Bevezetés

Jelen dolgozatban az úgynevezett Klein-megfeleltetés néhány tulajdonságával foglalkozom, azokat bizonyítom be. Ez a megfeleltetés a három dimenziós véges projektív tér egyenesei és az öt dimenziós véges projektív tér egy részhalmaza - nevezetesen egy hiperbolikus kvádrika pontjai - között teremt egy-egy értelmű megfeleltetést. Az ehhez felhasznált közismert tételeket és definíciókat az első fejezetben ismertetem. A fő segédeszközt a Plücker-kooordinátázást, amely konkrétan megadja a megfeleltetést, a második fejezetben tárgyalom részletesebben. Itt definiálom magát a Klein-megfeleltetést is. Az utolsó, harmadik fejezetben gyűjtöm össze és bizonyítom a megfeleltetés néhány tulajdonságát. Végezetül szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek Dr. Kiss Györgynek, aki a dolgozat írása során számos tanáccsal, észrevétellel segítette a munkámat.

I. fejezet
Bevezető tételek, fogalmak

Ez egy összefoglaló rész, a bizonyításokat itt nem részletezzük, azok megtalálhatóak a Kiss-Szőnyi: Véges geometriák című könyvben.

1.1. ***Definíció.*** Az n dimenziós Galois-tér, $PG(n,q)$. Vegyük a $GF(q)$ test fölötti $n+1$ dimenziós vektorteret. A pontok legyenek ezen vektortér 1 dimenziós alterei, a Galois-tér k dimenziós alterei pedig legyenek a vektortér $k+1$ dimenziós alterei. Az egyenesek, illetve a síkok rendre a vektortér 2, illetve 3-dimenziós alterei.

1.2. ***Tétel.*** Minden legalább 3 dimenziós véges projektív tér izomorf valamely $PG(n,q)$-val.(Emiatt nem érdemes az axiomatikus definícióval foglalkozni.)

1.3. ***Tétel.*** A $PG(n,q)$ projektív tér altereire igazak az alábbiak:

. a tér pontjainak a száma:

$$(q^{r+1}-1)/(q-1)$$

. az m dimenziós alterek száma:

$$\Big(\prod_{i=n-m+1}^{n+1}(q^i-1)\Big)/\Big(\prod_{i=1}^{m+1}(q^i-1)\Big) \qquad (0 \le m \le n-1)$$

. a tér egy adott k dimenziós alterét tartalmazó m dimenziós altereinek a száma:

$$\Big(\prod_{i=m-k+1}^{n-k}(q^i-1)\Big)/\Big(\prod_{i=1}^{n-m}(q^i-1)\Big) \qquad (0 \le k \le m \le n-1)$$

1.4. *Tétel.* A $PG(n,q)$ tér tetszőleges kollineációja analitikus formában az

$$x \mapsto x^{\sigma}A$$

alakban adható meg, ahol σ a $GF(q)$ test automorfizmusa, A pedig a test elemeiből képezett $(n+1)$x$(n+1)$-es mátrix, melyre $detA \neq 0$.

1.5. *Definíció.* Tekintsük a $Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_ix_j$ kvadratikus alakot. A $PG(n,q)$ térben azon pontok halmazát, melyek kielégítik a $Q(x) = 0$ egyenletet, a Q-hoz tartozó másodrendű varietásnak nevezzük.

1.6. *Definíció.* A varietást szingulárisnak nevezzük, ha a koordinátarendszer változtatásával elérhető, hogy a hozzá tartozó kvadratikus alak eggyel kevesebb változót tartalmazzon. Ha ez nem tehető meg, akkor a varietást nem szingulárisnak nevezzük.

1.7. *Tétel.* Nemszinguláris másodrendű varietáshoz tartozó kvadratikus alak a $PG(n,q)$ térben az alábbi kanonikus alakok egyikére hozható:

1. Ha n páros, akkor $Q_n(x) = x_1^2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_{n+1}$, ebben az esetben parabolikus kvádrikáról beszélünk(illetve $n = 2$ esetén kúpszeletről)

2. ha n páratlan, akkor vagy $Q_n(x) = x_1x_2 + \cdots + x_nx_{n+1}$ és ekkor hiperbolikus kvádrikáról

3. vagy $Q_n(x) = f(x_1,x_2) + x_3x_4 + \cdots + x_nx_{n+1}$, ahol f egy irreducibilis, homogén, másodfokú polinom, ekkor pedig elliptikus kvádrikáról beszélünk.

1.8. *Tétel.* A $PG(n, q)$ térben

- páros n esetén a parabolikus kvádrikán

$$(q^n - 1)/(q - 1)$$

pont van,

- páratlan n esetén az elliptikus kvádrikára

$$(q^{\frac{n+1}{2}} + 1)(q^{\frac{n-1}{2}} - 1)/(q - 1),$$

míg hiperbolikus kvádrikára

$$(q^{\frac{n-1}{2}} + 1)(q^{\frac{n+1}{2}} - 1)/(q - 1)$$

pont illeszkedik.

1.9. *Megjegyzés.* Közismert tény, hogy egy egyenes és egy másodrendű varietás közös pontjainak a száma 0, 1, 2 vagy $q+1$ lehet. Egy egyenes és egy másodrendű nem-szinguláris varietás közös pontjainak a meghatározásához vezessük be a következő függvényt: $A \neq B$ pontok és Q_n kvadratikus alak esetén legyen

$$G(A, B) = Q_n(A + B) - Q_n(A) - Q_n(B)$$

Könnyen látható, hogy minden $t \in GF(q)$ esetén igaz, hogy

$$Q_n(A + tB) = Q_n(A) + tG(A, B) + t^2 Q_n(B)$$

Továbbá,

1.10. *Definíció.* Egy l egyenes a $\mathcal{T}_n$ nemszinguláris másodrendű varietás érintőegyenese, ha $|l \cap \mathcal{T}_n| = 1$ és a 2-szelője, ha $|l \cap \mathcal{T}_n| = 2$

1.11. *Tétel.* $P \in \mathcal{T}_n$ esetén

- ha $Q \notin \mathcal{T}_n$, akkor $G(P, Q) = 0 \Leftrightarrow PQ$ érintőegyenese $\mathcal{T}_n$-nek

. ha $Q \in \mathcal{T}_n$, akkor $G(P,Q) = 0 \Leftrightarrow PQ$ illeszkedik $\mathcal{T}_n$-re , illetve $G(P,Q) \neq 0 \Leftrightarrow PQ$ szelője $\mathcal{T}_n$-nek

Bizonyítás. A PQ egyenes $R = P + tQ$ pontja akkor és csak akkor van rajta $\mathcal{T}_n$-n, ha $Q_n(R) = 0$. Mivel $P \in \mathcal{T}_n$, ezért

$$Q_n(P + tQ) = tG(P,Q) + t^2Q_n(Q).$$

A $tG(P,Q) + t^2Q_n(Q) = 0$ egyenlet $t = 0$ gyöke a P pontnak felel meg, a $G(P,Q) + tQ_n(Q) = 0$ egyenlet megoldásainak száma pedig 0, q vagy 1, vagyis a PQ egyenes érintőegyenes, illeszkedik $\mathcal{T}_n$-re, vagy pedig szelője neki.

1.12. *Definíció.* Legyen S véges projektív tér, T pedig a duális tere. Egy $\alpha : S \to T$ kollineációt korrelációnak nevezünk. Minden α korreláció tekinthető $T \to S$ kollineációnak is. Ha az α korrelációt egymás után kétszer alkalmazva az S tér identikus kollineációját kapjuk, akkor az α neve polaritás.

1.13. *Megjegyzés.* Ha α az S tér polaritása, P egy pont, H pedig egy hipersík, akkor a P^α hipersík a P polárisa, a H^α pont pedig a H pólusa. Ha a Q pont rajta van a P^α hipersíkon, akkor a kollineáció ileszkedéstartásából következik, hogy a P pont is rajta van a Q^α hipersíkon. Ebben az esetben P és Q konjugált pontok. Ha P rajta van a P^α hipersíkon, akkor P autokonjugált pont.

1.14. *Megjegyzés.* Az *1.4. Tételt* használva leírjuk a $PG(n,q)$ tér polaritásait. Ha α polaritás, $\mathbf{x}$ pedig egy tetszőleges pont koordinátavektora, akkor

$$(\mathbf{x}^\alpha)^\alpha = (\mathbf{x}^\sigma A)^\sigma (A^{-1})^T = \mathbf{x}^{\sigma^2} A^\sigma (A^{-1})^T,$$

ahol σ testautomorfizmus, A pedig egy lineáris transzformációt megadó mátrix. Ez a kooordinátavektor ugyanahhoz a ponthoz tartozik, mint az $\mathbf{x}$ vektor. Ezért létezik olyan $0 \neq t \in GF(q)$ testelem melyre

$$t\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\sigma^2} A^\sigma (A^{-1})^T$$

teljesül minden $\mathbf{x}$ esetén. Ez akkor és csak akkor igaz, ha σ^2 az identitás és $tA^T = A^\sigma$. Két fő esetet különböztetünk meg.

1 σ az identitás. Ekkor $tA^T = A$, azaz $t(tA^T)^T = A$, vagyis $t^2 = 1$. Ha q páratlan, akkor két alesetet kell megkülönböztetni. Ha $t = 1$, akkor $A = A^T$, tehát a polaritást leíró mátrix szimmetrikus. A polaritást ebben az esetben közönséges polaritásnak, vagy másképp másodrendű felület által meghatározott polaritásnak nevezzük. Az utóbbi elnevezés indoka, hogy a polaritás autokonjugált pontjai megegyeznek az $\mathbf{x}A\mathbf{x}^T = 0$ egyenlettel meghatározott másodrendű varietás pontjaival.

