Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Tóth Bálint

Topologikus csoportokkal kapcsolatos differenciálelméleti problémák vizsgálata

– Diplomamunka –

Témavezető:

Dr. Kristóf János
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2008

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Normált térből normált térbe képező függvények differenciálhatósága többféle értelemben vizsgálható; lehetnek például Fréchet-deriválhatók vagy Gâteaux-deriválhatók. Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy lehet-e ezen fogalmakat általánosítani topologikus vektorterekre, kommutatív topologikus csoportokra, esetleg általános topologikus csoportokra. Elegendő-e egy vektortéren a lineáris topológia, vagy egy csoporton a csoporttopológia ahhoz, hogy a deriválástól megszokott tulajdonságokkal rendelkező differenciálás fogalmakat alkothassunk?

Az irodalomban több alkalommal szerepel a Fréchet-derivált ilyen módon történő általánosítása. A 2. fejezetben áttekintem a topologikus csoportokra történő általánosításokat, és a topologikus vektorterekre való általánosítások közül néhányat.

A 3. fejezetben definiálom a Fréchet-deriváltnak egy általánosítását teljesen általános topologikus csoportok esetére. Ezen differenciálhatóságnak megvizsgálom néhány tulajdonságát, majd pedig azt, hogy milyen további tulajdonságai vannak a kommutatív topologikus csoportok és a topologikus vektorterek speciális esetében. Ezek segítségével megvizsgálom, hogy hogyan viszonyul a 2. fejezetben ismertetett definíciókhoz. Végül megvizsgálom, hogy ezen differenciálhatóság Lie-csoportok esetén hogyan viszonyul a Lie-csoportok differenciálható sokaság mivoltából következő deriválthoz.

Az [1] jegyzetben megtalálható fogalmakat és állításokat ismertnek tételezem fel, azokat magyarázat és külön hivatkozás nélkül alkalmazom. A dolgozatban, ahol csak lehetséges, igyekszem ezen jegyzet jelöléseit követni.

2. fejezet

Differenciálás topologikus vektorterekben és topologikus csoportokban

2.1. Differenciálás topologikus vektorterekben

Az irodalomban topologikus vektorterekkel kapcsolatos differenciálhatóságot először Michal definiált a [2] cikkében:

1. definíció. *Legyenek E és F topologikus vektorterek, és $f\colon E \rightarrowtail F$. Az f függvény* ***M-differenciálható*** *az $x \in \overset{\circ}{D}(f)$ pontban, ha teljesülnek a következő feltételek:*

1. *létezik olyan $u \in \mathscr{L}(E,F)$,*
2. *létezik olyan $\epsilon\colon E \times E \rightarrowtail F$, melyre*
   (a) *minden $h \in E$ esetén $\epsilon(0_E, h) = 0_F$,*
   (b) *minden h_1-re a 0_E valamely környezetéből, minden $h_2 \in E$ és minden $\lambda > 0$ esetén $\epsilon(h_1, \lambda h_2) = \lambda\epsilon(h_1, h_2)$,*
   (c) *ϵ folytonos $\{0_E\} \times E$-n,*
3. *minden h-ra a 0_E valamely környezetéből*

$$f(x+h) - f(x) - u(h) = \epsilon(h,h). \tag{2.1}$$

Az M-differenciálhatóság tulajdonságai közé tartozik, hogy ha egy függvény M-differenciálható egy pontban, akkor ott Gâteaux-differenciálható és folytonos is, ha F szeparált, akkor az u derivált egyértemű, továbbá két M-differenciálható függvény kompozíciója is M-differenciálható, és a kompozíció-függvény deriváltja a deriváltak kompozíciója lesz. Ezen felül az is igaz, hogy ha E és F véges dimenziós vektorterek, akkor egy függvény pontosan akkor M-differenciálható egy pontban, ha ott Fréchet-differenciálható. Végtelen dimenziós normált terek esetében a Fréchet-differenciálhatóságból következik az M-differenciálhatóság, a fordított irány azonban nem feltétlenül igaz, amint azt a [3] cikkben található példa mutatja:

2. *példa.* Legyen $E = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{x = (x_1, x_2, \dots) \mid [x_i \neq 0] \text{ véges}\}$, $F = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\} \supseteq E$, és mindkettőn a norma legyen $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Legyen az $f\colon E \to F$ az

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots), \qquad f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n} + n^{3/2} x_n^2} \tag{2.2}$$

összefüggéssel adott. Belátható, hogy f M-differenciálható a 0_E pontban, a deriváltja $u = 0$, és

$$\epsilon(h,k)_n = -\frac{\sqrt{n} h_n k_n}{1 + n h_n^2} \tag{2.3}$$

teljesíti az 1. definíció feltételeit. f azonban nem Fréchet-differenciálható, legyen ugyanis $h^{(m)} \in E$,

$$h^{(m)} = \Big(\underset{1.}{0}, \underset{2.}{0}, \dots, \underset{(m-1).}{0}, \underset{m.}{\frac{1}{\sqrt{m}}}, \underset{(m+1).}{0}, \dots\Big). \tag{2.4}$$

Ekkor

$$\lim_{m\to\infty} \left\| h^{(m)} \right\| = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} = 0, \tag{2.5}$$

viszont

$$\frac{\left\|\epsilon\left(h^{(m)}, h^{(m)}\right)\right\|}{\left\|h^{(m)}\right\|} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{m}}} \cdot \frac{\sqrt{m} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^2}{1 + m \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^2} = \frac{1}{2}, \tag{2.6}$$

tehát f valóban nem Fréchet-differenciálható.

Hyers a [4] cikkében definiál egy differenciálhatóságot, az F-differenciálhatóság fogalmát. Ezt pszeudo-normák segítségével adja meg, ezért először [3, 5] alapján megvizsgáljuk, hogy miként lehet lineáris topologiát pszeudo-normával ill. pszeudo-félnormával megadni.

3. definíció. *Egy $\{p_i\}_{i\in I}$ rendszert az E vektortér feletti* ***pszeudo-normának*** *nevezünk, ha I egy felfelé irányított rendszer, minden $i \in I$ esetén $p_i\colon E \to \mathbb{R}$, és teljesülnek a következő tulajdonságok:*

(1) Minden $x \in E$ és minden $i \in I$ esetén $p_i(x) \geq 0$; ha valamely $x \in E$ -re minden $i \in I$ esetén $p_i(x) = 0$, akkor $x = 0$.

(2) Minden $\alpha \in \mathbb{K}$, minden $i \in I$ és minden $x \in E$ esetén $p_i(\alpha x) = |\alpha| \cdot p_i(x)$.

(3) Minden $i \in I$ -hez létezik olyan $j \in I$, hogy minden $x, y \in E$ esetén $p_i(x+y) \leq p_j(x) + p_j(y)$.

(4) Ha $i, j \in I$ és $i \geq j$, akkor minden $x \in E$ esetén $p_i(x) \geq p_j(x)$.

Ha nem csak szeparált topologikus vektorterekkel kívánunk foglalkozni, akkor érdemes a pszeudo-normához hasonlóan a pszeudo-félnorma fogalmát is bevezetni:

4. definíció. *Egy $\{p_i\}_{i\in I}$ rendszert az E vektortér feletti* ***pszeudo-félnormának*** *nevezünk, ha I egy felfelé irányított rendszer, minden $i \in I$ esetén $p_i\colon E \to \mathbb{R}$, és teljesülnek a következő tulajdonságok:*

(1) Minden $x \in E$ és minden $i \in I$ esetén $p_i(x) \geq 0$.

(2) Minden $\alpha \in \mathbb{K}$, minden $i \in I$ és minden $x \in E$ esetén $p_i(\alpha x) = |\alpha| \cdot p_i(x)$.

(3) Minden $i \in I$ -hez létezik olyan $j \in I$, hogy minden $x, y \in E$ esetén $p_i(x+y) \leq p_j(x) + p_j(y)$.

(4) Ha $i, j \in I$ és $i \geq j$, akkor minden $x \in E$ esetén $p_i(x) \geq p_j(x)$.

5. állítás. *Legyen E vektortér és $\{p_i\}_{i\in I}$ pszeudo-félnorma az E-n.*

(i) Ekkor

$$\mathscr{B} = \left\{ [p_i < \varepsilon] \;\middle|\; i \in I, \varepsilon > 0 \right\} \tag{2.7}$$

olyan rács, amely teljesíti az (EV_I), (EV_{II}) és (EV_{III}) tulajdonságokat, azaz egyértelműen létezik olyan $\mathscr{T}$ lineáris topológia E-n, hogy $\mathscr{B}$ a $\mathscr{T}$ szerint környezetbázisa 0-nak.

(ii) A $\mathscr{T}$ lineáris topológia pontosan akkor szeparált, ha $\{p_i\}_{i\in I}$ pszeudo-norma.

Bizonyítás. (i) Először belátjuk, hogy $\mathscr{B}$ rács. Legyen $U, V \in \mathscr{B}$. Ekkor létezik olyan $i, j \in I$ és $\varepsilon, \delta > 0$, hogy $U = [p_i < \varepsilon]$ és $V = [p_j < \delta]$. I felfelé irányított, így létezik $k \in I$, hogy $k \geq i$ és $k \geq j$. Ekkor a pszeudo-félnorma (4) tulajdonsága miatt $p_k \geq p_i$ és $p_k \geq p_j$. Legyen $W = [p_k < \min\{\varepsilon,\delta\}] \in \mathscr{B}$. Ekkor ugyanis $W = [p_k < \min\{\varepsilon,\delta\}] \subseteq [p_k < \varepsilon] \subseteq [p_i < \varepsilon] = U$ és $W = [p_k < \min\{\varepsilon,\delta\}] \subseteq [p_k < \delta] \subseteq [p_j < \delta] = V$, tehát $W \subseteq U \cap V$, így $\mathscr{B}$ rács.

(EV_I): Legyen $V \in \mathscr{B}$. Ekkor létezik $i \in I$ és $\varepsilon > 0$, hogy $V = [p_i < \varepsilon]$. V kiegyensúlyozott, ugyanis ha $x \in V$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq 1$, akkor $x \in V \iff p_i(x) < \varepsilon \implies |\lambda| \cdot p_i(x) < \varepsilon \iff p_i(\lambda x) < \varepsilon \iff \lambda x \in V$. Legyen $x \in E$ tetszőleges. Mivel V kiegyensúlyozott, így V pontosan akkor nyeli el x-et, ha létezik $\alpha > 0$, hogy $x \in \alpha V$. Ha $p_i(x) = 0$, akkor $p_i(x) < \varepsilon$, tehát $x \in V$. Ha $p_i(x) > 0$, akkor $p_i(x) < \frac{2\cdot p_i(x)}{\varepsilon} \cdot \varepsilon$, vagyis $x \in \frac{2\cdot p_i(x)}{\varepsilon} \cdot V$. Tehát V elnyelő.

