Csődvalószínűségek becslései

Diplomamunka

Írta: Mezei József

Matematikus szak

Témavezető:

Arató Miklós, egyetemi docens
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2008

Tartalomjegyzék

Előszó

A dolgozat a biztosítási csődvalószínűség számításának témakörével foglalkozik, különös tekintettel az egyéni modellre. A csődvalószínűségek számítása, a kockázati folyamatok elmélete tradicionális része a biztosítási matematikának, a kutatások egyik nagyon aktív területe napjainkig. Először Lundberg foglakozott kiemelten ezzel a területtel. Gyakorlati szempontból is fontos területről van szó, különösen most, a Solvency II bevezetése kapcsán, hiszen ennek célja, hogy a biztosítók szavatolótőkéje az eddiginél érzékenyebben fedje le a valós kockázatokat, és ezért minél pontosabb becslésekre van szükség a csőd bekövetkezését illetően. Számos különböző megközelítési mód létezik a probléma kezelésére, amelyek egy részét ismertetni fogom. A módszerek különbözősége abból adódik, hogy minden kárfolyamatnak megvannak a sajátosságai, amit nehéz lenne közös modellben tökéletesen kezelni.

Az első fejezet bemutatja a két legelterjedtebb lehetséges megközelítést, illetve röviden összefoglalja a csődvalószínűséggel kapcsolatos ismert eredményeket a számunkra nem olyan fontos esetben, valamint felsorolom a biztosításmatematikában leggyakrabban használt valószínűségi eloszlásokat, amelyek közül többet használni is fogunk a jegyzetben. A második részben olyan ismert matematikai modelleket tárgyalunk, melyek segítségével többé-kevésbé jól modellezhető egy biztosító kárfolyamata, egy biztosítóintézet működése során felmerülő pénzügyi kockázat. A harmadik rész pedig röviden ismerteti a biztosítási tartalékkal kapcsolatos fogalmakat, a tartalékolás jelentőségét, majd egy tartalékolással kapcsolatos, eddig nem vizsgált problémát fogalmaz meg, amelyet a korábban ismertetett módszerekkel próbálunk meg kezelni.

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Kockázati modellek

A klasszikus kockázati modellekben a pénzforgalomnak 3 elemét különböztetjük meg, amik a fő szerepet játsszák: a kárkifizetés, a biztosítóhoz befolyt díj és a biztosító kezdeti tőkéje. A jövőben bekövetkező károk időpontja és nagysága előre nem határozható meg pontosan, ezért alkalmazunk sztochasztikus elemeket tartalmazó modelleket. Fontos még megjegyezni, hogy a gyakorlatban mind a kár tényleges nagysága, valamint a bejelentett kár értéke is fontos, ez utóbbit nevezzük kárigénynek.

Mostantól az egymás után bekövetkező károkat, illetve modelltől függően adott évben bekövetkező, egy adott biztosítotthoz kapcsolódó károk összegét jelölje X_1, X_2, ... X_i, eloszlásfüggvényük legyen F_i. A modellekben általában feltesszük, hogy az X_i valószínűségi változók egymástól függetlenek és azonos eloszlásúak. Ezek a feltételek persze általában nem teljesülnek a gyakorlatban, ezért megpróbáljuk másként is megközelíteni a feladatot. Két fő modelltípust különböztetünk meg, az egyéni és az összetett kockázati modellt.

1.2. Egyéni kockázati modell

Az ún. egyedi kockázati modellekben minden egyes egyed, kötvény, vagy minden egyes év esetén csak egyetlen kárnagyságot vizsgálunk, amely így több kárból származó összeget jelent. Ha n darabot vizsgálunk egyszerre, akkor az összkár, a teljes veszteség:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Ha tehát az X_i-k függetlenek, akkor az összeg eloszlását, vagyis a konvolúciót kell ismernünk. Ezt általában elég bonyolultan lehet kiszámolni, de speciális esetekben lehet alkalmazni például a De Pril-rekurziót. Azt persze tudjuk, hogy véges várható érték esetén a várható értékek összeadódnak, ha a szórás is véges, akkor korrelálatlanság esetén a szórásnégyzet is additív, illetve függetlenség esetén a karakterisztikus-függvények, Laplace-transzformáltak szorzódnak.

1.3. Összetett kockázati modell

Az összetett kockázati modellekben minden egyes egyénhez, szerződéshez több káresemény tartozhat, ezek száma, N, maga is valószínűségi változó. Azt feltesszük, hogy az egyes károkkal kapcsolatos kifizetések azonos eloszlásúak. Illetve, hogy N eloszlása független az X_i sorozattól. Ha X_i-k azonos eloszlásúak, véges várható értékkel, és N várható értéke is véges, akkor az $S_n = \sum_{i=1}^{N} X_i$ összeg várható értéke:

$$E(S) = E(N)E(Z_1).$$

Ha még a szórásnégyzetek is végesek, és a sorozat elemei egymástól függetlenek, akkor

$$D^2(S) = E(N)D^2(Z) + D^2(N)E(Z)$$

S karakterisztikus függvényét, Laplace transzformáltját úgy kaphatjuk meg, ha N generátorfüggvényébe beleírjuk a káreloszlások közös karakterisztikus függvényét, ill. Laplace-transzformáltját. S eloszlását pedig a következő formulával kapjuk:

$$Q_S = \sum_{k=0}^{\infty} P(N = k) Q_Z^{(*k)}.$$

1.3.1. Modell

Modelljeinkben a kárszámot megadó N változó az idő függvénye, azaz sztochasztikus folyamat. Jelölje ezt N_t, ez másképpen a kárszámfolyamat. Ekkor az összkár is az idő függvénye,

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Z_i.$$

A Z_i valószínűségi változók várható értéke μ. Ez az ún. kárfolyamat, ami egy összetett Poisson-folyamat. A kockázati tartalék leírásának eleme a díjbevételt megadó P_t folyamat és a kezdeti tőke értéke. Azaz

$$U_t = u + P_t - S_t,$$

ahol u a kezdeti tőke értéke, P_t a díjbevétel értéke, S_t a kárfolyamat, U_t a rizikófolyamat.

Klasszikus rizikófolyamatról beszélünk, ha $P_t = ct$, c állandó, N_t λ paraméterű Poisson-folyamat, azaz az $N_t - N_s$ növekmények Poisson-eloszlásúak, a folyamat független növekményű, és

$$P(N_t - N_s = k) = \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}.$$

A szokásos módon jelöljük a csődvalószínűséget :

$$\psi(u) = P(\exists t \geq 0 : U_t < 0), \phi(u) = P(\forall t \geq 0 : U_t \geq 0).$$

Könnyen látható, hogy c és $\lambda\mu$ viszonyától alapvetően függ a tönkremenés valószínűsége. Ugyanis a nagy számok törvénye alapján $\lim_{t\to\infty} \frac{ct-S_t}{t} = c - \lambda\mu$ 1 valószínűséggel. Ezért $c < \lambda\mu$ esetén U_t 1 valószínűséggel előbb vagy utóbb negatív lesz, így bármely u kezdőtőke mellett $\psi(u) = 1$. Ha $c = \lambda\mu$, akkor a határérték 0. Ekkor $ct - S_t$ fluktuációja igen nagy, tetszőleges nagy pozitív, ill. negatív értékeket is túlnő 1 valószínűséggel. Tehát megint csak $\psi(u) = 1$.

1.3.2. A csődvalószínűség aszimptotikus viselkedése

$\psi(u)$-nak létezik egy integrálelőállítása, mégpedig a következő:

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty (1 - F(z))dz + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-z)(1-F(z))dz.$$

Mivel $\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty (1-F(z))dz = \frac{\lambda}{c}\mu$ értéke nem feltétlenül 1, ezért ez nem tiszta felújítási egyenlet. Bizonyos feltételek mellett azonban átalakítható felújítási egyenletté.

Legyen $h(r) = \int_0^\infty e^{rz} dF(z) - 1$,azaz $h(r)$ a Z_i változók közös momentumgeneráló függvényének 1-gyel csökkentett értéke. $F(z)$ nemnegatív valószínűségi változók közös eloszlásfüggvénye, ezért $r \leq 0$ esetén $h(r)$ biztosan véges, $h(0) = 0$. Ugyanakkor vegyük észre, hogy $h(r)$ szigorúan konvex függvény, ezért a $h(r) = \frac{cr}{\lambda}$ egyenletnek legfeljebb egy pozitív gyöke lehet.

1.3.1. Tétel (Cramer-Lundberg-approximáció). *Tegyük fel, hogy*

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{h(r)}{r}$$

egyenletnek létezik pozitív megoldása. Jelölje ezt R. Tegyük fel, hogy $h(r)$ véges R valamely pozitív sugarú környezetében. Ekkor

$$\lim_{u \to \infty} e^{Ru} \psi(u) = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda h'(R) - c}.$$

Így tehát e^{Ru} adja meg a pontos konvergenciasebességet a $\psi(u) \to 0$ összefüggésben. R-et szokás Lundberg-kitevőnek, vagy illeszkedési együtthatónak nevezni.

1.3.3. Kiemelkedő egyedi károk esete

Ez az eset nem kezelhető úgy, mint az előző, mert ekkor nem alkalmazható a felújítási egyenletek elmélete. Mi történik akkor, ha a kiemelkedő kár valószínűsége nagyobb, mint például az exponenciális eloszlás esetén? A teljes kárnagyság értékét lényegében az egy-két nagy kár értéke határozza meg. Ekkor a szubexponenciális eloszlások segítségével adhatunk becslést a csődvalószínűségre. G eloszlásfüggvény szubexponenciális, ha $G(0) = 0, G(z) < 1$, és tetszőleges $n \geq 2$ esetén

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1 - G^{n*}(z)}{1 - G(z)} = n.$$

Legyen F a független kárnagyságok közös eloszlásfüggvénye, továbbá

$$F_0(z) = \frac{1}{\mu} \int_0^z (1 - F(t)) dt,$$

valamint $\lambda\mu < c$ teljesül. Ekkor az F_0 eloszlásfüggvény akkor és csak akkor szubexponenciális, ha

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\psi(u)}{1 - F_0(u)} = \frac{\lambda\mu}{c - \lambda\mu}.$$

1.3.4. A Lundberg kitevő

A gyakorlatban többnyire nem ismerjük sem az N_t Poisson-folyamat paraméterét, sem a kárigények nagyságát leíró Z_i valószínűségi változó eloszlását. Így az R Lundberg-kitevő értékét sem tudjuk pontosan meghatározni. Vezessük be a $g(r) = h(r) - \frac{cr}{\lambda}$ jelölést, ahol $h(r) = E(e^{rZ_1}) - 1$. Mivel tudjuk, hogy R a $g(r) = 0$ egyenlet egyetlen pozitív gyöke, ezért a $g(r)$ függvényt becsüljük először, és ennek gyökét keressük meg. Ahhoz, hogy az így kapott gyök konvergáljon $g(r)$ gyökéhez, nem elég azt tudni, hogy a becslő függvénysorozat minden pontban konvergál a g függvényhez, kell, hogy g deriváltja a gyökhelyen pozitív legyen. Legyen

$$G_T(r) = \frac{1}{N_T}\sum_{k=1}^{N_T} e^{rZ_k} - 1 - cr(\frac{N_T}{T})^{-1}.$$

Feltesszük, hogy a Z_i valószínűségi változók 1-nél kisebb valószínűséggel vehetik csak fel a 0 értéket, és $c > \lambda\mu$. Ekkor ha $h(r)$ véges R egy pozitív sugarú környezetében, akkor a $G_T(r) = 0$ egyenletnek 1-hez tartó valószínűséggel egyetlen pozitív gyöke létezik. Jelölje ezt R_T. Ekkor $R_T \to R$ 1 valószínűséggel. Ha $h(2R)$ véges, akkor $\sqrt{T}(R_T - R) \to \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ eloszlásban, ahol

$$\sigma^2 = \frac{g(2R)}{\lambda(g'(R))^2}.$$

Ennek segítségével ha $\psi(u)$-t akarjuk becsülni, akkor bevezetve a

$$\psi_T(u) = \frac{cT - S_T}{N_T G'_T(R_T)} e^{-R_T u}$$

jelölést, a Cramér-Lundberg approximáció alapján

$$\psi_T(u) \to \psi(u)$$

1 valószínűséggel.

