Köszönetnyilvánítás

Hálásan köszönöm témavezetőmnek, Gács Andrásnak sok segítségét, és Montágh Balázsnak problémafelvetését, útmutatásait.

Egy Turán-típusú probléma többrészes gráfokban

Nagy Zoltán Lóránt

Kivonat

A következő gráfelméleti problémát vizsgáljuk: adva van egy G gráf n számozott csúcson. Keressük azt a minimális α-t, hogy egy n-részes gráfban, amelyben bármely két kupac között legalább α az élsűrűség, biztosan megtalálható G úgy, hogy a számozott csúcsok a megfelelő sorszámú kupacból valók. E keresett kritikus élsűrűséget pontosan meghatározzuk a körökre és a fákra, általános G-re pedig alsó és felső becslést adunk rá G maximális fokszámának függvényében.

1. Bevezetés

Turán Pál tétele indította el a gráfelmélet egy új ágát, az extremális gráfelméletet. Tételének általános kérdésfelvetését úgy fogalmazhatjuk meg, hogy egy n-pontú egyszerű gráf maximális élszámát keressük azzal a feltétellel, hogy a gráf ne tartalmazzon egy adott R (tiltott) részgráfot. Ezt a maximális élszámot jelöli $ex(n, R)$. Turán 1941-ben megfogalmazott tételében R a $(k+1)$-csúcsú teljes gráf.

1.1. TÉTEL. *(Turán) [2], [3] Ha egy n-pontú gráfban nincs K_{k+1}, akkor az élszáma legfeljebb $\frac{k-1}{2k}n^2$.*

A maximális élszám is meghatározható pontosan n és k függvényében. Legyen $n = kq + r$ alakban írva, ahol $0 \leq r < k$.

1.2. TÉTEL. *(Turán) [2], [3]*

$$ex(n, K_{k+1}) = \frac{k-1}{2k}n^2 - \frac{r(k-r)}{2k},$$

és ez az élszám egyetlen n-csúcsú gráf élszámára, a $T(n,k)$ Turán-gráfra vétetik fel, amely k közös elem nélküli csúcshalmazból áll, melyek csúcsszáma legfeljebb eggyel tér el egymástól, és a különböző csúcshalmazok között minden él be van húzva.

Erdős és Simonovits minden R tiltott gráfra meghatározta aszimptotikusan az $ex(n, R)$ értékét, pontosabban a következőt igazolták:

1.3. TÉTEL. *(Erdős-Simonovits), [1]* $ex(n, R) = (1 - \frac{1}{\chi(R)-1})\binom{n}{2} + o(n^2)$

Ha R kromatikus száma legalább három, akkor tehát $ex(n, R)$ n^2-es nagyságrendű. Páros gráfokra azonban a tétel csupán annyit állít, hogy $ex(n, R) = o(n^2)$, azaz a pontos nagyságrendet nem mutatja meg. A páros gráfokra a kérdés általánosságban is megoldatlan, speciális páros gráfokra ismert csupán a pontos nagyságrend; ezek közé tartoznak a fák is.

1.4. TÉTEL. *Ha R egy fa, akkor léteznek olyan a_R és b_R konstansok R-től függően, melyekre $a_R n < ex(n, R) < b_R n$ fennáll.*

A tételbeli konstansok könnyen megválaszthatóak a fa élszámának függvényében [4]. Az élszám maximumának pontos értéke csak speciális fákra ismert, mint például a csillag, vagy az út (Erdős és Gallai tétele [6]).

A Turán-tétel nyomán kifejlődő extremális gráfelmélet általánosabb kérdéseket is vizsgál. Általában néhány gráftulajdonság felsorolása után az a kérdés, hogy egy n-csúcsú, a tulajdonságokkal rendelkező gráfnak legalább vagy legfeljebb hány éle lehet.

Dolgozatunkban a következő változatát vizsgáljuk a problémának. n-részes gráfokban tiltjuk meg adott n-csúcsú gráf létezését abban az értelemben, hogy a gráf i. csúcsának az előre megszámozott i. kupacba kell esnie. Mint látni fogjuk, a maximális élszám ebben az esetben viszonylag könnyen meghatározható, ezért az élsűrűség minimumának legnagyobb értékét keressük majd az n-részes gráfban.

1.5. PROBLÉMA. *Legyen adott egy n-partíciós gráf a véges X_1, X_2,..., X_n csúcsosztályokkal. Tegyük fel, hogy minden csúcsosztály N-elemű. Arra a kérdésre keressük a választ, hogy legfeljebb hány éle lehet a gráfnak, ha nem tartalmazza részgráfként a K_n teljes gráfot.*

Világos, hogy ha két csúcsosztály között nem húzunk be élt, tehát N^2 él hiányzik az összes lehetséges $\binom{n}{2}N^2$ közül, akkor az így kapott gráf nem tartalmazza a K_n gráfot. A következő tételben megmutatjuk sokkal általánosabb körülmények között, hogy ennyi élnek valóban hiányoznia kell.

Vezessük be az élsűrűség fogalmát, észrevehetjük ugyanis, hogy ennek segítségével általánosabban megfogalmazhatjuk a problémát, eltekintve a csúcsosztályok mérete egyenlőségének feltételétől. Két csúcsosztály között definiáljuk az *élsűrűség*et, mint a behúzott és a lehetségesen behúzható élek hányadosa, tehát $d(X_i, X_j) = \frac{E(X_i,X_j)}{|X_i||X_j|}$.

További általánosítással kiterjesztjük a feladatot tetszőleges gráfra.

Legyen $G = G(n,m)$ egy egyszerű összefüggő gráf, amelynek n csúcsa és m éle van. A csúcsait azonosítsuk az $\{1, 2, ..., n\}$ halmazzal. Az i. csúcshoz rendeljük hozzá az X_i csúcsosztályt, és kössük ki, hogy két csúcsosztály között akkor mehet él, ha a nekik megfelelő csúcsok szomszédosak G-ben. $G = G(n,m)$-hez tehát egy olyan G^* n-partíciós gráfot rendelünk hozzá, amelyre a következő teljesül: $x \in X_i$, $y \in X_j$ csúcsok között akkor mehet

csak él, ha $ij \in E(G)$; tehát ha X_i és X_j szomszédosak. G-t a G^* *többrészes gráf faktorgráfjának hívjuk*, G^* pedig a G felfújtja.
Azt mondjuk, hogy *az n-partíciós gráf a G gráfot feszíti*, ha létezik az n-partíciós gráfnak n csúcsa különböző csúcsosztályokból, amelyek által feszített gráf tartalmazza G-t. Jelöljük d_e-vel az $e \in E(G)$ élhez tartozó *G^*-osztályok közötti élsűrűséget.*
Keressük az élsűrűségek összegének maximumát azzal a feltétellel, hogy az n-partíciós gráf ne feszítse a G gráfot.
Világos, hogy az eredeti problémában G a teljes gráf, és az n-partíciós gráf élszáma éppen az élsűrűségek összegének N^2-szerese.
Az így megfogalmazott probléma még nem általánosítja azt az esetet, amikor a csúcsosztályok különböző számosságúak lehetnek, hiszen ekkor az élsűrűségek összege nem lineáris függvénye a maximális élszámnak. Bevezetjük ezért a súlyozott gráfok fogalmát.
A $G(n, m)$ gráf i. csúcsához rendeljük hozzá az X_i csúcsosztályt, melyben minden $x \in X_i$ csúcshoz tartozik egy $w(x)$ nemnegatív súly is. Egy *csúcshalmaz súlyát* a halmazbeli csúcsok súlyösszegeként értelmezzük. A súlyozást kiterjeszthetjük az élekre is a következő módon: legyen az *xy él súlya* $w(xy) := w(x)w(y)$. Az élsűrűséget két partícióosztály között úgy definiáljuk, hogy összeadjuk a két osztályt összekötő élek súlyát, és ezt a két osztály súlyának szorzatával leosztjuk. Feltesszük a továbbiakban, hogy minden partícióosztályban a súlyok összege 1, ez a feltétel az élsűrűség vizsgálatában nem jelent megszorítást, hiszen egy csúcsosztályon belül a súlyokat adott konstanssal szorozva az élsűrűség nem változik.
A súlyozott gráf fogalma egyrészt a gráfok fogalmának természetes kiterjesztése a konstans 1 súlyozás mellett, másrészt a segítségével egyszerűen megoldható a kérdés akkor is, ha a csúcsosztályok elemszámára vonatkozóan nincs feltételünk.
Az 1.5 probléma általános megoldását írja le a következő tétel.

1.6. Tétel. *Legyen $G = G(n,m)$ egyszerű, összefüggő gráf. Tekintsük az olyan (n-partíciós) súlyozott gráfokat, melyeknek G a faktorgráfja, és a G gráfot nem feszítik. Az élsűrűségek összege ekkor legfeljebb $(m-1)$.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy, a feltételnek megfelelő G^* gráfot. Legyen G^+ az a gráf, amelynek csúcshalmaza és súlyozása megegyezik G^*-gal, és ahol minden élet behúzunk, ahol G-ben ment él. Tehát G a G^+ gráfnak is faktorgráfja lesz. Tekintsük G^* G^+-ra vonatkozó komplementerét, azaz $\overline{G^*} = G^+ \setminus G^*$, tehát ebben a gráfban két pont között pontosan akkor van összekötve, ha G^+-ban összekötöttek, de G^*-ban nem. Mivel a G gráfot nem feszíti a G^* gráf, ezért minden G-vel izomorf G^+ által feszített részgráfnak van éle $\overline{G^*}$-ben. Azt mondjuk, hogy ez a komplementerbeli él *fedi a G^+-beli G részgráfot.* Feladatunk tehát annak megmutatása, hogy a fedő élek összsúlya legalább 1. Az élek súlyozását, amely a csúcsok súlyainak szorzata volt, terjesszük ki a G^+ csúcsai által feszített olyan részgráfokra is, amelyeknek különböző csúcsosztályba esnek a csúcsai. Legyen a feszített gráf súlya a feszítő csúcsok súlyainak szorzata. A definícióból adódik, hogy ekkor az összes G^+-beli G-vel izomorf feszített részgráf súlyá-nak összege éppen a csúcsosztálybeli súlyösszegek szorzata, tehát 1.
Tekintsük most a $\overline{G^*}$-beli éleket, amelyeknek együtt fednie kell az összes G^+-beli G-vel izomorf feszített részgráfot. Egy xy fedő él éppen $w(xy)$ összsúlyú G^+-beli G-vel izomorf feszített részgráfot fed le, hiszen azokat fedi, amelyek tartalmazzák az x és y csúcsot, a többi csúcshalmazból bármelyik reprezentáns csúcsot választhatjuk.
Ez éppen azt jelenti, hogy a összes G-vel izomorf részgráf fedéséhez legalább 1 összsúlyú élre van szükségünk, amiből az állítás következik, hiszen ekkor a többi él összsúlya, tehát az élsűrűségek összege legfeljebb $(m-1)$ lehet. $\square$

A tétel ismeretében megválaszolhatjuk az eredeti, élszám maximumára vonatkozó kérdésünket is, a csúcsosztályok számossága egyenlőségére vonatkozó feltétellel, vagy anélkül.

1.7. KÖVETKEZMÉNY. *Tetszőleges $G(n,m)$ gráf esetén, egy n-partíciós G-t nem feszítő gráf, amely G felfújtja N csúcsszámú osztályokkal, legfeljebb $(m-1)N^2$ élt tartalmazhat.*

Bizonyítás. G^*-ban minden csúcsnak egységesen $\frac{1}{N}$ súlyt adva, minden csúcsosztály súlya 1 lesz, és minden él súlya $\frac{1}{N^2}$. Alkalmalmazva a tételt, az élsűrűségek összege legfeljebb $(m-1)$, azaz legfeljebb $(m-1)N^2$ élt tartalmazhat G^*. □

A tétel bizonyításából látszik az is, hogy nem egyedül az olyan gráfoknak lesz $(m-1)N^2$ éle, amelyekben G egyik élén az élsűrűség 0, mint a fenti példánkban láttuk. A szükséges feltétel az, hogy ne legyen két fedő él, amelyekhez található G-vel izomorf részgráf G^+-ban, amit mindketten fednek. Ellenkező esetben ugyanis az élek összesen 1 összsúlyú G-izomorf részgráfot fednek, de van közülük olyan, amelyik többszörösen fedett, emiatt van nem fedett is, szemben a feltevésünkkel. Emiatt létezik egy X_j csúcsosztály, amelyre illeszkedik minden fedő él, továbbá minden $x \in X_j$-ből csak egy csúcsosztályba vezethet fedő él. Mivel a fedő élek összsúlya 1, illetve esetünkben N^2 fedő él van, ezért minden $x \in X_j$-hez létezik egy X_j-vel szomszédos csúcsosztály, melynek minden eleme össze van kötve x-szel a $\overline{G^*}$ gráfban. Az ilyen gráfok valóban nem tartalmaznak feszített G gráfot, hiszen X_j egyik csúcsát sem tartalmazhatja ilyen. Ezzel leírtuk az egyenlőtlenséget élesen teljesítő gráfok struktúráját.