(EV_{II}): Legyen $V \in \mathscr{B}$ és $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. V-hez létezik $i \in I$ és $\varepsilon > 0$, hogy $V = [p_i < \varepsilon]$. Legyen $W = \left[p_i < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right] \in \mathscr{B}$. Ekkor $x \in W \iff p_i(x) < \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \iff p_i(\lambda x) < \varepsilon \iff \lambda x \in V$, vagyis $W = \lambda \cdot V$, tehát $W \subseteq \lambda \cdot V$.

(EV_{III}): Legyen $V \in \mathscr{B}$. Ekkor létezik $i \in I$ és $\varepsilon > 0$, hogy $V = [p_i < \varepsilon]$. A pszeudo-félnorma (3) tulajdonsága miatt létezik $j \in I$, hogy minden $x, y \in E$ esetén $p_i(x+y) \leq p_j(x) + p_j(y)$. Legyen $W = [p_j < \frac{\varepsilon}{2}] \in \mathscr{B}$. Ha $z \in W + W$, akkor létezik $x, y \in W$, hogy $z = x + y$. Ekkor $p_j(x) < \frac{\varepsilon}{2}$ és $p_j(y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tehát $p_i(z) = p_i(x+y) \leq p_j(x) + p_j(y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, vagyis $z \in V$. Így $W + W \subseteq V$.

(ii) Tételezzük fel, hogy $\{p_i\}_{i\in I}$ pszeudo-norma. Legyen $x \in E \setminus \{0\}$ tetszőleges. A pszeudo-norma (1) tulajdonsága alapján x-hez létezik $i \in I$, hogy $p_i(x) > 0$. Legyen $V = [p_i < p_i(x)] \in \mathscr{B}$, ekkor $x \notin V$. Így minden $x \in E \setminus \{0\}$ -hez létezik $V \in \mathscr{B}$, hogy $x \notin V$, tehát a $\mathscr{T}$ lineáris topológia T_0 tulajdonságú, tehát szeparált is.

Tételezzük most fel, hogy a $\mathscr{T}$ lineáris topológia szeparált. Ekkor a 0 $\mathscr{B}$ környezetbázisára fennáll, hogy $\bigcap\limits_{V\in\mathscr{B}} V = \{0\}$, vagyis $\{0\} = \bigcap\limits_{i\in I}\bigcap\limits_{\varepsilon>0} [p_i < \varepsilon] = \bigcap\limits_{i\in I} [p_i = 0]$. Így ha valamely $x \in E$ -re $p_i(x) = 0$ minden $i \in I$ esetén, akkor $x = 0$, tehát a $\{p_i\}_{i\in I}$ pszeudo-félnorma pszeudo-norma. □

Ha egy vektortéren adott egy pszeudo-félnorma, akkor az előző állításban szereplő $\mathscr{T}$ topológiát nevezzük a pszeudo-félnorma által meghatározott lineáris topológiának.

6. állítás. *Legyen E egy topologikus vektortér, $\mathscr{B}$ a 0-nak egy kiegyensúlyozott halmazokból álló környezetbázisa, továbbá vegyük $\mathscr{B}$-n az $U \leq V \iff V \subseteq U$ természetes rendezést, és jelölje p_U az U környezet Minkowski-funkcionálját. Ekkor $\{p_U\}_{U\in\mathscr{B}}$ egy pszeudo-félnorma E-n.*

Bizonyítás. Mivel $\mathscr{B}$ környezetbázis, így ha $U, V \in \mathscr{B}$, akkor létezik $W \in \mathscr{B}$, hogy $W \subseteq U \cap V$, vagyis $W \geq U$ és $W \geq V$, tehát $\mathscr{B}$ egy fölfelé irányított rendszer.

(1): A Minkowski-funkcionál definíciójából következően minden $U \in \mathscr{B}$ és minden $x \in E$ esetén $p_U(x) \geq 0$.

(2): Legyenek $U \in \mathscr{B}$, $x \in E$ és $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tetszőlegesek. Ekkor U kiegyensúlyozottsága miatt

$$p_U(\alpha x) = \inf\{\lambda > 0 \mid \alpha x \in \lambda \cdot U\} = \inf\left\{\lambda > 0 \;\middle|\; x \in \frac{\lambda}{|\alpha|} \cdot U\right\} =$$
$$= |\alpha| \cdot \inf\left\{\frac{\lambda}{|\alpha|} > 0 \;\middle|\; x \in \frac{\lambda}{|\alpha|} \cdot U\right\} = |\alpha| \cdot p_U(x). \quad (2.8)$$

(3): Legyen $U \in \mathscr{B}$ tetszőleges. Ekkor létezik $V \in \mathscr{B}$, hogy $V + V \subseteq U$. Legyenek $x, y \in E$ tetszőlegesek. Ha $\alpha \in \{\lambda > 0 \mid x \in \lambda \cdot V\}$ és $\beta \in \{\lambda > 0 \mid y \in \lambda \cdot V\}$, akkor $\frac{x}{\alpha} \in V$ és $\frac{y}{\beta} \in V$, így

$$\frac{x+y}{\alpha+\beta} = \underbrace{\frac{x}{\alpha}}_{\in V} \cdot \underbrace{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}_{<1} + \underbrace{\frac{y}{\beta}}_{\in V} \cdot \underbrace{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}_{<1} \in V + V \subseteq U, \quad (2.9)$$

vagyis $\alpha + \beta \in \{\lambda > 0 \mid x + y \in \lambda \cdot U\}$. Tehát minden $\alpha \in \{\lambda > 0 \mid x \in \lambda \cdot V\}$ és minden $\beta \in \{\lambda > 0 \mid y \in \lambda \cdot V\}$ esetén

$$p_U(x+y) = \inf\{\lambda > 0 \mid x + y \in \lambda \cdot U\} \le \alpha + \beta, \quad (2.10)$$

így a jobb oldalon infimumokat véve is fennáll, hogy

$$p_U(x+y) \le \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda \cdot V\} + \inf\{\lambda > 0 \mid y \in \lambda \cdot V\} = p_V(x) + p_V(y). \quad (2.11)$$

(4): Legyenek $U, V \in \mathscr{B}$ olyanok, hogy $U \ge V$, vagyis $U \subseteq V$. Ha $\alpha \in \{\lambda > 0 \mid x \in \lambda \cdot U\}$, akkor $\frac{x}{\alpha} \in U \subseteq V$, tehát $\alpha \in \{\lambda > 0 \mid x \in \lambda \cdot V\}$, így $p_V(x) = \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda \cdot V\} \le \alpha$. Tehát minden $\alpha \in \{\lambda > 0 \mid x \in \lambda \cdot U\}$ esetén $p_V(x) \le \alpha$, így a jobb oldalon infimumot véve is fennáll az egyenlőtlenség,

$$p_V(x) \le \inf\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda \cdot U\} = p_U(x). \quad (2.12)$$

Tehát $\{p_U\}_{U \in \mathscr{B}}$ valóban egy pszeudo-félnorma E-n. □

7. állítás. *Legyen E vektortér és rajta $\mathscr{T}$ lineáris topológia, továbbá legyen $\mathscr{B}$ a 0-nak egy kiegyensúlyozott halmazokból álló, a $\mathscr{T}$ topológia szerinti környezetbázisa. Ekkor a $\{p_U\}_{U \in \mathscr{B}}$ pszeudo-félnorma által meghatározott $\mathscr{T}'$ lineáris topológia megegyezik $\mathscr{T}$-vel.*

Bizonyítás. $\mathscr{B}' = \left\{ [p_U < \varepsilon] \;\middle|\; U \in \mathscr{B}, \varepsilon > 0 \right\}$ a 0-nak egy a $\mathscr{T}'$ topológia szerinti környezetbázisát alkotja.

Ha $U \in \mathscr{B}$, akkor $V = [p_U < \frac{1}{2}] \in \mathscr{B}'$ olyan, hogy $V \subseteq U$. Ha $V \in \mathscr{B}'$, akkor létezik $U \in \mathscr{B}$ és $\varepsilon > 0$, hogy $V = [p_U < \varepsilon]$. Ekkor $\frac{\varepsilon}{2} \cdot U \subseteq [p_U < \varepsilon] = V$, és mivel $\frac{\varepsilon}{2} \cdot U$ is környezete a 0-nak a $\mathscr{T}$ topológia szerint, ezért létezik $W \in \mathscr{B}$, hogy $W \subseteq \frac{\varepsilon}{2} \cdot U \subseteq V$.

Tehát minden $U \in \mathscr{B}$ -hoz létezik $V \in \mathscr{B}'$, melyre $V \subseteq U$, és minden $V \in \mathscr{B}'$ -hez létezik $W \in \mathscr{B}$, melyre $W \subseteq V$, tehát $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$. □

A [4] cikkben Hyers a következőképpen definiálja az F-differenciálhatóság fogalmát. (Hyers csak szeparált topologikus vektorterek esetére definiálta a differenciálhatóságot, így a definíciójában pszeudo-normák szerepelnek. A definíciót azonban könnyen általánosíthatjuk nem feltétlenül szeparált topologikus vektorterek esetére is, ha pszeudo-félnormákat is megengedünk.)

8. definíció. *Legyenek E és F topologikus vektorterek, melyeken a topológiát rendre a $\{p_i\}_{i\in I}$ és $\{q_j\}_{j\in J}$ pszeudo-félnormák adják. Az $f\colon E \rightarrowtail F$ függvény **F-differenciálható** az $x \in \overset{\circ}{D}(f)$ pontban, ha létezik $u \in \mathscr{L}(E,F)$, hogy minden $j \in J$ -hez létezik olyan $i \in I$, melyre minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, hogy ha $p_i(h) < \delta$, akkor*

$$q_j\left(f(x+h) - f(x) - u(h)\right) \leq \varepsilon \cdot p_i(h). \tag{2.13}$$

Az F-differenciálhatóság tulajdonságai közé tartozik, hogy ha egy függvény F-differenciálható egy pontban, akkor ott M-differenciálható is, tehát Gâteaux-differenciálható és folytonos is. Ha F szeparált, akkor az u derivált egyértemű, továbbá két F-differenciálható függvény kompozíciója is F-differenciálható, és a kompozíció-függvény deriváltja a deriváltak kompozíciója lesz. Ezen felül az is igaz, hogy ha E és F normált terek, akkor egy függvény pontosan akkor F-differenciálható egy pontban, ha ott Fréchet-differenciálható. Emiatt a 2. példát figyelembe véve látható, hogy egy függvény M-differenciálhatóságából általában nem következik az F-differenciálhatósága.