1.3.5. A csőd súlyossága

Az is fontos kérdés, hogy mekkora lesz a rizikófolyamat kérdése, amikor átugrik pozitívból negatívba. Legyen $T_u = \inf(t : U_t < 0)$. Ez tehát a csőd időpontja.

Legyen

$$\psi(u,y) = P(T_u < \infty; U_{T_u} > -y),$$

annak valószínűsége, hogy a tönkremenés pillanatában a hiány értéke nem nagyobb, mint y. Gerber és Goovaerts igazolták, hogy $\psi(u,y)$ kielégíti az alábbi integrálegyenletet:

$$\psi(u,y) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-z,y)(1-F(z))dz + \frac{\lambda}{c}\int_u^{u+y}(1-F(z))dz.$$

Tegyük fel, hogy $c > \lambda\mu$. Legyen R a $\frac{h(r)}{r} = \frac{\lambda}{c}$ egyenlet pozitív gyöke. Ha $h(r)$ véges R egy pozitív környezetében, akkor

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\psi(u,y) = \frac{\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{Ru}\int_u^{u+y}(1-F(z))dzdu}{\frac{\lambda}{cR}[h'(R)-\frac{c}{\lambda}]}.$$

1.4. Kárnagyság eloszlások

Ebben a fejezetben felsoroljuk a károk nagyságának modellezésénél előforduló legnépszerűbb eloszláscsaládokat. Két fő csoportot szokás megkülönböztetni, az ún. vékony- és vastag-farkú eloszlásokat. Az első azt jelenti, hogy a túlélésfüggvényre, ami $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$, teljesül, hogy $\overline{F}(x) = O(e^{-sx})$ valamilyen $s > 0$ esetén. Ezzel ekvivalens, hogy a momentum-generáló függvény véges valamilyen $s > 0$-ra. A vastag-farkú eloszlásoknak pedig általában azokat nevezik, melyekre a momentum-generáló függvény végtelen $\forall s > 0$ esetén, de másfajta megszorítások is előfordulhatnak: szubexponenciális, reguláris változású. Ma az aktuárius gyakorlatban azokat tekintik vastag-farkú eloszlásoknak, amelyeknél a károk 20 százaléka felelős az összkárnagyság 80 százalékáért. Azaz

$$\frac{1}{\mu_{\mathrm{F}}}\int_{b_{0.2}}^\infty xF(dx) \geq 0.8,$$

ahol $\overline{F}(b_{0.2}) = 0.2$ és μ_{F} F várható értéke.

1.4.1. Vékony-farkú eloszlások

1. Exponenciális eloszlás: a sűrűségfüggvény $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. A gyakorlatban ezt használják a legtöbbször, azért is, mert egyszerű számolni vele. Fontos megemlíteni az örökifjú tulajdonságot, ami karakterizálja az exponenciális

eloszlást:

$$P(X < t + s \mid X \geq s) = P(X < s).$$

Az exponenciális eloszlás momentumai: $E(X^k) = \frac{k!}{\lambda^k}$

2. Gamma-eloszlás: $\Gamma(\alpha, \lambda)$ eloszlás sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}$, ha $x > 0$. Speciális esete az ún. Erlang-eloszlás, ha α pozitív egész, ekkor speciálisan p darab független λ paraméterű exponenciális összege. A Gamma-eloszlás momentumai: $E(X^k) = \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)\lambda^k}$, speciálisan $E(X) = \frac{p}{\lambda}, D^2(X) = \frac{\sqrt{p}}{\lambda}$.

3. Hiperexponenciális eloszlás: véges sok exponenciális eloszlás keveréke, a sűrűségfüggvény $f(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \delta_i e^{-\delta_i x}$, ahol $\sum_1^p \alpha_i = 1, 0 \leq \alpha_i \leq 1, i = 1, ..., p$.

4. Korlátos tartójú eloszlások: ez a legtriviálisabb eset, amikor létezik $x_0 < \infty$, hogy $\overline{F}(x) = 0, x \geq x_0$, illetve $\overline{F}(x) > 0, x < x_0$ esetén. Ezek az eloszlások viszontbiztosításokkal kapcsolatos számolások esetén fontosak, hiszen például excess of loss vb esetén a biztosító számára fontos károk nagysága nem a tényleges kárnagyság, U, hanem $U \wedge x_0$.

1.4.2. Vastag-farkú eloszlások

1. Weibull eloszlás:

$$f(x) = \frac{k}{\lambda}(\frac{x}{\lambda})^{k-1} e^{-(\frac{x}{\lambda})^k}$$

2. Lognormális eloszlás: az X valószínűségi változó eloszlása lognormális, ha előáll e^V alakban, ahol Y normális eloszlású változó, $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, vagy ekvivalensen $e^{\sigma U + \mu}$ alakban, ahol $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Ennek megfelelően X sűrűségfüggvénye előáll a következő alakban:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{1}{2}(\frac{logx - \mu}{\sigma})^2)$$

A túlélésfüggvény pedig aszimptotikusan:

$$\overline{F}(x) \sim \frac{\sigma}{logx\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{1}{2}(\frac{logx - \mu}{\sigma})^2).$$

A lognormális eloszlás minden momentuma létezik, mégpedig

$$E(X^k) = E(e^{kY}) = e^{\mu k + \sigma^2 k^2/2}$$

Könnyen látható, hogy $a, b > 0$ esetén aX^b is lognormális eloszlású. Fontos még,hogy a centrális határeloszlás-tétel következményeként tetszőleges független, azonos eloszlású, pozitív értékeket felvevő valószínűségi változók szorzatának eloszlása, a megfelelő feltételek teljesülése esetén, lognormális eloszlással közelíthető.

3. Pareto eloszlás: Az X valószínűségi változó eloszlása α és λ paraméterekkel rendelkező Pareto eloszlás, ha eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(1+\lambda x)^{\alpha}}, \qquad x > 0.$$

Ebből a sűrűségfüggvény: $f(x) = \frac{\alpha\lambda}{(1+\lambda x)^{\alpha+1}}$, ha $x > 0$, egyébként 0. Pareto eloszláshoz jutunk, ha egy exponenciális eloszlás paraméterét Gamma-eloszlás szerint változtatjuk meg.

4. Loggamma-eloszlás: p, δ paraméterű loggamma-eloszlásnak nevezzük X-et, ha előáll e^V alakban, ahol V Gamma-eloszlású. A sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \frac{\delta^p (logx)^{p-1}}{x^{\delta+1}\Gamma(p)}$$

A p-edik momentum véges, ha $p < \delta$. Ha $p = 1$, akkor Pareto-eloszlást kapunk.

5. Eloszlások reguláris változású túlélésfüggvénnyel: a $\overline{F}(x)$ túlélésfüggvényt reguláris változásúnak nevezzük α exponenssel, ha

$$\overline{F}(x) \sim \frac{L(x)}{x^{\alpha}}, \qquad x \to \infty,$$

ahol L(x) lassú változású, azaz $\frac{L(tx)}{L(x)} \to 1, x \to \infty$. A korábbi eloszlások közül ilyen típusú például a Pareto- és a loggamma-eloszlás.

6. Szubexponenciális eloszlás: Legyen X valószínűségi változó F eloszlásfüggvénye olyan, melyre $G(0) = 0$ és $G(x) < 1$, $x > 0$ esetén. Ha tetszőleges $n \geq 2$ esetén teljesül, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - G^{(*n)}(x)}{1 - G(x)} = n,$$

akkor G szubexponenciális eloszlásfüggvény. Látható, hogy minden reguláris változású túlélésfüggvénnyel rendelkező eloszlás ide tartozik, de például szubexponenciális a lognormális eloszlás is, vagy a Weibull eloszlás $0 < r < 1$ esetén. Vagyis a szubexponenciális eloszlások vizsgálatával a vastag-farkú eloszlások nagy részéről kaphatunk információkat.

A csődvalószínűségek vizsgálatában megfigyelhető, hogy teljesen eltérő eredményeket kapunk attól függően, hogy a kárnagyság exponenciálisan korlátos vagy vastag farkú. Gyakorlati szempontból ez jelenti a terület egyik igazi problémáját. A probléma valójában az, hogy a kárnagyságeloszlások meghatározás statisztikai adatokon alapul, és így persze megkérdőjelezhető, mennyire tudjuk a farokeloszlást becsülni.

2. fejezet

Egyéni kockázati modellek

2.1. Lundberg eredménye

Tekintsük Y_n-t, $n = 1, ..$, ez valószínűségi változók sorozata. Legyen R_M az az esemény, hogy $Y_n > M$ valamilyen $n \geq 1$ esetén. Tehát Y_n tekinthető a bevétel és kiadás különbségének az n-dik kár bekövetkezése után, vagy ahogy később használjuk, az n-dik év, időszak végén. M pedig a biztosító kezdeti tőkéje. Minket a csőd valószínűsége érdekel nagy M esetén.

Lundberg eredménye a következő:

$$\lim_{M \to \infty} \frac{-logP(R_M)}{M} = w$$

akkor teljesül valamilyen $w > 0$ esetén, ha a következő feltételek teljesülnek:

(L1) $(Y_n)_{n=1,2,..}$ véletlen bolyongás, azaz $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, ahol (X_i) független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata.

(L2) X_1 momentumgeneráló függvényére $Eexp(uX_1) = exp(c(u))$.

(L3) $\exists!\ w > 0$, hogy $c(w) = 0$.

Vezessünk be egy jelölést: legyen a_n és b_n két számsorozat. Azt mondjuk, hogy $a_n \preceq b_n$ akkor és csak akkor, ha $\limsup_{M \to \infty} \frac{1}{M} loga_M \leq \liminf_{M \to \infty} \frac{1}{M} logb_M$. Ha $a_n \preceq b_n$ és $a_n \succeq b_n$, akkor $a_n \cong b_n$. Nyilvánvaló, hogy minden $z > 0$ esetén igaz, hogy:

$$P(Y_{[zM]}) \leq P(R_M) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(Y_n > M).$$

Elemien bizonyítható, hogy

$$exp(-wM) \preceq P(Y_{[zM]}) \preceq P(R_M) \preceq \sum_{n=1}^{\infty} P(Y_n > M) \preceq exp(-wM),$$

$z = \frac{1}{c'(w)}$ esetén. Ebből pedig egyszerűen következik Lundberg eredménye.

Ennek az egyenlőtlenségsorozatnak az általánosítás felírható nem független X_i-k esetére is. Feltéve Y_n momentumgeneráló függvényének létezését, a fenti 3 tulajdonságot helyettesíthetjük a következő kettővel:

(A1) $c(u) := \lim_{n\to\infty} log(Eexp(uY_n))/n$ létezik $0 < u < u_0$ esetén.

(A2) $\exists!\ 0 < w < u_0$, hogy $c(w) = 0$.

Ekkor a fenti egyenlőtlenségsorozat ebben az esetben is felírható, csak z-t kell lecserélni, mert ebben az esetben nem tudjuk feltétlenül, hogy c deriválható, ezért z meghatározásában a baloldali derivált szerepel.