Ha $t = -1$, akkor $A = -A^T$. Ebből $detA \leq 0$ miatt következik, hogy ilyen polaritás csak akkor létezik, ha a tér dimenziója páratlan. Minden pont autokonjugált, a polaritás neve nullpolaritás vagy szimplektikus polaritás.

Ha q páros, akkor $1 = -1$, tehát $A = A^T$. Ha a mátrix főátlójának minden eleme 0, akkor az előző esethez hasonlóan mindne pont autokonjugált, a polaritás neve nullpolaritás vagy szimplektikus polaritás.

Ha $A = (a_{ij})$ főátlójában van nemnulla elem, akkor a polaritás neve pszeudopolaritás. Ebben az esetben az autokonjugált pontok hipersíkot alkotnak, mert

$$\mathbf{x}A\mathbf{x}^T = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} a_{ii}x_i^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{a_{ii}}x_i\right)^2 = 0.$$

2. σ nem az identitás. Ebben az esetben $q = s^2$ és σ a $GF(q)$ testben megegyezik az s-edik hatványra emeléssel. Ekkor $tA^T = A^\sigma$, azaz $t((tA^T)^\sigma)^T = A^\sigma$, vagyis $t^2 = 1$. Tehát vagy $A^T = A^\sigma$, vagy $A^T = -A^\sigma$. Ha q páros, akkor a két eset megegyezik. Ha q páratlan, akkor tekintsük A helyett a λA mátrixot, ahol λ a $\lambda^\sigma/\lambda = -1$ egyenlet egy gyöke (mivel $\lambda^\sigma = \lambda^s$, és a (-1) a $GF(s^2)$ testben $s-1$-edik hatvány, ezért az egyenletnek van gyöke). Ez a mátrix ugyanazt a transzformációt adja meg, mint az A mátrix, de az $A^T = (\lambda^\sigma/\lambda)A^\sigma$ egyenletből $(\lambda A)^T = (\lambda A)^\sigma$ következik. Tehát páratlan q esetén is elegendő az $A^T = A^\sigma$ esettel foglalkoznunk. Ezt a polaritást Hermite-féle vagy unitér polaritásnak nevezzük. A polaritás autokonjugált pontjai megegyeznek az $\mathbf{x}^\sigma A\mathbf{x}^T = 0$ egyenlettel meghatározott úgynevezett Hermite-varietás pontjaival.

1.15. *Tétel.* A $PG(n,q)$ térben bármely nullpolaritáshoz tartozó mátrix - tehát olyan, amely az analitikus felírásban antiszimmetrikus - lineáris transzformációkkal

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & \vdots & -1 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

alakra hozható.

1.16. ***Tétel.*** Legyen A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 és B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 egy projektív tér öt-öt általános helyzetű pontja. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan lineáris transzformáció, amely a teret úgy képezi le önmagára hogy az A_i pontot a B_i pontnak felelteti meg $(1 \leq i \leq 5)$.

A fejezet lezárásaként nézzük meg néhány tulajdonságát a $PG(n,q)$ kvádrikáinak.

1.17. ***Tétel.*** Legyen M másodrendű felület $PG(n,q)$-ban. Ekkor S pontosan akkor szinguláris pontja M-nek (azaz a tér minden pontjával konjugált), ha S-en át nem megy 2-szelő, azaz olyan egyenes, amelynek pontosan két közös pontja van a felülettel.

Bizonyítás. Ha S szinguláris, akkor $s^TAs = 0$, ahol A a felületet meghatározó mátrix. Ha P is illeszkedik a felületre, azaz $p^TAp = 0$, akkor $s^TAp = 0$ miatt $(\alpha s + \beta p)^T A(\alpha s + \beta p) = 0$, tehát a teljes SP egyenes a felületen halad. Tegyük föl, hogy megy S-en át 2-szelő, legyen ez az ST egyenes. Ekkor $s^TAs = 0$ és $t^TAt = 0$, de ST más pontja nincs a felületen. Ekkor $\alpha\beta \neq 0$ esetén $(\alpha s + \beta t)^T A(\alpha s + \beta t) \neq 0$, így $2\alpha\beta s^TAt \neq 0$, azaz S és T nem konjugáltak, azaz S nem szinguláris pont.

1.18. *Következmény.* A szinguláris pontok alteret alkotnak, ugyanis minden S_1, S_2 szinguláris pontra S_1S_2 összes pontja a felületen van és szinguláris, hiszen $\alpha S_1 + \beta S_2$ minden ponttal konjugált.

1.19. *Tétel.* Legyen $\mathcal{M}$ másodrendű felület, S pedig a szinguláris pontok által alkotott k dimenziós altér. Legyen S' az S (projektív értelemben vett) $n-k-1$ dimenziós kiegészítő altere, továbbá $\mathcal{M}' := \mathcal{M} \cap S'$. Ekkor $\mathcal{M}'$ közönséges másodrendű felület S'-ben, és M egy olyan kúp amelynek alapja $\mathcal{M}'$, csúcsa pedig S.

Bizonyítás. Legyenek $S_0 \in S$ és $M' \in \mathcal{M}'$ tetszőleges pontok. Legyen $P \in \mathcal{M}$ tetszőleges nem szinguláris pont, amelyre $P \notin \mathcal{M}'$. Ekkor az S' altér és a P pont által generált altér pontosan egy pontban(T) metszi az S-et, dimenzió megfontolások miatt. Legyen $M := TP \cap S'$. Ekkor M egyértelműen létezik, P illeszkedik az TM egyenesre, tehát $\mathcal{M}$ egy kúp. Ha egy $\mathcal{M}$-beli P pont közönséges, akkor P-n át megy 2-szelő, legyen a másik metszéspont a P_1. Ehhez a P_1P-hez létezik az előbbiek szerint az S-beli T_1 illetve az $\mathcal{M}'$-beli M_1. $M \equiv M_1$ nem teljesülhet, ugyanis különben az M, T, T_1 síkban a PP_1-en lévő H_P eleme lenne $\mathcal{M}$-nek, ami lehetetlen, mivel MM_1 2-szelő, és $< S, PP_1 > \cap S' = MM_1$. Tehát $\mathcal{M}'$ közönséges. Kell még, hogy $\mathcal{M}'$ minden pontján át halad 2-szelő. Legyen $K \in \mathcal{M}'$ tetszőleges, tegyük fel, hogy K-n át nem megy 2-szelő. Ekkor a $T \in S$ pontból való vetítéssel kapjuk, hogy a TK egyenes egyetlen pontján át sem megy 2-szelő, azaz TK minden pontja szinguláris, így a K is, ami ellentmondás.

1.20. *Állítás.* Ha K közönséges másodrendű felület, akkor nem tartalmazhat hipersíkot.

Bizonyítás. Ha a K tartalmazna egy hipersíkot, akkor annak a polárisa egy egész hipersík lenne, vagyis a pólus-poláris megfeleltetés nem lenne egyértelmű.

1.21. ***Megjegyzés.*** Egy felületen lévő pont poláris hipersíkjának és a felületnek a metszete egy másodrendű felület, mégpedig egy P csúcsú kúp. P ennek a felületnek a szinguláris pontja, mert rajta nem megy keresztül 2-szelő. Tegyük fel, hogy létezik másik szinguláris pont, R, amelynek a polárisa $r \leq p$. Legyen a $T \in p$ és $T \notin r$, ekkor RT-nek p-ben csak R és T a pontjai, tehát R-en át megy 2-szelő, azaz R nem szinguláris. Továbbá egy n dimenziós felületre illeszkedő pont polárisának és a felületnek a metszete egy kúp, aminek a csúcsa ez a felületen lévő pont, az alapja pedig egy az eredetivel ugyanolyan tipusú $n-2$ dimenziós felület.

1.22. ***Megjegyzés.*** Sík esetén minden másodrendű felület felírható $x_1x_2 - x_3^2 = 0$ alakban, illetve véges projektív síkon egy kúpszeletre $q+1$ pont illeszkedik. $PG(3,q)$-ban két esetet különböztetünk meg. Ha a felület egyenlete $x_1x_2 + x_3x_4 = 0$ alakú, akkor hiperbolikus másodrendű felületről beszélünk. Az $x_1 = 0$ és $x_3 = 0$ síkok metszete egyenes, ami rajta van egy másodrendű felületen. Bármely $PG(3,q)$-beli hiperbolikus kvádrikára $(q+1)^2$ pont illeszkedik, továbbá egy ilyen kvadrika két alkotóseregből áll, melyek mindegyike páronként kitérő egyenesekből áll és minden egyenes az őt nem tartalmazó alkotósereg transzverzálisa. Ha a felület egyenlete $x_1x_2 + f(x_3,x_4) = 0$ alakú, ahol az f irreducibilis, homogén, másodfokú polinom, akkor elliptikus felületről beszélünk. Egy $PG(3,q)$-beli elliptikus kvádrikára q^2+1 pont illeszkedik. A III. fejezetben szó lesz még a $PG(5,q)$-beli hiperbolikus kvádrikáról. Egy ilyen felületre pontosan $(q^2+1)(q^2+q+1)$ pont illeszkedik. Az előző megjegyzés alapján ez a felület tartalmaz olyan kúpot, amelnyek az alapja egy három dimenziós hiperbolikus kvádrika. Az ezen alapot kiadó két alkotósereg és a kúp csúcsa mind egy olyan síkot határoz meg, amelyek illeszkednek erre az 5 dimenziós hiperbolikus kvádrikára. Ezeket a síkokat nevezzük - rendre a két alkotóseregből véve - *latin*, illetve *görög* síkoknak.