Michal a [6] cikkében kommutatív topologikus csoportokkal kapcsolatosan bevezette az M-differenciálhatóság fogalmának egy módosított változatát, az M'-differenciálhatóságot. A definíciót topologikus vektorterek esetére az 1. definícióból a 2(d) pont hozzáadásával kaphatjuk:

9. definíció. *Legyenek E és F topologikus vektorterek, és $f\colon E \rightarrowtail F$. Az f függvény **M'-differenciálható** az $x \in \overset{\circ}{D}(f)$ pontban, ha teljesülnek a következő feltételek:*

1. *létezik olyan $u \in \mathscr{L}(E,F)$,*
2. *létezik olyan $\epsilon\colon E \times E \rightarrowtail F$, melyre*
   (a) *minden $h \in E$ esetén $\epsilon(0_E, h) = 0_F$,*
   (b) *minden h_1-re a 0_E valamely környezetéből, minden $h_2 \in E$ és minden $\lambda > 0$ esetén $\epsilon(h_1, \lambda h_2) = \lambda\epsilon(h_1, h_2)$,*
   (c) *ϵ folytonos $\{0_E\} \times E$-n,*
   (d) *létezik olyan $W \in \mathscr{T}_E(0_E)$ környezet, hogy minden $V \in \mathscr{T}_F(0_F)$ -hez van olyan $U \in \mathscr{T}_E(0_E)$, hogy $\epsilon\langle U \times W\rangle \subseteq V$.*
3. *minden h-ra a 0_E valamely környezetéből*

$$f(x+h) - f(x) - u(h) = \epsilon(h,h). \tag{2.14}$$

Az M'-differencálhatóságra is igaz, hogy ha egy függvény M'-differenciálható egy pontban, akkor ott M-differenciálható is, tehát Gâteaux-differenciálható és folytonos is. Ha F szeparált, akkor az u derivált egyértemű, továbbá két M'-differenciálható függvény kompozíciója is M'-differenciálható, és a kompozíció-függvény deriváltja a deriváltak kompozíciója lesz. Ezen felül az is igaz, hogy ha E és F normált terek, akkor egy függvény pontosan akkor M'-differenciálható egy pontban, ha ott Fréchet-differenciálható. Általános topologikus terek esetében az M'-differenciálhatóságból következik az F-differenciálhatóság, a fordított irány azonban nem feltétlenül igaz, amint azt a következő, a [4] cikkben található példához hasonló példa mutatja:

10. *példa.* Legyen $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, és minden $d \in \mathbb{N}$ esetén legyen $p_d \colon E \to \mathbb{R}_+$, $p_d(x) := \max_{1\le i\le d} |x_i|$. Ekkor $\{p_d\}_{d\in\mathbb{N}}$ egy pszeudo-normát ad E-n, amely által meghatározott topológia megegyezik a szorzat-topológiával. Legyen az $f \colon E \to E$ az

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots), \qquad f_n(x) = x_n^2 \tag{2.15}$$

összefüggéssel adott. Rögzítsünk egy tetszőleges $x \in E$ pontot, ekkor

$$u \colon E \to E, \qquad \big(u(h)\big)_n := 2x_n h_n \tag{2.16}$$

egy folytonos lineáris leképezés, és

$$\big(f(x+h) - f(x) - u(h)\big)_n = h_n^2. \tag{2.17}$$

f F-differenciálható, ugyanis ha $e \in \mathbb{N}$ tetszőleges, akkor legyen $d = e$. Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor legyen $\delta = \varepsilon$. Ekkor ha $p_d(h) < \delta$, azaz $\max_{1\le i\le d} |h_i| < \delta$, akkor

$$\begin{aligned} p_e\big(f(x+h) - f(x) - u(h)\big) = p_d\big(f(x+h) - f(x) - u(h)\big) = \max_{1\le i\le d} \left|\big(f(x+h) - f(x) - u(h)\big)_i\right| = \\ = \max_{1\le i\le d} \left|h_i^2\right| < \delta \cdot \max_{1\le i\le d} |h_i| = \delta \cdot p_d(h) = \varepsilon \cdot p_d(h). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Vagyis tetszőleges $e \in \mathbb{N}$ -hez találtunk olyan $d \in \mathbb{N}$ -t, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, hogy ha $p_d(h) < \delta$, akkor $p_e\big(f(x+h) - f(x) - u(h)\big) < \varepsilon \cdot p_d(h)$, tehát f valóban F-differenciálható.

Megmutatjuk, hogy f semmilyen $x \in E$ pontban nem M'-differenciálható. Ha $W \in \mathcal{T}_E(0_E)$ tetszőleges, akkor létezik $d \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon > 0$, hogy $[p_d < \varepsilon] \subseteq W$, mivel az ilyen alakú halmazok 0_E-nek egy környezetbázisát alkotják. Legyen $V = [p_{d+1} < 1] \in \mathcal{T}_E(0_E)$. Ha $U \in \mathcal{T}_E(0_E)$ tetszőleges, akkor létezik $e \in \mathbb{N}$ és $\delta > 0$, hogy $[p_e < \delta] \subseteq U$. Legyen

$$h = \big(\underset{1.}{0}, \underset{2.}{0}, \dots, \underset{d.}{0}, \underset{(d+1).}{\tfrac{\delta}{2}}, \underset{(d+2).}{0}, \dots\big) \in U \cap W. \tag{2.19}$$

Ekkor

$$\epsilon(h,h) = f(x+h) - f(x) - u(h) = \Big(\underset{1.}{0}, \underset{2.}{0}, \dots, \underset{d.}{0}, \underset{(d+1).}{\left(\tfrac{\delta}{2}\right)^2}, \underset{(d+2).}{0}, \dots\Big), \tag{2.20}$$

és a 9. definíció 2(b) tulajdonsága miatt

$$\epsilon(h, \lambda h) = \lambda \cdot \epsilon(h,h) = \Big(\underset{1.}{0}, \underset{2.}{0}, \dots, \underset{d.}{0}, \underset{(d+1).}{\lambda\left(\tfrac{\delta}{2}\right)^2}, \underset{(d+2).}{0}, \dots\Big). \tag{2.21}$$

Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda h \in W$, így tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $(h, \lambda h) \in U \times W$, viszont ha $\lambda > \frac{4}{\delta^2}$, akkor $\epsilon(h, \lambda h) \notin [p_{d+1} < 1] = V$. Így tehát nem létezik olyan $W \in \mathcal{T}_E(0_E)$, melyre a 9. definíció 2(d) tulajdonsága teljesülne, így f valóban nem M'-differenciálható.

2.2. Differenciálás topologikus csoportokban

A Fréchet-derivált általánosításaként topologikus csoportokkal kapcsolatos differenciálhatóság fogalmat szintén Michal definiált először a [6, 7] cikkekben. A 9. definícióban megadott

M'-differenciálhatóság fogalmát – azzal a módosítással, hogy a derivált egy folytonos csoporthomomorfizmus, és a 2(b) pontban λ csak természetes szám lehet – olyan kommutatív topologikus csoportok esetén értelmezte, amelyekre igaz a következő tulajdonság: tetszőleges x csoportelem és az egységelem tetszőleges U környezete esetén létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és $y \in U$, hogy $x = ny$. Ez utóbbi tulajdonság megkövetelése a derivált egyértelműségének bizonyításához szükséges. A derivált egyértelműségén felül ezen differenciálhatóság fogalom rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy egy differenciálható függvény folytonos is, továbbá differenciálható függvények kompozíciója differenciálható, és a kompozíció deriváltja egyenlő a deriváltak kompozíciójával.

A Michal által bevezetett differenciálhatóság fogalmát Millsaps a [8, 9] cikkeiben kiterjesztette nem kommutatív topologikus csoportokra is oly módon, hogy a derivált nála a kiinduló tér centrumáról az érkezési térbe képező folytonos homomorfizmus.

Reid a [10] cikkében kidolgozta a kompakt csoportok és a lokálisan kompakt kommutatív csoportok feletti disztribúcióelméletet. Ennek során definiálta az ilyen típusú csoportok Lie-algebráját, amelynek segítségével értelmezett a Gâteaux-derivált általánosításaként tekinthető iránymenti deriváltakat.

3. fejezet

A Fréchet-derivált általánosítása topologikus csoportokra

Ebben a fejezetben definiálunk egy általános topologikus csoportokkal kapcsolatos differenciálhatóság fogalmat. Az általános vizsgálat után tekintjük azokat a speciális eseteket, amikor az indulási és az érkezési terek kommutatív topologikus csoportok, majd valós topologikus vektorterek. Ezek után megnézzük, hogy mi a kapcsolat az így kapott differenciálhatóság és a korábban már ismert differenciálhatóság fogalmak között, majd megvizsgáljuk azt a speciális esetet, amikor a szóban forgó csoportok Lie-csoportok.

3.1. Általános topologikus csoportok

11. definíció. *Legyenek G és H topologikus csoportok. Az $\omega\colon G \rightarrowtail H$ függvény* ***kisordó****, ha $e_G \in \overset{\circ}{D}(\omega)$, és minden $V \in \mathcal{T}_H(e_H)$ -hez van olyan $U \in \mathcal{T}_G(e_G)$ és $N\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, melyekre $U \subseteq D(\omega)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n} = +\infty$, és ha valamely $n \in \mathbb{N}$ -re $h \in U$ olyan, hogy minden $1 \le j \le n$ esetén $h^j \in U$, akkor minden $1 \le k \le N(n)$ esetén $\omega(h)^k \in V$.*

12. *megjegyzések.*

(a) A 11. definícióval ekvivalens definíciót kapunk, ha N-ről azt is megköveteljük, hogy monoton növő legyen. Ugyanis ha N megfelel a 11. definícióban szereplő feltételeknek, akkor legyen $N'(n) := \inf_{m\ge n} N(m) = \min_{m\ge n} N(m)$. Ekkor N' monoton növő, $N' \le N$ és $\lim_{n\to\infty} \frac{N'(n)}{n} = +\infty$, tehát N' valóban megfelel a 11. definícióban szereplő feltételeknek.

(b) Egy kisordó függvény folytonos e_G-ben.

(c) Ha G és H tetszőleges topologikus csoportok, akkor a $D(\omega) \in \mathcal{T}_G(e_G)$, $\omega(h) := e_H$ függvény kisordó.

(d) Ha a G topologikus csoport diszkrét, akkor tetszőleges olyan $\omega\colon G \rightarrowtail H$ függvény kisordó, amelyre $\omega(e_G) = e_H$, ugyanis ekkor az $U = \{e_G\}$ minden $V \in \mathcal{T}_H(e_H)$ -hez jó választás.