Most vegyünk két sorozatot, $Y_1, Y_2, ...$ és $\widetilde{Y_1}, \widetilde{Y_2}, ...$ Azt vizsgáljuk meg, az X_i és $\widetilde{X_i}$ sorozatok egymáshoz való viszonya hogyan befolyásolja a Lundberg együtthatókat. Ha pedig azokat rendezni tudjuk, akkor meg tudjuk mondani, melyik esetben lesz nagyobb a csőd valószínűsége, legalábbis aszimptotikusam, abban az értelemben, hogy ha $w < \widetilde{w}$, akkor $\exists M_0$, hogy $M > M_0$ esetén $P(R_M) \leq P(\widetilde{R_M})$. M_0 nagyságáról nem tudunk semmit mondani.

Az X_1 és X_2 véges várható értékű valószínűségi változókról azt mondjuk, hogy X_2 dominálja X_1-t konvex rendezés szerint, jelölésben $X_1 \leq_{cx} X_2$, ha $E(f(X_1)) \leq E(f(X_2))$ minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex függvényre, amelyre a várható értékek léteznek. Ezt a definíciót felhasználva igaz a következő tétel:

2.1.1. Tétel (lásd 8). *Tegyük fel, hogy az $Y_1, Y_2, ...$ és $\widetilde{Y_1}, \widetilde{Y_2}, ...$ sorozatok teljesítik az (A1) és (A2) feltételeket. Ekkor, ha $Y_n \leq_{cx} \widetilde{Y_n}$, $\forall n$, akkor $w \geq \widetilde{w}$.*

Ezzel az eredménnyel arra a problémára jutunk, hogy a következőt elég lenne látnunk:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leq_{cx} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{X_i}.$$

Ha a két sorozat független, akkor elég, ha $X_1 \leq_{cx} \widetilde{X_1}$.

Most tegyük fel, hogy a két sorozat összefüggő komponensekből áll, de ugyanolyan struktúrájúak, azaz léteznek $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő függvények, hogy $\widetilde{X_n} = f_n(X_n)$. Ebben az esetben azt kell feltennünk a sorozatról, hogy feltételesen növekvő, hogy a fenti következtetést kapjuk.

Az $X_1, ..., X_n$ valószínűségi változók feltételesen növekvő sorozatot alkotnak, ha $E[\phi(X_i)|X_1 = x_1, ..., X_{i-1} = x_{i-1}]$ növekvő függvénye $x_1, ..., x_{i-1} - nek$, minden ϕ növekedő függvényre, amelyre a kifejezés értelmes. Egy véletlen vektor, $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ feltételesen növekedő, ha $\mathbf{X}_\pi := (X_{\pi(1)}, ..., X_{\pi(n)})$ feltételesen növekedő minden π permutációra.

2.1.2. Tétel (lásd 8). *Legyen $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ két véletlen vektor ugyanazzal a feltételesen növekvő összefüggőségi struktúrával, és tegyük fel, hogy $X_i \leq_{cx} Y_i, 1 \leq i \leq n$. Ekkor minden nemnegatív $\alpha_1, ..., \alpha_n$ esetén*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \leq_{cx} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i.$$

Speciálisan $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 1$ esetén a fenti tétel egyszerű következményeként kapjuk a következőt:

2.1.3. Tétel (lásd 8). *Ha:*

1. *$X_1, ..., X_n$ feltételesen növekedő minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.*
2. *$\widetilde{X_n} = f_n(X_n)$*
3. *$X_1 \leq_{cx} \widetilde{X_1}$, $n \in \mathbb{N}$*
4. *Az (A1) és (A2) feltételek teljesülnek mindkét sorozatra.*

Ekkor $w \geq \widetilde{w}$.

A feltételek teljesülésének ellenőrzéséhez szükségünk van egy egyszerű elégséges feltételre ahhoz, hogy f kielégítse a $X_n \leq_{cx} f(X_n)$ feltételt. Egy ilyen például az az eset, ha $E(X_n) = E(f(X_n))$, és létezik t_0 valós szám, hogy $f(x) \leq x$, ha $x < t_0$ és $f(x) \geq x$, ha $x > t_0$.

Egy másik fontos kérdés összehasonlítani két olyan sorozatot, ahol az összefüggés struktúrája nem egyezik meg, eltérően az előző esettől. Ehhez a szupermoduláris rendezés fogalmát használjuk.

Egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény differenciáloperátora: $\Delta_i^\varepsilon f(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})$, ahol $\mathbf{e}_i$ az i-edik egységvektor, $\varepsilon > 0$. Egy f függvényt szuupermodulárisnak nevezünk, ha $\Delta_i^\varepsilon \Delta_j^\delta f(\mathbf{x}) \geq 0$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ és $\varepsilon, \delta > 0$ esetén. Két véletlen vektor, $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ szupermodulárisan rendezettek, jelölésben $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y}$, ha $E(f(\mathbf{X})) \leq E(f(\mathbf{Y}))$ minden szupermoduláris f függvényre.

Megjegyzendő, hogy az $f(\mathbf{x}) = x_i x_j$ függvény nyilvánvalóan szupermoduláris, így egyből következik, hogy $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y}$ esetén $cov(X_i, X_j) \leq cov(Y_i, Y_j)$ minden $1 \leq i < j \leq n$ esetén.

2.1.4. Tétel (lásd 8). *Tegyük fel, hogy $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y}$, és legyen $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\widetilde{S} = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Ekkor $S \leq_{cx} \widetilde{S}$*

Ebből pedig nyilvánvalóan következik az alábbi tétel:

2.1.5. Tétel (lásd 8). *Ha:*

1. *$(X_1, ..., X_n) \leq_{sm} (\widetilde{X_1}, ..., \widetilde{X_n})$*

2. *(A1) és (A2) feltételek teljesülnek a két sorozatra.*

Ekkor $w \geq \widetilde{w}$.

Megemlítünk még egy egyszerű elégséges feltételt. Egy $\mathbf{X}$ véletlen vektor asszociált, ha $cov(f(\mathbf{X}), g(\mathbf{X})) \geq 0$ minden f, g növekedő függvény esetén. Ezt a definíciót használva igaz a következő:

2.1.6. Tétel (lásd 8). *Tegyük fel, hogy $(X_1, ..., X_n)$ asszociált minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, valamint $\widetilde{X_1}, ..., \widetilde{X_n}$ független valószínűségi változók sorozata ugyanazokkal a marginális eloszlásokkal. Ekkor $w \leq \widetilde{w}$.*

2.2. Negatív driftes véletlen bolyongás összefüggő vastag-farkú lépésekkel

A negatív driftes véletlen bolyongás modellje természetes módon merül fel több alkalmazási területen, így a biztosítási matematikában is. Például egy homogén összetételű biztosítási portfólió csődbemenési valószínűsége pontosan egy ilyen bolyongás szuprémumának meghatározásával írható le, de például a pénzügyi matematikában is előkerül, többek között az ARCH és GARCH egyenletek megoldásainak farokvalószínűségeinek meghatározásakor.

Terjedelmes irodalma van a csődvalószínűségek témájában az aszimptotikus viselkedés meghatározásának a vékony- és vastag farkú eloszlások esetén is. Az eredmények nagy része a szokásos esetet vizsgálja, vagyis a független, azonos eloszlású lépések esetét. Vastag farkú eloszlások esetén a legfontosabb eredmény Embrechts és Veraverbeke nevéhez köthető. Legyen X_n független, azonos eloszlású szubexponenciális valószínűségi változók sorozata, amik tehát generálnak egy véletlen bolyongást,

$$S_0 = 0, \qquad S_n = X_1 + ... + X_n, \qquad n \geq 1.$$

Jelölje F a közös eloszlásfüggvényt, és $-\mu < 0$ a közös várható érték. Ekkor

$$P(\sup_{n \geq 0} X_n > \lambda) \sim \frac{1}{\mu} \int_{\lambda}^{\infty} (1 - F(x))dx, \qquad \lambda \to \infty.$$

A legtöbb gyakorlati alkalmazásban persze a függetlenség feltételezése nem tükrözi a valós élet körülményeit, így a biztosítások esetében sem. De persze remélhető, hogy a függetlenség feltételezése esetén az eredmények nem térnek el nagyon az általánosabb esettől. Megmutatható, hogy bizonyos struktúrájú összefüggést feltételezve a fenti eredmény érvényben marad.

Tekintsük a következő modellt: X_n most legyen egy kétoldalú lineáris folyamat, azaz előáll a következő alakban:

$$X_n = -\mu + \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n-j} \varepsilon_j,$$

ahol ε_j 0 várható értékű független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, $\mu > 0$ állandó. A szokásos értelemben persze ez már nem véletlen bolyongás, mert a lépések nem függetlenek egymástól. ε-ról pedig feltesszük, hogy reguláris változású, azaz

$$P(\mid \varepsilon \mid > \lambda) = L(\lambda)\lambda^{-\alpha},$$

valamint a következőt:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{P(\varepsilon > \lambda)}{P(\mid \varepsilon \mid > \lambda)} = p, \qquad \lim_{\lambda \to \infty} \frac{P(\varepsilon \leq -\lambda)}{P(\mid \varepsilon \mid > \lambda)} = q,$$

ahol $\alpha > 1$, $0 < p \leq 1$, L pedig lassú változású függvény, azaz $\lim_{x \to \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$. A φ_j együtthatókról pedig, amelyek között van 0-tól különböző, pedig feltesszük, hogy kielégítik a következőt:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} | j\varphi_j |< \infty.$$

A fenti feltételek és $E\varepsilon = 0$ implikálják, hogy a fenti végtelen sor abszolút konvergens 1 valószínűséggel és hogy X várható értéke $-\mu$. Továbbá

$$\frac{P(X > \lambda)}{P(| \varepsilon |> \lambda)} \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} | \varphi_j |^{\alpha} (pI_{(\varphi_j>0)} + qI_{(\varphi_j<0)}) =:\| \varphi \|_{\alpha}^{\alpha}$$

Tehát mi a következő mennyiségre vagyunk kíváncsiak:

$$\psi(\lambda) = P(\sup_{n\geq 0} S_n > \lambda).$$

Független lépések esetén, ha a várható érték ugyanaz, és a farokviselkedésről is feltesszük a fentieket, akkor megmutatható, hogy

$$\psi(\lambda) \sim \frac{1}{\mu(\alpha-1)} \lambda P(X > \lambda) \sim \frac{\| \varphi \|_{\alpha}^{\alpha}}{\alpha - 1} \frac{1}{\mu} \lambda P(| \varepsilon |> \lambda), \qquad \lambda \to \infty.$$

Látni fogjuk, hogy ez az eredmény nem marad érvényben általános esetben, összefüggő lépések esetén.

Vezessük be a következő két mennyiséget:

$$m_{\varphi}^{+} = \sup_{-\infty<n<\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k,$$

$$m_{\varphi}^{-} = \sup_{-\infty<n<\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-\varphi_k).$$

Valamint a szokásos jelölést használva $x^+ = max(0, x), x^- = -min(0, x)$. Az eddig bevezetett jelölésekkel és feltételekkel a következő tétel igaz:

2.2.1. Tétel (lásd 9). *Legyen $X_n, \varepsilon_n, \varphi_n$ olyan, amelyek kielégítik a fent említett feltételeket. Ekkor igaz a következő:*

$$\psi(\lambda) \sim \frac{[p(m_{\varphi}^{+})^{\alpha} + q(m_{\varphi}^{-})^{\alpha}]}{\alpha - 1} \frac{1}{\mu} \lambda P(| \varepsilon |> \lambda) \sim \frac{[p(m_{\varphi}^{+})^{\alpha} + q(m_{\varphi}^{-})^{\alpha}]}{P(| \varepsilon |> \lambda)} \frac{1}{\mu(\alpha-1)} \lambda P(X > \lambda)$$

A képlet jobb oldala tehát $\lambda P(X > \lambda)$, ha az első tényezője eltűnik. Abban az esetben, ha a valószínűségi változóink függetlenek, ez a tényező pontosan 1, vagyis ekkor visszakapjuk az erre az esetre korábban említett eredményt. Ez az első tényező igazából a hosszútávú viselkedés intenzitását próbálja megmagyarázni a véletlen bolyongásban. Minél nagyobb ugyanis az m_φ^+ értéke, annál nagyobb lehet a befolyása a zaj pozitív értékének a bolyongás helyzetére, illetve minél nagyobb m_φ^-, annál inkább nagyobb hatása lehet a zaj negatív értékeinek a bolyongás helyzetére.