II. fejezet
A Plücker koordináták

A Klein megfeleltetés könnyen számolhatóvá, illetve egyáltalán megfogalmazhatóvá válik, ha alkalmazzuk *Julius Plücker* ötletét. Először ugyanis ő vette észre, hogy tetszőleges K test esetén a $PG(3, K)$ térben az egyeneseket is lehet homogén koordinátákkal reprezentálni.

2.1. *Definíció.* Legyen e a $PG(3, q)$ térnek az X és Y pontjain átmenő egyenese. Legyen az X egy homogén koordinátavektora $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, Y egy homogén koordinátavektora pedig $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Ekkor az e egyenes *Plücker-koordinátáinak* nevezzük a $(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23})$ hatost, ahol $p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ minden $1 \leq i, j \leq 4$ esetén.
Nézzük meg néhány tulajdonságát a Plücker-koordinátáknak és egyúttal lássuk is be, hogy ezek valóban homogén koordináták.

2.2. *Állítás.*

a. A Plücker-koordináták homogén koordináták, azaz skalárszorzó erejéig vannak meghatározva. Továbbá, egy egyenes Plücker koordinátái nem függenek attól, hogy mely pontjai segítségével illetve hogy azoknak melyik koordinátavektorával határozzuk meg.

b. Ha egy egyenes Plücker-koordinátái $(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23})$, akkor $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$

c. Ha a $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23} \in GF(q)$ testelemek között létezik olyan amelyik nem 0, és kielégítik a $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$ összefüggést, akkor van olyan egyenes $PG(3, q)$-ban, melynek a Plücker-koordinátái éppen $(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23})$.

Bizonyítás.

a. Tegyük fel, hogy X és Y a $PG(3, q)$ tér két különböző pontja, rendre az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ koordinátavektorokkal. Persze ekkor az X és Y pontokra illeszkedő egyenes bármely pontjának koordinátavektora felírható $\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}$ alakban, ahol α, $\beta \in GF(q)$. Az (**a**) pontban megfogalmazott állítás pontosan azt jelenti, hogy az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$, illetve az $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}$ és $\gamma\mathbf{x}+\delta\mathbf{y}$ koordinátavektorokból képezett Plücker-koordináták egymás skalárszorosai. Tegyük fel, hogy ez utóbbi két pont által meghatározott egyenes Plücker-koordinátái: $(q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{34}, q_{42}, q_{23})$, ekkor $q_{ij} = (\alpha x_i + \beta y_i)(\gamma x_j + \delta y_j) - (\alpha x_j + \beta y_j)(\gamma x_i + \delta y_i) = \alpha\ \gamma x_i x_j + \alpha\delta x_i y_j + \beta\gamma y_i x_j + \beta\delta y_i y_j - \alpha\gamma x_i x_j - \alpha\delta x_j y_i - \beta\gamma y_j x_i - \beta\delta y_i y_j = (\alpha\delta - \beta\gamma)(x_i y_j - x_j y_i)$, tehát a q_{ij} a p_{ij} $0 \neq (\alpha\delta - \beta\gamma)$-szorosa, ami igazolja (**a**)-t.

b. $p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ esetén $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = (x_1y_2 - x_2y_1)(x_3y_4 - x_4y_3) + (x_1y_3 - x_3y_1)(x_4y_2 - x_2y_4) + (x_1y_4 - x_4y_1)(x_2y_3 - x_3y_2) = x_1y_2x_3y_4 - x_1y_2x_4y_3 - x_2y_1x_3y_4 + x_2y_1x_4y_3 + x_1y_3x_4y_2 - x_1y_3x_2y_4 - x_3y_1x_4y_2 + x_3y_1x_2y_4 + x_1y_4x_2y_3 - x_1y_4x_3y_2 - x_4y_1x_2y_3 + x_4y_1x_3y_2$
$= 0$

c. Tegyük föl például, hogy $p_{12} \neq 0$, ekkor könnyen látható, hogy az $\mathbf{x} = (0, 1, \frac{p_{13}}{p_{12}}, \frac{p_{14}}{p_{12}})$ és $\mathbf{y} = (-p_{12}, 0, p_{23}, -p_{42})$ pontokra illeszkedő egyenes Plücker-koordinátái pontosan az előre megadott $(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23})$ hatos lesz.

2.3. ***Definíció.*** Az előző állítás szerint tehát, ha a $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23} \in GF(q)$ testelemek nem mindegyike 0, akkor pontosan akkor van olyan egyenes, melynek ezek a Plücker-koordinátái, ha $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$. Eszerint és a idézett tétel szerint tehát egy-egy értelmű megfeleltetést tudunk létesíteni a $PG(3, q)$ tér egyenesei és a $PG(5, q)$ tér egy hiperbolikus kvádrikájának pontjai között. Ezt nevezzük a ***Klein-megfeleltetésnek***.

2.4. ***Állítás.*** A $PG(3, q)$ tér

$$\mathbf{e} = (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}), \quad \mathbf{f} = (q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{34}, q_{42}, q_{23})$$

egyeneseinek akkor és csak akkor létezik közös pontja, ha

$$p_{12}q_{34} + p_{13}q_{42} + p_{14}q_{23} + q_{12}p_{34} + q_{13}p_{42} + q_{14}p_{23} = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ az $\mathbf{e}$, illetve $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ és $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ az $\mathbf{f}$ egyenes két-két különböző pontját reprezentáló homogén koordinátavektor. A két egyenesnek akkor és csak akkor létezik közös A metszéspontja, ha ez utóbbinak a homogén koordinátavektora előáll az $\mathbf{x}$ és az $\mathbf{y}$, illetve az $\mathbf{s}$ és a $\mathbf{t}$ lineáris kombinációjaként is. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy a $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$,$\mathbf{s}$,$\mathbf{t}$ vektorok lineárisan összefüggőek legyenek, tehát

$$
\begin{aligned}
0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} = & \underbrace{(x_1y_2 - x_2y_1)(s_3t_4 - s_{t3})}_{p_{12}q_{34}} + \underbrace{(x_1y_3 - x_3y_1)(s_4t_2 - s_2t_4)}_{p_{13}q_{42}} + \\
& + \underbrace{(x_1y_4 - x_4y_1)(s_2t_3 - s_3t_2)}_{p_{14}q_{23}} + \underbrace{(x_2y_3 - x_3y_2)(s_1t_4 - s_4t_1)}_{p_{23}q_{14}} + \\
& + \underbrace{(x_4y_2 - x_2y_4)(s_1t_3 - s_3t_1)}_{p_{42}q_{13}} + \underbrace{(x_3y_4 - x_4y_3)(s_1t_2 - s_2t_1)}_{p_{34}q_{12}}
\end{aligned}
$$

Tehát ez az egyenlőség igazolja az állítást.

2.5. *Jelölés.* Pont és egyenes, illetve egyenes és sík illeszkedésének a vizsgálatához készítsük el – a szóbanforgó egyenes Plücker-koordinátáit felhasználva – a következő két mátrixot:

$$
\mathbf{\Omega}_p = \begin{pmatrix} 0 & -p_{34} & -p_{42} & -p_{23} \\ p_{34} & 0 & -p_{14} & p_{13} \\ p_{42} & p_{14} & 0 & -p_{12} \\ p_{23} & -p_{13} & p_{12} & 0 \end{pmatrix},
$$

illetve

$$
\mathbf{\Omega}_s = \begin{pmatrix} 0 & -p_{12} & -p_{13} & -p_{14} \\ p_{12} & 0 & -p_{23} & p_{42} \\ p_{13} & p_{23} & 0 & -p_{34} \\ p_{14} & -p_{42} & p_{34} & 0 \end{pmatrix}
$$

2.6. *Állítás.* Az $\mathbf{e} = (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23})$ egyenesre akkor és csak akkor illeszkedik az $\mathbf{x}$ homogén koordinátavektorral reprezentált P pont, ha

$$\mathbf{x}\mathbf{\Omega}_p = 0,$$

továbbá az $\mathbf{u}$ homogén koordinátavektorral reprezentált S sík akkor és csak akkor tartalmazza az $\mathbf{e}$ egyenest, ha

$$\mathbf{u}\mathbf{\Omega}_s = 0$$

Bizonyítás. Legyen az $\mathbf{e}$ egyenes Plücker-koordinátái a rá illeszkedő $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ és $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ pontokkal meghatározva, azaz $p_{ij} = s_i t_j - s_j t_i$.

$$\mathbf{x\Omega}_p = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_2(s_3t_4 - s_4t_3) + x_3(s_4t_2 - s_2t_4) + x_4(s_2t_3 - s_3t_2) = 0 \\ x_1(s_4t_3 - s_3t_4) + x_3(s_1t_4 - s_4t_1) + x_4(s_3t_1 - s_1t_3) = 0 \\ x_1(s_2t_4 - s_4t_2) + x_2(s_4t_1 - s_1t_4) + x_4(s_1t_2 - s_2t_1) = 0 \\ x_1(s_3t_2 - s_2t_3) + x_2(s_1t_3 - s_3t_1) + x_3(s_2t_1 - s_1t_2) = 0 \end{array} \right\}$$