Léteznek azonban olyan nem diszkrét topologikus csoportok is, amelyeknél a 11. definícióban megadott kisordó tulajdonság nem erősebb követelmény az e-beli folytonosságnál:

13. *példa.* Legyen G egy véges diszkrét csoport, I egy végtelen indexhalmaz, és legyen $H := G^I$ a szorzat-topológiával ellátva. Ekkor ha $f\colon H \rightarrowtail H$ olyan, hogy $e_H \in \overset{\circ}{D}(f)$, f folytonos e_H-ban és

$f(e_H) = e_H$, akkor f kisordó. Legyen ugyanis

$$\mathscr{B} := \left\{ \bigcap_{i\in J} \overset{-1}{u_i} \langle\{e_G\}\rangle \;\middle|\; J \subseteq I \text{ véges} \right\}, \tag{3.1}$$

ahol $u_i\colon H \to G$ jelöli a kanonikus projekciót. $\mathscr{B}$ egy olyan környezetbázisát adja e_H-nak, hogy minden $U \in \mathscr{B}$ -ra igaz, hogy ha $h \in U$, akkor minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén $h^n \in U$. Ha $V \in \mathscr{T}_H(e_H)$ tetszőleges, akkor létezik $V' \in \mathscr{B}$, melyre $V' \subseteq V$. f e_H-beli folytonossága miatt létezik $U \in \mathscr{B}$, hogy $U \subseteq D(f)$ és $f\langle U\rangle \subseteq V'$. Ekkor ha $h \in U$, akkor $f(h) \in V'$, és így tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén $f(h)^k \in V' \subseteq V$, tehát f kisordó.

14. definíció. *Legyenek G és H topologikus csoportok, $f\colon G \rightarrowtail H$ és $x \in \overset{\circ}{D(f)}$.*

- *f **jobbról differenciálható** az x pontban, ha létezik olyan $\Phi_R\colon G \rightarrowtail H$ folytonos lokális csoporthomomorfizmus, hogy a*

$$h \mapsto \Phi_R(h)^{-1} f(x)^{-1} f(xh) \tag{3.2}$$

*függvény kisordó. Ekkor Φ_R **jobboldali deriváltja** f-nek x-ben.*

- *f **balról differenciálható** az x pontban, ha létezik olyan $\Phi_L\colon G \rightarrowtail H$ folytonos lokális csoporthomomorfizmus, hogy a*

$$h \mapsto f(hx) f(x)^{-1} \Phi_L(h)^{-1} \tag{3.3}$$

*függvény kisordó. Ekkor Φ_L **baloldali deriváltja** f-nek x-ben.*

15. állítás. *Legyenek G és H topologikus csoportok, $f\colon G \rightarrowtail H$ és $x \in \overset{\circ}{D(f)}$. Ha f jobbról vagy balról differenciálható x-ben, akkor folytonos is x-ben.*

Bizonyítás. Elegendő azt az esetet belátni, amikor f jobbról differenciálható, az állítás a baloldali differenciálhatóságból hasonlóan következik. Legyen tehát f jobbról differenciálható x-ben, Φ_R egy jobboldali deriváltja, és $\omega(h) = \Phi_R(h)^{-1} f(x)^{-1} f(xh)$. A

$$h \mapsto f(xh) = f(x)\,\Phi_R(h)\,\omega(h), \qquad h \in D(\omega) \tag{3.4}$$

függvény három olyan függvény szorzata, amelyek mindegyike folytonos e_G-ben, így f folytonos x-ben. □

16. *megjegyzések.*

(a) Ha G diszkrét, akkor az $f\colon G \rightarrowtail H$ függvény $D(f)$ minden pontjában mindkét oldalról differenciálható, és $D(\Phi) = \{e_G\}$, $\Phi(e_G) := e_H$ jobb- és baloldali deriváltja is lesz.

(b) Ha G és H kommutatív topologikus csoportok, akkor egy $f\colon G \rightarrowtail H$ függvény pontosan akkor differenciálható jobbról az értelmezési tartományának egy belső pontjában, ha ott balról is differenciálható, és ekkor a jobboldali deriváltak halmaza megegyezik a baloldali deriváltak halmazával.

(c) Egy folytonos csoporthomomorfizmus minden pontban differenciálható, és jobb- és baloldali deriváltja is önmagának.

(d) Legyenek G és H topologikus csoportok, $f\colon G \rightarrowtail H$ jobbról (balról) differenciálható az $x \in \overset{\circ}{D}(f)$ pontban, és $\Phi_{R(L)}$ jobboldali (baloldali) deriváltja f-nek x-ben. Ha $U \in \mathscr{T}_G(e_G)$ olyan, hogy $U \subseteq D(\Phi_{R(L)})$, akkor $\Phi_{R(L)}\big|_U$ is jobboldali (baloldali) deriváltja f-nek x-ben.

Jogos elvárásnak tűnhet a differenciálhatóság folgalmával szemben, hogy egy függvény differenciálhatósága lokális tulajdonság legyen, és azt ne befolyásolja a csoportok globális szerkezete. Amint azt a következő példa is mutatja, nem minden folytonos lokális csoporthomomorfizmus egészíthető ki az egész csoportra folytonos csoporthomomorfizmussá, ezért a 14. definícióban meg kellett engedni, hogy a derivált nem feltétlenül az egész csoporton, hanem az egységelem egy környezetén értelmezett lokális csoporthomomorfizmus legyen.

17. *példa.* Legyenek G és H ívszerűen összefüggő topologikus csoportok, és legyen $f\colon G \to H$ az a fedőleképezés, amely egyben csoporthomomorfizmus is. Ekkor f-nek létezik olyan $\tilde{f}$ leszűkítése, hogy $\tilde{f}\colon G \rightarrowtail H$ egy olyan folytonos injektív lokális csoporthomomorfizmus, amelynek inverze $\tilde{f}^{-1}\colon H \rightarrowtail G$ szintén egy folytonos lokális csoporthomomorfizmus. Ha azonban a fedés rétegszáma egynél nagyobb, akkor $\tilde{f}^{-1}$ nem terjeszthető ki $H \to G$ folytonos csoporthomomorfizmussá.

A 16(d) megjegyzés mutatja, hogy a derivált nem egyértelmű, egy derivált megfelelő leszűkítése is derivált. Ezért érdemes megfogalmazni, hogy mikor tekintjük a deriváltakat egymástól nem lényegesen különbözőnek. Azt mondhatjuk például, hogy a derivált lényegében egyértelmű, ha tetszőleges két deriváltat kiválasztva létezik az egységelemnek olyan környezete, amelyen ezen két derivált megegyezik. A következő példa olyan esetre mutat példát, amikor a derivált nem lényegében egyértelmű.

18. *példa.* Legyen G egy véges diszkrét csoport, I egy végtelen indexhalmaz, és legyen $H := G^I$ a szorzat-topológiával ellátva. Ha $f\colon H \rightarrowtail H$ folytonos valamely $x \in \overset{\circ}{D}(f)$ pontban, akkor ott mindkét oldalról differenciálható, és minden $\Phi\colon H \rightarrowtail H$ folytonos lokális csoporthomomorfizmus jobb- és baloldali deriváltja is lesz. Ugyanis

$$
\begin{aligned}
\omega_R(h) &:= \Phi(h)^{-1} f(x)^{-1} f(xh), \qquad h \in \left[x^{-1}\cdot D(f)\right] \cap D(\Phi) \quad \text{és} && (3.5)\\
\omega_L(h) &:= f(hx)\, f(x)^{-1}\Phi(h)^{-1}, \qquad h \in \left[D(f)\cdot x^{-1}\right] \cap D(\Phi) && (3.6)
\end{aligned}
$$

olyanok, hogy $e_H \in \overset{\circ}{D}(\omega_R)$, $e_H \in \overset{\circ}{D}(\omega_L)$, ω_R és ω_L folytonosak e_H-ban és $\omega_R(e_H) = \omega_L(e_H) = e_H$, tehát a 13. példa alapján kisordók. Így tehát a

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(h) &:= h, \qquad h \in H \qquad \text{és} && (3.7)\\
\Phi_2(h) &:= e_H, \qquad h \in H && (3.8)
\end{aligned}
$$

mindegyike bal- és jobboldali deriváltja f-nek az x-ben, azonban $[\Phi_1 = \Phi_2] = \{e_H\} \notin \mathscr{T}_H(e_H)$, tehát a derivált nem lényegében egyértelmű.

Ha a bal- ill. jobboldali derivált lényegében egyértelmű (például Lie-csoportok esetében, ld. 3.6. szakasz), nem kommutatív csoportok esetében akkor is előfordulhat, hogy a jobboldali és a baloldali derivált egymástól különböző:

19. *példa.* Legyen G tetszőleges topologikus csoport, $g, k \in G$ rögzített csoportelemek, és legyen $D(f) = G$, $f(x) = gxk^{-1}$. Ekkor f mindkét oldalról differenciálható minden $x \in G$ pontban, és

$\Phi_R(h) := khk^{-1}$ jobboldali deriváltja, $\Phi_L(h) := ghg^{-1}$ baloldali deriváltja lesz. Ugyanis

$$\omega_R(h) = \Phi_R(h)^{-1} f(x)^{-1} f(xh) = \left(khk^{-1}\right)^{-1} \left(gxk^{-1}\right)^{-1} \left(gxhk^{-1}\right) = \\ = \left(kh^{-1}k^{-1}\right) \left(kx^{-1}g^{-1}\right) \left(gxhk^{-1}\right) = e_G, \quad (3.9)$$

és

$$\omega_L(h) = f(hx) f(x)^{-1} \Phi_L(h)^{-1} = \left(ghxk^{-1}\right) \left(gxk^{-1}\right)^{-1} \left(ghg^{-1}\right)^{-1} = \\ = \left(ghxk^{-1}\right) \left(kx^{-1}g^{-1}\right) \left(gh^{-1}g^{-1}\right) = e_G. \quad (3.10)$$

3.2. A jobb- és a baloldali differenciálhatóság kapcsolata

20. lemma. *Legyenek F, G, H és K topologikus csoportok, $f\colon G \rightarrowtail H$ olyan függvény, melyre $e_G \in \overset{\circ}{D}(f)$ és $f(e_G) = e_H$, továbbá $\Psi\colon F \to G$ és $\Xi\colon H \to K$ folytonos csoporthomomorfizmusok. Ha f jobbról differenciálható e_G-ben és Φ_R jobboldali deriváltja, akkor $g := \Xi \circ f \circ \Psi$ is jobbról differenciálható e_F-ben és $\Gamma_R := \Xi \circ \Phi_R \circ \Psi$ jobboldali deriváltja lesz.*

Bizonyítás. f jobbról differenciálható e_G-ben, így

$$\omega_R(h) := \Phi_R(h)^{-1} f(e_G)^{-1} f(e_G h) = \Phi_R(h)^{-1} f(h) \quad (3.11)$$

kisordó. Legyen

$$\mu_R(l) = \Gamma_R(l)^{-1} g(e_F)^{-1} g(e_F l) = \Xi\left(\Phi_R(\Psi(l))\right)^{-1} \Xi\left(f(\Psi(e_F))\right)^{-1} \Xi\left(f(\Psi(l))\right) = \\ = \Xi\left(\Phi_R(\Psi(l))^{-1} f(\Psi(l))\right) = \Xi(\omega_R(\Psi(l))). \quad (3.12)$$