1.8. KÖVETKEZMÉNY. *Tetszőleges $G(n,m)$ gráf esetén egy n-partíciós G-t nem feszítő gráf, amely G felfújtja $|X_1|, |X_2|, ..., |X_n|$ csúcsszámú osztályokkal, legfeljebb $\sum_{ij \in E(G)} |X_i||X_j|$ -$min_{ij \in E(G)} \{|X_i||X_j|\}$ élet tartalmazhat.*

Bizonyítás. Ismét alkalmazzuk a tételt, legyen minden i-re az X_i-beli csúcsok súlya $\frac{1}{|X_i|}$. Mivel minden él súlya legfeljebb $\frac{1}{|X_k||X_l|}$ arra az $e = kl$ élre, amelyre a következménybeli minimum felvétetik, ezért legalább $|X_k||X_l|$ fedő élnek kell lennie. Ebből az állítás következik. $\square$

Az élsűrűségek összegének maximumát a G^* G-felfújt gráfban ezzel általános körülmények között is meghatároztuk, ha G^* nem tartalmaz tiltott G részgráfot.
Az előző problémának a következő rokonát vizsgáljuk a továbbiakban: az élsűrűségek legkisebbikének maximumát keressük a G^* G-felfújt gráfban azzal a feltétellel, hogy G^* nem tartalmazza a tiltott G részgráfot. Ennek megoldását keressük a következő fejezetekben.

1.9. PROBLÉMA. *Legyen adott G gráf n számozott csúcson.Azt a legnagyobb d számot keressük, amelyre teljesül hogy létezik egy n-partíciós súlyozott gráf a véges X_1, X_2,..., X_n csúcsosztályokkal, melynek minden osztálya között az élsűrűség legalább d, és amely nem tartalmazza részgráfként G-t úgy hogy G i. csúcsa az X_i osztályba esik.*

Az 1.5 problémához hasonlóan feltehető a kérdés úgy is, hogy adott egy n-partíciós súlyozott gráf a véges X_1, X_2,..., X_n csúcsosztályokkal, minden csúcsosztály N-elemű. Melyik az a maximális M, amelyre az egyes csúcsosztályok között behúzható M él úgy, hogy az így kapott n-partíciós gráf nem tartalmazza G-t a fent leírt módon.
Látható hogy ez a kérdés a 1.9 problémának nem speciális esete, de nagyon szoros kapcsolatban van vele, hiszen M maximumának megkeresése ekvivalens $d = \frac{M}{N^2}$ maximumának keresésével, ami éppen az élsűrűség.
A probléma megoldása nyilvánvalóan függ a csúcsosztályok elemszámától, ugyanakkor aszimptotikusan független tőle, ezt fogjuk belátni, tehát ha N nagy, a két kérdés lényegében ekvivalens.

Bevezetjünk a megoldás során használt jelöléseket:

Jelöljük $\Delta(G)$-vel, vagy rövidebben Δ-val a G gráf *maximális fokszámát*, D_i-vel az i. csúcs fokszámát, $\Gamma(z)$ pedig legyen a z *csúcs szomszédainak halmaza.*

A felfújt G^* *gráf minimális élsűrűsége* a G faktorgráf élei által meghatározott osztálypárok élsűrűségeinek minimuma.
A G gráf $d(G)$ *kritikus élsűrűségén* azt a legnagyobb d számot értjük, melyre G-hez létezik olyan G^* felfújás, hogy G^* élsűrűsége legalább d, és G^* nem feszíti G-t, azaz nincs olyan n-pontú reprezentánsrendszer az egyes osztályokból egyesével választva, hogy a pontok G-t feszítsék. A definíció nyilvánvalóan ekvivalens azzal a megfogalmazással, hogy $d(G)$ az a legkisebb szám, melyre $d(G) < d$ esetén a G gráf minden d-élsűrűségű felfújtja feszíti G-t. A G^* G-felfújtat az egyszerűség kedvéért *G-hez tartozó konstrukció*nak nevezzük, ha teljesíti azt a feltételt, hogy G-t nem feszíti részgráfként; az *optimális konstrukció* pedig az, amelyen emellett a $d(G)$ kritikus élsűrűség is felvétetik.

Világos, hogy minden G n-partíciós gráf felfogható súlyozott gráfként; minden csúcsnak 1 súlyt adva ugyanis az élsűrűség definíciója ekvivalens lesz az eredeti definícióval, és csúcsosztályonként 1-re normálva a súlyokat az élsűrűség változatlan marad. Ugyanakkor minden súlyozott n-partíciós gráfot tudunk közelíteni olyan súlyozatlan gráffal, ahol minden csúcsosztály N-elemű: a súlyozott gráf súlyainak arányában bontjuk kisebb alosztályokra a csúcsosztályokat, és a súlyozott gráf által megadott élstruktúra szerint teljes páros gráfokat illesztünk be azon alosztályok közé, amelyek az optimális konstrukcióban összekötött csúcsnak feleltünk meg. Könnyen látható, hogy ha N elég nagy, akkor az így kapott gráfot súlyozott gráfként tekintve az élsűrűségek a súlyozott gráf élsűrűségeit közelítik; sőt ha N tart a végtelenbe, akkor az élsűrűségi számok a kapott N-elemszámú csúcsosztályokból kapott gráfon tartanak a súlyozott n-partíciós gráf élűrűségeihez.

Így egyrészről minden $G(n,m)$-hez tartozó n-partíciós gráf konstrukciót ad, amelyek minimális d élsűrűsége nem nagyobb a kritikus élsűrűségnél, másrészt az optimális konstrukció módot ad arra, hogy a kritikus élsűrűséget megközelítsük olyan $G(n,m)$-hez tartozó n-partíciós gráfban, ahol minden csúcsosztály N elemű.

A dolgozatban a kritikus élsűrűség meghatározására teszünk kísérletet különböző gráfosztályok esetén. A 2. fejezetben teszünk néhány jelentős redukciós lépést, amely a megoldandó feladatot lényegesen egyszerűsíti, majd ennek segítségével a $d(G)$-re felső becslést adunk $\Delta(G)$ függvényében, végül ismertetjük Adrian Bondy, Jian Shen, Stéphan Thomassé és Carsten Thomassen eredményét, akik a kritikus élsűrűség kérdését a háromszögmentes, háromosztályú gráfok esetében vizsgálták [5]. Jellemezzük az optimális konstrukciókat, melynek segítségével megmutatjuk hogy a $d(G)$ gráfállandó monoton a részgráfokon. Kitérünk a kritikus élsűrűség jóldefiniáltságának kérdésére is. A 3. fejezetben a 2. fejezet eredményeire támaszkodva megoldjuk a problémát az n-pontú útra és n-pontú körre ($G = C_n$ és $G = P_n$). Kimutatjuk, hogy a kritikus élsűrűség n-pontú körre és $(n-1)$-pontú útra megegyezik, és megadjuk az élsűrűséghez tartozó optimális konstrukciót is. A 4. fejezetben numerikusan kiszámoljuk az egzakt megoldást a 3. fejezet problémájára. Az 5. fejezetben megvizsgáljuk a kérdést teljes gráfokra ($G = K_n$). A 6. fejezetben megoldjuk a problémát minden fára. Ennek segítségével $d(G)$-re alsó becslést adunk $\Delta(G)$ függvényében, valamint a fák esetén élesítjük a felső becslést is. Végül a 7. fejezetben összefoglaljuk az eddigi eredményeket, és kitérünk a nyitott problémákra.

Végig a súlyozott változatát vizsgáljuk a problémának, amely aszimptotikusan ekvivalens a súlyozás nélkülivel.

2. A probléma egyszerűsítése. A K_3 gráf vizsgálata.

A felfújás műveletében nem korlátoztuk, hogy G egy csúcsának hány pontú osztály lehet a képe. Az alábbiak szerint a kritikus élsűrűség olyan konstrukción is felvétetik, amelynek relatíve kevés pontja van.

2.1. Lemma. *Legyen G^* a $G(n,m)$ gráf felfújtjának súlyozott változata, és G fokszámai legyenek $D_1, D_2, ..., D_n$. Ha G-t nem tartalmazza részgráfként a G^* felfújt gráf és az egyes élsűrűségek élenként rendre α_1, α_2,..., α_m, akkor létezik olyan G' G-felfújt gráf is, ahol a D_i fokú csúcs képének elemszáma legfeljebb D_i ($\forall$ i-re) és az élsűrűségek rendre nem kisebbek mint α_1, α_2,..., α_m.*

A lemma bizonyítási technikája a [5] cikkből származik, a szerzők a K_3 háromszöggráfról igazolták a lemma állítását, az általános lemma bizonyítása ennek egyszerű általánosítása.

Bizonyítás. Csúcsosztályonként külön-külön bizonyíthatunk. Legyen például G-nek az i. csúcsa olyan, amelynek a képe a G^* felfújtban több mint D_i elemű, speciálisan az i képe legyen $X_i = (x_1, x_2, ..., x_k)$ ahol $k > D_i$. Jelöljük továbbá β_{sj}-vel az x_s csúcs j. osztálybeli szomszédainak összsúlyát, míg α_{ij}-vel az i. és j. osztály közötti élsűrűséget. (definíció szerint $\alpha_{ij} = \sum w(x_s) \cdot w(y_t) : x_s \in X_i,\ y_t \in X_j,\ x_s y_t \in E(G^*)$.)
Ezzel a jelöléssel a következőt kapjuk: $\alpha_{ij} = \sum_{s=1}^{k} w(x_s) \cdot \beta_{sj}$.
Tekintsük most a következő $\mathbb{R}^n$ -beli vektort: $(\beta_{s1}, \beta_{s2}, ..., \beta_{sn})$, azaz $s \in \{1, 2, ..., k\}$ fix, így meghatároztunk az i osztályához tartozó k darab vektort. Azon koordináták, amelyekhez tartozó csúccsal G-ben i nincs összekötve, egységesen 0 értékűek, ezeket a koordinátákat hagyjuk el, így D_i dimenziós vektorokat nyerünk, azaz $k > D_i$ pontot a D_i dimenziós térben. A G^* felfújtból továbbra is érvényes felfújást kapunk, ha kupaconként a súlyozást megváltoztatjuk. Tekintsük a k pontunk konvex burkát, ebben a konvex

burokban van előző megállapításunk szerint az $A_i(\alpha_{ij_1}, \alpha_{ij_2}, ..., \alpha_{ij_{D_i}})$ pont is, ahol $j_1, j_2, ..., j_{D_i}$ jelöli az i csúcs szomszédait G-ben. Az A_i-csúcsú pozitív térszögletet elmetszve a konvex burok határával, olyan pontokat kapunk, amelyek a fenti k pont közül legfeljebb D_i pont lineáris kombinációjaként előállnak. Válasszunk egyet a pontok közül, és vegyük a hozzá tartozó előállítást. Ezt az előállítást tekintve egy olyan súlyozást kapunk, ahol a nem-0 súlyú elemek száma legfeljebb D_i, és az így nyert új α_{ij} élsűrűségi számok rendre nem csökkentek az előzőekhez képest.
Ezt az eljárást G minden csúcsára alkalmazva kapjuk az állítást. $\square$

2.2. KÖVETKEZMÉNY. *A G gráf kritikus élsűrűsége G egy olyan G^* felfújtján is felvétetik, ahol $\forall\ x_i \in V(G)$ képe legfeljebb D_i pontú a G^* gráfban. A kritikus élsűrűség meghatározásához tehát elég az ilyen korlátozott pontszámú felfújt gráfok vizsgálata.*

Most visszatérünk a kritikus élsűrűség jól-definiáltságának kérdésére. A 2.2 következmény miatt a $d(G)$ szám kiszámolható egy zárt halmazon értelmezett függvény maximumaként, hiszen
$d(G)$ =max{max{min{$d_e : e \in E(G)$, ahol G^* rögzített konstrukció, amiben az $i.$ csúcsosztály D_i elemű és adott w a súlyozás, ahol csúcsosztályonként az összeg 1}: $w : V(G^*) \to \mathbb{R}_+$} : G^* konstrukció. }
Az utolsó maximum véges sok szám maximumként vehető, hiszen véges sok ponton csak véges sok élstruktúra felelhet meg a feltételnek, így Weierstrass tétele szerint a maximum valóban felvétetik.

2.3. TÉTEL. $d(G) \leq (1 - \frac{1}{\Delta^2})$.

Bizonyítás. Tekintsük a kritikus élsűrűséghez tartozó egyik optimális konstrukciót. Feltehetjük, hogy ebben minden osztály legfeljebb Δ elemű. Válasszuk ki minden osztályból a legnagyobb súlyú csúcsot, ezen súlyok mindegyike legalább $\frac{1}{\Delta}$. A feltétel szerint ezek a csúcsok nem feszítik a G gráfot, ezért valamelyik G-beli él hiányzik az általuk feszített részgráfból, ez azt jelenti, hogy a hiányzó élhez tartozó élsűrűség legfeljebb $(1 - \frac{1}{\Delta^2})$. □

A G-hez tartozó optimális konstrukció egy másik tulajdonságát mutatja a következő lemma.

