesznek. Ez azt jelenti, hogy két ilyen pont számtani közepe éppen a középső zárt intervallumba eshet csak, ami vagy nincs benne a Cantor-halmazban, vagy csak a kihagyott kiegészítő intervallum határpontja lehet.

■

Megjegyzés. A bizonyítás tetszőleges olyan P' perfekt halmazra működik, ami a Cantor-halmazban van, és nem tartalmazza a kiegészítő intervallumok határpontait. Sőt a bizonyításból látszik, hogy elegendő a Cantor-halmazból a kiegészítő intervallumok egyik oldali végpontjait elhagyni, ekkor ugyanis az előző gondolatmenettel nincs semmi gond, kivéve azon derékszögű háromszögek derékszögű csúcsait, melyek x koordinátája éppen egy intervallum határpontja. Viszont a konstrukcióból világos, hogy ez nem lehet más, mint két másik kiegészítő intervallum határpontjának számtani közepe, sőt az is világos, hogyha az x jobboldali határpont, akkor a két baloldali határpont számtani közepe kell legyen.
A következő állításban tulajdonképpen egy ehhez hasonló észrevételt fogalmazunk meg.

3.5. Állítás. *Létezik 3 olyan Borel halmaz, ami teljesíti a 3 szakasz tulajdonságot a teljes Cantor-halmaz minden pontjára.*

Bizonyítás. Vegyük az előző A és C halmazt, a B-t pedig annyiban módosítjuk, hogy a $\frac{k}{3^n}$, $(k,3)=1$ ponthoz tartozó félegyenesből kihagyunk egy pontot, melynek az y koordinátája $\frac{1}{3^n}$. A vizsgált alappontok éppen a kiegészítő intervallumok végpontjai, így a kihagyott pontok éppen az $A \cap C$ bizonyos pontjai (9. ábra). Tehát az előzőek alapján automatikusan teljesül, hogy $A \cap B \cap C$ éppen a Cantor-halmaz. Ugyanakkor A és C zártak, a B pedig Borel, hiszen megszámlálható sok pontot hagytunk ki belőle.

Az is világos, hogy a Cantor-halmaz minden pontja elérhető akármelyik halmazból szakasszal. Az, hogy ez teljesül az A, illetve C halmazra, az a halmazok konstrukciójából nyilvánvaló. A B-re pedig azért igaz, mert a Cantor-halmaz azon pontjaihoz, melyek nem kiegészítő intervallum határpontai, még félegyenes is létezik, mellyel elérhető, míg a határpontokban a fentiek értelmében található egy $\frac{1}{3^n}$ hosszúságú szakasz, valamilyen n-re. ∎

A 3.4., illetve a 3.5. Állításban konstruáltunk 3 olyan zárt, illetve Borel halmazt, melyre nézve egy, a valós tengelyen adott 0-mértékű halmaz tetszőleges pontja rendelkeztek a 3-szakasz tulajdonsággal. Nem ismeretes hasonló állítás pozitív mértékű halmazra, ezt speciálisan a valós számegyenes egy tetszőleges I intervallumára a következő kérdés formájában fogalmazzuk meg:

3.6. Kérdés. *Létezik-e 3 Borel halmaz, amelyekre nézve egy I intervallum minden pontja rendelkezik a 3-szakasz tulajdonsággal?*

Erre még a 5. fejezet végén visszatértünk.

4. Mérhető függvények metszéspontjainak vizsgálata

4.1. Függvények lineáris terének elemeivel vett metszetek

Ebben a fejezetben tárgyalandó problémát az alábbi halmazelméleti eredmény motíválja.

4.1. Tétel. *Legyen L tetszőleges $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények n dimenziós lineáris tere. Ekkor létezik olyan g függvény, amelyre $|\mathbb{R}(f = g)| \leq n$ minden $f \in L$-re.*

Bizonyítás. Transzfinit rekurzióval konstruálunk ilyen g függvényt.
Ehhez egyrészt vegyünk egy bázist L-ben, jelölje ezt a továbbiakban $f_1, f_2 \dots f_n$. Másrészt jólrendezzük az $\mathbb{R}$ pontjait úgy, hogy azokat azonosítjuk $\{x_\beta : \beta < \kappa\}$ halmazzal, ahol κ a legkisebb olyan rendszám, melynek számossága kontinuum.
Vegyük az x_0 pontot és tekintsük az $f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_n(x_0)$ értékeket. Ha ezek mind 0-k, akkor az azt jelenti, hogy a lineáris tér minden függvénye ebben a pontban 0 értéket vesz fel, ekkor a g függvényt tetszőleges nem 0 értéknek választva az x_0 pontban, az semelyik $f(x_0)$ $(f \in L)$ függvényértékkel nem egyezik meg. Ha nemcsak 0 értéket vesznek fel a függvények x_0-ban, akkor $g(x_0)$-t tetszőlegesen választhatjuk, hiszen úgyis lesz az f_i-knek olyan lineáris kombinációja, amely éppen ezt az értéket adja az x_0 pontban.
Ezek után tegyük fel, hogy valamely $\alpha < \kappa$-ra igaz, hogy minden $\beta < \alpha$ esetén x_β-t már meg tudjuk úgy választani, hogy a rajtuk értelmezett g függvény görbéje minden $f \in L$ függvény görbéjét legfeljebb n pontban metszi.
A $g(x_\alpha)$ értékének választásában csak akkor lehet probléma, ha valamely $f \in L$ függvénnyel vett metszete $n+1$ lesz. Vegyük ezért x_α-át, és az előzőekhez hasonlóan tekintsük az $f_1(x_\alpha), f_2(x_\alpha), \dots, f_n(x_\alpha)$ értékeket. Vegyük az összes lehetséges módon azon $(x_{\beta_j})_{j=1}^k$ pont k-asokat, melyekre $\beta_j < \alpha$ és $k \leq n$, valamint

tekintsük $v_{\beta_i} = (f_1(x_{\beta_i}), f_2(x_{\beta_i}), \dots, f_n(x_{\beta_i}))^T$ $(i < k)$ vektorokból képzett A mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} f_1(x_{\beta_1}) & f_1(x_{\beta_2}) & \dots & f_1(x_{\beta_k}) \\ f_2(x_{\beta_1}) & f_2(x_{\beta_2}) & \dots & f_2(x_{\beta_k}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(x_{\beta_1}) & f_n(x_{\beta_2}) & \dots & f_n(x_{\beta_k}) \end{pmatrix}.$$

A későbbiekből láthatjuk, hogy a transzfinit indukció miatt az általánosság megszorítása nélkül tekinthetjük csak azon x_{β_i} pont k-asokat, melyekhez tartozó v_{β_i} vektorok lineárisan függetlenek.

Ekkor két esetet különböztetünk meg:

Ha

$$\mathcal{R}\left(\begin{array}{ccc|c} f_1(x_{\beta_1}) & \dots & f_1(x_{\beta_k}) & f_1(x_\alpha) \\ f_2(x_{\beta_1}) & \dots & f_2(x_{\beta_k}) & f_2(x_\alpha) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(x_{\beta_1}) & \dots & f_n(x_{\beta_k}) & f_n(x_\alpha) \end{array}\right) > \mathcal{R}\left(A\right) = k,$$

teljesül, ahol az első mátrix $n \times (k+1)$-es, a második $n \times k$-as, az $\mathcal{R}$ pedig a mátrix rangját jelöli.
Ez csak úgy lehet, hogy az eredeti A mátrix rangja valamilyen $k < n$ érték, ekkor persze a g függvénynek legfeljebb k metszéspontja lehet tetszőleges $f \in L$ függvénnyel az x_{β_i} $(i < k)$ helyeken. Ilyen esetben viszont akárhogyan előírva a g függvény értékét az α helyen bármely $f \in L$ függvénnyel a g-nek összeségében legfeljebb $k+1 \leq n$ metszéspontja lehet ezen pontokon.
(Nem nehéz látni, hogy ekkor biztosan létezik is ilyen f függvény, ám ez a bizonyítás szempontjából nem lényeges.)

Ha viszont

$$\mathcal{R}\left(\begin{array}{ccc|c} f_1(x_{\beta_1}) & \dots & f_1(x_{\beta_k}) & f_1(x_\alpha) \\ f_2(x_{\beta_1}) & \dots & f_2(x_{\beta_k}) & f_2(x_\alpha) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(x_{\beta_1}) & \dots & f_n(x_{\beta_k}) & f_n(x_\alpha) \end{array}\right) = \mathcal{R}\left(A\right) = k,$$

akkor megmutatjuk, hogy $g(\alpha)$-t egyetlen értéktől eltekintve mindig tudjuk úgy választani, hogy g-re továbbra is fennálljon, hogy tetszőleges függvénnyel vett metszete az $(x_{\beta_i} \cup x_\alpha)$ alaphalmazon is legfeljebb k elemű tetszőleges $f \in L$ függvény esetén.

Ekkor egyrészt világos, hogy a $v_\alpha = (f_1(x_\alpha), f_2(x_\alpha), \dots, f_n(x_\alpha))^T$ vektor (egyértelműen) felírható a v_{β_j} vektorok segítségével, másrészt, hogy vagy léteznek olyan γ_i

együtthatók, amelyekre A-val jelölve az előbbi mátrixegyenlet első mátrixát, $\vec{\gamma}$-val a γ_i-ből képzett megfelelő oszlopvektort, kapjuk:

$$A^T \cdot \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} f_1(x_{\beta_1}) & f_2(x_{\beta_1}) & \dots & f_n(x_{\beta_1}) \\ f_1(x_{\beta_2}) & f_2(x_{\beta_2}) & \dots & f_n(x_{\beta_2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(x_{\beta_k}) & f_2(x_{\beta_k}) & \dots & f_n(x_{\beta_k}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_{\beta_1}) \\ g(x_{\beta_2}) \\ \vdots \\ g(x_{\beta_k}) \end{pmatrix},$$

vagy nincs ilyen $\vec{\gamma}$.
Ez utóbbi eset, mint azt a lineáris egyenletrendszerek elméletéből tudjuk, nem lehetséges, hiszen az $Ax = b$ típusú egyenletrendszernek mindig van megoldása, ha a mátrix oszlopai lineárisan függetlenek, melyet feltettünk.