Legyen $V \in \mathcal{T}_K(e_K)$ tetszőleges. Ξ folytonos, így $\overset{-1}{\Xi}\langle V\rangle \in \mathcal{T}_H(e_H)$. Mivel ω_R kisordó, így $\overset{-1}{\Xi}\langle V\rangle$-hez léteznek olyan $W \in \mathcal{T}_G(e_G)$ és $N\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, melyekre $W \subseteq D(\omega_R)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n} = +\infty$, és ha valamely $n \in \mathbb{N}$ -re $h \in W$ olyan, hogy minden $1 \le j \le n$ esetén $h^j \in W$, akkor minden $1 \le k \le N(n)$ esetén $\omega_R(h)^k \in \overset{-1}{\Xi}\langle V\rangle$. Mivel Ψ folytonos, így $\overset{-1}{\Psi}\langle W\rangle \in \mathcal{T}_F(e_F)$. Legyen tehát $U := \overset{-1}{\Psi}\langle W\rangle$. Ekkor ha $l \in U$ olyan, hogy minden $1 \le j \le n$ esetén $l^j \in U$, akkor minden $1 \le j \le n$ esetén $\Psi(l)^j = \Psi\left(l^j\right) \in W$, így ekkor minden $1 \le k \le N(n)$ esetén $\omega_R(\Psi(l))^k \in \overset{-1}{\Xi}\langle V\rangle$, tehát minden $1 \le k \le N(n)$ esetén $\mu_R(l)^k = \Xi(\omega_R(\Psi(l)))^k = \Xi\left(\omega_R(\Psi(l))^k\right) \in V$. A V-hez választott U és N tehát megfelel a 11. definícióban szereplő feltételeknek, emiatt μ_R valóban kisordó, így g jobbról differenciálható e_F-ben és Γ_R jobboldali deriváltja. □

21. lemma. *Legyenek G és H topologikus csoportok, $f\colon G \rightarrowtail H$ és $x \in \overset{\circ}{D}(f)$. Ekkor az $\tilde{f}_R\colon G \rightarrowtail H$, $\tilde{f}_R(h) := f(x)^{-1} f(xh)$ függvényre $\tilde{f}_R(e_G) = e_H$ és $e_G \in \overset{\circ}{D}\left(\tilde{f}_R\right)$, továbbá $\tilde{f}_R$ pontosan akkor differenciálható jobbról e_G-ben, ha f jobbról differenciálható x-ben, és ekkor a jobboldali deriváltak halmaza megegyezik.*

Bizonyítás. Az állítás első része triviális, így elegendő csak a differenciálhatósággal kapcsolatos részét bizonyítani. Legyen $\Phi_R\colon G \rightarrowtail H$ folytonos lokális csoporthomomorfizmus, legyen

$$\omega_R(h) = \Phi_R(h)^{-1} f(x)^{-1} f(xh) \tag{3.13}$$

és

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_R(h) = \Phi_R(h)^{-1} \tilde{f}_R(e_G)^{-1} \tilde{f}_R(e_G h) = \Phi_R(h)^{-1} \left(f(x)^{-1} f(xe_G)\right)^{-1} \left(f(x)^{-1} f(xe_G h)\right) = \\ = \Phi_R(h)^{-1} f(x)^{-1} f(xh) = \omega_R(h). \quad (3.14)\end{aligned}$$

ω_R pontosan akkor kisordó, ha f jobbról differenciálható x-ben, és Φ_R jobboldali deriváltja, $\tilde{\omega}_R$ pedig pontosan akkor kisordó, ha $\tilde{f}_R$ jobbról differenciálható e_G-ben, és Φ_R jobboldali deriváltja. □

22. lemma. *Legyenek G és H topologikus csoportok, $f\colon G \rightarrowtail H$ és $x \in \overset{\circ}{D}(f)$. Ekkor az $\tilde{f}_L\colon G \rightarrowtail H$, $\tilde{f}_L(h) := f(hx) f(x)^{-1}$ függvényre $\tilde{f}_L(e_G) = e_H$ és $e_G \in \overset{\circ}{D}\left(\tilde{f}_L\right)$, továbbá $\tilde{f}_L$ pontosan akkor differenciálható balról e_G-ben, ha f balról differenciálható x-ben, és ekkor a baloldali deriváltak halmaza megegyezik.*

Bizonyítás. A bizonyítás a 21. lemma bizonyításában az oldalak felcserélésével adódik. □

23. lemma. *Legyenek G és H topologikus csoportok, és $f\colon G \rightarrowtail H$ olyan függvény, melyre $e_G \in \overset{\circ}{D}(f)$ és $f(e_G) = e_H$. f pontosan akkor differenciálható jobbról e_G-ben, ha ott balról is differenciálható, és ekkor a jobboldali és baloldali deriváltak halmaza megegyezik.*

Bizonyítás. Elegendő az egyik irányt bizonyítani, a másik hasonlóan történik. Legyen tehát f jobbról differenciálható e_G-ben, és Φ jobboldali deriváltja. Ekkor

$$\omega_R(h) := \Phi(h)^{-1} f(e_G)^{-1} f(e_G h) = \Phi(h)^{-1} f(h) \tag{3.15}$$

kisordó. Legyen

$$\omega_L(h) = f(he_G) f(e_G)^{-1} \Phi(h)^{-1} = f(h) \Phi(h)^{-1} = \Phi(h) \omega_R(h) \Phi(h)^{-1}. \tag{3.16}$$

Azt kell belátnunk, hogy ω_L kisordó. Legyen $V \in \mathcal{T}_H(e_H)$ tetszőleges. Ehhez létezik $W \in \mathcal{T}_H(e_H)$ szimmetrikus, melyre $WWW \subseteq V$. Φ_R folytonos, így W-hez létezik $U_\Phi \in \mathcal{T}_G(e_G)$ szimmetrikus, melyre $\Phi\langle U_\Phi\rangle \subseteq W$. ω_R kisordó, így W-hez van olyan $U_W \in \mathcal{T}_G(e_G)$ és $N_W\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, melyekre $U_W \subseteq D(\omega_R)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{N_W(n)}{n} = +\infty$, és ha valamely $n \in \mathbb{N}$ -re $h \in U_W$ olyan, hogy minden $1 \le j \le n$ esetén $h^j \in U_W$, akkor minden $1 \le k \le N_W(n)$ esetén $\omega_R(h)^k \in W$.

Legyen $U = U_\Phi \cap U_W$ és $N = N_W$. Ha $n \in \mathbb{N}$, és $h \in U$ olyan, hogy minden $1 \le j \le n$ esetén $h^j \in U$, akkor minden $1 \le k \le N(n)$ esetén

$$\omega_L(h)^k = \left(\Phi(h) \omega_R(h) \Phi(h)^{-1}\right)^k = \Phi(h) \omega_R(h)^k \Phi(h)^{-1} \in WWW \subseteq V. \tag{3.17}$$

A V-hez választott U és N tehát megfelel a 11. definícióban szereplő feltételeknek, emiatt ω_L valóban kisordó, így f balról differenciálható e_G-ben és Φ baloldali deriváltja. □

24. tétel. *Legyenek G és H topologikus csoportok, $f\colon G \rightarrowtail H$ és $x \in \overset{\circ}{D}(f)$. f pontosan akkor differenciálható jobbról x-ben, ha balról differenciálható x-ben, és ekkor Φ_L pontosan akkor baloldali deriváltja f-nek x-ben, ha $\Phi_R = \mathrm{Int}_H\left(f(x)^{-1}\right) \circ \Phi_L \circ \mathrm{Int}_G(x)$ jobboldali deriváltja.*

Bizonyítás. A 22. lemma alapján f pontosan akkor differenciálható balról x-ben, ha $\tilde{f}_L$ balról differenciálható e_G-ben, és Φ_L pontosan akkor baloldali deriváltja f-nek x-ben, ha baloldali deriváltja $\tilde{f}_L$-nek e_G-ben. A 23. lemma alapján $\tilde{f}_L$ pontosan akkor differenciálható balról e_G-ben, ha ott jobbról is differenciálható, és ekkor Φ_L pontosan akkor jobboldali deriváltja $\tilde{f}_L$-nek e_G-ben, ha baloldali deriváltja.

$$\tilde{f}_R(h) = f(x)^{-1} f(xh) = f(x)^{-1} f(xhx^{-1}x) f(x)^{-1} f(x) = f(x)^{-1} \tilde{f}_L\left(xhx^{-1}\right) f(x), \tag{3.18}$$

tehát

$$\tilde{f}_R = \mathrm{Int}_H\left(f(x)^{-1}\right) \circ \tilde{f}_L \circ \mathrm{Int}_G(x) \tag{3.19}$$

és

$$\tilde{f}_L = \mathrm{Int}_H\left(f(x)\right) \circ \tilde{f}_R \circ \mathrm{Int}_G\left(x^{-1}\right). \tag{3.20}$$

A 20. lemma alapján a (3.19) és (3.20) összefüggések miatt $\tilde{f}_L$ pontosan akkor differenciálható jobbról e_G-ben, ha $\tilde{f}_R$ jobbról differenciálható e_G-ben, és ekkor Φ_L pontosan akkor jobboldali deriváltja $\tilde{f}_L$-nek e_G-ben, ha $\Phi_R = \mathrm{Int}_H\left(f(x)^{-1}\right) \circ \Phi_L \circ \mathrm{Int}_G(x)$ jobboldali deriváltja $\tilde{f}_R$-nek e_G-ben. A 21. lemma alapján $\tilde{f}_R$ pontosan akkor differenciálható jobbról e_G-ben, ha f jobbról differenciálható x-ben, és Φ_R pontosan akkor jobboldali deriváltja $\tilde{f}_R$-nek e_G-ben, ha jobboldali deriváltja f-nek x-ben. □

3.3. Kommutatív csoportok

A kommutatív csoportokat gyakran additíven szokás írni, így teszünk mi is ebben a szakaszban: a csoportműveletet $+$ fogja jelölni, az inverzképzést $-$, a csoport neutrális elemét 0, és ha x egy csoportelem, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $n \cdot x := nx := \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n}$. Ekkor a 11. definíció így írható:

25. definíció. *Legyenek G és H kommutatív topologikus csoportok. Az $\omega\colon G \rightarrowtail H$ függvény **kisordó**, ha $0_G \in \overset{\circ}{D}(\omega)$, és minden $V \in \mathcal{T}_H(0_H)$ -hez van olyan $U \in \mathcal{T}_G(0_G)$ és $N\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, melyekre $U \subseteq D(\omega)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n} = +\infty$, és ha valamely $n \in \mathbb{N}$ -re $h \in U$ olyan, hogy minden $1 \le j \le n$ esetén $jh \in U$, akkor minden $1 \le k \le N(n)$ esetén $k\omega(h) \in V$.*

Ha a szóban forgó topologikus csoportok kommutatívak, akkor a 14. definícióban meghatározott jobboldali derivált egybeesik a baloldali deriválttal, és ekkor a 14. definíció a következőképpen írható:

26. definíció. *Legyenek G és H kommutatív topologikus csoportok, $f\colon G \rightarrowtail H$ és $x \in \overset{\circ}{D}(f)$. f **differenciálható** az x pontban, ha létezik olyan $\Phi\colon G \rightarrowtail H$ folytonos lokális csoporthomomorfizmus, hogy a*

$$h \mapsto f(x+h) - f(x) - \Phi(h) \tag{3.21}$$

*függvény kisordó. Ekkor Φ **deriváltja** f-nek x-ben.*

27. tétel. *Legyenek G, H és K kommutatív topologikus csoportok, $f\colon G \rightarrowtail H$, $g\colon H \rightarrowtail K$, $x \in \overset{\circ}{D(f)}$, $f(x) \in \overset{\circ}{D(g)}$, f differenciálható x-ben, deriváltja Φ, és g differenciálható $f(x)$-ben, deriváltja Ψ. Ekkor $g \circ f$ is differenciálható x-ben, és $\Psi \circ \Phi$ deriváltja lesz $g \circ f$-nek x-ben.*

Bizonyítás.

$$\omega(h) := f(x+h) - f(x) - \Phi(h) \tag{3.22}$$

és

$$\mu(l) := g(f(x)+l) - g(f(x)) - \Psi(l) \tag{3.23}$$

kisórdók. Legyen

$$\begin{aligned} \nu(h) := g(f(x+h)) - g(f(x)) - \Psi(\Phi(h)) = \underbrace{g(f(x) + [f(x+h) - f(x)]) - g(f(x))}_{\Psi(f(x+h)-f(x))+\mu(f(x+h)-f(x))} - \Psi(\Phi(h)) = \\ = \Psi(\underbrace{f(x+h) - f(x)}_{\Phi(h)+\omega(h)}) + \mu(\underbrace{f(x+h) - f(x)}_{\Phi(h)+\omega(h)}) - \Psi(\Phi(h)) = \\ = \Psi(\Phi(h) + \omega(h)) + \mu(\Phi(h) + \omega(h)) - \Psi(\Phi(h)) = \Psi(\omega(h)) + \mu(\Phi(h) + \omega(h)). \end{aligned}$$

Azt kell belátnunk, hogy ν kisordó. Legyen $V \in \mathcal{T}_K(0_K)$ tetszőleges. Ehhez létezik olyan $V' \in \mathcal{T}_K(0_K)$, hogy $V' + V' \subseteq V$.

Ψ folytonos, így $\exists W_1 \in \mathcal{T}_H(0_H)$, hogy $\Psi\langle W_1\rangle \subseteq V'$. ω kisordó, így W_1-hez van olyan $U_1 \in \mathcal{T}_G(0_G)$ és $N_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, melyekre $U_1 \subseteq D(\omega)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{N_1(n)}{n} = +\infty$, és ha valamely $n \in \mathbb{N}$ -re $h \in U_1$ olyan, hogy minden $1 \le j \le n$ esetén $jh \in U_1$, akkor minden $1 \le k \le N_1(n)$ esetén $k\omega(h) \in W_1$. Ekkor, ha valamely $n \in \mathbb{N}$ -re $h \in U_1$ olyan, hogy minden $1 \le j \le n$ esetén $jh \in U_1$, akkor minden $1 \le k \le N_1(n)$ esetén $k\Psi(\omega(h)) = \Psi(k\omega(h)) \in V'$.

μ kisordó, így V'-höz van olyan $W_2 \in \mathcal{T}_H(0_H)$ és $N_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ monoton növő, melyekre $W_2 \subseteq D(\mu)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{N_2(n)}{n} = +\infty$, és ha valamely $n \in \mathbb{N}$ -re $l \in W_2$ olyan, hogy minden $1 \le j \le n$ esetén $jl \in W_2$, akkor minden $1 \le k \le N_2(n)$ esetén $k\mu(l) \in V'$. Legyen $W_2' \in \mathcal{T}_H(0_H)$ olyan, hogy $W_2' + W_2' \subseteq W_2$. Φ folytonos, így W_2-höz létezik $U_2 \in \mathcal{T}_G(0_G)$, melyre $\Phi\langle U_2\rangle \subseteq W_2'$. Ekkor, ha valamely $n \in \mathbb{N}$ -re $h \in U_2$ olyan, hogy minden $1 \le j \le n$ esetén $jh \in U_2$, akkor minden $1 \le j \le n$ esetén $j\Phi(h) = \Phi(jh) \in W_2'$.

ω kisordó, így W_2'-höz van olyan $U_3 \in \mathcal{T}_G(0_G)$ és $N_3\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, melyekre $U_3 \subseteq D(\omega)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{N_3(n)}{n} = +\infty$, és ha valamely $n \in \mathbb{N}$ -re $h \in U_3$ olyan, hogy minden $1 \le j \le n$ esetén $jh \in U_3$, akkor minden $1 \le k \le N_3(n)$ esetén $k\omega(h) \in W_2'$.

Legyen $U := U_1 \cap U_2 \cap U_3$, és legyen $N_2'(n) := N_2(\min\{n, N_3(n)\})$. N_2 monotonitása miatt $N_2' \le N_2$, továbbá $\lim_{n\to\infty} \frac{N_2'(n)}{n} = +\infty$ is fennáll. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $h \in U$ olyan, hogy minden $1 \le j \le n$ esetén $jh \in U$, akkor minden $1 \le m \le \min\{n, N_3(n)\}$ esetén $m\Phi(h) = \Phi(mh) \in W_2'$ és $m\omega(h) \in W_2'$, vagyis ekkor minden $1 \le m \le \min\{n, N_3(n)\}$ esetén $m(\Phi(h) + \omega(h)) \in W_2' + W_2' \subseteq W_2$, tehát minden $1 \le k \le N_2(\min\{n, N_3(n)\}) = N_2'(n) \le N_2(n)$ esetén $k\mu(\Phi(h) + \omega(h)) \in V'$.

Legyen $N(n) := \min\{N_1(n), N_2'(n)\}$. Ekkor ha valamely $n \in \mathbb{N}$ -re $h \in U$ olyan, hogy minden $1 \le j \le n$ esetén $jh \in U$, akkor minden $1 \le k \le N(n)$ esetén $k\nu(h) = k\Psi(\omega(h)) + k\mu(\Phi(h) + \omega(h)) \in V' + V' \subseteq V$. A V-hez választott U és N tehát megfelel a 25. definícióban szereplő feltételeknek, emiatt ν valóban kisordó, így $g \circ f$ differenciálható x-ben és $\Psi \circ \Phi$ deriváltja. $\square$

3.4. Valós topologikus vektorterek

Egy valós topologikus vektortér az összeadásra, mint csoportműveletre nézve, egy kommutatív topologikus csoport. Az összeadáson felül azonban rendelkezésre áll a valós számokkal történő szorzás is, ami miatt a differenciálással kapcsolatos fogalmak egyszerűsödnek.

28. állítás. *Legyenek E és F valós topologikus vektorterek, $\omega\colon E \rightarrowtail F$ és $0_E \in \overset{\circ}{D}(\omega)$. ω pontosan akkor kisordó a 25. definíció értelmében, ha rá a következő tulajdonság teljesül: minden $V \in \mathcal{T}_F(0_F)$ -hez van olyan $U \in \mathcal{T}_E(0_E)$ kiegyensúlyozott és $r\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+$, melyekre $U \subseteq D(\omega)$, $\lim_{\alpha\searrow 0} r(\alpha) = 0$ és $r(0) = 0$, és minden $\alpha \in [0,1]$ esetén ha $h \in U$ olyan, hogy $h \in \alpha \cdot U$, akkor $\omega(h) \in \alpha \cdot r(\alpha) \cdot V$.*

Bizonyítás. (I) Legyen ω kisordó a 25. definíció értelmében. Legyen $V \in \mathcal{T}_F(0_F)$ rögzített. V-hez van olyan $U \in \mathcal{T}_E(0_E)$ és $N\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, melyekre $U \subseteq D(\omega)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n} = +\infty$, és ha valamely $n \in \mathbb{N}$ -re $h \in U$ olyan, hogy minden $1 \le j \le n$ esetén $jh \in U$, akkor minden $1 \le k \le N(n)$ esetén $k\omega(h) \in V$.

$\exists U' \in \mathcal{T}_E(0_E)$ kiegyensúlyozott, melyre $U' \subseteq U$. Legyen

$$r(\alpha) := \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{1}{N\left(\left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor\right)} & \text{ha } 0 < \alpha \le 1, \\ 0 & \text{ha } \alpha = 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

Ekkor

$$\lim_{\alpha\searrow 0} r(\alpha) = \lim_{\alpha\searrow 0} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{N\left(\left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor\right)} \le \lim_{\alpha\searrow 0} \frac{\left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor}{N\left(\left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor\right)} + \lim_{\alpha\searrow 0} \frac{1}{N\left(\left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{N(n)} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N(n)} = 0. \tag{3.25}$$

Ha $\alpha \in [0,1]$ és $h \in U'$ olyan, hogy $h \in \alpha \cdot U'$, akkor $\frac{1}{\alpha} h \in U'$. Mivel U' kiegyensúlyozott, így minden $1 \le j \le \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor \le \frac{1}{\alpha}$ esetén $jh \in U'$, tehát minden $1 \le k \le N\left(\left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor\right)$ esetén $k\omega(h) \in V$. Speciálisan $N\left(\left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor\right) \cdot \omega(h) \in V$, azaz $\omega(h) \in \frac{1}{N\left(\left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor\right)} \cdot V = \alpha \cdot r(\alpha) \cdot V$. Tehát a V-hez választott U' és r megfelel a követelményeknek, így ω-ra valóban teljesül az állításban megfogalmazott tulajdonság.

(II) Legyen most ω olyan, hogy teljesül rá az állításban megfogalmazott tulajdonság. Legyen $V \in \mathcal{T}_F(0_F)$ rögzített, és $V' \in \mathcal{T}_F(0_F)$ kiegyensúlyozott, melyre $V' \subseteq V$. V'-höz van olyan $U \in \mathcal{T}_E(0_E)$ kiegyensúlyozott és $r\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+$, melyekre $U \subseteq D(\omega)$, $\lim_{\alpha\searrow 0} r(\alpha) = 0$ és $r(0) = 0$, és minden $\alpha \in [0,1]$ esetén ha $h \in U$ olyan, hogy $h \in \alpha \cdot U$, akkor $\omega(h) \in \alpha \cdot r(\alpha) \cdot V'$.

Mivel $\lim_{\alpha\searrow 0} r(\alpha) = 0$, így létezik olyan $0 < \delta \le 1$, hogy $r\langle[0,\delta]\rangle \subseteq [0,1[$. Legyen $U' := \delta \cdot U$ és $r'(\alpha) := r(\delta \cdot \alpha)$. Ekkor U'-re és r'-re is igaz, hogy minden $\alpha \in [0,1]$ esetén ha $h \in U'$ olyan, hogy $h \in \alpha \cdot U'$, akkor $\omega(h) \in \alpha \cdot r'(\alpha) \cdot V'$. Két esetet kell megkülönböztetnünk.