Tegyük föl, hogy $\mathbf{x}$ illeszkedik az e egyenesre. Tehát létezik $\alpha, \beta \in GF(q)$, hogy minden $1 \le i \le 4$-re $x_i = \alpha s_i + \beta t_i$. Azaz $x_2s_3t_4 - x_2s_4t_3 + x_3s_4t_2 - x_3s_2t_4 + x_4s_2t_3 - x_4s_2t_3 = \alpha(s_2s_3t_4 - s_2s_4t_3 + s_3s_4t_2 - s_3s_2t_4 + s_4s_2t_3 - s_4s_3t_2) + \beta(t_2s_3t_4 - t_2s_4t_3 + t_3s_4t_2 - t_3s_2t_4 + t_4s_2t_3 - t_4s_3t_2) = 0$. Tehát $\mathbf{x\Omega}_p = 0$ teljesül.A másik irány belátásához tegyük fel, hogy az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ kielégíti az $\mathbf{x\Omega}_p = 0$ feltételt. Mivel $\mathbf{e} = (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23})$ Plücker koordináták, ezért feltehető, hogy $p_{12} = s_1t_2 - s_2t_1 \neq 0$. Ebből következik, hogy

$$\exists! \alpha, \beta \in GF(q) : \begin{array}{c} x_1 = \alpha s_1 + \beta t_1 \\ x_2 = \alpha s_2 + \beta t_2 \end{array}$$

Nézzük például az $\mathbf{x}$-nek a $\mathbf{\Omega}$ utolsó oszlopvektorával való szorzatát(ami $= 0$ a feltétel szerint): $x_3(s_1t_2 - s_2t_1) = x_1s_3t_2 - x_1s_2t_3 + x_2s_1t_3 - x_2s_3t_1 = (\alpha s_1 + \beta t_1)s_3t_1 - (\alpha s_1 + \beta t_1)s_2t_3 + (\alpha s_2 + \beta t_2)s_1t_3 - (\alpha s_2 + \beta t_2)s_3t_1 = \alpha(s_1t_2 - s_2t_1)s_3 + \beta(s_1t_2 - s_2t_1)t_3$. Ugyanígy a többi koordinátára is: $x_i = \alpha s_i + \beta t_i$. A síkokra vonatkozó állítás hasonlóan bizonyítandó.

2.7. *Megjegyzés.* Az előző állításra adunk egy másik bizonyítást, mellyel talán nyilvánvalóbbá válik, miért ezt a mátrixot használjuk az illeszkedés leírására. Indirekt, tegyük föl, hogy az $\mathbf{x}$ nem illeszkedik az $\mathbf{s}$ és $\mathbf{t}$ által meghatározott $\mathbf{e}$ egyenesre. Az $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ és $(0,0,0,1)$ pontok által meghatározott szimplex csúcsai közül az $\mathbf{x}$, $\mathbf{s}$ és $\mathbf{t}$ által meghatározott sík legfeljebb hármat tartalmazhat. Viszont a föntebbi jelölésekkel a $\mathbf{x\Omega} = 0$ pontosan azt jelenti, hogy a

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

determináns mindig egyenlő 0-val, ahol az a, b, c, d testelemek közül mindig pontosan az egyik egyenlő 1-gyel a többi pedig 0-val. Tehát lévén, hogy a szimplex valamely csúcsa lineárisan független az $\mathbf{x}$, $\mathbf{s}$ és $\mathbf{t}$ által meghatározott síktól ezért valamely a, b, c, d négyesre ez a determináns nem lehet egyenlő nullával. Ellentmondás, tehát $\mathbf{x}$ illeszkedik az $\mathbf{s}$ és $\mathbf{t}$ által meghatározott $\mathbf{e}$ egyenesre.

III. fejezet
A Klein megfeleltetés néhány tulajdonsága a $PG(3,q)$ 3-dimenziós projektív tér egyenesei és egy $PG(5,q)$-beli $\mathcal{H}_5$ hiperbolikus kvádrika pontjai között.

3.1. ***Tulajdonság.***

- $PG(3,q)$ tér $(q^2+1)(q^2+q+1)$ egyenese megfelel

- egy $\mathcal{H}_5 \subset PG(5,q)$ hiperbolikus kvádrika $(q^2+1)(q^2+q+1)$ pontjának.

Bizonyítás. Pontosan ez jelenti azt, hogy a Klein-megfeleltetés az egy egy-egy értelmű megfeleltetés az egyenesek és a kvádrika pontjai között, illetve lényegében ezt állítja a *2.2. Állítás.*

3.2. ***Tulajdonság.***

- Két kitérő egyenes $PG(3,q)$-ban megfelel

- két olyan pontnak $\mathcal{H}_5$-ön, melyek összekötő egyenese 2-szelője $\mathcal{H}_5$-nek.

Illetve ezzel analóg összefüggés:

- Két egymást metsző egyenese $PG(3,q)$-nak megfelel

- két olyan pontnak $\mathcal{H}_5$-ön, melyek összekötő egyenese illeszkedik $\mathcal{H}_5$-re.

Bizonyítás. Az *1.11. Tételt* használjuk, azaz ha x,y rajta van egy ξ nemszinguláris másodrendű kvádrikán, akkor $G(x,y) = 0 \iff XY$ rajta van ξ - n, illetve $G(x,y) \neq 0 \iff xy$ szelője ξ -nek, a $G(x,y) =$

$Q_n(x+y) - Q_n(x) - Q_n(y)$ jelölést használva, ahol Q_n a ξ varietáshoz tartozó kvadratikus alakot jelöli. Jelöljük a két $PG(3,q)$-beli egyenes Plücker-koordinátáit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$-tal, illetve $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$-tal. Tehát

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \underbrace{(x_1+y_1)(x_4+y_4)+(x_2+y_2)(x_5+y_5)+(x_3+y_3)(x_6+y_6)}_{Q_n(x+y)} \\ &\quad - \underbrace{(x_1x_4+x_2x_5+x_3x_6)}_{Q_n(x)} - \underbrace{(y_1y_4+y_2y_5+y_3y_6)}_{Q_n(y)} \qquad = \\ Q_n(x+y) &= x_1y_4+y_1x_4+x_2y_5+y_2x_5+x_3y_6+y_3x_6, \qquad (1) \end{aligned}$$

és mivel az $(x_i)_{i=1\dots6}, (y_j)_{j=1\dots6}$ -k Plücker-koordináták ezért a fönti egyenlőség pontosan akkor $= 0$ illetve $\neq 0$, ha a reprezentált egyenesek metszik illetve elkerülik egymást, alkalmazva a *2.4. Állítást.* Tehát bizonyítottuk a fönti állítást.

3.3. *Tulajdonság.*

- Egy $PG(3,q)$-beli sugársor megfelel

- egy $\mathcal{H}_5$-re illeszkedő egyenesnek.

Bizonyítás. A sugársor bármely két egyenese metszi egymást. Válasszunk ki közülük kettőt és nézzük a nekik megfelelő $\mathcal{H}_5$-beli pontokat összekötő egyenest, ami a *3.2. Tulajdonság* szerint illeszkedik $\mathcal{H}_5$-re. Ezen egyenes $q+1$ darab pontjának mind megfelel egy-egy $PG(3,q)$-beli egyenes, amik viszont pontosan a sugársor egyenesei lesznek.

3.4. *Tulajdonság.*

- Egy $PG(3,q)$-beli háromszög három oldalegyenese megfelel

- egy olyan $PG(5,q)$-beli háromszög három csúcsának, melynek oldalegyenesei illeszkednek $\mathcal{H}_5$-re.

Bizonyítás. A három egyenes persze három pontnak felel meg $\mathcal{H}_5$-ön. A három oldalegyenes nem tartozik egy sugársorba, tehát a nekik megfelelő pontok nem lesznek kollineárisak. Illetve ezek az oldalegyenesek metszik egymást, tehát a *3.2. Tulajdonság* szerint a nekik megfelelő pontokat összekötő egyenesek illeszkednek $\mathcal{H}_5$-re. Mellesleg ennek a $\mathcal{H}_5$-ön lévő háromszög oldalegyeneseinek éppen a $PG(3,q)$-ban lévő háromszög oldalpárjai által generált sugársorok felelnek meg.