Fontos megjegyezni, hogy a $p = 1, m_\varphi^+ = 0$ esetben $\psi(\lambda)$ végtelenben való viselkedése kisebb rendű, mint a független esetben. Ez például akkor fordulhat elő, ha $\varphi_0 = 1, \varphi_{-1} = -1, \varphi_j = 0$ egyébként. Ez azzal magyarázható, hogy a zaj nagyon kicsi negatív értékeinek van lehetőségük befolyásolni a bolyongást, mielőtt a hatásuk elmúlna a következő lépésben, míg $p = 1$ esetén a zaj nem vesz fel ilyen értékeket.

Másrészt az egyoldalú lineáris folyamat esetében, azaz amikor $\varphi_j = 0$, ha $j < 0$, valamint $\varphi_0 > 0$, azt kapjuk, hogy

$$m_\varphi^+ \geq \varphi_0 > 0.$$

Ebből következik, hogy $\psi(\lambda)$ rendjének nagysága nem lehet kisebb, mint a független esetben.

A fenti tétel állítása akkor is érvényben marad, ha az X_n sorozatot, vagyis az S_n véletlen bolyongás lépéseit, kicseréljük $X_n + Y_n$ valószínűségi változók sorozatával, ahol Y_n független, azonos eloszlású sorozat, amelynek tagjai az X_n sorozattól is függetlenek, és olyanok, hogy $P(Y_1 > x) = P(X_1 > x)$, ha $x \to \infty$, valamint $-\infty < E(X_1 + Y_1) < 0$. Ekkor csak annyival módosul a tétel állítása, hogy μ-t $-E(X_1+Y_1)$-el kell helyettesíteni, ezzel pedig megkapjuk az eredményt a klasszikus csődvalószínűség feladatára is.

2.3. Csődvalószínűség stacionárius, ergodikus folyamattal modellezett károkkal

Legyen $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók stacionárius, ergodikus folyamata, véges várható értékkel, és legyen $\mu > EX_1$. A részletösszegek sorozata módosítva egy negatív drifttel: $S_0 = 0, S_n = X_1 + \ldots + X_n - n\mu$. Legyen a biztosító kezdeti tőkéje u, ekkor a csődvalószínűség:

$$\psi(u) = P(\sup_{n\geq 0} S_n > u).$$

A csődvalószínűségek vizsgálatában nagyon fontos szerepet játszanak a vastagfarkú eloszlások, aminek az a gyakorlati alapja, hogy ezekkel lehet a nagy károkat a legjobban figyelembe venni. Ezért legyen az folyamatunk stacionárius, ergodikus $S\alpha S$-folyamat, $\alpha \in (1,2)$. Ez azt jelenti, hogy minden valószínűségi változó karakterisztikus függvénye előáll a következő alakban:

$$Eexp(i\lambda X_j) = exp(-\sigma^\alpha \mid \lambda \mid^\alpha).$$

Ekkor a tagoknak ugyan véges a várható értékük, de a szórásuk nem létezik. A tény, hogy X_n $S\alpha S$ típusú, azt jelenti, hogy reprezentálható a következő alakban:

$$X_n = \int_E f_n(x) M(dx),$$

ahol M egy $S\alpha S$ véletlen mérték az (E, ε) mérhető téren, egy m σ-véges mértékkel ε-on, valamint $f_n \in L^\alpha(m, \varepsilon)$. Valamint létezik az ilyen típusú folyamatoknak integrál-reprezentációja:

$$X_n = \int_E a_n(x)(\frac{dm \circ \phi_n}{dm}(x))^{\frac{1}{\alpha}} f \circ \phi_n(x) M(dx),$$

ahol ϕ_0 az identitás E-n, $\phi_n = \phi_{n-1} \circ \phi$, ahol ϕ egy mérhető nem-szinguláris térképezés, a_n értéke 1 vagy -1 lehet, $a_0 \equiv 1$, $a_{n+1}(x) = a_n(x)(a_1 \circ \phi_n)(x)$, $f \in L^\alpha(m, \varepsilon)$. Ennek az előállításnak az az előnye, hogy a folyamat vizsgálatához f és ϕ_n vizsgálata szükséges.

Vezessük be a következőket: $h_0(x) = 0, h_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, valamint

$$m_n = C_\alpha^{\frac{1}{\alpha}} (\int_E \mid h_n(x) \mid^\alpha m(dx))^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Legyen η_0 egy valószínűségi mérték, amely ekvivalens m-el, $g = \frac{d\eta_0}{dm}$. Ennek a felhasználásával az X folyamat integrálalakja átírható:

$$X_n = \int_E g^{-\frac{1}{\alpha}}(x) f_n(x) M_0(dx),$$

ahol M_0 egy $S\alpha S$ véletlen mérték η_0 mértékkel. Azt felhasználva, hogy η_0 valószínűségi mérték, a következő alak kapható:

$$X_n = C_\alpha^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} g^{-\frac{1}{\alpha}}(V_j) f_n(V_j),$$

ahol $\varepsilon_n$független, azonos eloszlású Rademacher változók sorozata, Γ_n egy Poisson-folyamat pontjainak száma, V_n pedig E-értékű független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, amelyek közös eloszlásfüggvénye η_0. Ezekkel a jelölésekkel a csődvalószínűség a következő alakban is írható:

$$\psi(u) = P(\sup_{n \geq 0}(\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} h_n(V_j) - n\mu) > u).$$

A folyamat vastag-farkú tulajdonsága miatt az a gondolat merülhet fel, hogy valószínűleg a csőd a Poisson-pontfolyamat egy kiugróan nagy értéke miatt következhet be, így az várható, hogy

$$\psi(u) \sim \psi_0(u) = \sum_{j=1}^{\infty} P(\sup_{n \geq 0}(\varepsilon_j \Gamma_j^{-\frac{1}{\alpha}} h_n(V_j) - n\mu) > u).$$

Ezt az értéket pedig bizonyos esetekben már könnyebben tudjuk kiszámolni, például, ha X_n Lévy-folyamat, $E = [0, \infty), m(dx) = \sigma^\alpha(dx), f_n(x) = I_{[n-1,n)}(x)$. Ekkor ha $u \to \infty$:

$$\psi_0(u) = \frac{1}{2} C_\alpha \sigma^\alpha \frac{1}{\mu(\alpha - 1)} u^{-(\alpha-1)}.$$

A következő tétel mondható ki az intuitív tulajdonsággal kapcsolatban:

2.3.1. Tétel (lásd 7). *X_n stacionárius, ergodikus $S\alpha S$ folyamat, $\alpha \in (1, 2)$. Tegyük fel, hogy $m_n = O(n^\beta), n \to \infty, \beta \in (0, 1)$. Ekkor a $\psi(u) \sim \psi_0(u)$ reláció fennáll $u \to \infty$ esetén.*

2.4. Szubexponenciális valószínűségi változók véletlen súlyozású összegei

Legyen $(X_k), 1 \leq k \leq n$ független valószínűségi változók sorozata, a közös eloszlásfüggvény legyen F, és legyen minden X_k összepárosítva egy Θ_k pozitív értékű valószínűségi változóval úgy, hogy az (X_k) és Θ_k sorozatok függetlenek egymástól. Ami minket érdekel, az S_m^Θ, $1 \leq m \leq n$ összeg farokviselkedése, különös tekintettel az M_m^Θ maximumra, ahol tehát

$$S_m^\Theta = \sum_{k=1}^{m} \Theta_k X_k, \qquad M_m^\Theta = \max_{1\leq m\leq n} S_m^\Theta.$$

Valószínűségi változók sorozatáról azt mondjuk, hogy:

1. típusú, ha $P(a \leq X_k \leq b) = 1$ fennáll valamilyen $0 \leq a \leq b < \infty$ esetén, ha $1 \leq k \leq n$;

2. típusú, ha $P(0 < X_k \leq b) = 1$ fennáll valamilyen $0 \leq b < \infty$ esetén, ha $1 \leq k \leq n$;

3. típusú, ha $P(a \leq X_k < \infty) = 1$ fennáll valamilyen $0 \leq a < \infty$ esetén, ha $1 \leq k \leq n$.

Ebben a fejezetben feltesszük, hogy F szubexponenciális. A szubexponenciális eloszlásfüggvények családját jelölje $\mathcal{S}$. Azaz $F \in \mathcal{S}$, ha F a $[0,\infty)$ intervallumra van koncentrálva, és

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} = n.$$

Ebből a tulajdonságból következik, hogyha X_k valószínűségi változók sorozata közös $F \in \mathcal{S}$ eloszlásfüggvénnyel, akkor

$$P(S_n > x) \sim P(\max_{1\leq k\leq n} X_k > x).$$

A fő eredmény a következő:

2.4.1. Tétel (lásd 11). *Ha $F \in \mathcal{S}$, és a Θ_k sorozat első típusú, akkor*

$$P(M_n^\Theta > x) \sim P(S_n^\Theta > x) \sim P(\max_{1\leq k\leq n} \Theta_k X_k > x) \sim \sum_{k=1}^{n} P(\Theta_k X_k > x)$$

Ha $F \in \mathcal{S}$, akkor F vastag farkú, abban az értelemben, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1.$$

Jelöljük azon eloszlásfüggvények családját, amelyekre igaz a fenti, $\mathcal{L}$-el. Vezessük még be a dominált varianciájú eloszlásfüggvények családját, jelölésben $F \in \mathcal{D}$, amelyekre

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} < \infty, \qquad 0 < y < 1.$$

Közismert, hogy $\mathcal{L} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{S}$. Fontos szerepet játszanak az $\mathcal{L} \cap \mathcal{D}$-be tartozó reguláris változású eloszlásfüggvények, amelyeket jelöljünk $\mathcal{R}$-el. Pontosan $F \in \mathcal{R}$, ha létezik $0 \leq \alpha < \infty$, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = y^{-\alpha}, \qquad 0 < y.$$

Ha F egy adott α-val teljesíti az egyenlőséget, akkor úgy jelöljük, hogy $F \in \mathcal{R}_\alpha$. $\mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ egy nagyobb családja, a reguláris változású eloszlásfüggvények kiterjesztése, ERV (extended regular variation), F ERV$(-\alpha, -\beta)$ osztályba tartozik, valamilyen $0 \leq \alpha \leq \beta < \infty$ esetén, ha

$$y^{-\beta} \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} \leq y^{-\alpha}, \qquad y > 1.$$

Fontos megjegyezni, hogy a biztosításmatematikában fontos szerepet játszó eloszlások, mint a lognormális és a Weibull szubexponenciálisak ugyan, de nem taroznak $\mathcal{D}$-be, vagyis ez az osztály nem elég gazdag, hogy ezzel modellezzük a vastag-farkú eloszlásokat, ezért szokás még bevezetni a rapid variációjú eloszlásfüggvények definícióját, jelölésben $F \in \mathcal{R}_{-\infty}$, amelyekre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 0.$$

Most megemlítjük a fejezet fő állításának egyszerű következményeit a bevezetett eloszláscsaládok speciális eseteire.