2.4. LEMMA. *Tetszőleges G gráfhoz tartozó bármely G^* optimális konstrukció rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden G-beli élhez tartozó d_e élsűrűség egyenlő, tehát megegyezik $d(G)$-vel.*

Bizonyítás. Indirekten igazoljuk az állítást. Tegyük fel, hogy van egy olyan $e \in E(G)$ él, amelyre d_e>min $(d_f : f \in E(G))$=$d(G)$. G^*-ból ekkor előállítunk egy olyan G' konstrukciót, amelyre min $(d_f : f \in E(G))$nagyobb mint G^* esetében.
Válasszunk G-ben két olyan élet, jelöljük őket e-vel és f-fel, amelyek a következőt teljesítik: $d_e > d_f = d(G)$, továbbá $e = xy$ és $f = xz$ ugyanarra az $x \in V(G)$ csúcsra illeszkednek. G összefüggősége és a feltételünk miatt ilyet biztosan találunk. Állítsuk elő a G' konstrukciót G^*-ból úgy, hogy az x csúcs képéhez még egy x' pontot veszünk hozzá, amelyet összekötünk $\Gamma(x) - \{y\}$ teljes képével. G'-ben a csúcsok súlyai x képén kívül megegyeznek a G^*-beli súlyokkal, x' súlya legyen egy később jól megválasztott $\epsilon > 0$, x G^*-beli képe csúcsainak súlyát pedig szorozzuk meg $(1 - \epsilon)$-nal. Mivel $d(G)$<1, ezért e kivételével az x-re illeszkedő éleken az élsűrűség növekszik, miközben d_e pontosan ϵ-nal csökken. Válasszuk meg ϵ-t úgy, hogy $\epsilon < d_e - d(G)$ teljesüljön. Az így létrehozott G-felfújt nyilván nem feszíti G-t, hiszen G^*-beli csúcsok nem feszítették, és x' sem feszítheti, mivel y képével nincs összekötve. A $d(G)$ élsűrűség kevesebb G-beli élen vétetik fel mint G^* konstrukciójában, emiatt a lépést véges sokszor végrehajva olyan G'-t kapunk valóban, amiben az élsűrűségek mind meghaladják $d(G)$ értékét, ami a kritikus élsűrűség definíciójának ellentmond. □

2.5. KÖVETKEZMÉNY. *Ha egy G-hez tartozó konstrukcióban* $min\{d_e : e \in E(G)\} \neq max\{d_e : e \in E(G)\}$, *akkor a konstrukció nem optimális, és ezért* $d(G) > min\{d_e : e \in E(G)\}$.

2.6. TÉTEL. *Ha* G' *G-nek valódi részgráfja, akkor a neki megfelelő* d' *kritikus élsűrűségre* $d' < d$ *teljesül.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy G'-höz tartozó optimális G'^* konstrukciót. Ebből G-hez tartozó konstrukciót fogunk létrehozni, amelyben a minimális élsűrűség d', de létezik olyan e éle G-nek, amelyre $d_e > d'$, ebből az állítás a 2.5 következmény felhasználásával következik.
G^* konstrukcióban $V(G') \subseteq V(G)$ képe legyen $V(G'^*)$, és hagyjuk meg a G'^* konstrukcióbeli súlyozást és éleket is. $(V(G) \setminus V(G'))$ csúcsoknak a képe legyen 1-1 pont 1 súllyal, továbbá $(E(G) \setminus E(G'))$ élein legyen 1 az élsűrűség, tehát minden olyan pontot kössünk össze, amelyek G-beli ősképei olyan élt feszítenek, ami G'-ben nincs benne.
Mivel az így létrehozott konstrukció továbbra sem tartalmazza a feszített G' gráfot a neki megfelelő osztályokon, ezért G^* sem feszítheti G-t, hiszen a részgráfját sem feszíti. Ezért az így létrehozott G-hez tartozó nem optimális konstrukción $min\{(d_e) : e \in E(G)\} = d'$, amit igazolni akartunk. □

Bondy, Shen, Thomassé és Thomassen cikkében [5] a súlyozott 3-partíciós háromszögmentes gráfok kritikus élsűrűségéről kimutatják, hogy az éppen az aranymetszési szám, $(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$. Bevezetik a *ciklikus hármas* fogalmát; egy (α, β, γ) hármas *ciklikus*, amennyiben teljesíti a következő feltételeket:
$\alpha\beta + \gamma > 1$, $\beta\gamma + \alpha > 1$, $\gamma\alpha + \beta > 1$.
Ha G^*-hoz tartozó élsűrűségek *ciklikus hármas*-t alkotnak, akkor G^*-ot *ciklikus*-nak hívjuk. Ennek a fogalomnak a felhasználásával a következő jellemzést bizonyították be:

2.7. TÉTEL. *Ha G^* ciklikus, akkor tartalmaz háromszöget (azaz feszíti $G = K_3$-at).*

Amennyiben viszont α, β, γ nem alkot ciklikus hármast, tehát például $\alpha\beta + \gamma \leq 1$, akkor létezik olyan háromrészes súlyozott G' gráf, melynek az α', β', γ' élsűrűségi számaira teljesül, hogy

$\alpha' \geq \alpha$, $\beta' \geq \beta'$, $\gamma' \geq \gamma$,

ugyanakkor G' nem tartalmaz háromszöget. (Az általános terminológia szerint tehát olyan K_3-felfújt, amely nem feszíti a K_3-at.)

A tétel első feléből következik, hogy $d(C_3) \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ míg a második fele igazolja hogy $d(C_3) \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, emiatt $d(C_3) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ugyanakkor ennél jóval általánosabbat bizonyít: szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy megadott három élsűrűségi szám garantálja a feszített háromszög létezését. Erre a típusú általánosabb megközelítésre az 5. fejezetben térünk vissza, nagyobb pontszámú teljes gráfokon vizsgálva a problémát.

3. A $G = C_n$ és a $G = P_n$ esete

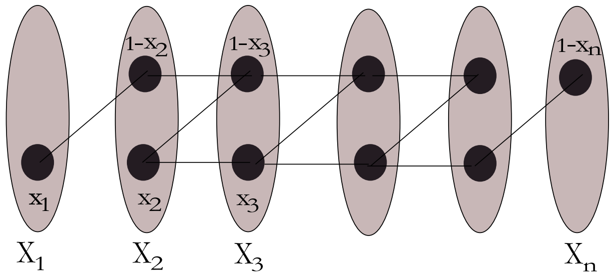
Ebben a fejezetben meghatározzuk az n-pontú kör és az n-pontú út kritikus élsűrűségét, és megadjuk a hozzájuk tartozó optimális konstrukciót is. A fejezet felépítése a következő lesz. Egy optimális konstrukciót szeretnénk meghatározni először a fenti típusú gráfokhoz, mégpedig először annak élstruktúrája, majd a súlyozása megadásával. A 2.2 következmény felhasználásával az optimális konstrukciót elég az olyan G-felfújtak között keresni, ahol minden gráfcsúcs képe legfeljebb kételemű, speciálisan az utak végpontjáról feltehető, hogy képük egyelemű. Megmutatható, hogy az ilyen felfújtak között az optimális konstrukció izomorfia erejéig lényegében egyértelmű. Ezt a kör esetében két lépésben tesszük meg, először a konstrukciók lehetséges számát kettőre redukáljuk, majd megmutatjuk, hogy valójában optimalitás esetén ez a kettő lényegében egybeesik, azaz a 0-súlyú csúcsoktól eltekintve a két konstrukció izomorf.

Belátjuk ezután, hogy az n-pontú kör kritikus élsűrűsége megegyezik az $(n+1)$-pontú út kritikus élsűrűségével. Végül megadjuk azt az egyenletet, aminek a $d(C_n)$ gyöke lesz, és meghatározzuk, hogy melyik gyökről van szó.

Jelöljük a $G(n,m)$ gráf csúcsait az $\{1, 2, ..., n\}$ halmaz elemeivel. Az általunk vizsgált gráfok esetében minden csúcs képe legfeljebb kételemű, legyenek ezek x_i és $(1 - x_i)$ szimbólummal jelölve, melyek egyúttal a csúcsok súlyát is kifejezik. Most csak annyit teszünk fel, hogy ezek a súlyok a $[0, 1]$ intervallumba esnek, tehát virtuális 0-súlyú csúcsokat is megengedünk. n-ről feltesszük, hogy legalább 3. Kör esetén ez nem jelent további feltételt, P_2 esetében $d(P_2) = 0$ nyilvánvaló.

3.1. KONSTRUKCIÓ. *A P_n útra vonatkozó konstrukcióban az út két végpontjáról feltehető hogy egyelemű, így azokat x_1-gyel és $(1 - x_n)$-nel jelöljük, ezek 1-súlyú pontok. A P_n^* konstrukcióban legyenek az élek a következők:*

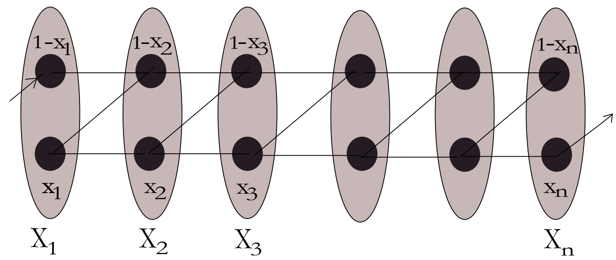
- *x_i és x_{i+1} össze van kötve $i = 2, ..., (n-2)$-re,*
- *$(1 - x_i)$ és $(1 - x_{i+1})$ össze van kötve $i = 2, ..., (n-2)$-re,*
- *x_i és $(1 - x_{i+1})$ össze van kötve $i = 1, ..., (n-1)$-re.*



1. ábra. P_n optimális konstrukciója

3.2. Konstrukció. *A C_n^* konstrukcióban legyenek az élek a következők:*

- *x_i és x_{i+1} össze van kötve $i = 1, ..., (n-1)$-re,*
- *$(1 - x_i)$ és $(1 - x_{i+1})$ össze van kötve $i = 1, ..., (n-1)$-re*
- *x_i és $(1 - x_{i+1})$ össze van kötve $i = 1, ..., (n-1)$-re*
- *x_n és $(1 - x_1)$ össze van kötve.*



2. ábra. C_n optimális konstrukciója

3.3. Tétel. *A* 3.1 *konstrukció megfelelő súlyozás mellett optimális P_n-re.*

Bizonyítás. A 2.2 következmény alapján tudjuk, hogy a fokszámok által korlátozott nagyságú képhalmazokkal is létezik optimális konstrukció. Azt fogjuk bizonyítani, hogy ha 1 és n csúcs képe egyelemű halmaz, a többi csúcs képe legfeljebb kételemű, akkor a konstrukcióban a fenti élstruktúrájú az optimális felfújt P_n^* gráf.

Az optimális konstrukció élstruktúrája maximális, tehát minden új él hozzávételével feszített P_n-et találnánk a felfújt gráfban. Azt is tudjuk, hogy a 2.4 Lemma miatt az optimális konstrukciók olyan tulajdonságúak, hogy minden d_e élsűrűségük egyenlő. Emiatt az x_1 csúcs pontosan egy X_2-beli csúccsal van összekötve, ellenkező esetben $d(P_n) = 0$ vagy $d(P_n) = 1$ lenne, márpedig a konstrukció tetszőleges pozitív súlyozásából látszik hogy $d(G) > 0$, emellett $d(G) < 1$ is triviális a feszített P_n-mentesség miatt. Feltehető tehát hogy x_1 és $(1 - x_2)$ vannak összekötve X_1 és X_2 halmazok között.

Általános lépésünkben, ha meghatároztuk az éleket az X_1-től egészen az X_i osztályig, és a fenti élstruktúra szerint haladnak $1 \leq j \leq i$-re, akkor megvizsgáljuk az optimális gráfban a lehetséges éleket X_i és X_{i+1} között. Megfigyeltük, hogy x_i-n át nem vezethet út X_1-ből X_n-be. Az x_i csúcs X_{i+1} minden pontjával össze van kötve, mivel az élstruktúra maximális, és x_i-t nem tartalmazhatja feszített P_n. $(1 - x_i)$ emiatt legfeljebb egy X_{i+1}-beli ponttal lehet összekötve, ellenkező esetben ezen az élen 1 volna az élsűrűség, ezért feltehető, hogy x_{i+1}-gyel nincs összekötve. Ebből adódik hogy x_{i+1}-en át nem vezethet út X_1-ből X_n-be, hiszen X_1 felé csak x_i-be léphetnénk, amin át nincs feszített út.

Ha $i = (n - 1)$, akkor a jellemzéssel kész is vagyunk, ugyanis $(1 - x_i)$-ből vezet út X_1-be, ezért X_n-nel nem lehet összekötve.
Ha $i < (n - 1)$, akkor X_{i+1} 2-pontú. Ha $(1 - x_i)$-ből nem vezetne él X_{i+1}-be, akkor X_{i+1} egyik pontjába sem lehetne X_1-ből úton eljutni, ezért az élstruktúra maximalitási tulajdonsága miatt X_{i+1} és X_{i+2} minden pontját összeköthetnénk, ami ellentmondást jelentene, hiszen minden $d_e < 1$, amint azt a bizonyítás elején megállapítottuk.

Ezzel beláttuk hogy valóban a 3.1 konstrukció szerinti az optimális élstruktúra.

□

3.4. TÉTEL. *A* 3.2 *konstrukció megfelelő súlyozás mellett optimális C_n-re.*

Először azt bizonyítjuk be, hogy ha nincs optimális konstrukció, amelyben C_n valamelyik csúcsának képe egyelemű, akkor az optimális élstruktúra a 3.2 konstrukciónak felel meg. Később látni fogjuk, hogy valójában nem ez a helyzet, mert belátjuk, hogy a 3.2 konstrukció rögzített élstruktúrája mellett a minimális d_e élsűrűség maximuma akkor vétetik fel, ha lesz 0-súlyú pont is, tehát az optimális konstrukcióról feltehető, hogy lesz egypontú kupac is. Ezt követően belátjuk, hogy az optimális konstrukció C_n-re valamilyen értelemben megfelel a P_{n+1}-hez tartozó optimális konsrukciónak, ezáltal a 3.3 tételt használhatjuk a bizonyítás befejezéséhez.
A bizonyítás során megelőlegezzük, hogy $d(C_n) > \frac{1}{2}$, ami a konstrukció megfelelő súlyozásából következik, ezt a tétel bizonyítását követően fogjuk látni.