Foglalkozzunk most részletesen az első esettel, azaz, ha létezik a fenti $\vec{\gamma}$. Ebben az esetben a következő lemma lesz segítségünkre:

4.2. Lemma. *Legyen*

$$M = \begin{pmatrix} A & f \\ g^T & \star \end{pmatrix}$$

olyan mátrix, melyben f oszlopvektor és g^T sorvektor, valamint az utolsó oszlop utolsó sor elem nincs kitöltve. Ha f lineárisan függ A oszlopaitól, és g^T lineárisan függ A soraitól, akkor egyetlen olyan érték írható a $\star$ helyére, amely mellett megmarad az utolsó sor és az oszlop lineáris függése. Minden más esetben

$$R(M) = R\begin{pmatrix} A \\ g^T \end{pmatrix} + 1 = \begin{pmatrix} A & f \end{pmatrix} + 1 = R(A) + 1$$

Bizonyítás. Léteznek olyan γ és δ megfelelő dimenziós vektorok, hogy $A\delta = f$ és $\gamma^T A = g^T$. Ezért $\gamma^T f = \gamma^T A\delta = g^T\delta$.
Ezen értéket írva $\star$ helyére mind az utolsó sor, mind az utolsó oszlop lineáris függése megmarad.
Tegyük fel, hogy létezik egy másik ilyen $\star$-nak alkalmas érték is. Ekkor a lineáris összefüggőségi feltétel miatt, ennek az értéknek egyenlőnek kell lennie valamilyen $\delta' \neq 0$-re $g^T\delta'$-vel és hasonlóan $A\delta' = f$-nek is kell teljesülnie. Ekkor persze $A(\delta - \delta') = 0$, ugyanakkor feltevés szerint $g^T(\delta - \delta') \neq 0$, hiszen $g^T\delta = \star$, míg $g^T\delta'$ ettől

különböző. Ez utóbbi egyrészt azt jelenti, hogy a különbség vektor nem a 0 vektor, másrészt mivel létezik $\gamma \neq 0$, hogy $\gamma^T A = g^T$, mutatja $g^T(\delta - \delta') = \gamma^T A(\delta - \delta') = 0$. Az ellentmondás igazolja, hogy egyetlen értéke lehet a $\star$-nak, mely nem növeli a mátrix rangját.
Tehát valóban minden egyéb értéket választva a $\star$-nak, a rang eggyel nő. ∎
(A lemma egy általánosítás megtalálható [5]-ben.)
Alkalmazzuk a lemmát az

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} f_1(x_{\beta_1}) & \dots & f_1(x_{\beta_k}) & f_1(x_\alpha) \\ f_2(x_{\beta_1}) & \dots & f_2(x_{\beta_k}) & f_2(x_\alpha) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(x_{\beta_1}) & \dots & f_n(x_{\beta_k}) & f_n(x_\alpha) \\ \hline g(x_{\beta_1}) & \dots & g(x_{\beta_k}) & \star \end{array} \right)$$

mátrixra. Észrevehetjük, hogy ez éppen azt jelenti, hogy egyetlen olyan $\star$ választással tudunk élni, melyre a mártix rangja nem nő, azaz az így választott $g(x_\alpha)$ érték mellett valamely függvénynek ($\sum_j \gamma_j f_j$) az L vektortérből és a g függvénynek a közös metszéspontjainak a száma eggyel növekszik. Egyébként viszont változatlan marad. Tehát ezen az egy értéken kívül bármely más választás eleget tesz annak, hogy a g függvényhez nincs olyan $f \in L$, hogy azok megegyeznének a β_i, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ és az α indexű pontokban.
Ez azt jelenti, hogy minden fix pont k-ashoz legfeljebb egy ilyen értéket kell kizárni, amit nem vehet föl a g függvény az x_α pontban.
A kezdeti feltevés szerint az $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ számossága kisebb, mint kontinuum. Ugyanakkor véve ezeknek az összes lehetséges legfeljebb n elemszámú részhalmazát, ezek száma is kevesebb, mint kontinuum. Legfeljebb ennyi a fentieknek megfelelő pont k-as választható ki összesen, melyhez tartozóan legfeljebb 1 értéket ki kell zárni, amit nem vehet fel g az x_α helyen. Ez tehát g értékkészletét tekintve is azt jelenti, hogy kevesebb, mint kontinuum elemet kizárva még mindig marad érték, melyet $g(x_\alpha)$-hoz rendelhetünk anélkül, hogy a metszések száma nőne.

Ezzel megmutattuk, hogy tudunk olyan értéket választani (sőt akár kontinuum sokféle olyan értéket is), hogy az indukciós feltevés fennálljon - megfelelő $g(x_\alpha)$ választással - az x_α-val kibővített halmazra is. Ez persze tetszőleges $\alpha < \kappa$-ra elmondható, mellyel az állítást beláttuk. ∎

A következő tétel hasonló a 4.1. Tételhez, ám egy lényeges különbsége, hogy nincs a metszések számának valamilyen univerzális véges felső korlátja.

4.3. Tétel. *Legyen L tetszőleges $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények legfeljebb megszámlálható dimenziós lineáris tere. Ekkor létezik g (nem feltétlenül mérhető) függvény, melyre $|\mathbb{R}(f = g)| < \infty$ minden $f \in L$-re.*

Bizonyítás. A bizonyítás teljesen hasonlóan zajlik a 4.1. Tétel bizonyításához, amely ebben az esetben a lineáris kombinációk véges hosszúságára vezethető vissza.

Ismét vegyük az előbbi jólrendezést, kapjuk az $\{x_\beta : \beta < \kappa\}$ halmazt, ahol κ a legkisebb olyan rendszám, melynek számossága kontinuum és vegyünk egy $f_1, f_2, \ldots$ bázist a vektortérben, majd transzfinit rekurzióval megkonstruáljuk a megfelelő g függvényt.
Tekintsük először az x_0 pontot, illetve az $f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots$ halmazt. A korábbiakhoz teljesen hasonlóan, ha van olyan eleme a halmaznak, melynek az értéke nem 0, akkor tetszőlegesen választhatjuk a g értékét az x_0 pontban, ha nincs, akkor tetszőleges nem 0 értéket választunk. Ezek után tegyük fel, hogy valamely $\alpha < \kappa$-ra igaz, hogy minden $\beta < \alpha$ esetén x_β-t már meg tudjuk úgy választani, hogy a rajtuk értelmezett g függvény görbéje minden $f \in L$ függvény görbéjét véges sok pontban metszi. Vegyük az x_α pontot, és keressünk $g(x_\alpha)$-nak megfelelő értéket. Az előbbi bizonyítás talán leglényegesebb pontja az volt, hogy észrevettük, hogy a $g(x_\alpha)$ választásában kevesebb, mint kontinuum sok "tiltott" értéket kell kizárnunk, ám mivel az $\mathbb{R}$ kontinuum számosságú, így még mindig marad "szabad" érték, melyet g felvehet az x_α pontban úgy, hogy rekurzió folytatható legyen.

Ennek megfelelően minden rögzített n esetén a legfeljebb n elemű lineáris kombinációkra elismételhetjük a 4.1. Tétel bizonyítását. Megszámlálható bázisú lineáris tér esetén adott véges sok x_β, $\beta < \alpha$ alappontban rögzített értéket felvevő, legfeljebb n báziselemből álló lineáris kombinációk száma is megszámlálható. Így 4.2. Lemma felhasználásával adódik, hogy minden rögzített véges alappontrendszerhez legfeljebb megszámlálható sok értéket kell kizárnunk. Ugyanakkor, az $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ halmaz minden véges részhalmazai együttesen is egy κ' kisebb, mint kontinuum számosságú halmazt alkotnak. Így az x_α ponthoz tartozó "tiltott" értékek halmaza $\kappa' \cdot \aleph_0$ számosságú, ami szintén kevesebb, mint kontinuum. Így ezeken kívül tetszőleges értéket választva, a báziselemek legfeljebb n elemű lineáris kombinációiként előálló függvényeknek a metszete g-vel legfeljebb n elemű marad tetszőleges nem kizárt értéket adva $g(x_\alpha)$-nak. Ezt minden $n \in \mathbb{N}$-re elismételve összesen is kevesebb, mint kontinuum sok értéket kell kizárnunk, így létezik olyan érték, melyet g-hez rendelve az x_α pontban tetszőleges $f \in L$ függvény g-vel vett metszéspontjainak a száma nem mehet egy fix, f-től függő véges érték fölé. Így a transzfinit rekurzióval előállíthatjuk a keresett g függvényt minden pontban.

∎

4.4. Következmény. *Legyen N egy nullmértékű halmaz $\mathbb{R}$-en, L pedig tetszőleges, valós függvényekből álló megszámlálható dimenziós lineáris tér. Ekkor létezik olyan g mérhető függvény, melynek minden $f \in L$ függvénnyel véges sok metszéspontja van N-en.*

Bizonyítás. Világos - hiszen, mint azt korábban megállapítottuk - , hogy egy mérhető függvényt egy adott nullmértékű halmazon tetszőlegesen megváltoztatva a függvény mérhető marad. Így a g feltételében szereplő mérhető szót lecserélhetjük tetszőlegesre, amiből következik, hogy a 4.3. Tételből adódó g függvény megszorítása N-re eleget tesz a 4.4. Következmény feltételeinek. ∎

Természetesen merül fel ezután a kérdés, hogy a 4.3. vagy akár a 4.1. Tételben szereplő g függvényt nem tudnánk-e mérhetőnek választani? Persze ekkor feltesszük, hogy a lineáris tér is mérhető függvényekből áll. A kérdést egy sejtés formájában fogalmazzuk meg:

4.5. Sejtés. *Legyen L $\mathbb{R}$-mérhető függvények n dimenziós lineáris tere. Ekkor létezik g mérhető függvény, amelyre $\mathbb{R}(f = g) \leq n$ teljesül minden $f \in L$ esetén.*

Speciálisan ez $n = 1$-re igaz.

Bizonyítás. Tekintsünk egy báziselemét az L 1 dimenziós térnek, legyen ez f, ekkor minden elem $\alpha \cdot f$ alakba írható. Legyen $A = \mathbb{R}(f = 0)$, ez persze az összes többi függvényre is ugyanezt a halmazt eredményezi, tehát $\mathbb{R} \setminus A = \mathbb{R}(h \neq 0)$ minden $h \in L$. Legyen

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in A \\ x \cdot f(x) & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases}$$

Az így választott függvény mérhető, hiszen A mérhető halmaz, és itt konstans 1 értékű, másutt pedig két mérhető függvény szorzata. Tetszőleges $h \in L$ függvénnyel legfeljebb 1 metszéspontja lehet, hiszen metszéspont csak a $A = \{h(x) \neq 0\}$ halmazban lehet, valamint tetszőleges metszéspont megoldása a következő függvényegyenletnek:

$$h(x) = \alpha \cdot f(x) = x \cdot f(x) = g(x),$$

amiből következik, hogy x értéke csak α lehet, mivel az A halmazon lehet $f(x)$-szel osztani.