3.5. ***Tulajdonság.***

- Egy $PG(3,q)$-beli sík (azaz a sík összes egyenese) megfelel
- egy - úgynevezett - *görög* síknak $\mathcal{H}_5$-ön.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4]$ egy sík $PG(3,q)$-ban. Azt kell belátni, hogy az ezen sík által tartalmazott egyeneseknek megfeleltetett $\mathcal{H}_5$-beli pontok szintén síkot alkotnak. Legyen $\mathbf{e} = (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23})$ egy $PG(3,q)$-beli egyenes, amelyik illeszkedik az $\mathbf{u}$ síkra. Ekkor a *2.6. Állítás alapján*

$$\mathbf{u}\boldsymbol{\Omega}_s = 0,$$

ahol a

$$\boldsymbol{\Omega}_s = \begin{pmatrix} 0 & -p_{12} & -p_{13} & -p_{14} \\ p_{12} & 0 & -p_{23} & p_{42} \\ p_{13} & p_{23} & 0 & -p_{34} \\ p_{14} & -p_{42} & p_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot az $\mathbf{e}$ egyenes Plücker-koordinátáiból nyerjük. Ez a következőket jelenti:

$$\begin{aligned} u_2p_{12} + u_3p_{13} + u_4p_{14} &= 0 \\ -u_1p_{12} + u_3p_{23} - u_4p_{42} &= 0 \\ -u_1p_{13} - u_2p_{23} + u_4p_{34} &= 0 \\ -u_1p_{14} + u_2p_{42} - u_3p_{34} &= 0 \end{aligned}$$

Feltehető például, hogy $u_4 \neq 0$. Képezzük tehát az $\mathbf{u}$ vektorból a következő mátrixot a fenti egyenlőségek figyelembevételével:

$$\mathbf{A}_u = \begin{pmatrix} u_2 & -u_1 & 0 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_4 \\ 0 & -u_4 & 0 \\ 0 & u_3 & -u_2 \end{pmatrix}$$

Könnyen látható, hogy az $\mathbf{A}_u$ rangja három ($u_4 \neq 0$), az $\mathbf{x}\mathbf{A}_u = 0$ egy síkegyenlet $PG(5,q)$-ban illetve, hogy az $\mathbf{A}_u$ mátrix által leírt *görög* sík minden pontjának megfelelő $PG(3,q)$-beli egyenes illeszkedni fog az $\mathbf{u}$ síkra, illetve minden ilyen egyenesnek megfelelő pont az adott *görög* síkon lesz.

3.6. *Tulajdonság.*

- Egy $PG(3,q)$-beli pontra illeszkedő egyenesek megfelelnek
- egy - úgynevezett - *latin* síknak $\mathcal{H}_5$-ön.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ egy pont $PG(3,q)$-ban. Azt kell belátni, hogy az ezen pontra illeszkedő egyeneseknek megfeleltetett $\mathcal{H}_5$-beli pontok szintén síkot alkotnak. Legyen $\mathbf{e} = (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23})$ egy $PG(3,q)$-beli egyenes, amelyik illeszkedik az $\mathbf{x}$ pontra. Ekkor a *2.6. Állítás alapján*

$$\mathbf{x}\mathbf{\Omega}_p = 0,$$

ahol a

$$\mathbf{\Omega}_p = \begin{pmatrix} 0 & -p_{34} & -p_{42} & -p_{23} \\ p_{34} & 0 & -p_{14} & p_{13} \\ p_{42} & p_{14} & 0 & -p_{12} \\ p_{23} & -p_{13} & p_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot az $\mathbf{e}$ egyenes Plücker-koordinátáiból nyerjük. Ez a következőket jelenti:

$$\begin{aligned} x_2p_{34} + x_3p_{42} + x_4p_{23} &= 0 \\ -x_1p_{34} + x_3p_{14} - x_4p_{13} &= 0 \\ -x_1p_{42} - x_2p_{14} + x_4p_{12} &= 0 \\ -x_1p_{23} + x_2p_{13} - x_3p_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Feltehető például, hogy $x_4 \neq 0$. Képezzük tehát az $\mathbf{u}$ vektorból a következő mátrixot a fenti egyenlőségek figyelembevételével:

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_3 \\ 0 & -x_4 & x_2 \\ 0 & x_3 & 0 \\ x_2 & -x_1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \\ x_4 & u_3 & -x_1 \end{pmatrix}$$

Könnyen látható, hogy az $\mathbf{A}_x$ rangja három ($x_4 \neq 0$), illetve, hogy az $\mathbf{A}_x$ mátrix által leírt *latin* sík minden pontjának megfelelő $PG(3,q)$-beli egyenes illeszkedni fog az $\mathbf{x}$ pontra, illetve minden ilyen egyenesnek megfelelő pont az adott *latin* síkon lesz.

3.7. *Tulajdonság.*

- A $PG(3,q)$ tér q^3+q^2+q+1 síkja megfelel
- a $\mathcal{H}_5$-re illeszkedő q^3+q^2+q+1 *görög* síknak.

Bizonyítás. Mivel két különböző $PG(3,q)$-beli síkra létezik olyan $PG(3,q)$-beli egyenes, amelyik az egyik síkra illeszkedik és a másikra pedig nem, ezért az ennek az egyenesnek megfeleltetett $\mathcal{H}_5$-re illeszkedő pont az egyik *görög* síkon rajta lesz, míg a másikon nem. Azt pedig láttuk, hogy egy $PG(3,q)$-beli síkhoz pontosan csak egy $\mathcal{H}_5$-re illeszkedő *görög* sík tartozhat. Tehát a bijekció fennáll.

3.8. *Tulajdonság.*

- A $PG(3,q)$ tér q^3+q^2+q+1 pontja megfelel
- a $\mathcal{H}_5$-re illeszkedő q^3+q^2+q+1 *latin* síknak.

Bizonyítás. Mivel két különböző $PG(3,q)$-beli pontra létezik olyan $PG(3,q)$-beli egyenes, amelyik az egyik pontra illeszkedik és a másikra pedig nem, ezért ennek az egyenesnek megfeleltetett $\mathcal{H}_5$-re illeszkedő pont az egyik *latin* síkon rajta lesz, míg a másikon nem. Azt pedig láttuk, hogy egy $PG(3,q)$-beli ponthoz pontosan csak egy $\mathcal{H}_5$-re illeszkedő *latin* sík tartozhat. Tehát a bijekció fennáll.

3.9. ***Tulajdonság.***

. A $PG(3,q)$ tér egy egyenesén lévő $q+1$ pontnak megfelel

. $q+1$ darab olyan *latin* sík, melyek pontosan egy $\mathcal{H}_5$-ön lévő pontban metszik egymást.

Bizonyítás. Triviális az előző tulajdonságokból. A $q+1$ pont pontosan akkor kollineáris, ha a nekik megfeleltetett *latin* síkok egy pontban metszik egymást. Mellesleg ez a metszéspont felel meg a $q+1$ pont által meghatározott egyenesnek.

3.10. ***Tulajdonság.***

. A $PG(3,q)$ tér egy egyenesére illeszkedő $q+1$ síknak megfelel

. $q+1$ darab olyan *görög* sík, melyek pontosan egy $\mathcal{H}_5$-ön lévő pontban metszik egymást.

Bizonyítás. Triviális az előző tulajdonságokból. A $q+1$ sík pontosan akkor metszi egymást egy egyenesben, ha a nekik megfeleltetett *görög* síkok egy pontban metszik egymást. Mellesleg ez a metszéspont felel meg a $q+1$ sík metszetének.

3.11. ***Tulajdonság.***

. Az a tény, hogy $PG(3,q)$-ban bármely két különböző pontnak egyértelműen létezik összekötő egyenese, megfelel annak, hogy

- a $\mathcal{H}_5$-ön bármely két *latin* sík metszete egy pont.

Bizonyítás. A két pontot összekötő egyenesnek pontosan a két *latin* sík metszéspontja fog megfelelni. Tulajdonképpen az e pontot tartalmazó bármely két *latin* sík a pontnak megfeleltetett egyenesen lévő valamely két pontnak fog megfelelni. Ezért ez a tulajdonság a *3.9. Tulajdonság* speciális esete.

3.12. *Tulajdonság.*

- Az a tény, hogy $PG(3,q)$-ban bármely két különböző síknak egyértelműen létezik metszésvonala, megfelel annak, hogy

- a $\mathcal{H}_5$-ön bármely két *görög* sík metszete egy pont.

Bizonyítás. A két síkra illeszkedő egyenesnek pontosan a két *görög* sík metszéspontja fog megfelelni. Tulajdonképpen az e pontot tartalmazó bármely két *görög* sík a pontnak megfeleltetett egyenest tartalmazó valamely két síknak fog megfelelni. Tehát ez a tulajdonság a *3.10. Tulajdonság* speciális esete.

3.13. *Tulajdonság.*

- Az a tény, hogy egy sugársor egyenesei pontosan egy síkban vannak és pontosan egy síkra illeszkednek, megfelel annak, hogy

- bármely $\mathcal{H}_5$-re illeszkedő egyenes pontosan egy *latin* és pontosan egy *görög* síkban van benne.

Bizonyítás. Az, hogy egy sugársor egy pontra illeszkedik, illetve, hogy egy síkban van benne, rendre azt jelenti, hogy a sugársornak megfeleltetett egyenes illeszkedik egy *latin*, illetve egy *görög* síkra. Az pedig nyilvánvaló, hogy egy sugársor csak a tartósíkjában van, és hogy csak a tartópontjára illeszkedik. A *latin* síkot a tartópontnak, a *görög* síkot pedig a tartósíknak feleltetjük meg a *3.5.* és a *3.6. Tulajdonság*-ok segítségével.

3.14. ***Tulajdonság.***

. Az az alternatíva, hogy egy $PG(3, q)$-beli egyeneshalmaz, melynek minden elemére igaz, hogy átmegy egy adott ponton és illeszkedik egy adott síkra, üres vagy pedig egy sugársort alkot, megfelel annak, hogy

. egy *latin* és egy *görög* sík vagy diszjunkt vagy pedig egy egyenesben metszi egymást.

Bizonyítás. Az adott pontnak megfelel egy *latin* sík, az adott síknak megfelel egy *görög* sík, tehát az egyeneshalmaz, illetve a neki megfeleltetett $\mathcal{H}_5$-beli ponthalmaz attól függően lesz sugársor vagy üreshalmaz, illetve a neki megfeleltetett $\mathcal{H}_5$-beli metszetegyenes vagy üreshalmaz, hogy a pont illeszkedik-e a síkra vagy nem.