3.5. LEMMA. *Feltehetjük, hogy az optimális konstrukcióban minden csúcsosztály legfeljebb kételemű. Ha nincs olyan optimális konstrukció, amelyben C_n valamelyik csúcsának képe egyelemű, akkor az optimális élstruktúra a 3.2 konstrukciónak felel meg.*

Bizonyítás. A lemma feltételét a 2.2 következménnyel összevetve kapjuk, hogy minden i csúcs képe a felfújt C_n^* gráfban két pozitív súlyú csúcs. Ismét kihasználhatjuk, hogy az optimális konstrukció élstruktúrája maximális, tehát minden új él hozzávételével feszített C_n-et találnánk a felfújt gráfban. Tudjuk továbbá, hogy a 2.4 Lemma miatt az optimális konstrukcióban minden d_e élsűrűség egyenlő.

Ha a felfújt gráfban minden csúcsnak lenne szomszédja mindkét szomszédos osztályban, akkor x_1-ből elindulva a kör mentén éleken lépkedve a $2n$ csúcson egy $2n$ hosszú kört kapnánk; és a C_n-mentesség miatt ekkor már nem is lehetne több élünk. Válasszunk minden kupacból egy legalább $\frac{1}{2}$ súlyú pontot, jelöljük ezeket y_i-vel. Ezek nem feszíthetik C_n-et, emiatt lesz egy olyan $e = ij$ éle a C_n gráfnak, amit nem feszítenek a pontok. Az e élen a d_e élsűrűség nem haladhatná meg az $\frac{1}{2}$-et, szemben a később mutatott konstrukciónkkal, mivel
$d_e = (1 - y_j)y_i + (1 - y_i)y_j \leq \frac{1}{2}$ hiszen $0 \leq 2(y_i - \frac{1}{2})(y_j - \frac{1}{2})$.

Feltehető tehát, hogy X_1-ben egy csúcsnak nincs X_n-beli szomszédja, ez a fenti megállapítás miatt $\frac{1}{2}$-nél kisebb súlyú lehet csak, x_1-gyel jelöljük. x_1-et a feltételezésünk miatt nem tartalmazhatja C_n^*-ban feszített C_n, emiatt az élstruktúra maximalitásából következik hogy x_1 X_2 mindkét pontjával össze van kötve. $\frac{1}{2} < d(C_n) < 1$ miatt $(1 - x_1)$ pontosan eggyel lehet X_2 két pontja közül összekötve, jelöljük ezt $(1 - x_2)$-vel.

Általános lépésünkben, ha meghatároztuk az éleket az X_1-től egészen az X_i osztályig, és a fenti élstruktúra szerint haladnak $1 < i < n$-re, akkor megvizsgáljuk az optimális gráfban a lehetséges éleket X_i és X_{i+1} között. Megfigyelhettük, hogy x_i-n át nincs feszített C_n mert x_i X_{i-1}-gyel csak $x_i x_{i-1}$ éllel van összekötve, és x_{i-1}-ről már tudtuk ezt.

Az x_i csúcs X_{i+1} minden pontjával össze van kötve, mivel az élstruktúra maximális, és x_i-t nem tartalmazhatja feszített C_n. $(1-x_i)$ emiatt legfeljebb egy X_{i+1}-beli ponttal lehet összekötve, ellenkező esetben ezen az élen 1 volna az élsűrűség, ezért feltehető, hogy x_{i+1}-gyel nincs összekötve. Ebből adódik hogy x_{i+1}-en át nem vezethet feszített C_n, hiszen X_i felé csak x_i-be léphetnénk, amin át nincs feszített C_n. Két esetünk marad annak függvényében, hogy $(1-x_i)(1-x_{i+1})$ él-e vagy sem.

Ha $(1-x_i)(1-x_{i+1})$ él, akkor X_1-től egészen az X_{i+1} osztályig az általunk megadott módon haladnak az élek. Amennyiben ily módon X_n-ig eljutunk, X_n és X_1 között már automatikusan adódik, hogy a C_n-mentesség miatt csak az $x_n(1-x_1)$ él lehet behúzva, és $d(C_n) > 0$ miatt ez valóban szükséges él.

Ha $(1-x_i)(1-x_{i+1})$ nem éle az optimális C_n^*-nak, akkor azt láthatjuk hogy X_{i+1} egyik csúcsán sem mehet át C_n, mert X_i-vel csak x_i-n át vannak összekötve, emaitt az élstruktúra maximalitása miatt X_{i+1} mindkét csúcsát X_{i+2} mindkét csúcsával összeköthetnénk, ami $\forall d_e < 1$ miatt ellentmondást jelentene, kivéve ha $i = (n-1)$. Ám ekkor is az élstruktúra maximalitása miatt x_n és $(1-x_n)$ szomszédai: x_{n-1} illetve $(1-x_1)$ megegyeznek, ami azt jelentené, hogy az $n \in V(C_n)$ csúcs képe egyelemű lehetne, szemben a feltevésünkkel; így ez az eset nem állhat fent.

Ezzel a bizonyítást befejeztük. □

3.6. LEMMA. *A 3.2 C_n-konstrukció csak akkor lehet optimális, ha van a pontok között 0-súlyú is, nevezetesen x_1=0 vagy $(1-x_n)$=0.*

Bizonyítás. Indirekten igazolunk. Tegyük fel, hogy állításunkkal szemben az optimális konstrukció a fent leírt, de nem tartalmaz 0-súlyú pontot. Jelöljük d-vel a minimális élsűrűséget a konstrukcióban, amely feltételezésünk szerint a kritikus élsűrűség. A 2.4 lemmát használva tudjuk hogy minden

$e \in E(C_n)$-re $d_e = d$. Felírva minden élre az ezt kifejező egyenletet, n egyenletet nyerünk, és $(n+1)$ ismeretlenünk van: $\{x_1, x_2, ..., x_n, d\}$. Az egyenleteink:

- $(1-d) = (1-x_1)x_2$
- $(1-d) = (1-x_2)x_3$

  ...

- $(1-d) = 1 - x_n(1-x_1)$

x_1-et és d-t paraméternek választva sorban egyértelműen kifejezhetőek a további súlyok ezek segítségével, hiszen az i. egyenlet az első $(i+1)$ súlyt tartalmazza csak, és indukció szerint az első i súlyt már kifejeztük a paraméterek segítségével. Azt állítjuk, hogy teljesülni fog $x_i < x_{i+1}$ $1 \leq i < n$-re. Ez $i = 1$-re teljesül mivel
$(1-x_1) > x_n(1-x_1) = d > (1-x_2)$ az 1. és az n. egyenlet miatt, tehát $(1-x_1) > (1-x_2)$ amit igazolni akartunk. Indukcióval kapjuk az álítást minden i-re, hiszen az $(i-1)$. és i. egyenletet összevetve
$\frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{(1-x_{i-1})}{(1-x_i)}$.) Ebből következik, hogy $0 < x_1 < ... < x_n < 1$.
Ha virtuális 0 súlyú pontokat is megengednénk, akkor a levezetésünkben az egyenlőség is minden ponton megengedett, amiből viszont látszik az állítás második fele, hiszen ha a súlyok között van 0, akkor x_1 vagy $(1-x_n)$ is az. Ez azért van, mert ha $x_i = 0$, akkor $x_1, ..., x_i$ mind 0, hasonlóképpen ha $(1-x_i) = 0$, akkor $(1-x_i), ..., (1-x_n)$ is mind 0. Azonban ha tőlük különböző 0-súlyú pontot találnánk, akkor az egyenlőtlenséglánc garantálná hogy $x_1 = x_2 = 0$ vagy $(1-x_n) = (1-x_{n-1}) = 0$, amiből $d = 1$ ellentmondást kapnánk.
Feltehetjük, hogy $x_2x_3...x_{n-1} \leq (1-x_2)(1-x_3)...(1-x_{n-1})$, hiszen ellenkező esetben $x_i = (1-x_{n+1-i})$ súlyozást választva, az eredetivel izomorf súlyozott gráfot kapnánk, ahol a feltételünk már teljesül.

Válasszunk egy $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ ε-sereget, amely teljesíti a következő feltételeket:

- $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} = \frac{x_n}{(1-x_{n-1})}$

  ...

- $\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3} = \frac{x_4}{(1-x_3)}$

- $\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} = \frac{x_3}{(1-x_2)}$

- $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{x_2-\varepsilon_2}{(1-x_1)}$.

Elegendően kicsinek választva ε_n-t, elérhető, hogy $(x_i - \varepsilon_i) > 0$ teljesüljön minden i-re.
Készítsük el most az új $x'_i = x_i - \varepsilon_i$ súlyozást. Vizsgáljuk meg hogyan változnak az egyes élsűrűségek.

- X_1 és X_2 között $1-d = (1-x_1)x_2 = (1-x'_1)x'_2$, azaz az élsűrűség nem változik.

- i és $i+1$ között $1 < i < n$ esetén $1-d = (1-x_i)x_{i+1} > (1-x_i)x_{i+1} + \varepsilon_i x_{i+1} - \varepsilon_{i+1}(1-x_i) - \varepsilon_i\varepsilon_{i+1} = (1-x_i)x_{i+1} - \varepsilon_i\varepsilon_{i+1} = (1-x'_i)x'_{i+1}$, azaz az élsűrűség nő.

- X_n és X_1 között kell csak garantálni, hogy nem csökken az élsűrűség, és ellentmondást kapunk.

Az kell tehát, hogy
$d = x_n(1-x_1) \leq x'_n(1-x'_1) = (x_n - \varepsilon_n)(1 - x_1 + \varepsilon_1)$, azaz
$((1-x_1) + \varepsilon_1)\varepsilon_n \leq x_n\varepsilon_1$.
Alakítsuk át ezt a kifejezést: $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} \leq \frac{(x_n-\varepsilon_n)}{(1-x_1)}$.

Itt a baloldalt pontosan ismerjük: az ε-ok arányára vonatkozó egyenleteket összeszorozva a baloldalt kapjuk. Vagyis a következőt elég bizonyítanunk:

$$\frac{(x_2-\varepsilon_2)x_3...x_n}{(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_{n-1})} \leq \frac{(x_n-\varepsilon_n)}{(1-x_1)}$$

Feltettük, hogy $\frac{x_3...x_{n-1}}{(1-x_2)...(1-x_{n-1})} \leq \frac{1}{x_2}$, ezért elég ha belátjuk, hogy $\frac{(x_2-\varepsilon_2)x_n}{x_2} \leq (x_n-\varepsilon_n) \Leftrightarrow x_2\varepsilon_n \leq x_n\varepsilon_2$.
Ez pedig szintén a feltételből következik, hiszen az ε-os egyenletek újbóli összeszorzásával

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2} = \frac{x_n x_{n-1}...x_3}{(1-x_{n-1})...(1-x_3)(1-x_2)} \leq x_n\frac{1}{x_2}$$

ekvivalens azzal amit igazolni akartunk.
A súlyozás módosításával tehát olyan konstrukciót kaptunk, ahol az élsűrűségek nem egyenlőek, hiszen x_1x_n és x_1x_2 élek kivételével az élsűrűség növekedett, e két élen pedig nem csökkent. Ez ellentmond a 2.5 következmény miatt a kiindulási feltevésünknek, tehát az állítás igaz. □

3.7. Tétel. $d(P_{n+1}) = d(C_n)$

Bizonyítás. Optimális konstrukcióból indulunk mindkét irányba. Ha P^*_{n+1} egy n hosszú útnak megfelelő optimális, 2.1 lemma szerinti konstrukció, akkor az út két végpontját egymással összeragasztva C_n körre is kapunk egy konstrukciót, amiben a minimális élsűrűség éppen $d(P_{n+1})$, és feszített C_n-et nem tartalmaz. Másrészt a C_n körnek megfelelő optimális konstrukcióról feltehető, hogy van egy olyan osztály, amely csak egy csúcsból áll; ezt a csúcsot kettéosztva éppen egy P_{n+1}-hez tartozó konstrukciót nyerünk, amelyben a minimális élsűrűség $d(C_n)$, és ez a konstrukció sem feszít P_{n+1}-et. Ebből következik, hogy a kritikus élsűrűség a két gráfra megegyezik. □

Azt kaptuk tehát, hogy a 3.1 konstrukcióból a lemma ragasztási trükkje adja C_n optimális konstrukcióját. Vegyük észre, hogy ez éppen megegyezik a 3.2 konstrukcióban a 3.6 lemma által leírt virtuális (0-súlyú) ponttal kiegészített felfújt gráffal. Így valóban bebizonyosodott, hogy a 3.2 konstrukció optimális konstrukció a C_n gráfra, azzal a feltétellel, hogy x_1 vagy $(1 - x_n)$ súlya 0.