$\blacksquare$

4.2. Metszéspontok mérhető függvények vektorterének elemein

A témával kapcsolatban a következő kérdést *Székely Gábor* vetette fel:

4.6. Kérdés. *Igaz-e, hogy $\mathbb{R}$-en mérhető függvények bármely véges dimenziós vektorteréhez létezik olyan g mérhető függvény, hogy minden f elemére a vektortérnek az $\mathbb{R}(f = g) \equiv \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ halmaz nullmértékű?*

A kérdésre *Laczkovich Miklós* és *Petruska György* munkája nyomán adjuk meg a választ.
Ehhez mindenekelőtt szükségünk lesz a halmaz porozitásának fogalmára, mely szoros kapcsolatban áll az adott halmaz egy adott pontbeli sűrűségével.

4.7. Definíció. *Legyen X teljes metrikus tér és jelölje $\overline{B_r(x)}$ az x középpontú r sugarú zárt gömböt. Ekkor egy $M \subseteq X$ halmazt* ***porózusnak*** *nevezünk, ha létezik $\alpha \in (0,1)$ és létezik ϵ_0, hogy minden $0 < \epsilon < \epsilon_0$ és minden $x \in X$-hez létezik olyan $y \in \overline{B_\epsilon(x)}$, amelyre igaz, hogy $\overline{B_{\alpha\epsilon}(y)} \subseteq \overline{B_\epsilon(x)} \setminus M$.*

Ez $\mathbb{R}$-ben a következőképpen néz ki, egy kicsit átfogalmazva:

4.8. Definíció. *Az M halmaz egy $x \in M$ pontban* ***porózus****, ha létezik $c > 0$ és I_n zárt intervallum sorozat, amelyre $I_n \to x$ úgy, hogy $|I_n| \geq c \cdot dist(x, I_n)$ és $I_n \cap M \neq \emptyset$.*
Az M halmazt porózusnak mondjuk, ha minden pontjában porózus.

4.9. Definíció. *Egy halmazt* ***σ-porózusnak*** *nevezünk, ha porózus halmazok megszámlálható uniója.*

Természetesen az unió tagjai esetében különböző α, illetve c konstansokat megengedhetünk.

Megjegyzés. Egy σ-porózus halmaz 0-mértékű és 1. kategóriájú.
Valóban az, hogy 0-mértékű a Lebesgue-sűrűségi tétel következménye, és a porózus halmaz definíció szerint sehol sem sűrű, így ilyenek megszámlálható uniója 1. kategóriájú.
A következő tétel a Laczkovich-Petruska tételnél valamivel erősebbet állít.

4.10. Tétel. *Legyen L $\mathbb{R}$-mérhető függvények megszámlálható dimenziós lineáris tere. Ekkor létezik olyan g mérhető függvény, hogy $\mathbb{R}(m = g)$ σ-porózus halmaz minden $m \in L$ esetén.*

Amennyiben ezt a tételt belátjuk, akkor ez egyben megválaszolja a *Székely* által felvetett kérdést is az előbbi megjegyzés értelmében, sőt valamivel többet is bizonyít. A tételt több állításon keresztül fogjuk igazolni.

Folytonos függvények vizsgálatával kezdjük az állítás bizonyítását, vektortér helyett pedig megszámlálható sok függvénnyel fogunk foglalkozni, majd megmutatjuk, hogy erre visszavezethető a mérhető függvények vektorterének esete. Ezek vizsgálatában fontos segédeszköz lesz a függvény folytonossági modulusa.

4.11. Definíció. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos függvény. Ekkor az*

$$\omega(\delta) = \omega_f(\delta) \overset{def}{=} \sup_{|y-x|\leq\delta} |f(y) - f(x)| \ \delta \geq 0$$

*kifejezést az f függvény **folytonossági modulusának** hívjuk.*

A következő állításban a folytonossági modulus néhány elemi tulajdonságát foglaljuk össze:

4.12. Állítás. *Egyenletesen folytonos f függvény esetén az ω egyenletesen folytonos, $\omega(0) = 0$, monoton növő, és ha $\Delta > \delta$, akkor $\omega(\Delta) \leq (\frac{\Delta}{\delta} + 1)\omega(\delta) \leq 2 \cdot \frac{\Delta}{\delta} \cdot \omega(\delta)$, valamint ha f és g egyenletesen folytonos függvények, $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám, akkor fennáll a $\omega_{f+g}(\delta) \leq \omega_f(\delta) + \omega_g(\delta)$, illetve $\omega_{K \cdot f}(\delta) = |K| \cdot \omega_f(\delta)$.*

A $+1$ -re itt azért volt szükség, mert nem biztos, hogy a Δ a δ egészszámú többszöröse.
Egy fokkal szebb alak, ám egy kicsit durvább becslés: $\frac{\omega(\Delta)}{\Delta} \leq 2 \cdot \frac{\omega(\delta)}{\delta}$

A fenti állítások közül talán csak $f + g$-re vonatkozó szorul némi magyarázatra, mely a háromszög egyenlőtlenségből és a szuprémum szubadditivátásából adódik.

4.13. Definíció. *Az ω függvényt **folytonossági modulusnak** hívjuk, ha egyenletesen folytonos a $[0, \infty)$-en,monoton növő, valamint teljesül, hogy $\omega(0) = 0$ és tetszőleges δ_1, $\delta_2 \geq 0$ esetén fennáll, hogy $\omega(\delta_1) + \omega(\delta_2) \geq \omega(\delta_1 + \delta_2)$.*

Megjegyzés. Valójában az is igaz, hogy a fenti feltételeknek elegettevő ω függvényhez létezik olyan f egyenletesen folytonos függvény, melyre $\omega = \omega_f$ teljesül. (Például $f = \omega$ megfelel, ha ω-át a negatív számok halmazán 0-nak értelmezzük.)

4.14. Állítás. *Legyenek $\omega_1, \omega_2, \ldots$ folytonossági modulusok. Ekkor létezik olyan g folytonos függvény, hogy $\mathbb{R}(f = g)$ porózus halmaz minden olyan f egyenletesen folytonos függvényre, amelyre van olyan i, hogy $\omega_f \leq \omega_i$.*

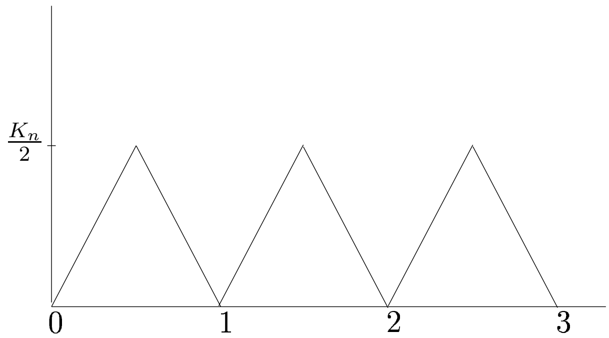
Bizonyítás. Állítsuk elő g-t a következő függvénysor alakban:

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n, \text{ ahol } |g_n'(.)| = K_n \text{ majdnem mindenütt és } |g_n(.)| \leq a_n,$$

és K_n legyen olyan, hogy teljesüljön rá, hogy $K_n > 2\sum_{i=1}^{n-1} K_i$.(A K_n-et 4.16. Lemmában látható módon fogjuk megválasztani). A "majdnem mindenütt" kifejezés valójában legfeljebb megszámlálható sok kivételes pontot jelent, ahol nincs kétoldali deriváltja a g_n-nek.
Ezzel szemben, az $a_n > 0$ sorozatra csak az a feltétel kell, hogy teljesüljön, hogy az a_n tagokból képzett sor legyen konvergens. Ezért rögzíthetjük is őket, mondjuk legyen $a_n = \frac{1}{10^n}$-nek.

4.15. Állítás. *Létezik minden ilyen K_n és a_n sorozathoz a fenti feltételeknek eleget tevő g_n sorozat, és ekkor $g = \sum g_n$ folytonos.*

Bizonyítás. Vegyük a következő fűrészfog görbét.



10. ábra. A vizsgált fűrészfog görbe

Azaz, ahol a számegyenes egységnyi távolságokra van felosztva, és a fűrészfog görbe maximuma $\frac{K_n}{2}$ (10.ábra). Ez persze annak a feltételnek nem tesz eleget, hogy $|g_n(.)| \leq a_n$, ezért kicsinyítsük (vagy nagyítsuk) az ábrát az origóból $\frac{2 \cdot a_n}{K_n}$-szeresére.

Ekkor a felosztások éppen $\frac{a_n}{K_n}$ nagyságúak, és görbe maximima a_n. Ugyanakkor nem változott a $|g_n'(.)| = K_n$ feltétel, legfeljebb azok a pontok mozdultak el, ahol nincs értelmezve a derivált.
A g folytonossága nyilvánvaló, hiszen a konvergens majoráns miatt a $\sum g_n$ egyenletesen konvergens Weierstrass-tétele szerint. Ebből speciálisan (egyenletesen) folytonos g_n esetén (egyenletesen) folytonos g függvény adódik. ■

Megmutatjuk, hogy a K_n megfelelő választása mellett a $h_n = \frac{a_n}{K_n} = \frac{1}{10^n \cdot K_n}$ esetén igaz, hogy tetszőleges, a 4.14. Állítás feltételét kielégítő f függvényre létezik olyan n_0, hogy minden $n_0 > n$-re és tetszőleges $x \in \mathbb{R}(f = g)$ esetén, az x h_n-sugarú környezetének csak bizonyos fix hányadában található olyan y pont, melyre $y \in \mathbb{R}(f = g)$ teljesülne. Azt is megmutatjuk, hogy ez a bizonyos hányad független f és h_n választásától, melyből az állítás azonnal következik.

Rögzítsünk egy f-t és tartsuk meg a korábbi $h_n = \frac{1}{10^n \cdot K_n}$ választást.
Tegyük fel, hogy $|x - y| < h_n$, sőt azt is, hogy az x és az y pontok a g_n-hez tartozó felosztásban ugyanazon intervallumban helyezkednek el, valamint, hogy $x, y \in \mathbb{R}(f = g)$.
Ekkor egyrészt a g konstrukciójából és a háromszög egyenlőtlenségből világos, hogy:

$$|g(x) - g(y)| \geq |g_n(x) - g_n(y)| - \sum_{i=1}^{n-1} |g_i(x) - g_i(y)| - \sum_{i=n+1}^{\infty} |g_i(x) - g_i(y)| \geq$$

$$\geq K_n \cdot |x - y| - \sum_{i=1}^{n-1} K_i \cdot |x - y| - \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{10^i} \geq \frac{K_n}{2} \cdot |x - y| - \frac{2}{9 \cdot 10^n},$$

ahol a második egyenlőtlenség K_i-kre vonatkozó becslése ($i < n$) a g_i deriváljának tulajdonságából, míg a K_n-re vonatkozó becslés a fenti konstrukcióból adódik, illetve abból, hogy az x és az y pontok az adott felosztás szerint ugyanazon adott h_n nagyságú intervallumban vannak benne. Az $i > n$ indexű tagokat egyszerűen a függvény maximumának kétszeresével becsülhetjük, ismét a háromszög egyenlőtlenséget használva. A második egyenlőtlenség a K_n-ekre tett feltételből következik.