2.4.2. Tétel (lásd 11). *Ha $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$, Θ_k második típusú, akkor igaz a 2.4.1 tétel állítása.*

Legyen $F \in \mathcal{D}$ eloszlásfüggvény, vezessük be a következő jelöléseket:

$$f_*(y) = \liminf_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}, \qquad f^*(y) = \limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}.$$

2.4.3. Tétel (lásd 11). *Tegyük fel, hogy Θ_k második típusú. Ekkor:*

1. *Ha $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$, akkor*

$$\overline{F}(x) \sum_{k=1}^{n} E(f_*(\Theta_k^{-1})) \preceq P(M_n^\Theta > x) \sim P(S_n^\Theta > x) \preceq \overline{F}(x) \sum_{k=1}^{n} E(f^*(\Theta_k^{-1}))$$

2. *Ha $F \in ERV(-\alpha, -\beta)$ valamilyen $0 \leq \alpha \leq \beta < \infty$, akkor*

$$\overline{F}(x) \sum_{k=1}^{n} E(min(\Theta_k^\alpha), \Theta_k^\beta) \preceq P(M_n^\Theta > x) \sim P(S_n^\Theta > x) \preceq$$

$$\preceq \overline{F}(x) \sum_{k=1}^{n} E(max(\Theta_k^\alpha), \Theta_k^\beta)$$

3. *Ha $F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ valamilyen $0 \leq \alpha < \infty$ esetén, akkor*

$$P(M_n^\Theta > x) \sim P(S_n^\Theta > x) \sim \overline{F}(x) \sum_{k=1}^{n} E(\Theta_k^\alpha)$$

A rapid változású esetben pedig a következő tétel igaz:

2.4.4. Tétel (lásd 11). *Ha $F \in \mathcal{S} \cap \mathcal{R}_{-\infty}$, Θ_k első típusú, valamint $P(\Theta_k = \overline{\Theta_k}) = p_k > 0$, ahol $\overline{\Theta} = sup(y : P(\Theta \leq y) < 1)$, akkor a $\widetilde{\Theta} = max(\overline{\Theta_k})$ jelöléssel*

$$P(M_n^\Theta > x) \sim P(S_n^\Theta > x) \sim \sum_{k=1}^{n} p_k \overline{F}(\frac{x}{\overline{\Theta_k}}) \sim \overline{F}(\frac{x}{\widetilde{\Theta}}) \sum_{k=1}^{n} p_k 1_{(\overline{\Theta_k} = \widetilde{\Theta})}$$

Most tekintsük a következő modellt:

$$S_0 = x, \qquad S_n = \xi_n S_{n-1} + (\eta_n - Z_n), \qquad n \geq 1$$

a biztosító nyereségét leíró rekurzív egyenlet, $x \geq 0$ a kezdőtőke, η_n a díjbevétel, Z_n a kárkifizetések összege az n-edik időperiódusban, ξ_n pedig az eddigi nyereség befektetési kockázatát adja meg. Tegyük fel, hogy (η_n, Z_n) független, azonos eloszlásúak, és függetlenek ξ_n-től. A fenti egyenlet a szokásos kockázati modellt adja meg, ha $\xi_n \equiv 1$.

Legyen $X_n = Z_n - \eta_n$, független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, közös F eloszlásfüggvénnyel. Vezessük be az $Y_n = \xi_n^{-1}$ jelölést. Ekkor a fenti rekurzió a következő formában írható:

$$S_n = x\prod_{i=1}^{n}\xi_i + \sum_{k=1}^{n} X_k \prod_{i=k+1}^{n}\xi_i,$$

S_n visszadiszkontált értékét tekintve pedig

$$\widetilde{S_n} = S_n \prod_{i=1}^{n} Y_i = x - \sum_{k=1}^{n} X_k \prod_{i=1}^{k} Y_i.$$

A csődbemenési valószínűség véges horizonton:

$$\psi(x,n) = P(\min_{0\le m\le n} S_m < 0 \mid S_0 = x) = P(\min_{0\le m\le n} \widetilde{S_m} < 0 \mid \widetilde{S_0} = x) =$$

$$= P(\max_{1\le m\le n} \sum_{k=1}^{m} X_k \prod_{i=1}^{k} Y_i).$$

Legyen $\Theta_k = \prod_{i=1}^{k} Y_i$, ekkor a fejezet korábbi állításainak egyszerű következménye:

2.4.5. Tétel (lásd 11). *1. Ha $F \in \mathcal{S}$ és ξ_k első típusú, akkor*

$$\psi(x,n) \sim \sum_{k=1}^{n} P(X_k \prod_{i=1}^{k} Y_i > x)$$

2. Ha $F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ és ξ_k harmadik típusú, akkor

$$\psi(x,n) \sim \overline{F}(x) \sum_{k=1}^{n} E(\prod_{i=1}^{k} Y_i^{\alpha})$$

3. Ha $F \in \mathcal{S}\cap\mathcal{R}_{-\alpha}$, ξ_k első típusú,$P(\Theta_k = \overline{\Theta_k}) = p_k > 0$, akkor a $\widetilde{\Theta} = max(\overline{\Theta_k})$ jelöléssel:

$$\psi(x,n) \sim \overline{F}(\frac{x}{\widetilde{\Theta}}) \sum_{k=1}^{n} p_k 1_{(\overline{\Theta_k}=\widetilde{\Theta})}$$

2.5. Véletlen bolyongás összefüggő lépésekkel

Legyen η_n független, azonos eloszlású, 0 várható értékű valószínűségi változók sorozata, a közös eloszlásfüggvény F. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$G_+(x) = \int_x^\infty \overline{F}(y)dy, \qquad G_-(x) = \int_x^\infty F(-y)dy,$$

ezek a várható érték végessége miatt értelmesek. Legyen $B \geq 0, b \geq 0$ valós számokra $G_{B,b}(x) = BG_+(\frac{x}{B}) + bG_-(\frac{x}{b})$, ezzel a jelöléssel $G_+ = G_{1,0}, G_- = G_{0,1}$, és

$$G_{B,b}(x) = \int_x^\infty \overline{F}(\frac{y}{B}) + F(-\frac{y}{b})dy.$$

Legyen $a > 0, c_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ valós számok, nem mindegyik 0, és definiáljuk a következő valószínűségi változó sorozatot:

$$\xi_k = \sum_{j=1}^{k} c_{k-j}\eta_j - a,$$

a részletösszegek sorozata: $S_0 = 0, S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Az S_n sorozatot nevezzük véletlen bolyongásnak aszimptotikusan stacionárius összefüggő lépésekkel, negatív drifttel. Hasznosabb a következő alak:

$$S_k = \sum_{j=1}^{k} \overline{c}_{k-j}\eta_j - na,$$

ahol $\overline{c}_k = \sum_{j=0}^{k} c_j$. Mostantól mindig feltesszük, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} \mid c_k \mid < \infty$. Ezzel a feltétellel az S_n sorozat kielégíti a nagy számok erős törvényének feltételeit, így $\frac{S_n}{n} \to -a < 0$, 1 valószínűséggel. Így a $\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ egy jól definiált, 1 valószínűséggel véges valószínűségi változó.

Legyen $\mathcal{L}$ azon nemcsökkenő, $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ függvények osztálya, amikre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+y)}{f(x)} = 1,$$

minden valós y esetén. Egy F eloszlásfüggvényt jobbról vastag-farkúnak nevezünk, ha $\overline{F}(x) \in \mathcal{L}$. Jegyezzük meg, hogy $G_+ \in \mathcal{L}$, ha $F \in \mathcal{L}$. Ezekkel a jelölésekkel megfogalmazhatjuk a következő tételt a bolyongás szuprémumának alsó korlátját illetően:

2.5.1. Tétel (lásd 12). *Legyen* $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ *különböző természetes számok,* $C = max(0, \overline{c}_{m_1}) \geq 0, c = min(0, \overline{c}_{m_2}) \leq 0$. *Ha* $C+ \mid c \mid > 0$ *és* $G_{C,|c|} \in \mathcal{L}$*, akkor*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{P(\sup_n S_n > x)}{G_{C,|c|}(x)} \geq \frac{1}{a}$$

Ha létezik $m \geq 0$*, hogy* $\overline{c}_m > 0$*,* $G_+ \in \mathcal{L}$*, akkor*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{P(\sup_n S_n > x)}{\overline{c}_m G_+(\frac{x}{\overline{c}_m})} \geq \frac{1}{a}$$

Ha létezik $m \geq 0$*, hogy* $\overline{c}_m < 0$*,* $-G_- \in \mathcal{L}$*, akkor*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{P(\sup_n S_n > x)}{\mid \overline{c}_m \mid G_+(\frac{x}{|\overline{c}_m|})} \geq \frac{1}{a}$$

Jelöljük a szubexponenciális eloszlások osztályát a szokásos módon $\mathcal{S}$-el. Ekkor a következő tétel igaz a bolyongás felső korlátjáról:

2.5.2. Tétel (lásd 12). *Legyen*

$$\overline{C} = sup(0, \overline{c}_k, k \in \mathbb{N}) \geq 0, \qquad \overline{c} = inf(0, \overline{c}_k, k \in \mathbb{N}) \leq 0.$$

Ha $G_{\overline{C},|\overline{c}|} \in \mathcal{S}$*, akkor*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{P(\sup_n S_n > x)}{G_{\overline{C},|\overline{c}|}(x)} \leq \frac{1}{a}.$$

Ha $\overline{c}_k \geq 0$*,* $G_+ \in \mathcal{S}$*,,* $\overline{C} = sup(\overline{c}_k) > 0$*, akkor*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{P(\sup_n S_n > x)}{\overline{C} G_+(\frac{x}{\overline{C}})} \leq \frac{1}{a}.$$

Ha $\overline{c}_k \leq 0$*,* $G_- \in \mathcal{S}$*,,* $\overline{c} = inf(\overline{c}_k) < 0$*, akkor*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{P(\sup_n S_n > x)}{\mid \overline{c} \mid G_-(\frac{x}{|\overline{c}|})} \leq \frac{1}{a}.$$

A két tétel együtt a következőket mondja a bolyongásról aszimptotikusan, felhasználva, hogy $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$: ha $G_{\overline{C},|\overline{c}|} \in \mathcal{S}$, és a következő feltételek valamelyike teljesül:

1. létezik m_1, m_2, hogy

$$\overline{c}_{m_1} = \overline{C} = sup(0, \overline{c}_k, k \in \mathbb{N}) \geq 0, \qquad \overline{c}_{m_2} = \overline{c} = inf(0, \overline{c}_k, k \in \mathbb{N}) \leq 0,$$

2. $\overline{C} = \overline{c}_{m_1} > 0, \quad \overline{c} = 0$

3. $\overline{c} = \overline{c}_{m_2} < 0, \quad \overline{C} = 0$

akkor

$$P(\sup_n S_n > x) \sim a^{-1} G_{\overline{C},|\overline{c}|}(x), \qquad x \to \infty.$$

Egy $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ függvényt közepesen reguláris változásúnak nevezünk, jelölésben $f \in \mathcal{IR}$ ha

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim x \to \infty \frac{f(x(1+\delta))}{f(x)} = 1.$$

Ha $G_{\overline{C},|\overline{c}|} \in \mathcal{S}$, éa a következő feltételek valamelyike teljesül:

1. $\overline{C} > 0, \overline{C} > \overline{c}_m$, létezik m_2, hogy $\overline{c} = \overline{c}_{m_2} < 0$, $G_+ \in \mathcal{IR}$;

2. $\overline{C} = \overline{c}_{m_1} > 0$, $\overline{c} < 0, \overline{c} < \overline{c}_m$, $G_- \in \mathcal{IR}$;

3. $\overline{C} > 0, \overline{C} > \overline{c}_m$, $\overline{c} < 0, \overline{c} < \overline{c}_m$, $G_{\overline{C},|\overline{c}|} \in \mathcal{IR}$.