4. A kritikus élsűrűség egzakt meghatározása körökre és utakra

Az előző fejezet tételei nyomán kiszámolhatjuk a körökre és utakra a kritikus élsűrűséget. A 3.7 tétel értelmében mostantól elég utakkal foglalkoznunk, feltehetjük tehát hogy $G = P_{n+1}$ az $(n+1)$-csúcsú, n-élű út. $(n > 2)$
Miután a 3.1 konstrukcióról a 3.3 tételben beláttuk, hogy optimális a megfelelő súlyozással, ezért a súlyok segítségével $d(C_n) = d(P_{n+1})$-re élszámnyi egyenletet felírva kifejezzük a kritikus élsűrűséget. Jelöljük az egyszerűség kedvéért ezt az élsűrűséget d_n-nel. Felhasználva hogy $x_1 = (1 - x_{n+1}) = 1$, a következő egyenletrendszerhez jutunk:
$(1 - d_n) = x_2$
$(1 - d_n) = (1 - x_i)x_{i+1}$ ha $i = 2, ..., (n-1)$
$(1 - d_n) = (1 - x_n)$.

Vezessük be az $F_i(d) = x_i$ függvényt, amely a d élsűrűség függvényében megadja az x_i súlyt. Felhasználva a fenti egyenleteket, a következő rekurzióhoz jutunk:

* $F_1(d) = 1$
* $F_2(d) = (1 - d)$
* $F_i(d) = \frac{1-d}{1-F_{i-1}(d)}$ ha $2 < i \leq n$.

Ugyanakkor az utolsó egyenlet alapján $F_n(d) = d$ (*),
tehát d_n a (*) egyenlet megoldása lesz. A rekurzív definíció szerint F_n egy egyváltozós racionális törtfüggvény lesz, amelynek a nevezőjével felszorozva d_n-re egy egyenletet kapunk. Az alábbi tétel jellemzi a kapott egyenletet, és pontosan megadja, hogy az egyenlet melyik gyöke lesz a megoldás.

4.1. TÉTEL. *Az $F_n(d) = d$ racionális törtfüggvényből kapott egyenlet legnagyobb pozitív gyöke lesz a d_n kritikus élsűrűség.*

Bizonyítás. A bizonyítást több lépésben végezzük. Először belátjuk, hogy a legnagyobb gyök a $(0,1)$ intervallumba esik, majd megmutatjuk hogy csak egy olyan d megoldás lehet, amelyre $x_i \in (0,1)$ minden i-re. Végül belátjuk, hogy ez a d lesz a legnagyobb megoldás a valós gyökök között.

4.2. LEMMA. $d \geq 1 \Rightarrow F_n(d) \neq d$.

Bizonyítás. Ha $d > 1$, akkor $F_2(d) = x_2 < 0$ a második egyenlet miatt, innen indukcióval $F_i(d) = \frac{1-d}{1-F_{i-1}(d)} < 0$. Tehát $F_i(d) < 0 < 1 < d$, ebben az esetben az állítás igaz.
Ha $d = 1$, akkor $F_2(d) = 0$, innen indukcióval$F_n(d) = 0$, ami ellentmond az $F_n(d) = d$ egyenletnek.

□

4.3. LEMMA. *Egyetlen olyan $d \in (0,1)$ megoldása van az egyenletnek, amelyre $x_i \in (0,1)$ $\forall i \in \{1,2,...,n\}$.*

Bizonyítás. Az előző fejezet kombinatorikus úton igazolja, hogy a kritikus élsűrűségre a feltétel fennáll. Tegyük fel, hogy állításunkkal szemben két ilyen d megoldás is létezne: $d^{(1)} < d^{(2)}$. Az egyenletekből adódóan ekkor $F_2(d^{(1)}) = (1 - d^{(1)}) > (1 - d^{(2)}) = F_2(d^{(2)})$, majd innen indukcióval $F_i(d^{(1)}) = \frac{(1-d^{(1)})}{1-F_{i-1}(d^{(1)})} > \frac{(1-d^{(2)})}{1-F_{i-1}(d^{(2)})} = F_i(d^{(2)})$ $(i \leq n)$-re. Kihasználtuk közben, hogy feltételezésünk szerint $x_i \in (0,1)$, azaz minden nevező pozitív. $(i = n)$-re alkalmazva $F_n(d^{(1)}) > F_n(d^{(2)})$-t kapjuk, ami ellentmond $d^{(1)} < d^{(2)}$-nek. Tehát csak d_n rendelkezik a lemma által megkívánt tulajdonsággal. □

4.4. LEMMA. *d_n az $F_n(d) = d$ egyenlet valós gyökei közül a legnagyobb.*

Bizonyítás. Azt fogjuk igazolni, hogy $d_n < d < 1$ szintén teljesíti az $x_i \in (0,1) \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ feltételeket, ezért nem lehet az előző lemma miatt d_n-nél nagyobb gyök. Ismét az egyenleteket használjuk:
$0 < F_2(d) = (1-d) < (1-d_n) = F_2(d_n) < 1$, továbbá az i. egyenletből
$0 < F_i(d) = \frac{(1-d)}{1-F_{i-1}(d)} < \frac{(1-d_n)}{1-F_{i-1}(d_n)} = F_i(d_n) < 1$, felhasználva
$F_{i-1}(d) < F_{i-1}(d_n)$-et indukcióval. Ezzel az állításunkat igazoltuk. □

A három lemma egymás utáni alkalmazásából a tétel állítása következik. □

4.5. ÁLLÍTÁS. $d_{(n-1)} < d_n$.

Bizonyítás. A 2.6 tételből következik az állítás, hiszen P_n részgráfja $P_{(n+1)}$-nek. □

Egyúttal a 3.7 tétel miatt a kritikus élsűrűség körökre is nő.

Ezen a ponton visszautalunk a bizonyítás egy megelőlegzett lépésére: $d_n > \frac{1}{2}$ ha $(n > 2)$, hiszen már $n = 3$-ra is $d_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Kiszámolva kis n-ekre a konstrukció által bizonyított egyenleteket, a következő élsűrűségi számokat kapjuk:
$d_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ [$d^2 + d - 1 = 0$ egyenletből]
$d_4 = \frac{2}{3} \approx 0.667$ [$(1-d) = (2d-1) \rightarrow 3d - 2 = 0$ egyenletből]
$d_5 \approx 0.692$ [$(1-d)(2d-1) = d(d^2+d-1) \rightarrow d^3 + 3d^2 - 4d + 1 = 0$ egyenletből]
$d_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ [$(1-d)(d^2+d-1) = d(3d^2-2d) \rightarrow 4d^3 - 2d^2 - 2d + 1 = 0$ egyenletből]
$d_7 \approx 0.717$ [$(1-d)(3d-2) = (d^3+3d^2-4d+1) \rightarrow d^3 + 6d^2 - 9d + 3 = 0$ egyenletből.]
$d_8 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \approx 0.724.$

A d_n sorozat korlátos és monoton nő, ezért létezik határértéke, melyet meg is tudunk határozni.

4.6. TÉTEL. *$d_n < \frac{3}{4}$ és $d_n \to \frac{3}{4}$.*

Bizonyítás. Az állítás első fele következik a 2.3 tételből, a d_n szigorúan monoton növekedése mutatja, hogy a tételben nem állhat egyenlőség sem. A konvergenciáról szóló állítást átfogalmazhatjuk a következőképpen: minden $d < \frac{3}{4}$ élsűrűségi számra létezik olyan n, melyre $d \leq d_n$.
Válasszunk ugyanis egy tetszőleges $d < \frac{3}{4}$ számot. Kezdjük felépíteni a 3.1 konstrukciót az ennek a d számnak megfelelő súlyozással, tehát $F_i(d) = x_i$ legyen definiálva a korábbi rekurzió szerint. A 3.6 lemmában igazoltuk, hogy a rekurzív egyenletek biztosítják $F_i(d)$ monoton növekedését, amíg $F_i(d) < 1$. Vizsgáljuk meg, lehetséges volna-e, hogy $F_i(d) < 1 \quad \forall i$-re teljesüljön. A monoton növekedési tulajdonság miatt ekkor létezik egy $0 < h < 1$ határértéke az $F_i(d)$ sorozatnak, melyre fennáll a rekurzív egyenleteink alapján, hogy $(1-d) = (1-h)h$.
Ám vegyük észre, hogy feltételezésünk szerint $(1-d) > \frac{1}{4} \geq (1-h)h$ a számítani-mértani közepek közti egyenlőtlenség miatt; tehát ez az eset nem állhat fenn. Létezik tehát egy N szám, melyre $i \leq N$ esetén $F_i(d) < 1$ teljesül, azonban $F_{N+1} = \frac{(1-d)}{(1-F_N)} \geq 1$. Tekintsük ekkor a 3.1 konstrukciót P_{N+1}-re, ahol legyenek az x_i súlyok a fent számított $F_i(d)$ értékkel egyenlőek ha $1 < i < (N+1)$, legyen továbbá $x_1 = 1$ és $(1 - x_{N+1}) = 1$. Ekkor a súlyozás érvényes, hiszen minden súly $(0,1]$-be esik, és x_i definíciója miatt minden élen az élsűrűség pontosan d, kivéve $N(N+1)$ élen, itt azonban $d_e = x_N(1 - x_{N+1}) = F_N \geq d$ az N definíciója miatt. Tehát $d \leq d_N$, amit igazolni akartunk. □

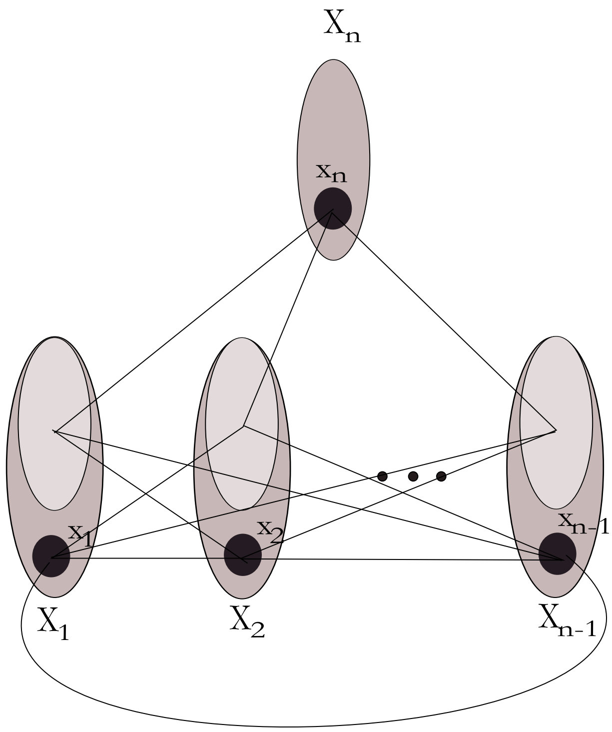
5. A teljes gráfok kritikus élsűrűsége: $G = K_n$ eset

A 2. fejezetben Bondy, Shen, Thomassé és Thomassen eredményét idézve a K_3 gráf kritikus élsűrűségét már meghatároztuk, sőt a *ciklikus hármas* fogalmával egy általánosabb jellemzést tudtunk adni a K_3 gráfot feszítő és nem feszítő hárompartíciós gráfokról. Később a 3. fejezetben láttunk egy másik utat is, K_3-at mint a körgráfok speciális esetét tekintve. Ebben a fejezetben a K_n gráfokra megadunk egy rekurzív konstrukciót, amely sejtésünk szerint optimális, és a 2.7 tételhez hasonló tételt is belátunk a K_4 gráfot nem feszítő négyrészes gráfokról.

5.1. KONSTRUKCIÓ. *A K_n egy K_n^* konstrukcióját rekurzív módon adjuk meg. $n = 2$-ben a feltétel szerint nem mehet él, tehát K_2 optimális konstrukciója lehet a kétcsúcsú üres gráf, 0 kritikus élsűrűséggel. Legyenek a csúcsosztályok $X_1, X_2, ..., X_n$, melyek közül $X_n = \{x_n\}$ egyelemű, a többi legalább kételemű csúcsosztály. Válasszunk az első $(n-1)$ osztályból egy-egy csúcsot: $x_i \in X_i$, ezek segítségével definiáljuk a konstrukció élstruktúráját:*

- $xx_n \in E(K_n^*)$ $(\forall x \in X_i \setminus \{x_i\}, \forall i \in \{1, 2, ..., (n-1)\})$,
- $x_i x \in E(K_n^*)$ *(*$\forall i < n, x \in X_j, i \neq j < n$*)*,
- $X_1 \setminus \{x_1\}$, $X_2 \setminus \{x_2\}$,...,$X_{n-1} \setminus \{x_{n-1}\}$ *osztályokra megszorítva legyen az élstruktúra a K_{n-1} konstrukciója szerinti, mely nem feszíti a K_{n-1} gráfot.*

Mivel a konstrukcióban egyik $i < n$ esetén sincs x_i és x_n összekötve, ezért csak olyan n pont feszíthetné a K_n gráfot, melyek közül $(n-1)$ az $X_1 \setminus \{x_1\}$,



3. ábra. K_n konstrukciója

$X_2 \setminus \{x_2\}$,...,$X_{n-1} \setminus \{x_{n-1}\}$ halmazokba esik, ám a rekurzió miatt ez az $(n-1)$ csúcs nem feszíti a K_{n-1} teljes gráfot.

Jelöljük a K_n *teljes gráf kritikus élsűrűségét* $d_{(n)}$-nel.

5.2. Sejtés. *A K_n teljes gráf $d_{(n)}$ kritikus élsűrűségét a következő rekurzív egyenlet adja meg:*

$d^2_{(n)}(1 - d_{(n-1)}) + d_{(n)} - 1 = 0$, *ahol* $d_{(2)} = 0$

Ha valóban a fenti konstrukció az optimális megfelelő súlyozással a K_n gráfra, akkor a 2.4 lemma szerint minden élsűrűség egyenlő, emiatt $w(x_i) = 1 - d_{(n)}$ $(i < n)$ esetben és $w(x_n) = 1$. Felírva egy X_n-re nem illeszkedő élhez tartozó élsűrűséget, kapjuk a fenti egyenletet.