Ugyanakkor

$$|g(x) - g(y)| = |f(x) - f(y)| \leq \omega_f(h_n) \leq \omega_i(h_n),$$

valamely i-re a feltevés szerint, kellően nagy n-et választva és kihasználva, hogy feltehetjük, hogy h_n tart 0-hoz. (Ezzel kapcsolatban lásd: 4.16. Lemma.)
Átrendezve a következő becslés adódik:

$$|x - y| \leq \frac{2}{K_n}(\omega_i(h_n) + \frac{2}{9 \cdot 10^n}) = \frac{2 \cdot \omega_i(h_n)}{K_n} + \frac{4}{9} h_n.$$

Ahhoz, hogy a h_n valamely hányadában ne lehessen pontja a vizsgált halmaznak, elegendő biztosítani a következő egyenlőtlenséget (mely persze egy kicsit önkényes választás):

$$\frac{2 \cdot \omega_i(h_n)}{K_n} < \frac{h_n}{36}, \tag{1}$$

ami átrendezve $72 \cdot \omega_i(h_n) < \frac{1}{10^n}$ alakot ölti.

Feltéve, hogy ezt tudjuk garantálni minden $n > n_0$-ra valamely n_0 esetén, akkor tetszőleges x pont rajta van egy, a g_n felosztása szerint vett h_n nagyságú intervallumon. Az előbbiekből azt is tudjuk, hogy ezen az intervallumon, de az x középpontú $r = (\frac{4}{9} + \frac{1}{36}) \cdot h_n = (\frac{1}{2} - \frac{1}{36}) \cdot h_n$ sugarú körön kívül nem lehet olyan pont, amelyen az f függvény értéke megegyezne g függvény értékével. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in \mathbb{R}(f = g)$ ponthoz és tetszőleges ilyen h_n-re a $\overline{B_{h_n}(x)}$-ben létezik egy legalább $\frac{1}{36} \cdot h_n$ nagyságú I_n intervallum, ahol az $(I_n \cap \mathbb{R}(f = g)) = \emptyset$. Tehát kihasználva, hogy $h_n \to 0$, ha $n \to \infty$ adódik, hogy az $\mathbb{R}(f = g)$ halmaz minden pontjában porózus $\alpha = \frac{1}{36}$ választással.

Az (1) feltétel kielégíthetőségéhez elegedő a következő lemmát igazolni:

4.16. Lemma. *Adott $\omega_1, \omega_2, \ldots$ folytonossági modulusokhoz létezik h_n-ek egy 0-hoz torlódó sorozata, amelyre igaz, hogy*

$$\omega_i(h_n) < \frac{1}{72 \cdot 10^n} \ \forall\ i = 1, \ldots, n\text{-re},$$

továbbá a $K_i = \frac{1}{10^i \cdot h_i}$ sorozatra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{10^n \cdot h_n} > 2 \sum_{i=1}^{n-1} K_i.$$

Bizonyítás.

A lemmát n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.
Létezik olyan $h_1 > 0$, hogy $\omega_1(h_1) < \frac{1}{72 \cdot 10^1}$. K_1 pedig legyen $\frac{1}{10 \cdot h_1}$.
Tegyük fel, hogy $n-1$-re már létezik a megfelelő h_i minden $i \le n-1$. Ekkor minden $i \le n$ esetén léteznek $\delta_i > 0$ értékek, amelyekre igaz, hogy minden $h \le h_i$-re az $\omega_i(h) < \frac{1}{72 \cdot 10^n}$ teljesül. Ilyen δ_i-k valóban léteznek, mivel a folytonossági modulus monoton növő, a 0-ban jobbról folytonos és ott 0 értéket vesz fel. Legyen $h'_n = \min_{i \le n}(\delta_i)$-re minden $h \le h'_n$ kielégíti az első feltételt.
Ugyanakkor kellően kicsi értéket választva létezik olyan $0 < h''_n \le h'_n$, hogy $\frac{1}{10^n \cdot h} > 2 \sum_{i=1}^{n-1} K_i$ teljesül minden pozitív $h < h''_n$ esetén. Válasszunk egy tetszőleges ilyen értéket és rögzítsük ezt h_n-nek. Az így választott h_n eleget tesz a fenti feltételeknek.

Ám meg kell még határozni az indukcióhoz K_n-et, ami az állításban foglaltaknak megfelelően választható $\frac{1}{h_n \cdot 10^n}$-nek. ■

Ezzel a 4.14. Állítás bizonyítását is befejeztük. ■

4.17. Következmény. *Tekinsük az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos függvények egy legfeljebb megszámlálható dimenziós L lineáris terét. Ekkor létezik g (egyenletesen) folytonos függvény, amire teljesül, hogy $\mathbb{R}(f = g)$ porózus halmaz minden $f \in L$-re.*

Bizonyítás.

Elegendő egy olyan megszámlálhatóan sok függvényből álló H halmazt találni, melyre tetszőleges $f \in L$ esetén létezik $\omega \in H$, amelyre igaz, hogy $\omega_f(\delta) < \omega(\delta)$ minden $\delta > 0$-ra.
Ilyen H halmazt az ω elemi tulajdonságai segítségével egyszerűen készíthetünk. Vegyünk egy bázist L-ben, legyen ez $b_1, b_2, \dots$ és tekintsük az ω_{b_i} folytonossági modulusokat. Vegyük minden ω_{b_i}-re az $n \cdot \omega_{b_i}$ függvényeket. Ezek együttesen is legfeljebb megszámlálhatóan vannak, így képezve a véges összegeiket, azok is legfeljebb megszámlálhatóan sokan lesznek. Rendezzük ez utóbbiakat sorba, legyenek ezek $\omega_1, \omega_2, \dots$, mely függvényekre fogjuk ezután alkalmazni a fenti lemmát és a belőlük képzett halmaz fogja betölteni H szerepét.
A gondolat helyességéhez elegendő a következőt belátni. Ha adott α_i illetve β_i együttható-sorozatok, melyekre igaz, hogy $\alpha_i \leq \beta_i$, ahol i indexek egy I véges halmazból valók, akkor

$$\omega_{(\sum_{i \in I} \alpha_i \cdot b_i)}(\delta) \leq \sum_{i \in I} \alpha_i \cdot \omega_{b_i}(\delta) \leq \sum_{i \in I} \beta_i \cdot \omega_{b_i}(\delta) = \omega_j(\delta),$$

minden $\delta > 0$-ra,ahol az ω_j az előbbi felsorolás egy tagja.
Teljesen világos, hogy tetszőleges $f \in L$ előáll $\sum_{i \in I} \alpha_i \cdot b_i$ alakban, hol I véges, és ehhez létezik a fent leírtaknak eleget tevő $\beta_i \in \mathbb{N}$ együttható-sorozat. Tehát ezen ω_i-kre alkalmazva a 4.14. Állítást adódik a következmény. ■

Mielőtt a mérhető függvények vektorterének esetére vonatkozó állítás bizonyítására rátérnénk, kimondjuk Luzin illetve Tietze tételét, amelyeknek kulcsfontosságú szerepe lesz az 4.10. Tétel bizonyításában.

4.18. Tétel. (Luzin)
Legyen $(G, \mathcal{M}, \mu)$ Lebesgue-Stieltjes-féle mértéktér, $f : G \to \mathbb{R}$ mérhető leképezés. Legyen $H \in \mathcal{M}$ olyan, hogy $\mu(H) < \infty$, továbbá $\epsilon > 0$ adott. Ekkor létezik olyan $A \subset H$ zárt halmaz, hogy $\mu(H \setminus A) < \epsilon$ és $f|_A$ folytonos.

A tétel bizonyítása megtalálható [6]-ben.

4.19. Tétel. (Tietze)
Legyen X normális tér, egy zárt A részhalmazán egy $f : A \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f kiterjeszthető X-re, vagyis létezik olyan $F : X \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre $F|_A = f$.

A Tietze tétel egy bizonyítása [8]-ben olvasható.

Megjegyzés. Hogy A zárt halmaz annak a fenti tételben jelentős szerepe van. Jó példa a $(0, \frac{\pi}{2})$ intervallumon a $\mathrm{tg}(x)$ olyan folytonos függvény, mely nem terjeszthető ki $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvénnyé, hiszen már $[0, 1]$-re sem.

Ezek után visszatérhetünk a 4.10. Tétel bizonyítására:
A 4.10. Tétel bizonyítása
Vegyünk egy bázist a vektortérben, legyen ez $m_1, m_2, \ldots$, ahol tehát m_i mérhető függvények. Szorítsuk meg először mindegyik függvényt a $(0, 1)$ intervallumra. Vegyük sorba az $m_i|_{(0,1)}$ mérhető függvényeket, ezekre alkalmazható Luzin-tétele a $G_0 = (0, 1)$ és $\mu = \lambda$ szereposztásban, ahol λ a számegyenes Lebesgue-mértéke.
Tehát válasszunk tetszőlegesen egy ϵ-t, ekkor létezik olyan A_1 zárt halmaz, hogy m_1 folytonos A_1-en és $\lambda((0, 1) \setminus A_1) < \frac{\epsilon}{2}$. Hasonlóan vegyük m_i-re a Luzin-tételnek megfelelő A_i zárt halmazt, amelyre m_i folytonos A_i-n és $\lambda((0, 1) \setminus A_i) < \frac{\epsilon}{2^i}$. Így

$$F_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_i \text{ zárt és } \lambda((0,1) \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_i) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon.$$

Ekkor tehát mindegyik m_i bázis elem folytonos F_1-en, így persze a vektortér minden eleme is, hiszen folytonosak lineáris kombinációja is folytonos.
Mivel a $(0, 1)$ az $\mathbb{R}$-en indukált altér topológiával ellátva normális, F_1 pedig zárt, a Tietze tétel értelmében vektortér tetszőleges eleme kiterjeszthető a $(0, 1)$-en folytonos függvénnyé, ami persze a $(0, 1)$-en kívül konstansnak választva kiterjed $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos függvénnyé. Az előbbi észrevétel miatt pedig elegendő kiterjeszteni az eredeti báziselemeket, abból automatikusan kapjuk tetszőleges lineáris kombinációnak egy kiterjesztését.

Ekkor alkalmazható a 4.17. Következmény, így létezik olyan folytonos g_1 függvény, amely elkerüli mindegyik kiterjesztett folytonos függvényt egy porózus halmaztól eltekintve. Speciálisan $g_1|_{F_1}$ minden f, az eredeti vektortérbeli mérhető függvényt legfeljebb porózus halmazon metsz, persze F_1-ben.