1. eset: létezik $0 < \alpha_0 \le 1$, hogy $r'(\alpha_0) = 0$. Ekkor ha $h \in \alpha_0 \cdot U'$, akkor $\omega(h) \in \alpha_0 \cdot r'(\alpha_0) \cdot V' = 0 \cdot V' = \{0_F\}$. Vagyis ekkor ω az $\alpha_0 \cdot U' \in \mathcal{T}_E(0_E)$ környezetre megszorítva a konstans 0_F függvény, tehát ekkor ω valóban kisordó.

2. eset: minden $0 < \alpha \le 1$ esetén $r'(\alpha) > 0$. Legyen ekkor

$$N(n) := \left\lfloor \frac{1}{\frac{1}{n} \cdot r'\left(\frac{1}{n}\right)} \right\rfloor, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.26}$$

Mivel minden $0 < \alpha \le 1$ esetén $0 < r'(\alpha) < 1$, így a (3.26) egyenletben a nevező sosem nulla, és minden $n \in \mathbb{N}$ -re $N(n) \ge 1$. Továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left\lfloor \frac{1}{\frac{1}{n}\cdot r'\left(\frac{1}{n}\right)} \right\rfloor}{n} \ge \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\frac{1}{n}\cdot r'\left(\frac{1}{n}\right)}}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r'\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{\alpha\searrow 0} \frac{1}{r'(\alpha)} = +\infty. \tag{3.27}$$

Ha $n \in \mathbb{N}$ és $h \in U'$ olyan, hogy minden $1 \le j \le n$ esetén $jh \in U'$, akkor speciálisan $nh \in U'$, vagyis $h \in \frac{1}{n}\cdot U'$. Ekkor

$$\omega(h) \in \frac{1}{n}\cdot r'\left(\frac{1}{n}\right)\cdot V' \subseteq \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\frac{1}{n}\cdot r'\left(\frac{1}{n}\right)} \right\rfloor}\cdot V' = \frac{1}{N(n)}\cdot V', \tag{3.28}$$

így V' kiegyensúlyozottsága miatt minden $1 \le k \le N(n)$ esetén $k\omega(h) \in V' \subseteq V$. A V-hez választott U' és N tehát megfelel a 25. definícióban szereplő feltételeknek, emiatt ω valóban kisordó. □

A 28. állítás következtében valós topologikus vektorterek esetében a 25. definíció a következőképpen átfogalmazható:

29. definíció. *Legyenek E és F valós topologikus vektorterek. Az $\omega\colon E \rightarrowtail F$ függvény **kisordó**, ha $0_E \in \overset{\circ}{D}(\omega)$, és minden $V \in \mathcal{T}_F(0_F)$ -hez van olyan $U \in \mathcal{T}_E(0_E)$ kiegyensúlyozott és $r\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+$, melyekre $U \subseteq D(\omega)$, $\lim_{\alpha\searrow 0} r(\alpha) = 0$ és $r(0) = 0$, és minden $\alpha \in [0,1]$ esetén ha $h \in U$ olyan, hogy $h \in \alpha\cdot U$, akkor $\omega(h) \in \alpha\cdot r(\alpha)\cdot V$.*

Kommutatív topologikus csoportok esetében a deriváltak folytonos lokális csoporthomomorfizmusok. Topologikus vektorterek esetében viszont folytonos lineáris leképezéseket szokás deriváltnak tekinteni.

30. állítás. *Legyenek E és F valós topologikus vektorterek és $\Phi\colon E \rightarrowtail F$ folytonos lokális csoporthomomorfizmus. Ekkor létezik egyetlen olyan $\tilde{\Phi}\colon E \to F$ folytonos lineáris leképezés, hogy minden $\mathcal{T}_E(0_E) \ni U \subseteq D(\Phi)$ kiegyensúlyozott környezet esetén $\tilde{\Phi}\big|_U = \Phi\big|_U$.*

Bizonyítás. Egyértelműség: Legyenek $\tilde{\Phi}_1\colon E \to F$ és $\tilde{\Phi}_2\colon E \to F$ folytonos lineáris leképezések, melyekre minden $\mathcal{T}_E(0_E) \ni U \subseteq D(\Phi)$ kiegyensúlyozott környezet esetén $\tilde{\Phi}_1\big|_U = \tilde{\Phi}_2\big|_U = \Phi\big|_U$. Legyen $x \in E$ tetszőleges, és $\mathcal{T}_E(0_E) \ni U \subseteq D(\Phi)$ tetszőleges kiegyensúlyozott környezet. U elnyelő, így léteznek $n \in \mathbb{N}$ és $x' \in U$, hogy $x = n\cdot x'$.

$$\tilde{\Phi}_1(x) = \tilde{\Phi}_1\left(n\cdot x'\right) = n\cdot\tilde{\Phi}_1\left(x'\right) = n\cdot\Phi\left(x'\right) = n\cdot\tilde{\Phi}_2\left(x'\right) = \tilde{\Phi}_2\left(n\cdot x'\right) = \tilde{\Phi}_2\left(x\right) \tag{3.29}$$

Tehát $\forall x \in E$ esetén $\tilde{\Phi}_1(x) = \tilde{\Phi}_2(x)$.

Létezés: Rögzítsünk egy $U \in \mathcal{T}_E(0_E)$ kiegyensúlyozott környezetet, melyre $U \subseteq D(\Phi)$. Ha $x \in U$, és $p, q \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $\frac{p}{q}x \in U$, akkor U kiegyensúlyozottsága miatt minden $1 \le k \le \max\{p,q\}$ esetén $\frac{k}{q}x \in U$, és így Φ lokális csoporthomomorfizmus volta miatt

$$\frac{p}{q}\cdot\Phi(x) = \frac{p}{q}\cdot\Phi\left(q\cdot\frac{1}{q}x\right) = \frac{p}{q}\cdot q\cdot\Phi\left(\frac{1}{q}x\right) = p\cdot\Phi\left(\frac{1}{q}x\right) = \Phi\left(\frac{p}{q}x\right). \tag{3.30}$$

$x \in E$ -hez léteznek $n \in \mathbb{N}$ és $x' \in U$, hogy $x = n \cdot x'$. Legyen $\tilde{\Phi}(x) := n \cdot \Phi\left(x'\right)$. Ez jól definiált, ugyanis ha $m \in \mathbb{N}$ és $x'' \in U$ olyanok, hogy $m \cdot x'' = x = n \cdot x'$, akkor

$$n \cdot \Phi\left(x'\right) = n \cdot \Phi\left(\frac{m}{n} x''\right) = n \cdot \frac{m}{n} \cdot \Phi\left(x''\right) = m \cdot \Phi\left(x''\right). \tag{3.31}$$

Belátjuk, hogy $\tilde{\Phi}$ csoporthomomorfizmus. Legyen $x, y \in E$ tetszőleges. Legyenek $n_x, n_y, n_{xy} \in \mathbb{N}$ és $x', y' \in U$ olyanok, hogy $x = n_x \cdot x'$, $y = n_y \cdot y'$, $n_{xy} \geq n_x$, $n_{xy} \geq n_y$ és $\frac{1}{n_{xy}} \cdot \left(x + y\right) \in U$. Ekkor

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(x) + \tilde{\Phi}\left(y\right) = n_x \cdot \Phi\left(x'\right) + n_y \cdot \Phi\left(y'\right) = n_{xy} \cdot \left[\frac{n_x}{n_{xy}} \cdot \Phi\left(x'\right) + \frac{n_y}{n_{xy}} \cdot \Phi\left(y'\right)\right] = \\ = n_{xy} \cdot \left[\Phi\left(\frac{n_x}{n_{xy}} x'\right) + \Phi\left(\frac{n_y}{n_{xy}} y'\right)\right] = n_{xy} \cdot \left[\Phi\left(\frac{1}{n_{xy}} x\right) + \Phi\left(\frac{1}{n_{xy}} y\right)\right] = \\ = n_{xy} \cdot \Phi\left(\frac{1}{n_{xy}} \cdot \left(x + y\right)\right) = \tilde{\Phi}\left(x + y\right),\end{aligned} \tag{3.32}$$

tehát $\tilde{\Phi}$ valóban csoporthomomorfizmus. $\tilde{\Phi}\big|_U = \Phi\big|_U$, így $\tilde{\Phi}$ folytonos 0_E-ben, emiatt folytonos E-n.

Legyen $\mathscr{T}_E(0_E) \ni U' \subseteq D(\Phi)$ kiegyensúlyozott. Belátjuk, hogy $\tilde{\Phi}\big|_{U'} = \Phi\big|_{U'}$. Legyen $x \in U'$. $U \cap U'$ elnyelő, így léteznek $n \in \mathbb{N}$ és $x' \in U \cap U'$, hogy $x = n \cdot x'$. U' kiegyensúlyozottsága miatt minden $1 \leq k \leq n$ esetén $k \cdot x' \in U'$, így Φ lokális csoporthomomorfizmus volta miatt

$$\Phi(x) = \Phi\left(n \cdot x'\right) = n \cdot \Phi\left(x'\right) = n \cdot \tilde{\Phi}\left(x'\right) = \tilde{\Phi}\left(n \cdot x'\right) = \tilde{\Phi}(x). \tag{3.33}$$

Belátjuk, hogy tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ és $x \in E$ esetén $\alpha \cdot \tilde{\Phi}(x) = \tilde{\Phi}(\alpha \cdot x)$. Legyen először $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Ehhez létezik olyan $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^+$ sorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha$. Ekkor $\forall x \in E$ és $\forall y \in F$ esetén $\lim_{n\to\infty} r_n x = \alpha \cdot x$ és $\lim_{n\to\infty} r_n y = \alpha \cdot y$.

$$\tilde{\Phi}(r_n \cdot x) = r_n \cdot \tilde{\Phi}(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.34}$$

így $\tilde{\Phi}$ folytonossága miatt

$$\tilde{\Phi}(\alpha \cdot x) = \tilde{\Phi}\left(\lim_{n\to\infty} r_n x\right) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\Phi}(r_n \cdot x) = \lim_{n\to\infty} r_n \tilde{\Phi}(x) = \alpha \cdot \tilde{\Phi}(x). \tag{3.35}$$

Ha $\alpha \in \mathbb{R}_-$, akkor

$$\tilde{\Phi}(\alpha \cdot x) = \tilde{\Phi}(|\alpha| \cdot (-x)) = |\alpha| \cdot \tilde{\Phi}(-x) = -|\alpha| \cdot \tilde{\Phi}(x) = \alpha \cdot \tilde{\Phi}(x). \tag{3.36}$$

Tehát $\tilde{\Phi}$ egy olyan folytonos lineáris leképezés, melyre teljesülnek az állítás feltételei. □

A 30. állítás miatt valós topologikus vektorterek esetében a 26. definícióban definiált differenciálhatóság fogalma átfogalmazható:

31. definíció. *Legyenek E és F valós topologikus vektorterek, $f : E \rightarrowtail F$ és $x \in \overset{\circ}{D}(f)$. f* ***differenciálható*** *x-ben, ha létezik $u \in \mathscr{L}(E, F)$, hogy a*

$$h \mapsto f(x + h) - f(x) - u(h), \qquad h \in D(f) - x \tag{3.37}$$

függvény kisordó.