Ekkor

$$P(\sup_n S_n > x) \sim a^{-1} G_{\overline{C},|\overline{c}|}(x), \qquad x \to \infty.$$

2.6. Sztochasztikus egyenletek

Tekintsük a következő sztochasztikus rekurziós egyenletet:

$$Y_t = A_t Y_{t-1} + B_t,$$

ahol (A_t, B_t) független, azonos eloszlású, nemnegatív valószínűségi változók sorozatai. A mi esetünkben a B_t sorozat az éves eredmény összegét adja meg, míg az A_t sorozat egy diszkontáló tényező, amí meghatározza a tartalékolt összeg jelenértékét.

Vezessük be a következő jelölést:

$$\Pi_{s,t} = A_s \dots A_t, \qquad s \le t,$$

$$\Pi_{s,t} = 1, \qquad s > t.$$

Ismert eredmény, hogy az $Elog^+A < \infty, Elog^+B < \infty$ feltételek teljesülése mellett pontosan akkor létezik egyértelmű erősen stacionárius megoldás, ha

$$-\infty \leq ElogA < 0,$$

ezért a továbbiakban ezt mindig feltesszük. Ebben az esetben a megoldás a következő alakban írható:

$$Y_t = \sum_{i=-\infty}^{t} \Pi_{i+1,t} B_i = B_t + \sum_{i=-\infty}^{t-1} \Pi_{i+1,t} B_i.$$

A szokásos módon legyen

$$S_n = Y_1 + \ldots + Y_n, \qquad n \geq 1,$$

és minket a csődbemenési valószínűség érdekel, azaz

$$\psi(u) = P(\sup_{n\geq 1}[(S_n - ES_n) - \mu n] > u).$$

A fenti jelöléssel:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}(\Pi_{1,i}Y_0 + \sum_{t=1}^{i} \Pi_{t+1,i}B_t) = Y_0 \sum_{i=1}^{n} \Pi_{1,i} + \sum_{t=1}^{n} B_t \sum_{i=t}^{n} \Pi_{t+1,i}.$$

Vezessük be a következő valószínűségi változó sorozatot:

$$C_t = \sum_{i=t}^{\infty} \Pi_{t+1,i}.$$

Ezekkel a jelölésekkel megfogalmazható a következő tétel:

2.6.1. Tétel (lásd 10). *Tegyük fel, hogy az A_t és B_t független azonos eloszlású, nemnegatív valószínűségi változók két sorozata, amelyek egymástól is függetlenek, B reguláris változású $\kappa > 1$ indexel, $EA^\kappa < 1$, $EA^{2\kappa} < \infty$. Tegyük fel, hogy létezik egy pozitív számokból álló sorozat, hogy $nP(B > x_n) \to 0$, valamint minden $c > 0$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \geq x_n} \mid (P(BI_{[0,x]}(B) \sum_{t=1}^{n} C_t^2 > cx^2/logx) + P(\mid \sum_{t=1}^{n}(C_t - EC) \mid > cx))/(nP(B > x)) \mid = 0$$

Ekkor fennáll, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq x_n} \frac{P(S_n - ES_n \leq -x)}{nP(B > x)} = 0.$$

Most tekintsük a $\psi(u)$ csődvalószínűséget, a kezdeti tőke $u \to \infty$, $\mu > 0$. Ha A_t és B_t teljesítik az előző tétel feltételeit, akkor $EB < \infty$, valamint $EA < 1$, hiszen $EA^\kappa < 1$.Ekkor $EY = EB(1 - EA)^{-1} = EBEC$ jóldefiniált. Ekkor igaz a következő tétel:

2.6.2. Tétel (lásd 10). *Tegyük fel, hogy az előző tétel feltételei teljesülnek, valamint hogy az $x_n = cn$ sorozat megfelelő minden $c > 0$ esetén. Illetve tegyük fel még, hogy létezik $\gamma > \kappa$, hogy $EC^{\gamma+\kappa} < \infty$. Ekkor minden $\mu > 0$ esetén:*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{uP(B > u)} = EC^\kappa \frac{1}{\mu} \frac{1}{\kappa - 1}$$

3. fejezet

A tartalékolási probléma

3.1. A biztosítási tartalék jelentősége

Egy biztosító társaság biztonságos működéséhez (várható kötelezettségek teljesítése, károk ingadozásából eredő, illetve egyéb várható biztosítási veszteségek enyhítése) szorosan kapcsolódik az ún. biztosítástechnikai tartalékok kezelése (képzés/feloldás). Erre a biztosító speciális üzleti tevékenysége miatt van szükség. A különböző formában képzett tartalékok a díjbevétel és a kárkifizetés közötti időbeli eltéréseket hidalják át. A biztosító a biztosítási szerződések megkötésével kockázatot vállal bizonytalan, jövőbeli események bekövetkezéséből, illetve ismert, de pénzügyileg még le nem zárt kárügyekből származó károk kifizetésekre. A biztosító a kockázat átvállalásának fejében ügyfeleitől (rendszerint a biztosítási-kockázatviselési időszak kezdetén) előre biztosítási díjat szed be, amelyből tartalékot (is) képez egyéb kötelezettségeinek teljesítése mellett.

Alapvető követelmény a biztosítóval szemben, hogy az általa vállalt (és megtartott, azaz viszontbiztosításba nem adott) kockázatokból származó kötelezettségeinek megfelelő mértékű tartalékkal rendelkezzen (Bit 118. -120.§), de ez nem jelentheti azt, hogy lemond a helyes kockázatvállalási politika követéséről. A tartalékok jövőbeni (várható vagy ismert) kifizetések anyagi fedezetét jelentik, azaz a biztosító fizetőképességét szolgálják (jövőbeli funkció), egyúttal egy-egy üzleti év korrekt, a számviteli elveket kielégítő mérleg- és eredmény kimutatását adják (múltbeli funkció), egyes tartaléktípusok a díjbevételt, mások a kárkifizetést és akad olyan tartalékfajta is, ami a befektetésekből származó bevételt korrigálja. Ezért nagyon fontos, hogy a szükséges tartalékok kellő pontossággal, biztonságosan legyenek megállapítva. A tartalékokat azonban nem csak meghatározni, hanem megteremteni is szükséges, azaz biztosítani kell a megfelelő eszköz lefedettségét, és ez üzleti szempontból akkor nem jelent igazán gondot, ha a biztosítási díjak a biztosító által szervezett veszélyközösség kockázatából származó kifizetéseknek és egyéb ráfordításoknak (szerzési, igazgatási és kárrendezési költségek) kellő biztonságú fedezetét nyújtják.

A tartalékok eszköz-lefedettségének nem csak egy adott időpontban kell fennállnia, hanem folyamatosan és tartósan. Ehhez megfelelő és biztonságos befektetésekre van szükség. A befektetések során figyelemmel kell kísérni a kötelezettségek lejárati struktúráját, a mindenkori likviditás megőrzését, a jövedelmezőséget és természetesen a befektetési kockázat mérséklését, megosztását (diverzifikáció). Ez a tartalékokra vonatkozó másik nagyon lényeges szabály (Bit 132.§).

A tartalékok adott időpontban történő (mérlegforduló napi) meghatározását hazánkban pénzügyminiszteri rendelet szabályozza. A tartalékolás fontosságát az is mutatja, hogy minden társaságnak Tartalékolási Szabályzatot kell készítenie, és abban rögzítenie azokat a módszertani megoldásokat is, amelyeket a képzésben felhasználásra kerültek. A tartalékok konkrét értékéről, és tárgyévi változásáról (lebonyolítási eredmény) a Felügyelet részére az aktuáriusi jelentésben be kell számolni.

A meg nem szolgált díjak tartaléka, a törlési tartalék, és az eredménytől független díj-visszatérítési tartalék a díjelőírási korrekcióval az elszámolási év korrekt díjbevételét teremti meg.

A meg nem szolgált díjak tartaléka a biztosítási-kockázatviselési időszak és az elszámolási időszak eltérése miatt szükséges, ezért nevezhetjük díjátviteli tartaléknak is. Az elszámolási időszakban előírt díj azon részét, ami a fedezeti időszak pénzügyi éven túlnyúló részére esik, azaz nem a pénzügyi évet érinti (múltbeli funkció), ebbe a tartalékba kell elhelyezni, így megteremtődik a jövőben felmerülő kötelezettségek (károk, költségek kifizetése) fedezete (jövőbeli funkció). Ez a tartalékfajta alapvetően számviteli jellegű, bár aktuáriusi problémákat is rejt (szezonalitás, infláció, közelítő módszerek). A biztosító díjelőírása a tárgyévben esedékes (elvárt) díjakból (pozitív tételek) és a törölt díjakból (negatív tételek) áll.

A törlési tartalék általában az előírt, de be nem folyt (hátralékos) díjak és a nem fizetés miatt (jövőben) várható törlések - jövő évi díjelőírásban várhatóan megjelenő negatív tételek ellentételezését - fedezetéül szolgál (jövőbeli funkció), valamint a tárgyév díjbevételének korrekt kimutatását biztosítja azáltal, hogy megadja az esedékes díjakból már befolyt és a még várhatóan befolyó részek összegét. A törlési tartalékot az elmúlt évek statisztikáját alapul véve célszerű meghatározni. Az aktuárius igényességén múlik, hogy az adatokat milyen aprólékossággal részletezi.

Az eredménytől független díj-visszatérítési tartalék - különösen kármentesség, alacsony káralakulás miatt - az ügyfeleknek szerződési feltétel szerint járó, a jövő évi díjvisszatérítés fedezeteként szolgál (jövőbeli funkció), míg ha a tárgyév végén hozzák létre, a díjelőírás korrekciója (a szerződés kezdetén előírt díj a biztosítás tartama alatt tapasztalt kármentesség miatt a biztosítót teljes egészében nem illeti meg) valósul meg (múltbeli funkció).

A matematikai tartalékok, a függőkár tartalékok és a káringadozási tartalék a biztosító esetleges kárát fedezi. A matematikai tartalékot a szerződésből következő, jövőben (a biztosításból hátralévő időben, ami akár 20-25 év is lehet) várható kiadások (különösen a biztosítási eseményekből adódó szolgáltatások) és bevételek (biztosítási díjak) tartalékképzés időpontjára - a technikai kamatláb felhasználásával - diszkontált jelenértékek különbözetekként (prospektív módszer) egyénenként (szerződésenként, járadékosonként) határozzák meg. A tárgyévi díj nem csak a tárgyévben bekövetkezett biztosítási események fedezetét szolgálja, hanem későbbi (haláleseti, elérési) károkét is, a tárgyévi kárkifizetés korrekciójának tekinthető (múltbeli funkció). A technikai kamatláb, amit a tartalékszámításban diszkontáláskor használnak, valójában egy garantált hozamot is jelent, amit a matematikai tartalékok segítségével szükséges érni ahhoz, hogy a tartalék képzésére ne kelljen plusz forrásokat bevonni.