Ezek után rekurzívan tekintsük a k. lépésben a $G_k = (0,1) \setminus \bigcup_{i=1}^{k} F_k$ kimaradó nyílt halmazt, melyre tudjuk, hogy $\lambda(G_k) < \frac{\epsilon}{2^k}$, és mivel nyílt halmaz, az öröklődő topológia szerint normális. Tehát megismételve a fenti okoskodást, létezik olyan A_i' zárt halmaz, hogy m_i folytonos A_i'-n és $\lambda(G_k \setminus A_1') < \frac{\epsilon}{2^{k+i}}$ a Luzin tétel értelmében, amely most is alkalmazható, hiszen $\lambda(G_k)$ véges.

Így

$$F_{k+1} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_i \text{ zárt és a } \lambda(G_k \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_i') < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{i+k}} = \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Tekintsük csak az $m_i|_{F_i}$ folytonos függvényeket, ekkor egyrészt a $k = 1$ esethez hasonlóan, F_i-n a vektortér minden függvénye folytonos, másrészt a korábbiakhoz teljesen hasonlóan Tietze tétele szerint egy bázison kiterjesztve a megszorítást, a vektortér összes elemét helyettesíthetjük $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos f függvényekkel, melyek az F_k zárt halmazon megegyeznek az eredeti vektortér megfelelő m elemeivel. Így felhasználva az 4.17. Következményt létezik olyan folytonos g_{k+1} függvény, hogy mindegyik kiterjesztett egyenletesen folytonos f függvényre $\mathbb{R}(f = g_{k+1})$ porózus halmaz. Speciálisan az $g_{k+1}|_{F_k}$ és minden $m|_{F_k}$ esetén $\mathbb{R}(m|_{F_k} = g_{k+1}|_{F_k})$ porózus halmaz, ahol m függvény az eredeti vektortér egy eleme.

Mivel az $F_i \subset G_i$ halmazok diszjunktak, végül az $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ olyan F_σ halmaz lesz, amelyre $\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 1$, mivel a konstrukcióból világos, hogy $\lambda((0,1) \setminus \bigcup_{i=1}^{n}(F_i) = \lambda(G_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$. Tehát a a kimaradó halmaz nullmértékű.
Ugyanakkor ismét csak az F_i halmazok diszjuntságából következik, hogy a $g_{i+1}|_{F_i}$ folytonos függvényeket "összeragasztva" egy mérhető függvényt kapunk $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_i$-n. Jelöljük ezt g-vel.
Ekkor g olyan mérhető függvény lesz, amelyre az F_i-n az $\mathbb{R}(g = m)$ halmaz porózus $\forall m \in L$,(sőt itt $g = g_i$ folytonos), így az $\mathbb{R}(g = m)$ σ-porózus halmaz lesz.
Tehát adódott egy olyan g mérhető függvény, amelynek a $(0,1)$ intervallumon egy nullmértékű halmaz kivételével minden $m \in L$ mérhető függvénnyel vett metszete σ-porózus halmaz.

Bontsuk fel $\mathbb{R}$-et a következőképpen:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1) \cup N_1, \text{ ahol } N_1 \text{ nullmértékű.}$$

(Sőt, valójában megszámlálható, hiszen az intervallumok végpontjairól van szó.)
Az eddigi okfejtés lényeges változtatás nélkül alkalmazható $(0,1)$ helyett $(n, n+1)$-re. Ekkor olyan $F_{i,n}$ zárt halmazokat és g_n mérhető függvényeket kapunk, hogy a g_n-nek az $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_{i,n}$ halmazon minden $m \in L$ függvénnyel vett metszete σ-porózus.

Ezek a g_n függvények megint csak "összerakhatóak", hiszen diszjunkt halmazokon vizsgáljuk őket. Tekintve az

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty} F_{i,n}$$

halmazt tehát egy olyan F_σ halmazt kapunk, mely egy nullmértékű híján lefedi $\mathbb{R}$-et, és az összeragasztásból származó g függvényre igaz, hogy adott nullmértékű halmaztól eltekintve tetszőleges $m \in L$ mérhető függvényre az $\mathbb{R}(g = m)$ σ-porózus.

Ezzel igazoltuk a tételt egy nullmértékű halmaztól eltekintve. Csakhogy egy fix nullmértékű halmazon egy mérhető függvény értékét tetszőlegesen megváltoztatva a függvény mérhető marad. Tehát, ha tudnánk garantálni, hogy valójában ezen a nullmértékű halmazon a függvénynek az eredeti függvényekkel "kevés", azaz esetünkben legfeljebb megszámlálható metszéspontja legyen, akkor persze az valójában egy σ-porózus halmaz lenne, így hozzávéve az eddigi σ-porózus halmazhoz beláthatjuk teljes egészében az tétel állítását.

Ez pedig a 4.4. Következményként adódott.

■

5. Geometriai mértékelméleti megközelítés

5.1. Reguláris és irreguláris halmazok vizsgálata

A 4.5. Sejtést $n = 1$ esetben igazoltuk, ezzel ellentétben $n = 2$ esetén *Pósa Lajos* mutatott egy ellenpéldát a következő állítás felhasználásával, amelyet egy kérdés formájában fogalmazunk meg:

5.1. Kérdés. *Egy I intervallumon adott tetszőleges 3 mérhető függvény. Igaz-e, hogy létezik olyan nem függőleges egyenes, melynek mind a három függvény grafikonjával legalább 1 metszéspontja van?*

5.2. Állítás. *Ha az 5.1. Kérdésre a válasz igenlő, akkor létezik mérhető függvényeknek olyan két dimenziós tere, hogy tetszőleges f mérhető függvényre igaz, hogy* $|\mathbb{R}(f = g)| \geq 3$.

Bizonyítás. Legyen L a $h_1(x) \equiv 1$ és a $h_2(x) \equiv \{x\}$ függvények által generált lineáris tér.
Vegyünk egy tetszőleges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, és legyen definíció szerint $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(x+1)$ és $f_3(x) = f(x+2)$ $\forall x \in [0,1]$. Ekkor a fenti állítás miatt létezik egy olyan g lineáris függvény, amire igaz, hogy $g(x_i) = f_i(x_i)$ különböző $x_1, x_2, x_3 \in [0,1)$ pontokra. A g-t ily módon az egész $[0,1)$-en definiáltuk. Innen ki tudjuk terjeszteni a függvényt periodikusan az egész $\mathbb{R}$-re.
Egyrészt világos, hogy $g \in L$, hiszen h_1 miatt feltehető, hogy g a 0-ból indul, és 1 szerint periodikus, ez viszont csak h_2 számszorosa lehet, mivel g a [0,1)-en konstans tag nélküli lineáris függvény, azaz $a \cdot x$ alakú. Másrészt a g definíciójából következik, hogy az $\mathbb{R}(f = g)$ tartalmazza az $x_1, x_2 + 1$ és az $x_3 + 2$ pontokat. ∎

Ezen szakasz további részében *Pósa* állításával kapcsolatban felmerülő sejtést fogjuk körüljárni.

Általában nem tudjuk, hogy igaz-e az állítás, ám bizonyos speciális esetekben mégis igazolhatjuk.
Ehhez azonban definiálni kell jónéhány fogalmat, mindenesetre megfogalmazzuk a fejezet második felében bizonyításra kerülő állítást:

5.3. Állítás. *Legyen adott 3 mérhető függvény az $[a, b]$ intervallumon, melyek gráfja reguláris halmaz, ekkor létezik olyan nem függőleges egyenes, melynek mindhárom függvénnyel van metszéspontja.*

5.4. Definíció. *Legyen s rögzített nem-negatív valós szám és legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ és $\delta > 0$ tetszőleges, fedjük le H-t minden lehetséges módon véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok, legfeljebb δ átmérőjű halmazzal. Minden ilyen $H \in \cup H_n$ lefedésre képezzük a $\sum(diam H_n)^s$ összeget és jelöljük $\mu^s_\delta(H)$-val ezen összegek infimumát. Ekkor a $\lim_{\delta \to 0+} \mu^s_\delta(H) = \mu^s(H)$ létezik és egy külső mértéket definiál, amit a továbbiakban a H halmaz s-dinemziós **Hausdorff-mértékének** hívunk.*

5.5. Definíció. *Tetszőleges $A \subset \mathbb{R}^n$ esetén az $inf\{s \geq 0 : \mu^s(A) = 0\}$ értéket az A halmaz **Hausdorff-dimenziójának** nevezzük, és $dim_H(A)$-val jelöljük.*

Megjegyzés. Ugyanez az érték adódik, ha $\{s \geq 0 : \mu^s(A) = \infty\}$ halmaz szuprémumaként definiáljuk a Hausdorff-dimenziót.

5.6. Definíció. *Azon H Borel-halmazokat, melyeknek valamely s esetén az s-dimenziós Hausdorff-mértékére $0 < \mu^s(H) < \infty$ teljesül, s-**halmazoknak** hívjuk.*

(Az 5.5. Definícióból és az azt követő Megjegyzésből tudjuk, hogy minden A Borel-halmazhoz legfeljebb egy olyan s létezik, melyre A s-halmaz, és ekkor $s = dim_H(A)$.)

5.7. Definíció. *Legyen H s-halmaz, ekkor azt mondjuk, hogy az $x \in \mathbb{R}^n$ pontban a H halmaz **alsó sűrűsége***

$$\underline{D^s}(H, x) = liminf_{r \to 0} \frac{\mu^s(F \cap B_r(x))}{(2r)^s} \ ,$$

*míg a **felső sűrűsége***

$$\overline{D^s}(H, x) = limsup_{r \to 0} \frac{\mu^s(F \cap B_r(x))}{(2r)^s},$$

ahol $B_r(x)$ jelöli az x középpontú, r sugarú nyílt gömböt.

Ekkor igaz a következő tétel, mely a Lebesque-sűrűségi tétel bizonyos részének megfelelője:

5.8. Tétel. *Legyen H egy s-halmaz $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor*

1. $\underline{D^s}(H, x) = \overline{D^s}(H, x) = 0$ *teljesül μ^s-majdnem minden $x \notin H$-ra*
2. $2^{-s} \leq \overline{D^s}(H, x) \leq 1$ *teljesül μ^s-majdnem minden $x \in H$-ra.*

Az tétel bizonyítása megtalálható [1]-ben.

Az előbbi tétel 2. részéből világos, hogy $0 \leq \underline{D^s}(H,x) \leq \overline{D^s}(H,x) \leq 1$ teljesül H s-halmazra majdnem minden (a továbbiakban m.m.) $x \in \mathbb{R}^n$ pontra.