3.15. ***Tulajdonság.***

. Egy $PG(3, q)$-beli triéder páronként vett élei által generált sugársorok megfelelnek

. egy *latin* síkon lévő háromszög oldalegyeneseinek.

Bizonyítás. A három különböző sugársor megfelel három különböző egyenesnek $\mathcal{H}_5$-ön, ezek metszik is egymást, lévén a térszög élegyenesei a sugársorok páronkénti közös egyenesei. Ez a három élegyenes felel meg a $\mathcal{H}_5$-beli háromszög három csúcsának. A szóban forgó *latin* sík pedig a térszög csúcsának felel meg.

3.16. ***Tulajdonság.***

. Egy $PG(3, q)$-beli háromszög oldalpárjai által generált sugársorok megfelelnek

. egy *görög* síkon lévő háromszög oldalegyeneseinek.

Bizonyítás. A *görög* sík a $PG(3, q)$-beli háromszög síkjának felel meg, a generált sugársorok az oldalegyeneseknek, míg az eredeti háromszög egyenesei a *görög* síkon lévő háromszög csúcsainak felelnek meg.

3.17. *Tulajdonság.*

. Egy $PG(3, q)$-beli három-oldalú térszög három lapsíkja megfelel

. három olyan *görög* síknak, melyek mindegyike egy *latin* síkon lévő háromszög egy-egy oldalegyenesén halad át.

Bizonyítás. A térszög egy oldalsíkja tartalmazza a *3.15. Tulajdonság*ban említett - az oldalsík által tartalmazott - oldalegyenesek által generált sugársort, ennélfogva az oldalsíknak megfeleltetett $\mathcal{H}_5$-beli *görög* sík tartalmazni fogja a sugársornak megfeleltetett háromszög-oldalegyenest.

3.18. *Tulajdonság.*

. Egy $PG(3, q)$-beli háromszög három csúcsa megfelel

. három olyan *latin* síknak, melyek mindegyike egy *görög* síkon lévő háromszög egy-egy oldalegyenesén halad át.

Bizonyítás. Egy csúcsnak megfelel egy *latin* sík; ez a csúcs az egyik sugársor tartója lesz, ami pedig a *görög* síkon lévő háromszög egyik oldalának fog megfelelni, tehát a *latin* síkokra illeszkedik egy-egy oldalegyenes.

3.19. *Tulajdonság.*

. A $PG(3, q)$-beli dualitás elve, azaz a síkok és pontok közötti dualitás megfelel

- a *görög* és *latin* síkok közötti megfeleltethetőségnek.

Bizonyítás. Triviálisan következik a *3.5.* és a *3.6. Tulajdonság*-okból.

3.20. ***Tulajdonság.***

- Egy $PG(3,q)$-beli kúpszelet duálisának, azaz egy kúpszelet érintőegyenes-halmazának megfelel

- egy *görög* síkra illeszkedő kúpszelet.

Bizonyítás. Az egyeneshalmaznak megfeleltetett $\mathcal{H}_5$-beli ponthalmaz persze a $PG(3,q)$-beli kúpszelet síkjának megfeleltetett *görög* síkra fog illeszkedni. Ebben a halmazban semelyik három pont nem kollineáris, különben az érintőegyenes-halmazban lenne három egyenes, melyek ugyanahhoz a sugársorhoz tartoznának, de egy kúpszelethez egy pontból legfeljebb két érintőt lehet húzni. Tehát a *görög* síkon a megfeleltetés után egy $q+1$-ívet fogunk kapni, ami Segre tétele szerint egy kúpszeletet alkot. (Vagy a következő tulajdonság bizonyításában leírt számoláshoz hasonlóan, itt is megkaphatjuk a konkrét egyenletet.)

3.21. ***Tulajdonság.***

- Egy $PG(3,q)$-beli kúpnak, azaz az alkotóegyeneseinek megfelel

- egy *latin* síkra illeszkedő kúpszelet.

Bizonyítás. Az alkotóknak megfeleltetett $\mathcal{H}_5$-beli ponthalmaz persze a kúp csúcsának megfeleltetett *latin* síkra fog illeszkedni. A kúp alkotói közül nem létezik három, amely egy sugársorhoz tartozna, ugyanis elmetszve a kúpot egy - a csúcsot nem tartalmazó síkkal - a metszetben nem létezik három kollineáris pont. Másfelől a válasszuk a kúp csúcsának a $(1,0,0,1)$ pontot, illetve az alapjának a kúp $x_4=0$ síkba eső részét(ami persze egy kúpszelet), ennek az egyenlete $x_1^2+x_2x_3=0$, azaz $x_1^2=x_2x_3$. Az alkotók Plücker-koordinátái: $p_{12}=x_2, p_{13}=x_3, p_{14}=x_1-x_4, p_{34}=-x_3, p_{42}=-x_2, p_{23}=0$.

Ezeket az összefüggéseket és a Plücker-koordinátákra vonatkozó $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$ összefüggést felhasználva kapjuk, hogy $p_{14}^2 + p_{12}p_{13} = 0$, ami a megfeleltetett kúpszelet egyenlete lesz.

3.22. ***Tulajdonság.***

. Két olyan nem egysíkú sugársor, melyeknek van közös egyenesük és centumaik különbözőek megfelelnek

. két olyan egyenesnek, melyek egymást metszik és melyeket $\mathcal{H}_5$-ből egy érintősík metsz ki.

Bizonyítás. A két megfeleltetett egyenes nem esik egybe, ugyanis a két sugársor különböző (különbözőek a centrumaik), és metszik is egymást, ugyanis a két sugársornak van közös egyenese. Ennek a közös egyenesnek lesz megfeleltetve a metszéspont. A két megfeleltetett, $\mathcal{H}_5$-beli egyenes által meghatározott sík nem lehet sem *görög* sík - lévén a két sugársor nem egysíkú -, sem *latin* sík - lévén a két sugársor különböző centrumú - tehát egy érintősík metszi ki azokat $\mathcal{H}_5$-ból.

3.23. ***Definíció.*** Legyen Π_1, Π_2 és Π_3 a $PG(2t-1, q)$ tér három páronként kitérő $(t-1)$-dimenziós altere. A három altér által meghatározott $(t-1)$-regulusnak, azt a $q+1$ darab $(t-1)$-dimenziós alterét hívjuk $PG(2t-1, q)$-nak, melyeknek minden olyan egyenessel pontosan egy közös pontjuk van, amely egyenesek a Π_1, Π_2 és Π_3 alterek mindegyikét metszik. A $PG(3, q)$ tér 1-regulusait röviden regulusnak nevezzük. Tehát egy $PG(3, q)$-beli regulust három páronkét kitérő egyenes transzverzálisai alkotják. Ez a definíció korrekt; ezt mutatja a következő:

3.24. ***Megjegyzés.*** Ha adott $PG(2t-1, q)$-ban három páronként kitérő $(t-1)$-dimenziós altér, akkor az egyik altér bármely X pontja a második altérrel egy olyan t-dimenziós alteret generál, melynek pontosan egy közös Y pontja van a harmadik altérrel. Az XY egyenes pedig mindhárom alteret metszi. Illetve igaz az a tétel, hogy ha valamely $(t-1)$-dimenziós altér az így keletkezett egyenesek közül legalább hármat metsz, de egyet sem tartalmaz, akkor mindegyiket metszi. Tehát regulus-beli altér lesz.

3.25. ***Tulajdonság.***

. Egy regulusnak, azaz három kitérő egyenes $q+1$ darab transzverzálisának megfelel

. egy kúpszelet, melyet egy olyan sík metsz ki $\mathcal{H}_5$-ből, amit generáló háromszögnek csak a csúcsai illeszkednek $\mathcal{H}_5$-re, de az oldalegyenesei nem.

Bizonyítás. Két kitérő egyenest, illetve a harmadik egyenes egyik meghatározó pontját az *1.16. Tétel* alapján tetszőlegesen megválaszthatjuk. Legyen a pont koordinátavektora $(0,0,0,1)$ és legyen a harmadik egyenes egy másik pontja (y_1, y_2, y_3, y_4), feltehető, hogy $y_3 \neq 0$, tehát ezen egyenes Plücker-koordinátája: $\mathbf{g} = (0,0,-y_1,-y_3,y_2,0)$. A másik két kitérő egyenes Plücker-koordinátái legyenek $\mathbf{e} = (1,0,0,0,0,0)$ illetve $y_2 \neq y_3$ esetén $\mathbf{f} = (1,1,0,0,-1,0)$. Egy tetszőleges transzverzális-egyenesük Plücker-koordinátáit jelöljük $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$-tal. Az, hogy ez az egyenes metszi mindhárom kitérőt, az a következőket jelenti:

$$x_4 = 0$$

$$x_2 = x_5$$

$$-x_1y_3 + x_2y_2 - x_6y_1 = 0,$$

másfelől $\mathbf{x}$ Plücker-koordinátájára igaz a

$$x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 = 0$$

összefüggés, tehát ezekből megkapjuk a regulusnak megfeleltetett kúpszelet egyenletét:

$$x_5^2 + x_3x_6 = 0,$$

ha $y_2 = y_3$ akkor $y_1 \neq -y_3$ esetén az előbbi meggondolás működik $\mathbf{f} = (1,0,0,1,-1,0)$ választással. Az kell még, hogy nem lehet $-y_1 = y_2 = y_3$. Ez látható az ez esetben fennálló $-x_1y_3+x_2y_2-x_6y_1 = y_3(-x_1+x_2+x_6) = 0$ összefüggésből, ugyanis választhatunk olyan $\mathbf{x}$-et, hogy $-x_1+x_2+x_6 \neq 0$, de azt viszont föltettük, hogy $x_3 \neq 0$. A kúpszelet síkját persze az a három pont fogja generálni, melyeket a regulust meghatározó három kitérő egyenesnek feleltetünk meg. Ezen három kitérő egyenesnek nincs közös pontja, tehát a nekik megfeleltetett három pontot összekötő egyenesek - az általuk képezett háromszög oldalegyenesei - nem illeszkednek $\mathcal{H}_5$-re.