5.3. MEGJEGYZÉS. *Ha a sejtésünk igaz, akkor*
$d_{(3)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.61803$ - *ezt igazoltuk is.*
$d_{(4)} \approx 0.77222$
$d_{(5)} \approx 0.83948$
Továbbá a konstrukció miatt a kritikus élsűrűség a fenti esetekben nem lehet kisebb, mint a rekurzív egyenletek megfelelő megoldása.

A konstrukciót némileg általánosabb formában is hasznosíthatjuk. Ha egy G gráf $d(G)$ kritikus élsűrűségét ismerjük, vagy van rá alsó korlátunk, akkor tekinthetjük a G^+ gráfot, melyet úgy kapunk, hogy G csúcshalmazához egy új z csúcsot adunk, majd ezt a csúcsot az összes csúccsal összekötjük.

5.4. LEMMA. *A G^+ gráf $d(G^+)$ kritikus élsűrűségére teljesül a $d(G^+) \geq \delta$ egyenlőtlenség, ahol δ az*
$x^2(1 - d(G)) + x - 1 = 0$ *egyenlet pozitív gyöke.*

Bizonyítás. Induljunk ki egy G-hez tartozó optimális konstrukcióból, így G minden csúcsához tarozik egy csúcsosztály. A G^+ gráf egy konstrukcióját úgy kapjuk meg, hogy minden csúcsosztályhoz egy extra csúcsot hozzáveszünk, beleértve a G^+ gráf G-ben nem szereplő z csúcsának egyelőre üres csúcsosztályát. A G-beli konstrukció élstruktúráját egészítsük ki úgy, hogy a z-nek megfelelő csúcsot a G-beli konstrukció összes csúcsával kössük össze, a további extra csúcsokat pedig minden más csúccsal, eltekintve a saját csúcsosztály elemeitől, és a z-nek megfelelő csúcstól.
Ekkor egyik extra csúcs sem lehet feszített G^+-nak csúcsa, mivel egy feszített G^+ gráfnak a z-nek megfelelő csúcsot tartalmaznia kellene, de az csak

G-hez tartozó konstrukcióbeli csúcsokkal van összekötve. Mivel a G-hez tartozó konstrukció nem feszíti a G gráfot definíció szerint, ezért az így kapott új konstrukció nem feszítheti a G^+ gráfot. Legyen az extra csúcsok súlya egységesen $(1-x)$, kivéve a z-nek megfelelő egységsúlyú csúcsot, és a G-beli konstrukció csúcsainak súlya pedig legyen az eredeti súly x-szerese. Ekkor a konstrukcióban rendre x és $(x^2d(G)+1-x^2)$ lesz a kétféle élsűrűség a G^+-ban új illetve régi éleken. Ha x-et úgy választjuk meg, hogy ez a két mennyiség megegyezik, tehát x gyöke az $x^2(1-d(G))+x-1=0$ egyenletnek, akkor ez a gyök alsó becslésül szolgál a $d(G^+)$ kritikus élsűrűségre.

□

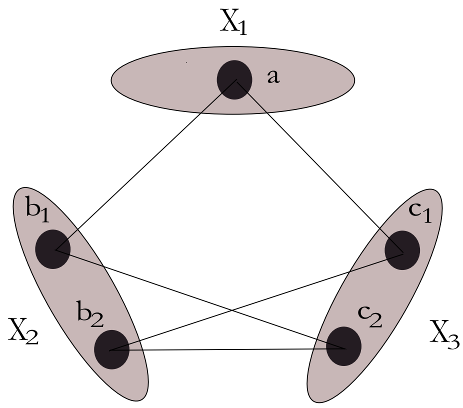
5.5. MEGJEGYZÉS. *A másodfokú egyenlet megoldóképletéből adódik a fenti δ szám becslésével, hogy*
$d(G^+) > d(G) + (1-d(G))^2(5d(G)-3)$

A 2.7 tételben megvizsgáltuk, hogy egy háromrészes gráf élsűrűségeire milyen szükséges és elégséges feltételnek kell teljesülnie ahhoz, hogy garantáltan feszítsen háromszöget. A korábbiakban a kérdést tetszőleges G gráfokra úgy általánosítottuk, hogy milyen szükséges és elégséges feltételt adhatunk a felfújt G^* gráf élsűrűségeinek minimumára, hogy a felfújt gráf garantáltan feszítse a G gráfot. A következőkben a tétel általánosabb megközelítését alkalmazzuk a teljes gráfokra.
Először Bondy, Shen, Thomassé és Thomassen cikke alapján a $G = K_3$ esetet tekintsük át.
Legyen a felfújt G^* gráfban az i csúcs képe X_i. Jelölje d_{ij} az X_i és X_j közti élsűrűséget.

5.6. TÉTEL. *[5] Minden olyan élsűrűség-sorozatra, amelyre az alábbi egyenlőtlenségek valamelyike teljesül, létezik K_3-at nem feszítő háromrészes G^* gráf*

a megadott élsűrűségekkel:
$d_{ij}d_{ik} + d_{jk} \leq 1$, *ahol* $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$. Megadunk G^*-ra olyan konstrukciót, melyre az élsűrűségek teljesítik a $d_{12}d_{13} + d_{23} \leq 1$ egyenlőtlenséget, és nem feszíti a G^* gráf K_3-at.
Legyen a három osztály $X_1 = (a), X_2 = (b_1, b_2), X_3 = (c_1, c_2)$. Válasszuk meg a súlyokat a következőképpen:$w(a) = 1$, $w(b_1) = d_{12}$, $w(b_2) = (1 - d_{12})$, $w(c_1) = d_{13}$, $w(c_2) = (1 - d_{13})$, és legyenek az élek ab_1, b_1c_2, c_2b_2, b_2c_1, c_1a. Világos hogy G^* háromszögmentes lesz, emellett G^*-ben az élsűrűségek az ij, ik, jk élen rendre d_{12}, d_{13}, és $1 - d_{12}d_{13}$. $1 - d_{12}d_{13} \geq d_{23}$ a feltétel szerint, ezért X_2 és X_3 között az élsűrűséget esetlegesen csökkentve megkaphatunk egy d_{12}, d_{13}, d_{23} élsűrűségi számú konstrukciót. □



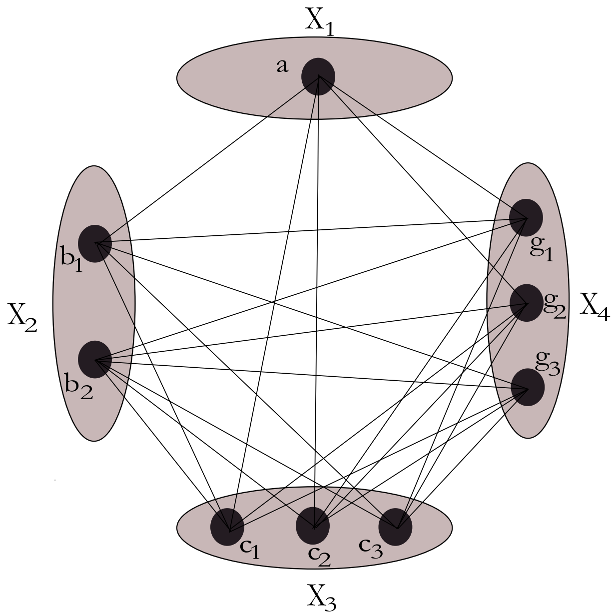
4. ábra. K_3-mentes gráf

5.7. TÉTEL. *Minden olyan élsűrűség-sorozatra, amelyre az alábbi egyenlőtlenségek valamelyike teljesül, létezik K_4-et nem feszítő négyrészes G^* gráf a megadott élsűrűségekkel:*

$d_{ij}d_{ik} + d_{jk} \leq 1$, ahol i, j és k az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaz különböző elemei,
$(d_{ij}d_{ik} + d_{jk} - 1)(d_{ij}d_{il} + d_{jl} - 1) \leq (1 - d_{kl})d_{ij}^2$, ahol $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Bizonyítás. Megadunk G^*-ra olyan konstrukciót, melyre az élsűrűségek teljesítik a fenti egyenlőtlenségek egyikét, de nem feszíti a G^* gráf K_4-et.
A tétel első feltételrendszerének elemei azt fejezik ki, hogy három csúcs által feszített él élsűrűségei nem ciklikus hármast alkotnak. Ekkor a 5.6. tétel szerint konstruálható olyan hárompartíciós gráf, melynek az élsűrűségei egyenként elérik a három kívánt számot, és a gráf nem feszít háromszöget. Ebből a gráfból megfelelő konstrukciót nyerhetünk az állításunkhoz, ha a negyedik csúcsra illeszkedő éleken az élsűrűséget tetszőlegesnek állíthatjuk be, a negyedik csúcstól függetlenül nem feszíthet K_4-et.
Amennyiben bármely három csúcs által feszített élek élsűrűségei ciklikus hármast alkotnának, akkor tegyük fel, hogy
$(d_{12}d_{13} + d_{23} - 1)(d_{12}d_{14} + d_{24} - 1) \leq (1 - d_{34})d_{12}^2$. (*)
Legyen ekkor $X_1 = (a), X_2 = (b_1, b_2), X_3 = (c_1, c_2, c_3), X_4 = (g_1, g_2, g_3)$.
Legyenek G^* komplementerében az élek a következők:
$ab_2, ac_3, ag_3, b_1c_2, b_1g_2, c_1g_1$. Végezetül legyenek az egyes súlyok csúcsai a következők: $w(a) = 1$, $w(b_1) = d_{12}$, $w(b_2) = (1 - d_{12})$, $w(c_1) = \lambda d_{13}$, $w(c_2) = (1 - \lambda)d_{13}$, $w(c_3) = (1 - d_{13})$, $w(g_1) = \mu d_{14}$, $w(g_2) = (1 - \mu)d_{14}$, $w(g_3) = (1 - d_{14})$, ahol λ és μ együtthatók értékei:
$\lambda = \frac{d_{12}d_{13}+d_{23}-1}{d_{12}d_{13}}$, és $\mu = \frac{d_{12}d_{14}+d_{24}-1}{d_{12}d_{14}}$. A súlyok ekkor pozitívak lesznek, hiszen feltettük, hogy bármely három csúcs által meghatározott három él élsűrűsége ciklikus hármast alkot, ezért λ és μ számlálója is pozitív.
Ilyen súlyozás mellett az X_i és X_j közötti élsűrűség éppen d_{ij} lesz, kivéve X_3 és X_4 között, melyre az élsűrűség a konstrukcióban
$(1 - \mu\lambda d_{13}d_{14}) = 1 - \frac{(d_{12}d_{13}+d_{23}-1)(d_{12}d_{14}+d_{24}-1)}{d_{12}^2}$.
Feltételünket(*) átrendezve azt kapjuk, hogy ez az élsűrűség legalább d_{34}, így konstrukciónkból élek esetleges elhagyásával valóban létrehoztunk egy K_4-et nem feszítő felfújt gráfot, ahol az élsűrűségek az előre megadottak.

A K_4-et azért nem feszíti ez a gráf, mivel X_1-ből csak a-t választhatjuk reprezentánsnak, emiatt b_2, c_3 és g_3 nem lehetnek benne feszített K_4-ben. Ám a $\{b_1, c_1, c_2, g_1, g_2\}$ csúcsok által indukált gráf az előző tételben megadott hárompartíciós gráffal izomorf, amely nem feszít háromszöget, ezért semelyik négy csúcs sem feszítheti a K_4-et. $\square$



5. ábra. K_4-mentes gráf

Mindkét tétel lényegében az 5.1. konstrukció élstruktúráján alapul, amely K_n-et nem feszítő K_n-felfújt gráfot adott meg; azt látjuk, hogy választhatjuk úgy a súlyozást, hogy az éleken egy kivétellel egyenlőség teljesüljön a megadott élsűrűségi számokkal, majd erre az utolsó élre kapunk egy egyenlőtlenséget a többi élsűrűség függvényében, amelyet teljesítve jó konstrukciót kapunk. Ezt az általános módszert alkalmazhatjuk minden K_n teljes gráfra, kiegészítve az így nyert feltételt a kisebb teljes gráfokra vonatkozó feltételekkel. Ezek azt mondják, ha K_n egy teljes K_k részgráfjára előírt élsűrűségek ($n > k > 2$) teljesítik a K_k nem feszítésének feltételét, akkor a többi élsűrűségre nincs is megkötés.

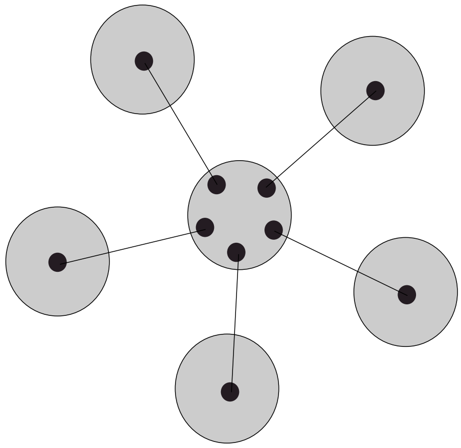
6. Fák kritikus élsűrűsége

A 3. és 4. fejezetben az utak kritikus élsűrűségét meghatároztuk, megadván egy hozzájuk tartozó optimális konstrukciót. Ebben a fejezetben minden fagráfhoz adunk meg optimális élstruktúrát, amely mint látni fogjuk, gyakorlatilag meghatározza a kritkus élsűrűséget is.
Vizsgáljuk meg először egy speciális fagráf, az $(n+1)$ csúcsú (n-ágú) csillag kritikus élsűrűségét!