5.9. Definíció. *Azon x pontra, melyre adott H mellett teljesül, hogy $D^s(H,x) = \underline{D^s}(H,x) = \overline{D^s}(H,x) = 1$* ***reguláris pontnak*** *nevezzük, minden egyéb esetben* ***irreguláris pontról*** *beszélünk.*
Ha egy H s-halmaznak μ^s-majdnem minden pontja reguláris, akkor H-t ***reguláris halmaznak*** *hívjuk és megfelelően, ha μ^s-majdnem minden pont irreguláris, akkor* ***irreguláris halmazról*** *beszélünk.*

Megjegyzés. Legyen H s-halmaz, és legyen $E \subset H$ Borel halmaz, mely szintén s-halmaz, ekkor a tétel 1. részét alkalmazva E-re adódik, hogy $\underline{D^s}(H,x) = \underline{D^s}(E,x)$, valamint $\overline{D^s}(H,x) = \overline{D^s}(E,x)$ majdnem minden $x \in E$-re. Tehát $\mu^s(E) > 0$ esetén, ha H reguláris s-halmaz, akkor E is az, illetve ha H irreguláris, akkor E is az. Eszerint minden s-halmaz felbontható egy reguláris és egy irreguláris halmaz uniójára, véve a reguláris és irreguláris pontjainak a halmazát.

Csak megjegyezzük a következő, önmagában is érdekes állítást:

5.10. Állítás. *Ha s nem egész, akkor s-halmaz csak irreguláris lehet.*

A bizonyítás megtalálható [2]-ben.
Számunkra azonban most elsődlegesen egész értékű s-ek, ezen belül is speciálisan az $s = 1$ eset lesz fontos, ugyanis egy véges [a,b] intervallumon értelmezett, valós értékű g mérhető függvény gráfját jelölve Γ_g-vel:

5.11. Állítás. *$1 \leq dim_H \Gamma_g \leq 2$, továbbá $\mu^2(\Gamma_g) = 0$.*

Bizonyítás. A második egyenlőtlenség világos, hiszen a síkon vagyunk. Az első a következő állításból adódik.

5.12. Állítás. *Ha adott egy $f : X \to Y$, ahol (X, d_1) és (Y, d_2) metrikus terek és minden $x_1, x_2 \in X$ esetén valamely $C > 0$ és $\alpha > 0$ konstansok esetén fennáll a*

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq C \cdot d_1(x_1, x_2)^\alpha,$$

akkor minden $s \geq 0$-ra $\mu^s(f(X)) \leq C^s \mu^{s\alpha}(X)$.

A bizonyítás megtalálható a [4] 100. oldalán.

Alkalmazzuk az állítást az $f = \pi_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényre, ahol π_x az x tengelyre való projekciót jelenti. Ekkor a $C = 1$ és $\alpha = 1$, mivel $|x-y| \leq |(x, g(x))-(y, g(y))|$, mely utóbbi pontok éppen a Γ_g gráf megfelelő pontjai. Így alkalmazva az állítást adódik, hogy $1 = \dim_H([a, b]) = \dim_H(\pi_x(\Gamma_g)) \leq \dim_H(\Gamma_g)$, hiszen $\mu^1([a, b]) = b-a$.

Az állítás második részének bizonyítása a Fubini-tételből világos. ∎

Így tehát, ha reguláris halmazokkal szeretnénk foglalkozni, melyek megfelelnek az 5.3. Állításban szereplő mérhető függvények görbéinek, akkor elegendő az $s = 1$ esetre szorítkoznunk.

Először azt vizsgáljuk meg, hogy milyen szerkezetűek kell legyenek a reguláris 1-halmazok, majd ennek segítségével bebizonyítjuk az állítást. Megmutatjuk, hogy a rektifikálható görbék reguláris 1-halmazok valamint, hogy a reguláris 1-halmazok sok szempontból görbeívszerűen viselkednek.

5.13. Definíció. *Legyen $\gamma : [a, b] \to X$ tetszőleges leképezés, ahol X metrikus tér. Az*

$$s(\gamma) = sup\{\sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n\}$$

*számot a γ **ívhosszának** nevezzük. Ha ez a szám véges, akkor γ-t **rektifikálhatónak** hívjuk.*
*γ **görbéről** beszélünk, ha azt is feltesszük a $\gamma : [a, b] \to X$ leképezésről, hogy folytonos és injektív.*

Megjegyzés. Tetszőleges γ görbére teljesül, hogy $\mu^1(\gamma([a, b])) = s(\gamma)$.([4] 98. oldal)

5.14. Állítás. *A rektifikálható görbék, illetve ilyen görbék megszámlálható uniói és ezek Borel-részhalmazai reguláris 1-halmazok. Ugyanakkor az irreguláris halmazokra igaz, hogy tetszőleges rektifikálható görbével vett metszete μ^1 szerint nullmértékű.*

Bizonyítás. Jelöljük γ-val a rektifikálható görbét, ekkor $s(\gamma) < \infty$, valamint p-vel, illetve q-val jelölve a γ két végpontját, $p, q \in \mathbb{R}^2$ és $s(\gamma) \geq |p - q| > 0$. Tehát az előbbi megjegyzés felhasználásával adódik, hogy a γ görbe valóban 1-halmaz.

Legyen $x \neq p, q$ és $x \in \gamma$, ekkor γ injektívitásából következik, hogy x két részre osztja a γ görbét. Jelöljük ezeket $\gamma_{x,p}$, illetve $\gamma_{x,q}$.

Létezik olyan pici $r_0 > 0$, hogy minden $r < r_0$ esetén, a $\gamma_{x,q} \cap \partial(B_r(x)) \neq \emptyset$. Ekkor a $\gamma_{x,q}$ görbén végighaladva létezik egy y, amelyre

$$|x - y| = r \text{ és } \gamma_{x,y} \subseteq B_r(x).$$

Tehát erre az r-re igaz, hogy

$$r = |x - y| \leq s(\gamma_{x,y}) = \mu^1(\gamma_{x,y}) \leq \mu^1(\gamma_{x,q} \cap B_x(r)).$$

Hasonlóan igaz, hogy valamely $r_0' > 0$ mellett minden $r < r_0'$-ra $r \leq \mu^1(\gamma_{p,x} \cap B_x(r))$, így a kettőből együttesen $2 \cdot r \leq \mu^1(\gamma \cap B_r(x))$ következik minden elég kicsi r esetén, ahol a kicsinység csak x-től függ. Ekkor

$$\overline{D^1}(\gamma, x) = \ \text{liminf}_{r \to 0} \frac{\mu^1(\gamma \cap B_x(r))}{2r} \geq 1,$$

ugyanakkor korábban már megállapítottuk, hogy $\underline{D^1}(\gamma, x) \leq \overline{D^1}(\gamma, x) \leq 1$ m.m. x-re. Ebből a kettőből következik, hogy a végpontoktól eltekintve majdnem minden $x \in \gamma$-ra a $D^1(\gamma, x)$ létezik és 1 kell legyen, tehát a γ reguláris 1-halmaz. Ezzel az állítás első felét beláttuk.

Legyen $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} \gamma_i$, ahol γ_i-k rektifikálható görbék. Minden i-re és μ^1-m.m. $x \in H \cap \gamma_i$-re alkalmazhatjuk az előzőt, melyből adódik, hogy

$$1 = \overline{D^1}(\gamma, x) = \overline{D^1}(\gamma \cap H, x) \leq \overline{D^1}(H, x),$$

az utolsó egyenlőtlenség az $E \subseteq H$ Borel 1-halmazokra vonatkozó feltételből adódik. Ebből, persze az előzőhöz hasonló gondolat mutatja, hogy $D^1(H, x) = 1$ (m.m. $x \in H \cap \gamma_i$), ám ezen halmazok egy μ^1 szerint 0 mértékű halmazon kívül lefedik H-t, így $D^1(H, x) = 1$ (m.m. $x \in H$) is fennáll, azaz H reguláris.

Az állítás utolsó részének belátásához vegyünk egy H irreguláris és egy γ rektifikálható görbét és tekintsük az $E = H \cap \gamma$ halmazt, ez az előbbiek szerint és a fenti megjegyzés értelmében, mivel $E \subseteq \gamma$, reguláris, illetve ismét csak a megjegyzés értelmében, mivel $E \subseteq H$, irreguláris is egyszerre. Azaz $\mu^1(H \cap \gamma) = 0$.

■

Az állításban szereplő tulajdonságok a továbbiakban is fontosak lesznek, így célszerű őket külön is definiálni.

5.15. Definíció. *Azokat a halmazokat, amelyek lefedhetők megszámlálhatóan sok rektifikálható görbe uniójával **görbeszerűnek** nevezzük.*
*Azokat a halmazokat, amelyeknek minden rektifikálható görbével vett metszete μ^1 szerint nullmértékű **görbementesnek** hívjuk.*

5.16. Állítás.

1. *Egy halmaz pontosan akkor irreguláris $\mathbb{R}^2$-ben, ha görbementes.*
2. *Egy halmaz pontosan akkor reguláris $\mathbb{R}^2$-ben, ha egy görbeszerű és egy μ^1 szerint 0 mértékű uniója.*

Bizonyítás.

1. $(\Longrightarrow)$
   Előbb láttuk.

   $(\Longleftarrow)$
   Használjuk a következő állítást.

   5.17. Állítás. *Ha H görbementes 1-halmaz $\mathbb{R}^2$-ben. Akkor $\overline{D^1}(H,x) \leq \frac{3}{4}$ m.m. $x \in H$-ra.*

   Ennek egy bizonyítása olvasható [1]-ben.
   Ekkor egy görbementes 1-halmaznak szükségképpen irregulárisnak kell lennie.

2. $(\Longleftarrow)$
   A görbeszerű halmaz reguláris, ekkor a megjegyzés értelmében, ennek tetszőleges 1-részhalmaza is reguláris. Ehhez hozzávéve egy μ^1 szerint 0 mértékű halmazt, az nem befolyásolja egy pontbeli sűrűségét, így a vizsgált halmaz valóban reguláris.

   $(\Longrightarrow)$
   Ha H reguláris, akkor minden $E \subseteq H$ Borel részhalmaza is reguláris, ismét a korábbi megjegyzésre hivatkozva. Így az 1. rész alapján nem lehet görbementes.
   Így létezik γ rektifikálható görbe, mely metszi E-t egy pozitív mértékű halmazon.