3.26. ***Tulajdonság.***

. Egy hiperbolikus kongruenciának, azaz két kitérő egyenes $(q+1)^2$ darab transzverzális egyenesének megfelel

. egy hiperbolikus kvádrika, amit egy olyan három dimenziós tér metsz ki $\mathcal{H}_5$-ből, melynek poláris egyenese 2-szelője $\mathcal{H}_5$-nek.

Bizonyítás. A két kitérő egyenest az *1.16. Tétel* alapján tetszőlegesen megválaszthatjuk. Legyenek a Plücker-koordinátáik $\mathbf{e} = (1,0,0,0,0,0)$ és $\mathbf{f} = (0,0,0,1,0,0)$. Az ezeket metsző tetszőleges transzverzális egyenes Plücker-koordinátáit jelöljük $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$-tal. Világosan látszik, hogy a $x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 = 0$ összefüggés miatt a megfeleltetett pontok kielégítik az $x_2x_5 + x_3x_6 = 0$ hiperbolikus kvádrika-egyenletet. A poláris egyenes két - $\mathcal{H}_5$-tel vett - metszéspontja a két kitérő egyenesnek felel meg.

3.27 ***Tulajdonság.***

. $PG(3,q)$-beli $q+1$ darab sugársor két családja, mely sugársorok mindegyike olyan, hogy a tartójuk egy egyenesen van és a tartalmazott egyenesek egy másik - kitérő - egyenest metszenek, azaz a *3.24. Tulajdonság*-ban tárgyalt transzverzálisokat adják ki, megfelel

. egy $\mathcal{H}_5$-ön lévő három-dimenziós $\mathcal{H}_3$ hiperbolikus kvádrika két alkotóseregének.

Bizonyítás. Ezt a $q+1$ darab sugársort a két kitérő egyenes transzverzálisai alkotják. Az ezeknek megfeleltetett ponthalmaz persze a $\mathcal{H}_3$ hiperbolikus kvádrika, ami viszont két alkotóseregből áll. Egy alkotósereg egyenesei páronként kitérőek, ezeket az egyeneseket feleltetjük meg a sugársoroknak. Két sugársornak nem létezik közös egyenese, tehát a nekik megfeleltetett egyeneseknek nem lesz közös pontja. A másik sugársornak - amely mellesleg ugyanazokból a pontokból áll - ugyanezek a sugársorok felelnek meg, úgy tekintve rájuk, mint amelyeknek a tartója a másik $PG(3,q)$-beli kitérő egyenesen van.

3.28. ***Definíció.***

a. A $PG(n,q)$ tér egy befedésének nevezzük r-dimenziós alterek egy $\mathcal{F}$ halmazát, ha $\mathcal{F}$ elemei diszjunktak és $PG(n,q)$ minden pontja $\mathcal{F}$-nek pontosan egy elemében van benne.

b. A $PG(2t-1,q)$ tér $(t-1)$-dimenziós alterekből álló befedése reguláris befedés, ha a befedéshez tartozó bármely három Π_1, Π_2 és Π_3 altérre teljesül, hogy az általuk generált $(t-1)$-regulushoz tartozó minden $(t-1)$-dimenziós altér is a befedéshez tartozik.

c. Pakolásnak nevezzük a $PG(3,q)$ tér egyeneseinek egy partícionálását befedésekre. Így egy pakolás q^2+q+1 darab befedést tartalmaz, melyek közül semelyik kettőnek nincs közös egyenese.

3.29. ***Tulajdonság.***

. Egy tetszőleges befedés q^2+1 darab egyenese megfelel

. $\mathcal{H}_5$-re illszkedő q^2+1 darab pontnak, amely pontok közül pontosan egy van minden *latin* és minden *görög* síkon.

Bizonyítás. Egy befedés bármely két egyenese - definíció szerint - diszjunkt egymástól, tehát egy ponton át pontosan egy darab befedés-beli egyenes megy, azaz ennek az egyenesnek megfeleltetett $\mathcal{H}_5$-beli pontot tartalmazó *latin* síkok csak ezt a pontot tartalmazzák; másfelől egy $PG(3,q)$-beli sík csak egy darab befedésbeli egyenest tartalmazhat, (ugyanis egy síkban bármely két síknak létezik metszéspontja), tehát ennek az egyenesnek megfeleltetett $\mathcal{H}_5$-beli pontot tartalmazó *görög* síkok csak ezt a pontot tartalmazzák.

3.30. *Tulajdonság.*

. $q^2 + 1$ darab egyenesnek, melyek egy reguláris befedést alkotnak (elliptikus konfgruencia) megfelel

. egy $\mathcal{E}_3$ elliptikus kvádrika, melyet $\mathcal{H}_5$-ből egy olyan három dimenziós altér metsz ki, melynek poláris egyenese elkerüli $\mathcal{H}_5$-öt.

Bizonyítás. Egy reguláris befedésben, egyáltalán bármilyen befedésben, nem létezik két egyenes, melyek metszenék egymást. Tehát a megfeleltetett $\mathcal{H}_5$-beli ponthalmazban nem létezik két pont, melyek összekötő egyenese rajta lenne $\mathcal{H}_5$-ön. Magyarul, bármely - a megfeleltetett ponthalmazbeli - két pontot összekötő egyenes a $\mathcal{H}_5$ 2-szelője. A megfeleltetett ponthalmaz benne lesz egy 3-dimenziós altérben. Ehhez elég belátni, hogy a befedéshez tartozó két különböző regulusnak megfeleltetett kúpszeletek ebben a 3-dimenziós altérben lesznek. Ez igaz, ugyanis a két regulus között az őket meghatározó 3-3 kitérő egyenesek cserélgetésével át tudunk térni, és a köztes állapotok regulusainak megfeleltetett kúpszeletek mind ugyanabban a 3-dimenziós térben lesznek. Továbbá, pontosan a reguláris befedéseket karakterizálja a következő tulajdonság:

3.31. *Tulajdonság.*

. Az a tény, hogy egy olyan regulus, melynek három egyenese benne van egy elliptikus kongruenciában, teljes egészében az elliptikus kongruencia része megfelel

. annak a ténynek, hogy egy $\mathcal{H}_5$-ön lévő kúpszelet, melyet egy olyan sík metsz ki $\mathcal{H}_5$-ből aminek három pontja rajta van egy $\mathcal{E}_3$ elliptikus kvádrikán, ez a kúpszelet teljes egészében ennek az $\mathcal{E}_3$ elliptikus kvádrikának a része.

Bizonyítás. Valóban, egy elliptikus kvádrikát kúpszeletben metsző síkokon lévő pontokat egy regulus egyeneseinek feleltettük meg. Ahogy egy elliptikus kvádrika kúpszeletekből áll elő, ugyanígy egy elliptikus kongruenciát is partícionálni tudunk regulusokra.

3.32. *Tulajdonság.*

- A $PG(3, q)$-beli pakolás megfelel

- $\mathcal{H}_5$ egy partícionálásának q^2+q+1 darab q^2+1 számosságú halmazba, mely halmazok az előző pontban leírt tulajdonságúak.

Bizonyítás. A két partícionálásban megadott diszjunkt halmazok nyilvánvalóan felelnek meg egymásnak az előző tulajdonság és a pakolás definíciója alapján.

3.33. *Tulajdonság.*

- Egy $PG(3, q)$-beli reguláris befedésekkel meghatározott pakolás megfelel

- $\mathcal{H}_5$ egy partícionálásának elliptikus kvádrikákra.

Bizonyítás. A diszjunkt reguláris befedések a *3.29. Tulajdonság* alapján nyilvánvalóan felelnek meg az elliptikus kvádrikáknak.

3.34. *Tulajdonság.*

- Egy parabolikus kongruencia $q + 1$ darab sugársora megfelel

- a megfeleltetett kúp $q + 1$ alkotójának.

Bizonyítás. Triviális az előzőből. A sugársorok egyeneseknek felelnek meg. A sugársorok közös egyenese a tengely, a megfeleltetett $q + 1$ egyenes pedig a tengelynek megfeleltetett csúcsban fut össze.

3.35. *Tulajdonság.*

. q^2+q+1 darab olyan - egy rögzített tengely-egyenest metsző - egyenes, melyek ezen a tengelyen kívül elkerülik egymást (azaz egy $PG(3,q)$-beli parabolikus kongruencia), megfelel

. egy $\mathcal{H}_5$-re illeszkedő kúpnak, melynek az alapja egy két-dimenziós parabolikus kvádrika (azaz egy kúpszelet).