6.1. ÁLLÍTÁS. *Ha* S_n $(n+1)$*-csúcsú csillag, akkor* $d(S_n) = \frac{n-1}{n}$.

Bizonyítás. Tekintsünk egy optimális S_n^* konstrukciót! Vegyük észre, hogy $\frac{n-1}{n}$-nél nagyobb lenne a kritikus élsűrűség, akkor az élsűrűségek összege $(n-1)$-nél több lenne, ám ez ellentmond az 1.6 tételnek.
Ezután megadunk egy olyan konstrukciót, amelyen fenti érték felvétetik. Legyen a csillag centrumának képe az S_n^* felfújt gráfban n-elemű, a csillag ágai egyeleműek.Az élstruktúra komplementere legyen olyan, hogy minden csillagág különböző centrumbeli csúccsal legyen összekötve, és legyenek a centrum képében a csúcsok $\frac{1}{n}$-súlyúak. Ekkor nyilván a centrum képében semelyik csúcs sincs az összes csúcsosztállyal összekötve, ezért S_n^* nem feszítheti az $(n+1)$-csúcsú csillagot, másrészt minden élsűrűség $\frac{n-1}{n}$, tehát ez valóban optimális konstrukció. □

A 2.6 tétel szerint egy gráf részgrájának a kritikus élsűrűsége a gráf élsűrűségénél kisebb lesz. Előző eredményünket ezzel egybevetve alsó korlátot adhatunk a Δ maximális fokú gráfokra Δ függvényében, hiszen egy Δ-fokú csúccsal bíró gráfnak részgráfja a Δ-ágú csillag. A továbbiakban mindig élünk azzal a triviális feltevéssel, hogy a gráfunk több élből áll, ami a korábban feltett összefüggőséget figyelembe véve azt is jelenti hogy $\Delta > 1$. A 2.3 tétel eredményével mindezt összevetve kapjuk a következő állítást.

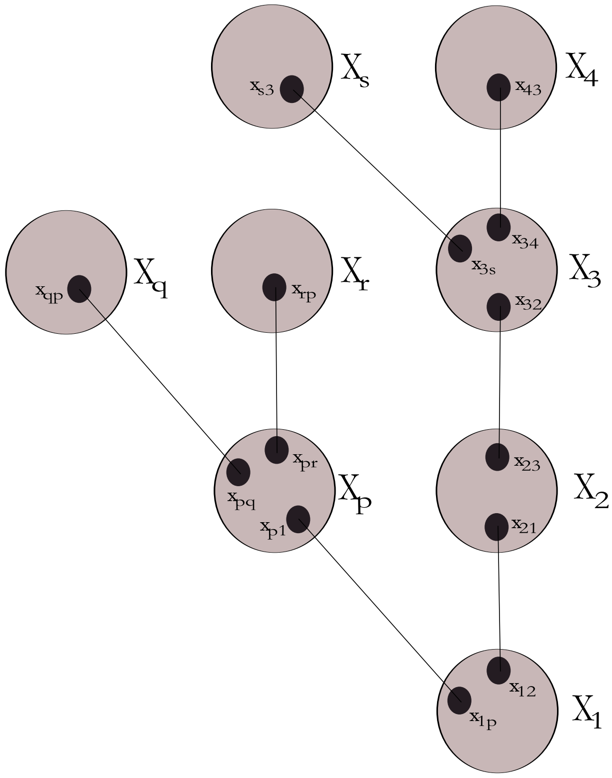


6. ábra. Csillag optimális konstrukciójának komplementere

6.2. KÖVETKEZMÉNY. $(1 - \frac{1}{\Delta}) \leq d(G) \leq (1 - \frac{1}{\Delta^2})$.

Láttuk a 4. fejezetben, hogy $\Delta = 2$ esetén mindkét korlát éles még akkor is, ha a feltételnek megfelelő fákat, tehát az utakat vizsgáljuk, hiszen $d(P_3) = d(S_2) = \frac{1}{2}$, és $d(P_n) \to \frac{3}{4}$. A $\Delta > 2$ esetben viszont a fák kritikus élsűrűségére jobb felső becslést is fogunk tudni adni Δ függvényében, amely szintén éles lesz.
Megadunk most egy optimális konstrukciót minden fához. Legyen $T(n, m = (n-1))$ egy fa, melynek csúcsait jelöljük az $\{1, 2, 3, ..., n\}$ halmaz elemeivel.

6.3. KONSTRUKCIÓ. *Legyenek a T_n^* gráf X_1, X_2,..., X_n csúcsosztályai rendre D_1, D_2,...,D_n-eleműek. Jelöljük az X_i csúcsosztály elemeit x_{ij}-vel azon j-kre, melyre $ij \in E(T)$. Legyen él x_{ik} és x_{jl} között, ha $ij \in E(T)$, de nem teljesül, hogy $k = j$ és $l = i$. Tehát az élstruktúrát a lehetséges élekre komplementálva az $x_{ij}x_{ji}$ éleket kapjuk.*



7. ábra. Egy 3-szintes fa optimális konstrukciójának komplementere

6.4. Tétel. *A 6.3. konstrukció megfelelő súlyozással optimális konstrukció a T fához.*

Bizonyítás. A 2.2. következményt figyelembe véve az optimális konstrukcióról feltehető, hogy az egyes csúcsosztályok rendre legfeljebb fokszámnyi elemszámúak. Válasszuk ki a fa egyik csúcsát gyökérnek, feltehető, hogy ez az 1 csúcs, és a gyökértől vett távolság alapján szintezzük be a fát, illetve ezzel együtt a fa felfújtját is. Jelölje L a szintek számát, feltehetjük hogy $L > 1$. A szintezésből adódik, hogy a gyökéren kívül minden csúcsosztálynak pontosan egy szomszédja alacsonyabb szintű. Tekintsük először az L. szinten lévő csúcsosztályokat. Ezek a fában leveleknek felelnek meg, ezért egyeleműek. Használjuk a 2.4 lemmát, mely szerint az optimális konstrukcióban minden élsűrűség egyenlő. Emiatt minden élsűrűség egynél kisebb, azaz az L. szinten lévő csúcsok mind legalább egy csúccsal nincsenek össszekötve az $(L-1)$. szintű szomszédos csúcsosztályból. Vegyük észre, hogy optimális konstrukcióban ezek a hiányzó élek csúcsdiszjunktak. Ugyanis ha egy x csúcsra az $(L+1)$. szintről illeszkedik az optimális konstrukció komplementerében két él az L. szint irányába, akkor az egyiket tetszőlegesen hozzávehetnénk a konstrukcióhoz, és még mindig nem feszítené a T fát. Ezzel a megfelelő élsűrűség növekedne, ellentmondásban a 2.4 lemmával.

Mi több, az L. szinten lévő csúcsok mind pontosan egy csúccsal nincsenek össszekötve az $(L-1)$. szintű szomszédos csúcsosztályból. Indirekt ha a j csúcsra illeszkedő i levélre az X_i-beli csúcs két X_j-belivel sem lenne összekötve, akkor X_j minden csúcsához tartozik rá nem illeszkedő levél, hiszen (D_j-1) levél illeszkedik X_j-re és $|X_j| \leq D_j$. Ekkor X_j és $(L-2)$. szintű szomszédja 1-es élsűrűséggel összeköthető volna, hiszen semely X_j-beli csúcs nem lehetne benne feszített T-gráfban, ám ez ismét ellentmond a 2.4 lemmának. Tehát az optimális konstrukcióban az $(L-1)$. szint csúcsosztályai olyanok, hogy egy kivétellel mindegyik megfelel egy-egy j-csúcsra illeszkedő levélnek - tudniillik annak, amelyikkel nincs összekötve. Ez indokolja a konstrukcióbeli jelölést. Eközben beláttuk azt is, hogy az optimális konsrukcióban az $(L-1)$. szint csúcsosztályaiban is pontosan fokszámnyi csúcs van. Ezzel igazoltuk, hogy az optimális konstrukció a tétel szerinti lehet csak az $(L-1)$. és L. szint között.

Indukcióval végezzük az állítás bizonyítását az eggyel kisebb szintre. Feltesszük, hogy a $(t+1)$.-től az L. szintig az élstruktúra a konstrukcióbeli, belátjuk hogy ekkor a t. és $(t+1)$. között is ez a helyzet. Szét kell választanunk a $t>0$ és $t=0$ eseteket.

Feltesszük először, hogy $t>0$. Legyen X_i tetszőleges csúcsosztály a t. szinten, X_j pedig ennek $(t+1)$. szintű szomszédja. Mivel az élsűrűség az ij élen egynél kisebb, ezért az optimális kontrukcióban hiányzik él X_i és X_j között. A kezdőlépéshez hasonlóan ez a D_j-elemű X_j-ben csak x_{ji}-re illeszkedhet, hiszen indukció szerint az X_j többi csúcsa nem lehet benne feszített T-ben. Ez i-nek minden $(t+1)$. szintű j szomszédjára igaz. Ugyanakkor ez a legalább $(D_i - 1)$ él különböző csúcsokra illeszkedik X_i-ben, és minden X_j csúcsosztályból pontosan egy hiányzó él indul X_i-be.

Ez a kezdőlépéshez hasonlóan abból következik, hogy egyrészt i egy j szomszédját rögzítve, és x_{ij}-vel jelölve az x_{ji}-ből induló (egyik) hiányzó él végpontját, x_{ij} sem lehet csúcsa feszített T-nek, mivel X_j-ben x_{ji}-vel nincs összekötve, indukcióval a többi csúcson át pedig nincs feszített T-gráf. Emiatt optimális konstrukcióban minden más lehetséges szomszédjával x_{ij} össze van kötve, ellenkező esetben növelhető lenne valamely élsűrűség; tehát minden más $(t+1)$. szintű csúcsosztály elemeivel szomszédos. Ugyanakkor $t > 0$ miatt kell hogy maradjon X_i-ben olyan csúcs, amelyre nem illeszkedik hiányzó él a $(t+1)$. szint felé, ellenkező esetben X_i egyik csúcsát sem tartalmazhatná már feszített T gráf, így a $(t-1)$. szinttel 1 sűrűségű éllel lehetne összekötni, ami ellentmondás. Tehát legfeljebb $(D_i - 1)$ olyan él lehet, ami X_i és a $(t+1)$ szintű szomszédai között hiányzik, ez épp azt jelenti, hogy minden szomszédjából egy hiányzó él indul, és $|X_i| = D_i$. Jelöljük ezeket a jól meghatározott X_i-beli csúcsokat a konstukció szerint x_{ij}-vel; így megkaptuk az indukciós állításunkat a t. szinttől felfelé.

Amennyiben $t = 0$, annyi változik, hogy a gyökér csúcsosztályának, X_1-nek D_1 szomszédja van, ezért a belőle induló pontosan D_1 él, melyeknek az X_1-beli végpontjai különbözőek, lefedik a teljes X_1-et. Ennélfogva X_1 egyik pontját sem tartalmazhatja indukció szerint feszített T gráf, azaz több él már nem hiányzik a konstrukcióból; ezzel tényleg visszakaptuk a 6.3. konstrukció élstruktúráját. □

Megkaptuk tehát, hogy a 2.2. következménynek megfelelő optimális konstrukció élstruktúrája csak az általunk leírt lehet. Valójában a súlyozást is meg tudjuk határozni. A konstrukcióban összességében $2(n-1)$ csúcs szerepel, hiszen minden élhez pontosan kettő tartozik. Felírhatunk rájuk n egyenletet arra vonatkozóan, hogy egy csúcsosztályban a súlyok összege 1 (speciálisan a levelek 1-súlyúak). Felírhatunk emellett a $d(T)$ paraméter segítségével további $(n-1)$ egyenletet, melyek azt fejezik ki, hogy minden élen d az élsűrűség, így nyerünk $2n-1$ egyenletet és ugyanennyi ismeretlent. Észrevehetjük, hogy a súlyokat szintenként lefelé haladva egyszerűen meghatározhatjuk, mint $d(T)$ racionális törtfüggvényét, ily módon végül $d(T)$-t egy polinom gyökeként kifejezhetjük. A gyökök közül az lesz a kritikus élsűrűség, amely pozitív, és a súlyokba az értékét visszahelyettesítve szintén pozitív számokat kapunk.

A kritikus élsűrűség pontos kiszámítása nagyobb fák esetén abba a problémába ütközhet csak, hogy az egyenletrendszerből kapott polinomnak a gyökeit nem tudjuk pontosan meghatározni. Ezért is lehet érdekes megvizsgálni, hogy általánosan hogyan becsülhető a fák kritikus élsűrűsége.

6.5. TÉTEL. *Egy Δ maximális fokú T fa $d(T)$ kritikus élsűrűségére teljesül a következő egyenlőtlenség:* $(1-\frac{1}{\Delta}) \leq d(T) < (1-\frac{1}{4(\Delta-1)})$.