   Ennek segítségével H-t kimerítéses módszerrel le tudjuk fedni.
   Legyen $\delta_1 = \sup\{\mu^1(H \cap \gamma) : \gamma \text{ rektifikálható}\}$. Ekkor $0 < \delta_1 < \infty$ teljesül,

mivel H nem görbementes és 1-halmaz. Tehát létezik olyan γ_1 görbe, amire igaz, hogy $\mu^1(H \cap \gamma_1) > \frac{\delta_1}{2}$.
Ezek után tegyük fel, hogy valamely k-ra már kiválasztottunk $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ görbéket, és tegyük fel, hogy a $H_k = H \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \gamma_i$ halmaz μ^1 szerint pozitív mértékű. Ekkor legyen $\delta_{k+1} = \sup\{\mu^1(H_k \cap \gamma) : \gamma \text{ rektifikálható}\}$ és legyen γ_{k+1} olyan, hogy $\mu^1(H \cap \gamma_{k+1}) > \frac{\delta_{k+1}}{2}$ teljesüljön. Mivel $H_k \subset H$ sem görbementes, ilyeneket tudunk választani.
Ha valamely, mondjuk a k. lépésben elakadunk, az azt jelenti, hogy
$H \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \gamma_i$ μ^1 szerint 0 mértékű, így H lefedhető $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ görbékkel és egy nullmértékű halmazzal.

Egyébként elegendő megmutatni, hogy $N = H \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \gamma_i$ halmaz metszete tetszőleges görbével nullmértékű, hiszen ekkor N reguláris és görbementes, így maga is nullmértékű.

$$\infty > \mu^1(H) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^1(H_k \cap \gamma_{k+1}),$$

hiszen $H_k \cap \gamma_{k+1}$ halmazok diszjunktak. Ebből következik, hogy
$\mu^1(H_k \cap \gamma_{k+1}) \to 0$, ha $k \to \infty$.
Tegyük fel, hogy létezik olyan γ, melyre $\mu^1(N \cap \gamma) = d$ valamely pozitív d-re. Ugyanakkor az előbbiek szerint létezik olyan k, hogy $\mu^1(H_k \cap \gamma_{k+1}) < \frac{d}{2}$. Ez azonban ellentmond γ_{k+1} választásának.
Tehát valóban N nullmértékű és így Helőáll, mint egy görbeszerű és nullmértékű halmaz uniója.

∎

5.2. Pozitív eredmények

Az eddigi általános tételekkel ellentétben a fejezet hátralévő állításainak nagy részében az 5.3. Állítás bizonyításával fogunk foglalkozni.
(Emlékeztetőül az f függvények grafikonját Γ_f-fel jelöljük.)

5.18. Állítás. *Ha egy, az $[a, b]$ intervallumon mérhető f függvény grafikonja reguláris, akkor megadható megszámlálhatóan sok f_n Lipschitz függvény úgy, hogy azon $x \in [a, b]$ pontok, melyekre $(x, f(x)) \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_{f_n}$ λ szerint nullmértékű halmazt alkotnak.*

Bizonyítás. Az előző állítás 2. része szerint f grafikonja lefedhető megszámlálhatóan sok rektifikálható görbe és egy μ_1 szerint nullmértékű halmaz uniójával.

Tetszőleges paraméterezés mellett mindegyik γ görbe két koordinátája $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ korlátos változású függvénye t-nek. Ám egy korlátos változású függvény, minthogy két monoton függvény különbségeként áll elő, maga is egy, a paraméter intervallum Lebesgue-mértéke szerint nullmértékű halmaztól eltekintve differenciálható ([7]). Tehát, ha egy γ görbe ívhossz szerinti paraméterezését tekintjük, megállapíthatjuk, hogy μ^1-m.m. pontjában létezik (egységnyi abszolútértékű) deriváltvektora.
Ekkor a 5.12. Állítást felhasználva adódik, hogy λ-m.m. $x \in [a, b]$-ra igaz, hogy ha $(x, f(x)) \in \gamma_i$, akkor γ_i-nek létezik a nem függőleges deriváltvektora az $(x, f(x))$-ben, hiszen a függőleges deriváltvektorral rendelkező pontok halmaza is λ szerint 0 mértékű.

Tekintsük a

$$T_{n,k} = \{\gamma(t) : 0 < |u - t| < \frac{1}{k} \text{ esetén } \frac{\gamma_2(u) - \gamma_2(t)}{\gamma_1(u) - \gamma_1(t)} \leq n\}$$

halmazokat, ahol γ egy, a Γ_f fedésében szereplő rektifikálható görbe. Az előbbiekből világos, hogy azon $x \in [a, b]$ pontok halmaza, melyhez tartozó $(x, f(x))$ pontot nem fedik le a $T_{n,k}$ halmazok, λ szerint nullmértékű halmaz.
Azon x pontok halmaza, amelyekhez tartozó $(x, f(x))$-t egy adott $T_{n,k}$ fed le, zárt halmazt alkotnak, hiszen γ és Γ_f zárt. A $T_{n,k}$ a definíciójában tett feltételekből adódóan zárt halmaz , így $T_{n,k} \cap \Gamma_f$ zárt, melynek vetülete az x tengelyre is zárt.

Összeségében tehát kapjuk az $[a, b]$ intervallum felbontását megszámlálhatóan sok zárt halmaz és egy λ szerint nullmértékű halmaz uniójára úgy, hogy az egyes zárt halmazokon a f Lipschitz a megfelelő n Lipschitz-konstanssal. Ezzel az állítást beláttuk, hiszen tudjuk, hogy tetszőleges $H \subset [a, b]$ halmazon adott Lipschitz függvény kiterjeszthető $[a, b]$-re azonos Lipschitz konstansú Lipschitz függvénnyé. ∎

Jelöljük a H halmaznak az origón átmenő, a valós tengellyel θ szöget bezáró egyenesre vett projekcióját $\pi_\theta(H)$ $(\theta \in (-\pi, \pi])$. Így $\pi_x = \pi_0$.
Valamint a $\pi_{\theta,0}(H)$-val jelölt halmaz álljon azon pontokból a számegyenesen, melyekből indított, a valós tengellyel $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ szöget bezáró egyenesek metszik a H halmazt. Könnyen láthatjuk, hogy ekkor tetszőleges θ esetén a $\pi_0(\pi_\theta(H)) = \pi_{\theta,0}(H)$ egyenlőség áll fenn.

5.19. Lemma. *Legyen f gráfja reguláris. Ekkor minden $\epsilon > 0$ és λ-m.m. $x \in [a,b]$-re létezik olyan $h_0 > 0$, hogy minden pozitív $h < h_0$ esetén létezik olyan $\theta_0 > 0$ szög, melyre minden $\theta < \theta_0$ esetén teljesül, hogy*

$$\lambda(\pi_{\theta,0}(\Gamma_f) \setminus [x-h, x+h]) \leq 2h \cdot \epsilon.$$

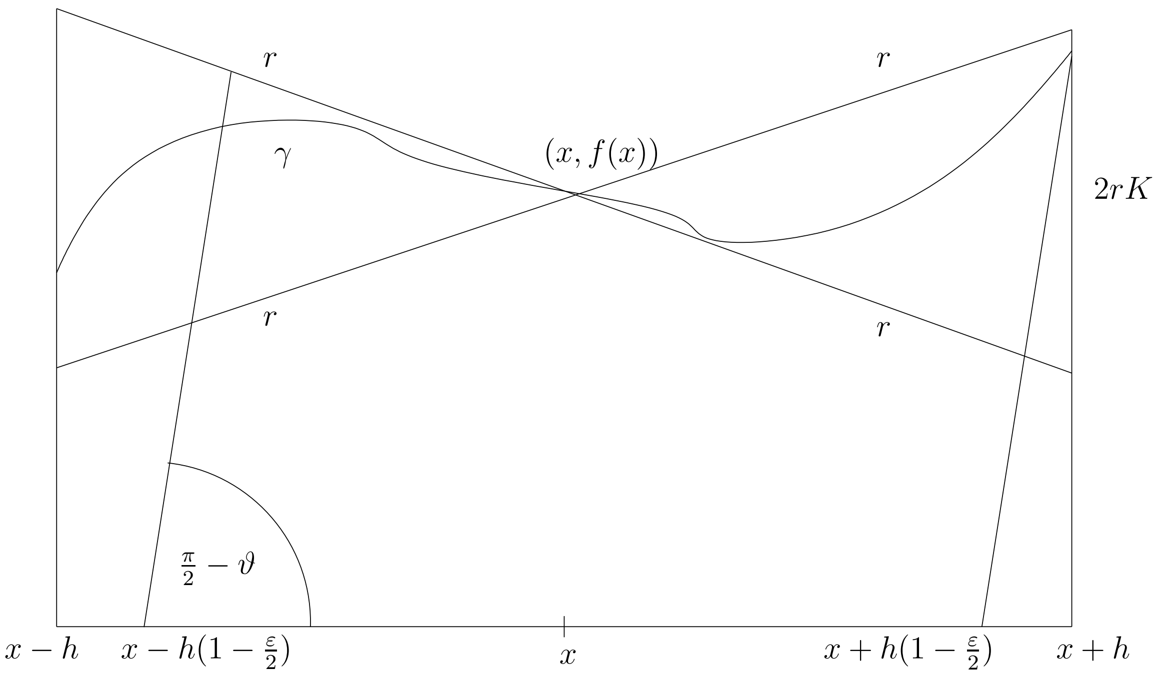
Bizonyítás. Először is megmutatjuk, hogy λ-m.m. $x \in [a,b]$-re létezik egy olyan γ Lipschitz függvénygrafikon, hogy a $\gamma \setminus \Gamma_f$-nek a megfelelő $(x, f(x))$ pontban a felső sűrűsége 0.
Ez teljesen világos, hiszen tekintve a Γ_f-nek az előbbi 5.18. Állításban szereplő lefedését, λ-m.m. x ponthoz létezik olyan Lipschitz függvény, melynek görbéje lefedi az $(x, f(x))$ pontot sőt, azt is feltehetjük, hogy μ_1 szerint pozitív mértékű halmazt metsz ki Γ_f-ből, hiszen az ezt nem teljesítő γ függvénygörbéket ki is hagyjuk a lefedésből.
Ebből a 5.12. Állítás felhasználásával adódik, hogy λ-m.m. pontra az $[a,b]$ intervallumban elmondható, hogy a megfelelő $(x, f(x))$ pontra igaz az előző megállapítás. Ugyanakkor, adott x ponthoz tartozó $(x, f(x))$-et fedő γ Lipschitz függvény grafikonra, tekintsük a $H = \gamma \cap \Gamma_f$ halmazt. Ekkor a feltételek szerint $\mu^1(H) = \mu_1(\gamma \cap \Gamma_f) > 0$, tehát H 1-halmaz és mivel a γ görbének 1-részhalmaza, a H maga is reguláris, azaz

$$\underline{D}^s(\gamma \cap \Gamma_f, (x, f(x))) = \overline{D}^s(\gamma \cap \Gamma_f, (x, f(x))) = 1,$$

melyből következik, hogy

$$\overline{D}^s(\gamma \setminus \Gamma_f, (x, f(x))) = \underline{D}^s(\gamma \setminus \Gamma_f, (x, f(x))) = 0$$

m.m. x-re.
Ez tulajdonképpen azt jelenti, hogy az adott pont körül a függvény gráfja lényegében a γ-val egyezik meg.