Bizonyítás. Egy parabolikus kongruencia úgy áll elő, hogy a tengely minden pontjára egy-egy sugársor illeszkedik. Ezen sugársorok páronkénti metszete pontosan a tengely lesz. Tehát a sugársorok tartói a tengely pontjai, a tartósíkjai a tengely körül elforgatott síkok. A megfeleltetett kúp alapja valóban egy két-dimenziós parabolikus kvádrika lesz. Ugyanis egy ilyen kúpszelet pontosan egy olyan regulusnak felel meg, amelyet három különböző sugársorból kiválasztott három kitérő egyenes generál. Bármely három ilyen egyenes kitérő, csak arra kell vigyázni, hogy egyik sugársorból se a tengelyt válasszuk ki. Természetesen a tengely fog megfelelni a kúp csúcsának.

3.36. *Tulajdonság.*

. A parabolikus kongruencia által tartalmazott q^3 darab regulus megfelel

. q^3 darab kúpszeletnek, melyet olyan síkok metszenek ki a megfeleltetett kúpból, melyekre nem illeszkedik a kúp csúcsa.

Bizonyítás. A regulusok valóban a kúpszeleteknek felelnek meg; a kúpszeletben azért nem szerepelhet a kúp csúcsa, mert a tengely nem lehet egyik regulusnak sem része, mivelhogy a tengely az összes parabolikus kongruencia-beli egyenest metszi. Összesen q^3 darab regulust tartalmaz a kongruencia, és persze így ugyanennyi kúpszeletet a megfeleltetett kúp. Ugyanis három tetszőleges sugársort rögzítve, azokból összesen q^3-féleképpen választhatunk ki három kitérő egyenest, ezek pedig már meghatározzák az őket tartalmazó regulust. (Ennek megfelel az, hogy egy kúpot q^3-féleképpen tudunk kúpszeletben metszeni, ugyanis három alkotóról kiválasztott három pont - amit q^3-féleképpen tudunk megtenni - már meghatározza a kimetszett kúpszeletet.) Az összes regulust megkapjuk így, ugyanis egy regulus minden sugársorból tartalmaz egyenest. Illetve bármely három így kiválasztott kitérő egyenes által meghatározott regulus a parabolikus kongruencia része lesz, ugyanis a kiválasztott kitérő egyeneseket metszi a tengely, tehát a regulus minden elemének metszenie kell a tengelyt.

3.37. *Tulajdonság.*

. Az a tény, hogy adott kongruenciához és a tengelyre nem illeszkedő adott P ponthoz egyértelműen létezik egy a P-re illeszkedő egyenes a hiperbolikus, az elliptikus vagy a parabolikus kongruenciából megfelel

. annak a ténynek, hogy egy 3-dimenziós altér, amely $\mathcal{H}_5$-ből egy $\mathcal{H}_3$ hiperbolikus kvádrikát, $\mathcal{E}_3$ elliptikus kvádrikát, vagy egy 2-dimenziós parabolikus kvádrikára emelt kúpot metsz ki, egy *latin* síkot egy egyértelműen létező pontban metsz(kivéve, ha ez a sík tartalmaz pontot a 3-dimenziós altér poláris egyenesének és $\mathcal{H}_5$-nek a metszetéből).

Bizonyítás. Következik az előzőekből. Az egyértelműen létező egyenes megfelel a *latin* síkra illeszkedő egyértelműen létező pontnak, a kongruenciák megfelelnek a kvádrikáknak illetve a kúpnak, a P pont pedig megfelel a *latin* síknak. Az a kitétel, hogy a P pont ne illeszkedjék a tengelyre, pontosan azzal áll megfelelésben, hogy a P-nek megfelelő *latin* sík ne messe a kúpot $\mathcal{H}_5$-ből kimetsző altér poláris egyenesét.

3.38. *Definíció.* Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{34} & -a_{42} & -a_{23} \\ a_{34} & 0 & -a_{14} & a_{13} \\ a_{42} & a_{14} & 0 & -a_{12} \\ a_{23} & -a_{13} & a_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

ferdén szimmetrikus mátrix, melynek nem mindegyik eleme 0. Ekkor $\det A = (a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23})^2$. Ha $\det A = 0$, akkor létezik olyan e egyenes, melynek Plücker-koordinátái $(a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{34}, a_{42}, a_{23})$. Ha pedig $\det A \neq 0$, akkor A tekinthető egy nullpolaritás mátrixának. Az A mátrix által meghatározott lineáris komplexusnak nevezzük azon $e =$

$(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23})$ egyenesek halmazát, melyek Plücker-koordinátái kielégítik az

$$a_{34}p_{12} + a_{42}p_{13} + a_{23}p_{14} + a_{12}p_{34} + a_{13}p_{42} + a_{14}p_{23} = 0$$

egyenletet. A lineáris komplexus speciális, ha $\det A = 0$, és általános ha $\det A \neq 0$.

3.39. ***Megjegyzés.*** A definícióból következik, hogy a speciális lineáris komplexus olyan egyenesekből áll, melyeknek egy rögzített egyenessel van közös pontjuk, pontosan azzal amelynek a Plücker koordinátái az előbbi definícióban szereplő - a komplexus mátrixa által meghatározott - $(a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{34}, a_{42}, a_{23})$. Ezt az egyenest nevezzük a komplexus tengelyének. Minden speciális lineáris komplexus $(q+1)^2q+1$ egyenest tartalmaz. Továbbá, ha $\det A \neq 0$, azaz a komplexus általános, akkor az általa tartalmazott egyenesek pontosan az A által meghatározott nullpolaritás autokonjugált egyenesei lesznek. Valóban, két ponto összekötő egyenes pontosan akkor tartozik hozzá a komplexushoz, ha az egyik pont rajta van a másik - nullpolaritás szerinti - polársíkján, azaz, ha az összekötő egyenes a nullpolaritás autokonjugált egyenese. Ebből következik, hogy a tér egy rögzített X pontján átmenő, a komplexushoz tartozó egyenesek olyan sugársort alkotnak, melynek tartópontja az X, tartósíkja pedig az X polársíkja. Tehát a komplexushoz tartozó egyenesek közül a tér minden pontján át $q+1$ darab megy és a tér minden síkjára is $q+1$ darab illeszkedik. Ezért minden általános lineáris komplexus $(q^2+1)(q+1)$ darab egyenest tartalmaz.

3.40. ***Tulajdonság.***

. Egy speciális lineáris komplexusnak, azaz egy tengelyt metsző $(q+1)^2q+1$ darab egyenesnek megfelel

. egy $\mathcal{H}_3$ három-dimenziós hiperbolikus kvádrikára emelt kúp, melyet egy érintő hipersík metsz ki $\mathcal{H}_5$-ből.

Bizonyítás. Az *1.16. Tétel* alapján feltehető, hogy a speciális lineáris komplexus tengelyének Plücker koordinátái: $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$. Az világos, hogy a megfeleltetett ponthalmaz kúpot fog alkotni, ugyanis a komplexus minden egyenese metszi a tengelyt, és egy ilyen egyenesnek megfelelő pontot és a tengelynek megfelelő pontot összekötő egyenes is része lesz a ponthalmaznak. Ezt az összekötő egyenest a komplexus-beli egyenes és a tengely generálta sugársornak feleltetjük meg, amely sugársor a komplexus része. Legyen egy tetszőleges komplexus-beli egyenes koordinátái $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$. Mivel egy ilyen metszi a tengelyt ezért ennek koordinátáira teljesülni fog $x_1x_4 + x_2x_5 = 0$, ami egy hiperbolikus kvádrika kanonikus egyenlete. A kúp egy alapját kaphatjuk meg, hogy elmessük egy a csúcsot nem tartalmazó háromdimenziós altérrel. A metszet természetesen egy hiperbolikus kvádrika lesz, hiszen a pontjai teljesítik a kanonikus egyenletét.

3.41. *Tulajdonság.*

- Egy $PG(3, q)$-beli általános lineáris komplexus $(q^2 + 1)(q + 1)$ darab egyenese megfelel

- egy $\mathcal{P}_4$ négy-dimenziós parabolikus kvádrikának, amit $\mathcal{H}_5$-ből egy nem-érintő hipersík metsz ki.

Bizonyítás. Az *1.15 Tétel* szerint a nullpolaritás mátrixa

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

alakra hozható. Tehát a komplexus egyeneseit meghatározó

$$a_{34}x_1 + a_{42}x_2 + a_{23}x_3 + a_{12}x_4 + a_{13}x_5 + a_{14}x_6 = 0$$

egyenletből és a Plücker koordinátákra igaz $x_1x_4+x_2x_5+x_3x_6 = 0$ egyenletből azt kapjuk hogy a komplexus egyeneseinek megfeleltetett pontokra igaz az

$$x_1^2 + x_2x_5 + x_3x_6 = 0$$

összefüggés, ami a parabolikus kvádrika kanonikus egyenlete. Tehát a megfeleltetett ponthalmaz éppen egy parabolikus kvádrikát ad ki. Mellesleg, könnyen látható, hogy erre a kvádrikára illeszkedő egyenesekből minden *latin* és minden *görög* sík tartalmazni fog egyet.

Irodalomjegyzék

. J.W.P. Hirschfeld: Finite Projective Speces of Three Dimensions, Clarendon Press, Oxford, 1985.

. J.W.P. Hirschfeld: Projective Geometries over Finite Fields, Clarendon Press, Oxford, 1999.

. Kiss György - Szőnyi Tamás: Véges Geometriák, Polygon, Szeged, 2001.

. Dr. Szász Gábor: Projektív Geometria, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.