Igen érdekes és lényeges kérdés, hogy kié is a tartalék. A tartalékok a biztosító jövőbeni kötelezettségeinek fedezeteként funkcionálnak, tehát ha a kockázatban vagy a technikai hozam biztosíthatóságában negatív változás várható, a legegyszerűbb módja a probléma kezelésének a halandósági feltételezések illetve a technikai kamatláb megváltoztatása, ami a tartalék növekedéséhez vezet. Mivel a tartalék azonban az ügyfelek elsősorban megtakarítási célból történő befizetéseiből képződik, ezért e változtatások miatt megnő a maradékjogok (visszavásárlás, díjmentes leszállítás) szerinti érték és az esetleges többlethozamból való ügyfélrészesedés is.

Az életbiztosítási díjtartalékok képzésénél a szerzési költségek mielőbbi megtérülése érdekében szokásos eljárás a zillmerezés. Egy adott időponti zillmerezett tartalék valójában a (nettó díj alapú) nettó tartalék (pozitív érték) és az adott időpontban fennálló (a szerzési költségre kalkulált díjrészből még) meg nem térült szerzési költségek (negatív érték) összege. Ebből következik, hogy a zillmerezett tartalék (a lejárati időpont kivételével) kisebb, mint a nettó tartalék, és a tartam elején (1-2 évig) negatív is lehet. Természetesen a mérlegben ez az érték a tartalék soron nem szerepeltethető, de lehetőség van aktív időbeli elhatárolásokat (a Bit szerint akár eszközfedezetként is 139.§ (3)) is figyelembe venni, mivel a biztosítási szerződés megkötésekor felmerülő kezdeti költség a jövőben befolyó biztosítási díjakból térül meg.

Egyes nézetek szerint a zillmerezés célja (a szerzési költségek mielőbbi megtérülése) úgy valósul meg, hogy a biztosító kölcsönveszi az ügyfél díjtartalékának egy részét, amit azután a tartam során fokozatosan és kamatostul visszatérít az ügyfélnek. A kölcsönvett díjtartalék után a biztosító az ügyfélnek technikai kamatlábat biztosít, ami különösen inflációs időkben elmarad a piaci kölcsönkamatlábtól, és így a biztosítónak némi kamatnyeresége keletkezik (rejtett nyereségforrás).

A matematikai tartalékot szerződésenként határozzuk meg, de valójában a veszélyközösség szintjén releváns, ugyanúgy, mint a(z éves) biztosítási díj, ami szerződésekre meghatározott, de a(z éves) biztosítási időszakban bekövetkező károkkal kapcsolatban felmerülő kárigények fedezetét teremti meg a veszélyközösség szintjén. Valójában a zillmerezéssel a biztosító a veszélyközösség szintjén "sáfárkodik" a beszedett pénzzel, s mivel a tartam elején kockázati többlettel számolhat a biztosító (öregedési tartalék), a lejárati szolgáltatáshoz pedig elegendő a tartam végén megfelelő (szolgáltatás nagyságával azonos) összegű tartalékkal rendelkezni, ezért a zillmerezés nem veszélyezteti a kötelezettségek teljesíthetőségét. A kisebb (zillmerezett) tartalék kisebb kötelezettséget, de pl. kisebb befektetési eredményt is jelenthet. A visszavásárlási összeg nagyságát nem feltétlen befolyásolja a zillmerezés, - bár a visszavásárlási összeg számításának alapja a rendelkezésre álló tartalék - mivel a visszavásárlás "büntetéssel" jár együtt, aminek mértékét a biztosító szabadon határozza meg, azaz nettó tartalékolás mellett akár maga a zillmerezett tartalék lehet a visszavásárlási összeg (a visszavásárlás büntetésének indoka az antiszelekció is lehet). A zillmerezés mellett megemlíthető még az ún. x+1 módszer, ami szintén a nettó díjtartaléknál alacsonyabb díjtartalékot állít be kötelezettségként. Ennél a módszernél a tartamtól függetlenül az első éves díjat elvonják és az x éves egyén n éves biztosítására egy x+1 éves egyén n-1 éves tartamú biztosításának megfelelő nettó tartalékot képeznek, ahol is az első éves tartalék automatikusan nulla. Hátránya a zillmerezéssel szemben, hogy ebben a módszerben nincs meg a kezdeti a költség megválasztásának rugalmassága és szabadsága. Mindkét módszer azonban képes forrást teremteni a cég működéséhez.

A befektetési egységekhez kötött (unit linked) tartalék elsősorban megtakarításra szolgál (jövőbeli és múltbeli funkciója azonos a matematikai tartalékával), a kockázati többletszolgáltatás tartaléka (amennyiben szükség van rá) többnyire matematikai tartalék formájában jelenik meg. Aktuáriusi szempontból ugyanúgy, mint a hagyományos életbiztosításoknál, a szerzési (kezdeti) költség mielőbbi megtérülése jelent megoldandó problémát. Erre megoldást az aktuáriusi alap (actuary fund) nyújt, - ami speciálisan meghatározott technikai kamatláb mellett egyszeri díjas vegyes életbiztosítás formulájának segítségével képezhető - azaz az egységeket kezdeti és felhalmozási egységekre bontják fel. Érdekes befektetési és biztosítási jellegből fakadó számviteli problémát jelent az, hogy a unit linked tartalék csak ténylegesen befizetett díjakból képezhető, míg a biztosító díjbevételét alapvetően az esedékes díjak előírásával határozza meg. Így tehát a még be nem fizetett (de már előírt) díj és a már (biztosítási éven belül) befizetett (de még elő nem írt) díjak miatt nem lesz összhang a díjbevétel és a tartalék között, amit természetesen orvosolni kell. Ezt főként a díjbevétel befolyt díjra történő korrigálása, vagy egyéb tartalék (pl. meg nem szolgált díjak tartalék) képzése segítségével lehet elérni. A unit linked biztosítások esetében a többlethozam visszajuttatása a napi árfolyamképzés és az elvonási szabály alkalmazása alapján valósul meg.

A függőkár tartalékok esetében a tárgyévi kárkifizetést korrigáló múltbeli funkció, és a bekövetkezett (ismert vagy ismeretlen) károk várható kifizetésének fedezete nyilvánvaló és egyértelmű. A tételes függőkár tartalék képzésének oka, hogy a bejelentett károk rendezése elhúzódó folyamat (peres ügyek esetén akár ez több év is lehet). A kései károk (IBNR) tartalékképzését az indokolja, hogy a káresemények bekövetkezése és bejelentése között több hónap, de akár évek is eltelhetnek, és a korrekt elszámolás megköveteli, hogy ezeket a károkat az elszámolás évében vegyük figyelembe, amit természetesen csak statisztikai módszerrel (3 éves kártapasztalat esetén a kifutási háromszögek felhasználásával) lehet meghatározni. Ismert kifutási háromszögön alapuló eljárások a lánc-létra, a szeparációs, cape cod és a Bornhuetter-Ferguson módszerek. Mivel a rendelet nem nevesít konkrét módszert, ezért akár az aktuárius maga is kidolgozhat saját módszert az IBNR tartalék képzésére. Érdemes egyébként több módszert is kipróbálni, és csak a megfelelő biztonságot nyújtó megoldást figyelembe venni. Természetesen legjobb eset az, ha az aktuárius tisztában van az egyes módszerek hátterében meghúzódó hipotetikus feltételezésekkel, illetve az adott biztosítási ágazat, valamint a tapasztalati adatok sajátosságaival.

A káringadozási tartalék egy-egy ágazat évenkénti kárkifizetéseinek (időbeni) kiegyenlítésére, az egyes évek kárszükségletének "átlagos" szintre hozására szolgál. A tartalék figyelembevétele nélkül számított biztosítástechnikai eredmény szerint eredményes évek kárszükségletét növeli (képzés révén), a veszteséges évek kárszükségletét csökkenti (feloldás által).

Az eredménytől függő díj-visszatérítési tartalék a biztosító tárgyévi, illetve a tárgyévet megelőző évei eredményéből megillető díjvisszatérítés fedezetére szolgál. A visszajuttatás módját (visszafizetés, díjjóváírás, többletszolgáltatás - biztosítási összeg növelése, külön számlán történő gyűjtés) a biztosítási szerződési feltételek határozzák meg. Az életbiztosítási ágban a matematikai tartalékok hozamából a biztosítottaknak visszajuttatandó, de ki nem fizetett részt a tárgyév mérleg fordulónapján az eredménytől függő díj-visszatérítési tartalékba kell helyezni. Így ez a tartalék típus az esetek többségében a befektetési bevételből származó eredményt "helyesbíti", mivel annak jelentős része nem a biztosítót, hanem a szerződőket illeti meg (múltbeli funkció), míg általában a jövő évben történő szerződésekre való szétosztásakor e tartalék felszabadítása "fedezi" a matematikai tartalék növekedést.

Az új Bit a befektetési szabályozásban is számos eltérést mutat a korábbi törvényhez képest. Ilyenek például a tartalékok mögött eszközként figyelembe vehető, a biztosítási ügyletekből származó 3 hónapnál nem régebbi követelések, azaz a díjhátralékok. Ez törlési tartalék esetén régóta elvárt volt, hiszen be nem folyt pénzből "képzett" tartalék mögé valós eszközöket tenni nem célszerű. Egyéb díjelőírás alapú tartalékképzésnél - meg nem szolgált díjak tartaléka, matematikai tartalék- is felmerülhet probléma. A biztosítók mérlegében jelentős nagyságrenddel bíró matematikai tartalék esetén a prospektív képzési szabály miatt valójában a díjhátralékból is képződik tartalék, mégsem valószínű, hogy e tartalékfajta mögött megjelenne a fenti követelés, mert egyrészt csökkenne a portfólió hozama, másrészt ebből kifolyólag ez a nem hátralékos szerződéseket is büntetné, ha a hátralék a tartalék értékéhez viszonyítva jelentős összeget képvisel.

A két biztosítási ágat együttvéve a matematikai tartalék meghatározó jelentősége (55 százalék) szembetűnő (ez igaz magára az élet ágra is). A függő károk tartaléka 20 százalékot képvisel, és a unit linked tartalék 2000-ben már elérte a 15 százalékot (1997-ben vezették be a hazai biztosítási piacon a unit linked termékeket). Természetesen, ha csak a nem-élet ágat néznénk a függőkár tartalékok válnának jelentősebbé (kb. 75 százalék).

A biztosítástechnikai tartalékok képzési céljainak ismerete mellett érdemes a tartalékok értékére hatással levő tényezőket is számba venni úgy, mint:

1. a szerződésenként képzendő tartalékok (meg nem szolgált díjak tartaléka, Matematikai tartalékok, és lényegében az Eredménytől függő díj-visszatérítési tartalék) esetében természetesen a szerződéses állomány változása (új szerzések, megszűnések biztosítási eseményből, visszavásárlásból, egyéb törlésből), ide sorolható még a díjmenetes leszállítás is (a szerződésre további díjak már nem érkeznek), valamint a szerződésmódosítások,

2. az indexálás hatással van a díjakra és a szolgáltatásra, ezért ez valójában az összes tartalékot befolyásolja,

3. a befektetési hozam mértéke, ami közvetlenül érinti a unit linked és az eredménytől függő díj-visszatérítési tartalékot és a szolgáltatásnövekményen keresztül a matematikai tartalékot,

4. a függőkár tartalékoknál és a káringadozási tartaléknál értelemszerűen a káralakulás (kárhányad), ami adódhat a kár darabszám (kárvalószínűségek) illetve a kárnagyság objektív alakulásától, vagy a kárigények számának és nagyságának változásából, amit valószínűleg a magyar lakosság biztosítási tudatának erősödése eredményezhet az EU csatlakozás után,

5. a tételes függőkár tartalék nagyságának időbeli alakulására erősen hat a biztosító kárrendezési folyamatának minőségére, gyorsaságára, továbbá némileg ebből következően a peres ügyek számára, valamint kárügyek bonyolultságára (pl. jogalap tisztázásának kérdése elsősorban a nem-élet ágban),

6. az IBNR tartalék alapvetően a káresemény bekövetkezése (s annak észlelése) és a kárigény bejelentése között eltelt idő alakulása,

7. díjfizetési morál, ami befolyásolja az előírt díjból befolyó díj, illetve a hátralék nagyságát (unit linked és törlési tartalék), a törlési tartaléknál ezen kívül közvetlenül még a speciális törlési arány (előző évet érintő, adott évi díjelőírás törlés és a hátralék aránya),

8. a nettó tartalék szintet természetszerűleg befolyásolja a viszontbiztosítási arány is.