11. ábra. Az ábrán az $(x, f(x))$ pontot fedő Lipschitz függvény γ-val jelölt gráfja látható az $[x-h, x+h]$ intervallumon, illetve kiegészítő egyenesek, melyek a bizonyítás alapgondolatát adják.

Fixáljunk egy x-et a fenti nullmértékű halmazon kívül, és jelöljük a továbbiakban I_h-val a $[x-h, x+h]$ intervallumot.

Ekkor minden $\epsilon > 0$-hoz létezik olyan $h_0 > 0$, hogy minden pozitív $h < h_0$ esetén

$$\mu^1(\gamma|_{I_h} \setminus \Gamma_f) < h \cdot \epsilon. \tag{2}$$

Valóban, hiszen $\overline{D}^s(\gamma \setminus \Gamma_f, (x, f(x))) = 0$, ezért minden $\epsilon' > 0$-hoz létezik $r_0 > 0$, hogy minden $r < r_0$ esetén

$$\mu^1((\gamma \setminus \Gamma_f) \cap B_r((x, f(x))) < r \cdot \epsilon'.$$

Ám, ahogy a 11. ábrán is látható, a γ Lipschitz tulajdonsága miatt $h = r(\sqrt{1 - \frac{1}{K^2}}) = r \cdot K'$, valamely K és K' konstans esetén, az $I_h \subset \pi_0((\gamma \setminus \Gamma_f) \cap B_r((x, f(x)))$ és

$$\mu^1(\gamma|_{I_h} \setminus \Gamma_f) < \epsilon' \cdot K' \cdot 2h = h \cdot \epsilon,$$

$\epsilon' = \epsilon \cdot 2K$-nak választással.

A γ folytonosságának következménye, hogy θ szöget folytonosan változtatva a $\pi_{\theta,0}$ vetületintervallum végpontjai is folytonosan változnak. Így a 11. ábra tanúsága szerint, tetszőleges ϵ-hoz az imént választott $h < h_0$ esetén, létezik olyan kicsi θ_0, hogy a függőlegessel $\theta < \theta_0$ szöget bezáró, a $\gamma|I_h$ pontjain keresztül menő egyenesek metszete a valós egyenessel tartalmazza az $I_{h(1-\frac{\epsilon}{2})}$ intervallumot. Másszóval

$$I_{h(1-\frac{\epsilon}{2})} \subset \pi_{\theta,0}(\gamma|I_h) \Rightarrow \lambda(\pi_{\theta,0}(\gamma|I_h)) > 2h \cdot (1 - \frac{\epsilon}{2}). \tag{3}$$

Ugyanakkor (2)-ből az 5.12. Állítás felhasználásával kapjuk a

$$\lambda(\pi_{\theta,0}(\gamma|_{I_h} \setminus \Gamma_f) < h \cdot \epsilon \tag{4}$$

egyenlőtlenséget.

Harmadrészt tetszőleges A és B mérhető halmazokra és π vetítésre $\pi(A \cup B) \subseteq \pi(A) \cup \pi(B)$ teljesül. Így, mivel $\pi_{\theta,0}$ is vetítés, a λ monotonitásából adódik a

$$\lambda(\pi_{\theta,0}(\gamma|_{I_h}) \leq \lambda(\pi_{\theta,0}(\gamma|_{I_h} \setminus \Gamma_f) + \lambda(\pi_{\theta,0}(\gamma|_{I_h} \cap \Gamma_f)$$

egyenlőtlenség. Melyből felhasználva (3)-et és (4)-et és átrendezve kapjuk a

$$2h \cdot (1 - \epsilon) \leq \lambda(\pi_{\theta,0}(\gamma|_{I_h} \cap \Gamma_f) \leq \lambda(\pi_{\theta,0}(\Gamma_f) \cap I_h)$$

egyenlőtlenséget, melyből közvetlen adódik a bizonyítandó állítás. ■

Az 5.3. Állítás bizonyítása. Alkalmazzuk az 5.19. Lemmát mindhárom függvény grafikonjára, ekkor tehát fix ϵ-hoz választható, egy olyan kicsiny közös h és ezekhez megfelelő kicsiny (közös) θ, hogy

$$\lambda(\pi_{\theta,0}(\Gamma_{f_i}) \setminus I_h) \leq 2h \cdot \epsilon$$

teljesül $i = \{1, 2, 3\}$ esetén. Ekkor a

$$\lambda(\bigcap_{i=1}^{3} \pi_{\theta,0}(\Gamma_{f_i})) \geq \lambda(I_h \cap \bigcap_{i=1}^{3} \pi_{\theta,0}(\Gamma_{f_i})) \geq$$

$$\geq \lambda(I_h) - \lambda(\bigcup_{i=1}^{3}(I_h \setminus \pi_{\theta,0}(\Gamma_{f_i}))) \geq 2h - 6h \cdot \epsilon > 0,$$

ha $\epsilon < \frac{1}{6}$.
Tehát a vetületek metszete nem üres, így létezik olyan $\frac{\pi}{2} - \theta$ irányú egyenes, melyen mindhárom görbének van metszete. ■

Bár a következő állítás a metsző egyenes létét nem zárja ki, mégis mutatja, hogy a irreguláris 1-halmazokra vonatkozó hasonló állítás bizonyítása egész más irányban történhet, ha egyáltalán lehetséges, mint a fenti reguláris esetre vonatkozó.

5.20. Állítás. *Legyen H egy irreguláris 1-halmaz $\mathbb{R}^2$-ben. Ekkor a $\pi_\theta(H)$ λ szerint nullmértékű majdnem minden $\theta \in [0, 2\pi)$ irányra.*

Ennek a bizonyítása megtalálható [2]-ben.

Befejezésül azt a meglepő eredményt szeretnénk tárgyalni, mely ezen fejezet kérdését összekapcsolja a 3. fejezet kérdésével. Bizonyos speciális esetekben mindkét problémára sikerrel válaszoltunk, ám teljes általánosságban még nyitottak maradtak a kérdések. Ez mutatja a jelentőségét az alábbi eljárásnak, melynek lényege, hogy bijektív kapcsolatot hoz létre egy halmaz pontjai és egy másik halmaz egyenesei között.

5.21. Állítás. *Ha 5.1. Kérdésre a válasz tagadó akkor abból következik, hogy a 3.6. Kérdésre a válasz igenlő.*

Bizonyítás. A fent említett módszert a szakirodalomban *Besicovich Dualitás*nak hívják.(Lásd:[1] vagy [2])
Az előbbieket pontosabban fogalmazva, legyen e egy egyenes a síkon, aminek a meredeksége nem 0, jelöljük ezt a meredekséget a továbbiakban $m(e)$-vel, illetve jelöljük $x(e)$-vel az e egyenesnek az x tengellyel vett metszetét. Ekkor

$$T(e) = \begin{cases} (x(e), \frac{1}{m(e)}), \text{ ha } m(e) \neq 0, \infty, \\ (x(e), 0), \text{ ha } m(e) = \infty \end{cases}$$

Az így definiált T bijekciót létesít a nem 0 meredekségű (nem vízszintes) egyenesek halmaza és pontok halmaza között a síkon.

Így egy egyenes pontosan akkor megy keresztül az $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ponton, ha $x(e) = -b(\frac{1}{m(e)}) + a$, ahol függőleges egyenes esetén $\frac{1}{m(e)}$-et 0-nak értelmezzük, azaz az e egyenest az $x = -by + a$ alakú egyenletet kielégítő (x, y) pontokba viszi. Ha tekintjük az összes nem vízszintes egyenest, ami keresztülmegy az (a, b) ponton, akkor ezek képei a T szerint olyan pontok lesznek, melyek egy egyenesen helyezkednek el, és az egyenes metszete az x tengellyel az $(a, 0)$ pont, a meredeksége $-\frac{1}{b}$. Így ezen az egyenesen véve egy szakaszt, a szakasz pontjainak megfelelő egyenesek egy a közös pontból indított adott nyílásszögű szögtartományt fednek le.

Vegyünk egy tetszőleges f Borel mérhető függvényt, és jelölje $A(f) = \{e : e \cap f \neq \emptyset\}$ és $A^\star(f) = \{T(e) : e \in A(f)\} \cap \overline{\mathbb{H}}$. Az előbbiek szerint $A^\star$ olyan félegyenesek

uniójából áll, mely unió nem tartalmaz vízszintes egyeneseket. Továbbá, az a érték az f értelmezési tartományának pontosan akkor eleme, ha létezik olyan (függőleges) félegyenes $A(f)$-ben, aminek a képe az $(a, 0)$ pont.
Ezek után tegyük fel, hogy f_1, f_2 és f_3 olyan mérhető függvények, melyek egy adott I intervallumon értelmezve vannak és, amelyekre nem létezik olyan nem függőleges egyenes, hogy mindhárom függvény grafikonjának esik az egyenesre pontja. Ekkor világos, hogy ezek grafikonjának van metszete az I intervallum tetszőleges pontjából indított függőleges egyenessel, és a 3 grafikon közül minden nem függőleges egyenessel legfeljebb 2-nek van metszete.

Ekkor az $A^\star(f_1), A^\star(f_2)$ és $A^\star(f_3)$ rendelkezik a 3-szakasz tulajdonsággal egy I halmazra nézve, hiszen a feltételekből világos, hogy I minden pontja elérhető szakasszal mindegyik halmazból, hiszen, mint megjegyeztük, egy adott ponton átmenő nem vízszintes egyenesek képei egy egyenesen helyezkednek el. Az is következik a feltételekből, hogy a három halmaznak nincs közös metszete a $\mathbb{H}$ nyílt felső félsíkon. Világos, hogy az $A^\star(f_i)$ halmazok Borelek.

Tehát éppen a 3.6. Kérdésre kapunk igenlő választ.

∎

Hivatkozások

[1] K.J.Falconer, *Fractal Geometry*, John Wiley & Sons Ltd., Baffins Lane, Chichester, 1990.

[2] K.J.Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[3] C.Freiling, P.D.Humke, M.Laczkovich, *One Old Problem, One New, And Their Equivalence*, Tatra Mt. Math. Publ. 24(2002), 169-174.

[4] Laczkovich M., *Valós függvénytan*, ELTE, Budapest, 1995.

[5] Michaleczky Gy., *Rendszerelmélet*, http://www.cs.elte.hu/probability/michaletzky/

[6] Petruska Gy., *Analízis II.*, ELTE egyetemi jegyzet, Budapest, 1999.

[7] Szőkefalvi-Nagy B., *Valós függvények és függvénysorok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.

[8] Szűcs A., *Topológia jegyzet*, http://www.cs.elte.hu/ szucs/Top1-2.pdf