Azt látjuk tehát, hogy $\frac{1}{\Delta}$-ban valójában lineárisan térhet el az 1-től a kritikus élsűrűség, nem négyzetesen, amit korábban általánosan minden gráfra bizonyítottunk. A felső korlát esetén utakra visszakapjuk a 4. fejezet eredményét.

Bizonyítás. Ismét a 2.6 tételt fogjuk alkalmazni, mely szerint gráf valódi részgráfjának kritikus élsűrűsége a gráf kritikus élsűrűségénél kisebb. Az alsó korlátot már láttuk korábban. A felső korlát igazolásához találunk egy olyan fát, amelynek az élsűrűségét jól tudjuk becsülni, és tartalmazza az általunk vizsgált T fát.

Nevezzünk egy fát Δ-*reguláris* t-*szintes fának* ($t > 0$), ha egy jól megválasztott gyökérpontjától vett távolság szerint szintezve a csúcsait, a $0., 1., ..., (t-1)$. szinten a csúcsok Δ-fokúak, a legmagasabb t. szinten pedig elsőfokúak. Jelöljük ezt T_t-vel. Triviális, hogy minden legfeljebb Δ maximális fokú fa részgráfja lesz elég nagy t esetén a Δ-reguláris t-szintes fának. Elég tehát a 2.6 tétel alapján azt igazolnunk, hogy minden Δ-reguláris t-szintes fa kritikus élsűrűségére érvényes a felső becslés.
Az X_1 gyökér kivételével minden X_i csúcsosztályban van pontosan egy olyan csúcs, amely a szomszédos, eggyel kisebb szintű X_j csúcsosztállyal nincs teljesen összekötve, nevezetesen x_{ij}. Ezt a csúcsot nevezzük az X_i *kitüntetett csúcsának*, és jelöljük $x^{(i)}$-vel. Az egyszerűség kedvéért jelölje egyszersmind a csúcs súlyát is $x^{(i)}$. Feltehető, hogy X_1, X_2, ..., X_{t+1} rendre a 0., 1., ...,t. szinten vannak.
Írjuk fel a optimalitásból adódó egyenleteket az egyes súlyokra.
(1) $1 - x_{ij}x_{ji} = d(T_t)$ minden $ij \in E(T_t)$ élre,
(2) $\sum_k x_{ik} = 1$ minden $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.
Belátjuk, hogy a konstrukció és az egyenlet szimmetriái miatt az egyező szintű kitüntetett csúcsok súlya egyenlő, és ugyanez teljesül az egyező szintű nem-kitüntetett csúcsok súlyára, azaz (2)-t alkalmazva
a k. szintű (k>0) kitüntetett csúcs súlya $x^{(k+1)}$
a k. szintű (k>0) nem kitüntetett csúcs súlya $\frac{1-x^{(k+1)}}{\Delta-1}$.
Emellett X_1 minden eleme egyenlő, $\frac{1}{\Delta}$ súlyú.
Mindezt szintenként igazolhatjuk az (1) és (2) egyenletek felhasználásával. A t. szinten minden csúcs kitüntetett és 1 súlyú, így arra állításunk igaz. Ha a $(k+1)$. szinten már láttuk az állítást, akkor a k. szintre áttérve az (1) egyenlet mutatja, hogy a nem kitüntetett csúcsok súlya egyenlő, ezért súlyukat a (2) egyenletet használva fejezhetjük ki a kitüntetett csúcs súlyának segítségével. Végül pedig a 0. szinten nincs kitüntetett csúcs, ott minden csúcs súlya egyenlő.

Az optimalitásból adódó egyenleteket tehát a szintek számával megegyező számú egyenlettel helyettesíthetjük a Δ-reguláris t-szintes fa kritikus élsűrűségének és az optimális súlyozás meghatározása céljából, az (1) egyenlet átírásával:

(*) $\frac{1}{\Delta}x^{(2)} = 1 - d(T)$

(**) $\frac{1-x^{(k)}}{\Delta-1}x^{(k+1)} = 1 - d(T)$ ha $1 < k < t+1$,

(***) $x^{(t+1)} = 1$

Vezessük be a 4. fejezethez hasonlóan az $F_i(d) = x^{(i)}$ függvényt, amely a d élsűrűség függvényében megadja az $x^{(i)}$ súlyt. A fenti egyenletekből kapjuk, hogy

$F_2(d) = \Delta(1-d)$

$F_{k+1}(d) = (\Delta - 1)\frac{(1-d)}{1-F_k(d)}$, ha $1 < k < t+1$

ugyanakkor (***) szerint $F_{t+1}(d) = 1$ egyenlet teljesül a T_t gráf kritikus $d = d(T_t)$ élsűrűségére, amely d-re egy rekurzív polinomegyenletet ad.

Tekintsünk el részben az utolsó egyenlettől ($F_{t+1}(d) = 1$), és vizsgáljuk a rekurzív $F_k(d)$ sorozatot rögzített d mellett. d-ről feltesszük, hogy a 6.2 következmény szerint $(1-\frac{1}{\Delta}) \leq d < (1-\frac{1}{\Delta^2})$, hiszen mindez a kritikus élsűrűségről már ismert.

A következőkben igazolni fogjuk, hogy az $F_k(d)$ sorozat ezen feltételek mellett szigorúan monoton növekedő lesz, amíg $F_k(d) < 1$ fennáll.

Ha d egy Δ-reguláris, t-szintes fa kritikus élsűrűsége volna, akkor ez nem áll fenn minden k-ra, hiszen $k = t$ esetén egyenlőség áll. Sőt, mint látni fogjuk, ennél több igaz: ha d nem nagyobb, mint egy Δ-reguláris, t-szintes fa kritikus élsűrűsége, akkor sem állhat fenn $F_k(d) < 1$ minden k-ra. Emiatt, amennyiben egy d értékre a kapott sorozat a konstans 1-gyel felülről korlátos lesz, akkor $d > d(T)$ minden T Δ-reguláris, t-szintes fára.

Meghatározzuk azokat a d értékeket, melyre $F_k(d) < 1$ minden k-ra, és ebből kapjuk majd az állítás felső korlátját.

6.6. LEMMA. *Ha* $(1-\frac{1}{\Delta}) \leq d < (1-\frac{1}{\Delta^2})$ *teljesül, akkor az* $F_k(d)$ *sorozat monoton növő, amíg tagjai 1-nél kisebbek.*

Bizonyítás. Az állítást indukcióval látjuk be. $F_3(d) = (\Delta-1)\frac{(1-d)}{1-F_2(d)} > F_2(d) = (1-d)\Delta$ teljesül, hiszen a feltevés szerint $(1-F_2(d)) > 0$, így átrendezve és $F_2(d)$ definícióját újra beírva $(\Delta-1) > (1-F_2(d))\Delta \Leftrightarrow \Delta^2(1-d) > 1$-et kapjuk, ami feltevésünk szerint igaz.
Az indukciós lépés pedig az általános rekurzióból következik, hiszen ha
$1 > F_k(d) > F_{k-1}(d)$, akkor
$(\Delta-1)\frac{(1-d)}{1-F_k(d)} > (\Delta-1)\frac{(1-d)}{1-F_{k-1}(d)}$, amiből az indukciós állítás, $F_{k+1}(d) > F_k(d)$ következik. □

Ha d egy Δ-reguláris, t-szintes T fa kritikus $d(T)$ élsűrűségénél kisebb volna valamilyen t-re, akkor $F_k(d) < 1$ nem állhatna fenn minden $k \leq (t+1)$-re. Ellenkező esetben ugyanis indukcióval látható, hogy $F_k(d) > F_k(d(T))$, ugyanakkor $1 = F_{t+1}(d(T)) < F_{t+1}(d)$, ami ellentmondás volna.
Mindent előkészítettünk az állítás bizonyításához. Tegyük fel indirekt, hogy $d > 1 - \frac{1}{4(\Delta-1)}$ teljesül valamely fa kritikus élsűrűségére, amelynek maximális foka Δ. Belátjuk, hogy ekkor $F_k(d) < \frac{1}{2} < 1$ fennáll minden $k > 1$-re, ez ellentmondás az előző megfigyelés fényében.
$k = 2$-re fennáll, hiszen $F_2(d) = \Delta(1-d) < \frac{\Delta}{4(\Delta-1)} < \frac{1}{2}$, ha $\Delta > 1$, amit feltettünk. A rekurzió szerint
$F_{k+1}(d) = (\Delta-1)\frac{(1-d)}{1-F_k(d)} < \frac{1}{4(1-F_k(d))}$.
Szorozzunk a pozitív nevezővel, így a következő egyenlőtlenséghez jutunk:
$F_{k+1}(d)(1-F_k(d)) < \frac{1}{4}$.
A 2. tényező indukció szerint legalább $\frac{1}{2}$, ezért az első tényező, $F_{k+1}(d) < \frac{1}{2}$ minden k-ra, amit bizonyítani akartunk.

□

Ha tehát a G gráf fa, akkor Δ függvényében jobb felső becslést tudunk adni, mint a korábbi. Belátjuk, hogy ez a felső becslés ráadásul éles becslés is.

6.7. LEMMA. *Ha $d < 1 - \frac{1}{4(\Delta-1)}$, akkor létezik olyan fa, amelynek maximális foka Δ és a kritikus élsűrűsége legalább d.*

Bizonyítás. Azt fogjuk belátni, hogy alkalmas t esetén egy Δ-reguláris, t-szintes fa kritikus élsűrűsége legalább d. Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy minden Δ-reguláris t-szintes fa kritikus élsűrűsége kisebb d-nél.
Tekintsük most az $F_k(d)$ sorozatot, és hasonlítsuk össze az elemeit $F_k(d(T_t))$ megfelelő elemeivel.
$F_2(d) = \Delta(1-d) < \Delta(1-d(T_t)) = F_2(d(T_t))$ teljesül feltevésünk szerint minden t-re.
$F_{k+1}(d) = (\Delta-1)\frac{(1-d)}{1-F_k(d)} < (\Delta-1)\frac{(1-d(T_t))}{1-F_k(d(T_t))} = F_{k+1}(d(T_t))$ az indukció szerint igaz, szintén minden t-re.
Mivel $F_{t+1}(d(T_t)) = 1$, ezért $F_{t+1}(d) < F_{t+1}(d(T_t)) = 1$. Tehát d-re a 6.6 lemma feltételei teljesülnek, ezért azt kapjuk, hogy $F_k(d)$ sorozat monoton növő, és az 1 felső korlátja, így a sorozatnak létezik torlódási pontja, jelöljük ezt τ-val. Az $F_{k+1}(d) = (\Delta-1)\frac{(1-d)}{1-F_k(d)}$ rekurzió miatt $\tau < 1$, és a torlódási pontra teljesül a $\tau = (\Delta-1)\frac{(1-d)}{1-\tau}$ egyenlet. τ tehát egy másodfokú egyenlet megoldása lesz, ezért a diszkrimináns nemnegatív:
$1 - 4(\Delta-1)(1-d) \geq 0$. Átrendezve $d \geq 1 - \frac{1}{4(\Delta-1)}$, ami ellentmond a feltevésünknek. Ezzel az állítást igazoltuk. $\square$

7. Összefoglalás, nyitott kérdések

Dolgozatunkban arra kerestük a választ, hogy egy n-partíciós gráfban mekkora minimális élsűrűség garantálja, hogy az n-partíciós gráf feszít a megadott módon egy adott n-csúcsú G gráfot. Megoldottuk a problémát abban az esetben, amikor G fa vagy kör, továbbá a keresett kritikus élsűrűségekre általános becslést is adtunk. Nem ismeretes a kritikus élsűrűség értéke a fentiektől különböző gráfokra, speciálisan a K_n teljes grákra is nyitott a kérdés $n \geq 4$ esetén. A 2.3 tétel felső korlátjának élességét csupán $\Delta = 2$ esetén igazoltuk, általánosságban a kérdés nyitott.

Mindvégig feltételeztük, hogy a többrészes gráf partícióosztályainak száma megegyezik a tiltott G gráf csúcsszámával, és hogy a G csúcsai előírt módon helyezkednek el az egyes partícióosztályokban. Ha ez utóbbi feltételtől eltekintünk, akkor G teljes gráf esetén nem változik a kérdés, más esetben azonban igen. Szintén érdekes a problémának azon általánosítása is, ha az első feltételtől is eltekintünk, tehát G csúcsszáma lehet kevesebb a többrészes gráf partíció-osztályainak számától. $G = K_3$ esetét vizsgálva Bondy, Shen, Thomassé és Thomassen [5] cikkükben belátják, hogy minden n-partíciós gráfban a K_3-mentesség kritikus élsűrűsége legalább $\frac{1}{2}$.

Hivatkozások

[1] P. Erdős, M. Simonovits, A limit theorem in graph theory, *Studia Sci. Math. Hungar.* **1** (1966), 51-57.

[2] P. Turán On an extremal problem in graph theory, *Math. Lapok* **48** (1941), 436-452

[3] Collected papers of Paul Turán, Vols. 1-3, *Akadémiai Kiadó*, Budapest (1989)

[4] J. Komlós, M. Simonovits, Szemerédi's Regularity lemma and its applications in graph theory, *Combinatorics: Paul Erdös is Eighty, Vol. 2. Bolyai Society Math. Studies* (1996) 295-352

[5] A. Bondy,J. Shen, S. Thomassé, C. Thomassen, Density conditions for triangles in multipartite graphs, *Combinatorica* **26** (2) (2006) 121-131.

[6] P. Erdős, T. Gallai, On maximal paths and circuits of graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hung. 10* (1959) 337-356.