3.2. A probléma

A tartalékolás tehát jelentősen befolyásolhatja a biztosító csődbemenési valószínűségeit, mert biztosítékot nyújt például a kiemelkedő károk esetére, vagy ha egy adott évben a károk száma jelentősen magasabb, mint az várható, az eloszlás várható értéke, korábbi évek tapasztalatai alapján. Nem véletlen, hogy a Felügyelet szigorúan ellenőrzi a biztosítók tartalékképzését. A hamarosan bevezetésre kerülő Solvency II szabályozás is különös figyelmet fordít a csőd elkerülésének módszereire, és a tartalék mellett egy másik biztosítékot, a minimális szavatolótőke pontosabb számolását teszi kötelezővé.

A bemutatott modellekben a tartalékolást semmilyen tekintetben nem vettük figyelembe, így jogosan merül fel a kérdés, módosíthatja-e a biztosító fizetőképességét rövidebb vagy hosszabb távon a tartalékolás ténye. Mi eddig a következő valószínűséget vizsgáltuk:

$$\psi(u) = P(\exists n : \sum_{k=1}^{n} \xi_k - nc > u),$$

ahol u a biztosító kezdeti tőkéje, c az egy évben befolyó díj, ξ_k pedig a k-adik évben kifizetendő, bekövetkezett károk összértéke. Most tegyük fel, hogy a biztosító tartalékol. Minden évben a bekövetkező károkat két részre osztjuk, az alapján, hogy melyeket fizetik ki az adott év bevételéből az adott évben. Azaz formálisan

$$\xi_i = Y_{i,1} + Y_{i,2},$$

ahol az új Y valószínűségi változók egymáshoz való viszonyáról különféle feltevéseket lehetségesek, de különböző évhez tartozók mindenképpen függetlenek.

Vezessük be a következő valószínűségi változó-sorozatot, a ξ_i sorozat "eltoltját":

$$\eta_1 = Y_{1,1},$$

$$\eta_2 = Y_{1,2} + Y_{2,1},$$

$$\dots$$

$$\eta_j = Y_{j-1,2} + Y_{j,1}, \qquad j > 1.$$

Ez lesz az új, módosított kárfolyamat. Az persze nyilvánvaló, hogy az első évben így mindenképpen kisebb valószínűséggel megy csődbe a biztosító, de mi azt szeretnénk vizsgálni, hogy hogyan viszonyul egymáshoz $\psi(u)$ és

$$\psi_\eta(u) := P(\exists n : \sum_{k=1}^{n} \eta_k - nc > u) = P(\exists n : \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k + Y_{n,1} - nc > u).$$

Nézzünk először a következő esetet: tegyük fel, hogy $Y_{i,2} = (1+\delta)Y_{i,1}$. Ebben az esetben

$$\xi_k = (2+\delta)Y_k, \qquad \eta_k = (1+\delta)Y_{k-1} + Y_k.$$

Alkalmazzuk a 2.2 pontban leírt modellt mindkét valószínűségi változó sorozatra. Az ε változók helyére az Y változókat írva megkapjuk, megfelelően összegezve megkapjuk, aszimptotikusan hogy viszonyul egymáshoz a két csődvalószínűség. (Az ε-ra vonatkozó feltevéseket a valószínűségi változók közül például a Pareto-eloszlás teljesíti, amelyet nagyon gyakran alkalmaznak kiemelkedő károk becslése esetén, ugyanis

$$P(|\varepsilon| > x) = P(\varepsilon > x) = \overline{F}(x) = (\frac{\lambda}{\lambda + x})^\alpha = x^{-\alpha}(\frac{\lambda x}{\lambda + x})^\alpha,$$

és $\frac{\lambda x}{\lambda + x} \to 1$, ha $x \to \infty$.) Az első esetben a φ együtthatók a következők:

$$\varphi_0 = 2 + \delta, \qquad \varphi_i = 0, \qquad i \neq 0,$$

a második esetben

$$\varphi_0 = 1, \qquad \varphi_1 = 1 + \delta, \qquad \varphi_i = 0, \qquad i \neq 0, 1.$$

Ezzel azt kapjuk, hogy $m_\varphi^+ = 2 + \delta, m_\varphi^- = 0$ mindkét esetben, vagyis a csőd valószínűsége aszimptotikusan ugyanaz marad, értéke:

$$\psi(x) \sim \frac{[(2+\delta)^\alpha)]}{\alpha - 1} \frac{1}{\mu} x P(|\varepsilon| > x).$$

Még mindig ugyanezt az esetet vizsgálva ugyanerre az eredményre jutunk a 2.5 fejezetben leírt modell segítségével, egyéb vastag farkú eloszlások, például Weibull vagy lognormális eloszlás esetén. Ebben az esetben a megfelelő együtthatók az első esetben a következők:

$$c_0 = 2 + \delta, \qquad c_i = 0, \qquad i \neq 0,$$

a második esetben

$$c_0 = 1, \qquad c_1 = 1 + \delta, \qquad c_i = 0, \qquad i \neq 0, 1.$$

A 2.5.1, illetve a 2.5.2 tételben szereplő C, c, illetve $\overline{C}, \overline{c}$ számok megegyeznek, $C = 2 + \delta$, $c = 0$ mind a két sorozatra, így a csődvalószínűségek aszimptotikája is megegyezik, mégpedig:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(\sup_n S_n > x)}{G_+(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{P(\sup_n S_n > x)}{\int_x^\infty \overline{F}(y)dy} = \frac{1}{a},$$

ahol az Y valószínűségi változók közös várható értékének $2+\delta$-szorosa.

Ugyanebben az esetben szintén megkaphatjuk ezt az eredményt szubexponenciális változókra, de ott egy érdekesebb esetet vizsgálunk, amikor a δ nem egy konstans szám, hanem maga is egy valószínűségi változó, ami -1-nél nagyobb, de egy korlátos b számnál kisebb értékeket vehet fel. Minden k-ra veszünk egy ilyen δ_k valószínűségi változót, amik azonos eloszlásúak és függetlenek egymástól. Így az $1 + \delta_k$ sorozat a 2.4 fejezetben bevezetett definíció szerint 1. típusú, hiszen

$$P(0 < 1 + \delta_k \leq b + 1) = 1,$$

ezért alkalmazhatóak a fejezet eredményei. Ebben az esetben véges n-re nézve a csődvalószínűséget, a két sorozatnál az eltérés

$$P(2 + \delta_k X_k > x) - P(X_k > x).$$

Szubexponenciális esetben ennek a tételnek a segítségével arra az esetre is ugyanezt az eredményt kapjuk, ha most $Y_{k,1}$ $Y_{k,2}$-től független, de azonos eloszlású.

Fontos eset még a Lundberg-kitevő segítségével számított csődvalószínűség. Ezt azoknál a valószínűségi változóknál tudjuk alkalmazni, amelyekre teljesül, hogy:

(A1)$c(u) := \lim_{n\to\infty} log(Eexp(uY_n))/n$ létezik $0 < u < u_0$ esetén.

(A2) $\exists!$ $0 < w < u_0$, hogy $c(w) = 0$.

A konvex rendezésre vonatkozó feltétel természetesen teljesül az eddig említett esetek mindegyikében, így a 2.1.1 tétellel azt kapjuk, hogy a tartalékolás esetén a csőd valószínűsége nem nagyobb, mint az eredeti esetben, amit eddig is tudtunk. De például abban az esetben, ha Y_k normális, mégpedig $N(\mu, \sigma^2)$, és azt az esetet nézzük, amikor $Y_{k,1}$ $Y_{k,2}$-től független, akkor mindkét sorozatra ugyanazt a $c(u)$ függvényt kapjuk. Ezt pedig konkrétan ki is tudjuk számolni, hiszen:

$$Eexp(uY_n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = exp(u\mu - \frac{1}{2}u^2\sigma^2),$$

amiből

$$w = 2\mu \frac{1 - e^{-\sigma}}{1 + e^{-\sigma}}.$$

4. fejezet

Összefoglalás

A szakdolgozatban megpróbáltam összefoglaló képet adni a csődvalószínűségek becsléseinek legelterjedtebb módszereiről, az első fejezetben bemutatva a két alapvető megközelítést, az egyedi és összetett modellt, a második részben olyan ismert matematikai modelleket írtam le, melyek az egyéni megközelítés esetén adnak hasznos eredményeket, felsorolva a legfontosabb, az ismertetett modellekkel kapcsolatos korábbi ismert eredményeket. A harmadik rész pedig röviden ismerteti a biztosítási tartalékkal kapcsolatos fogalmakat, a tartalékolás jelentőségét, majd egy tartalékolással kapcsolatos, eddig nem vizsgált problémát fogalmaz meg, amelyet a korábban ismertetett módszerekkel próbáltam meg vizsgálni, és a vizsgált esetek mindegyikében azt az eredményt kaptam, hogy aszimptotikusan nem változik a csőd valószínűsége.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom Dr. Arató Miklósnak, témavezetőmnek, aki rendszeres konzultációink révén rendkívül nagy segítségemre volt a dolgozat megírásában.

Irodalomjegyzék

Könyvek

[1] Thomas Mikosch: *Non-life Insurance Mathematics,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.

[2] Jan Grandell: *Non-life Insurance Mathematics,* Springer-Verlag New York, 1991.

[3] Søren Asmussen: *Ruin Probabilities,* World Scientific Publishing, 2000.

[4] Arató Miklós: *Nem-élet biztosítási matematika,* ELTE Eötvös Kiadó, 2001.

[5] Michaletzky György: *Kockázati folyamatok,* ELTE Eötvös Kiadó, 2001.

[6] Gennady Samorodnitsky, Murad Taqqu: *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stohastic Models with Infinite Variance,* Chapman and hall, New York, 1994.

Cikkek

[7] Gennady Samorodnitsky, Thomas Mikosch: *Ruin probability with claims modelled by a stationary ergodic stable process,* The Annals of Probability, Vol. 28, 1814-1851, 2000.

[8] Alfred Müller, Georg Pflug: *Asymptotic ruin probabilities for risk processec with dependent increments,* Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 28, 381-392, 2001.

[9] Gennady Samorodnitsky, Thomas Mikosch: *The supremum of a negative drift random walk with dependent heavy-tailed steps,* The Annals of Probability, Vol. 28, 1025-1064, 2000.

[10] Dimitrios Konstantinides, Thomas Mikosch: *Large deviations and ruin probabilities for solutions to stohastic recurrence equations with heavy-tailed innovations,* The Annals of Probability, Vol. 33, 1992-2035, 2005.

[11] Quihe Tang,Gurami Tsitsiashvili: *Randomly weighted sums of subexponential random variables with application to ruin theory,* Extremes, Vol. 6, 171-188, 2003.

[12] D. A. Korshunov, S. Schlegel, and V. Schmidt: *Asymptotics for random walks with dependent heavy-tailed increments,* Siberian Mathematical Journal, Vol. 44, 833-844, 2003.

[13] Roger J.A. Laevena, Marc J. Goovaerts, Tom Hoedemakers: *Some asymptotic results for sums of dependent random variables, with actuarial applications,* Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 37, 154-172, 2005.