32. állítás. *Legyenek E és F valós topologikus vektorterek, és $f\colon E \rightarrowtail F$ differenciálható az $x \in \overset{\circ}{D}(f)$ pontban. Ha F szeparált, akkor a derivált egyértelmű.*

Bizonyítás. Legyen $V \in \mathscr{T}_F(0_F)$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $V' \in \mathscr{T}_F(0_F)$, hogy $V' + V' \subseteq V$, és V' kiegyensúlyozott. Legyen $u_1, u_2 \in \mathscr{L}(E,F)$ két deriváltja f-nek az x pontban. Ekkor igaz, hogy léteznek olyan $U_1, U_2 \in \mathscr{T}_E(0_E)$ kiegyensúlyozottak és $r_1, r_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+$, hogy minden $\alpha \in [0,1]$ esetén $h \in \alpha \cdot U_1 \Longrightarrow f(x+h) - f(x) - u_1(h) \in \alpha \cdot r_1(\alpha) \cdot V'$, és $h \in \alpha \cdot U_2 \Longrightarrow f(x+h) - f(x) - u_2(h) \in \alpha \cdot r_2(\alpha) \cdot V'$.

Legyen $U := U_1 \cap U_2$ és $r(\alpha) := \max\{r_1(\alpha), r_2(\alpha)\}$. Ekkor minden $\alpha \in [0,1]$ és minden $h \in \alpha \cdot U$ esetén $f(x+h) - f(x) - u_1(h) \in \alpha \cdot r(\alpha) \cdot V'$ és $f(x+h) - f(x) - u_2(h) \in \alpha \cdot r(\alpha) \cdot V'$. A kettőt egymásból kivonva tehát $\forall \alpha \in [0,1]$ és $\forall h \in \alpha \cdot U$ esetén $u_1(h) - u_2(h) \in \alpha \cdot r(\alpha) \cdot V$, azaz $\forall \alpha \in [0,1]$ és $\forall \frac{h}{\alpha} \in U$ esetén $u_1\left(\frac{h}{\alpha}\right) - u_2\left(\frac{h}{\alpha}\right) \in r(\alpha) \cdot V$. Másképpen írva $\forall \alpha \in [0,1]$ és $\forall z \in U$ esetén $u_1(z) - u_2(z) \in r(\alpha) \cdot V$. Két esetet kell megkülönböztetnünk.

1. eset: $\exists \alpha_0 \in\,]0,1]$, hogy $r(\alpha_0) = 0$. Ekkor $\forall z \in U$ esetén $u_1(z) - u_2(z) = 0$, és mivel U elnyelő, ezért ebből adódik, hogy $\forall z \in E$ esetén $u_1(z) - u_2(z) = 0$, azaz $u_1 = u_2$.

2. eset: $\forall \alpha \in\,]0,1]$ esetén $r(\alpha) > 0$. Ekkor $\forall \alpha \in\,]0,1]$ és $\forall z \in U$ esetén $(u_1 - u_2)\left(\frac{z}{r(\alpha)}\right) \in V$. Mivel U elnyelő, és $\lim_{\alpha \searrow 0} r(\alpha) = 0$, ebből adódik, hogy $\forall w \in E$ esetén $(u_1 - u_2)(w) \in V$. Mivel $V \in \mathscr{T}_F(0_F)$ tetszőleges volt, így azt kaptuk, hogy $\forall w \in E$ esetén $(u_1 - u_2)(w) \in \bigcap_{V \in \mathscr{T}_F(0_F)} V = \overline{\{0\}}$. F szeparált, így $\overline{\{0\}} = \{0\}$, tehát $u_1 = u_2$. □

33. állítás. *Legyenek $E_1, E_2, \ldots, E_n$ és F valós topologikus vektorterek, és $f\colon E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \to F$ folytonos n-lineáris leképezés. Ekkor minden $x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ esetén f differenciálható az x pontban, és a deriváltja*

$$u(h_1, \ldots, h_n) = f(h_1, x_2, \ldots, x_n) + f(x_1, h_2, x_3, \ldots, x_n) + \cdots + f(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_n). \tag{3.38}$$

Bizonyítás. Legyen $\omega(h) := f(x+h) - f(x) - u(h) = f(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, \ldots, x_n) - f(h_1, x_2, \ldots, x_n) - \cdots - f(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_n) = f(h_1, h_2, x_3, \ldots, x_n) + f(h_1, x_2, h_3, \ldots, x_n) + \cdots + f(h_1, h_2, \ldots, h_n) =: f_x^{(2)}(h) + f_x^{(3)}(h) + \cdots + f_x^{(n)}(h)$, ahol $f_x^{(2)}(h)$ egy folytonos bilineáris függvény a (h,h) pontban, $f_x^{(3)}(h)$ egy folytonos trilineáris függvény a (h,h,h) pontban, stb.

Legyen $V \in \mathscr{T}_F(0_F)$ tetszőleges. Létezik hozzá $V' \in \mathscr{T}_F(0_F)$, melyre $\underbrace{V' + V' + \cdots + V'}_{n-1} \subseteq V$, és V' kiegyensúlyozott. Mivel minden $i = 2, \ldots, n$ esetén $f_x^{(i)}$ folytonos, így léteznek $W^{(i)} \in \mathscr{T}_{E_1 \times \cdots \times E_n}(0_{E_1 \times \cdots \times E_n})$ kiegyensúlyozottak, hogy $f_x^{(i)}\langle W^{(i)} \rangle \subseteq V'$, minden $i = 2, \ldots, n$ -re. Legyen $U := \cap_{i=2}^n W^{(i)} \in \mathscr{T}_{E_1 \times \cdots \times E_n}(0_{E_1 \times \cdots \times E_n})$. Ekkor $\forall \alpha \in [0,1]$ esetén $\omega\langle \alpha \cdot U \rangle = f_x^{(2)}\langle \alpha \cdot U \rangle + \cdots + f_x^{(n)}\langle \alpha \cdot U \rangle = \alpha^2 \cdot f_x^{(2)}\langle U \rangle + \cdots + \alpha^n \cdot f_x^{(n)}\langle U \rangle \subseteq \alpha^2 \cdot \left[V' + \alpha \cdot V' + \cdots + \alpha^{n-2} \cdot V'\right] \subseteq \alpha \cdot \alpha \cdot V$. Tehát minden $V \in \mathscr{T}_F(0_F)$ -hez az előbbi U és $r(\alpha) := \alpha$ választás megfelelő. □

34. állítás. *Legyenek E és F valós normált terek, $\omega\colon E \rightarrowtail F$ és $0_E \in \overset{\circ}{D}(\omega)$. ω pontosan akkor kisordó a 29. definíció értelmében, ha*

$$\lim_{h \to 0_E} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = 0_F. \tag{3.39}$$

Bizonyítás. (I) Legyen ω kisordó a 29. definíció értelmében. Ekkor $B_1(0_F)$-hez létezik $U \in \mathscr{T}_E(0_E)$ kiegyensúlyozott és $r\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+$, melyekre $U \subseteq D(\omega)$, $\lim_{\alpha \searrow 0} r(\alpha) = 0$ és $r(0) = 0$, és minden $\alpha \in [0,1]$ esetén ha $h \in U$ olyan, hogy $h \in \alpha \cdot U$, akkor $\omega(h) \in \alpha \cdot r(\alpha) \cdot B_1(0_F) = B_{\alpha \cdot r(\alpha)}(0_F)$. Létezik $\delta' > 0$, hogy $B_{\delta'}(0_E) \subseteq U$. Ha $\alpha \in [0,1]$ és $h \in U$ olyan, hogy $\|h\| < \alpha \cdot \delta'$, akkor $h \in B_{\alpha \cdot \delta'}(0_E) \subseteq \alpha \cdot U$, így ekkor $\|\omega(h)\| < \alpha \cdot r(\alpha)$.

Ha $\|h\| < \frac{\delta'}{2}$, akkor $\frac{2}{\delta'} \cdot \|h\| < 1$ és $\|h\| < \left(\frac{2}{\delta'} \cdot \|h\|\right) \cdot \delta'$, így $\|\omega(h)\| < \left(\frac{2}{\delta'} \cdot \|h\|\right) \cdot r\left(\frac{2}{\delta'} \cdot \|h\|\right)$, vagyis ekkor $\left\| \frac{\omega(h)}{\|h\|} \right\| < \frac{2}{\delta'} \cdot r\left(\frac{2}{\delta'} \cdot \|h\|\right)$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $\lim_{\alpha \searrow 0} r(\alpha) = 0$, így $\exists \delta''_\varepsilon > 0$, hogy ha $\frac{2}{\delta'} \cdot \|h\| < \delta''_\varepsilon$, akkor $r\left(\frac{2}{\delta'} \cdot \|h\|\right) < \frac{\delta'}{2} \varepsilon$, tehát $\frac{2}{\delta'} \cdot r\left(\frac{2}{\delta'} \cdot \|h\|\right) < \varepsilon$. Legyen $\delta_\varepsilon := \min\left\{\frac{\delta'}{2}, \frac{\delta' \cdot \delta''_\varepsilon}{2}\right\}$. Ha tehát $\|h\| < \delta_\varepsilon$, akkor $\left\| \frac{\omega(h)}{\|h\|} \right\| < \varepsilon$. Mivel tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz van ilyen $\delta_\varepsilon > 0$, ezért valóban $\lim_{h \to 0_E} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = 0_F$.

(II) Legyen $\lim_{h \to 0_E} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = 0_F$. Legyen ekkor

$$\varphi(h) := \begin{cases} \dfrac{\omega(h)}{\|h\|} & \text{ha } h \in D(\omega) \setminus \{0_E\}, \\ 0 & \text{ha } h = 0_E. \end{cases} \tag{3.40}$$

Mivel $\lim_{h \to 0_E} \varphi(h) = 0_F$, így $\exists \delta > 0$, hogy $\overline{B}_\delta(0_E) \subseteq D(\varphi)$ és φ korlátos $\overline{B}_\delta(0_E)$-n. Ekkor a $\varrho\colon [0,\delta] \to \mathbb{R}_+$, $\varrho(\alpha) := \sup_{\|h\| \le \alpha} \left\|\varphi(h)\right\|$ függvény monoton növő, és $\varrho(0) = 0$. Ezen felül $\lim_{\alpha \searrow 0} \varrho(\alpha) = 0$, ugyanis legyen $\varepsilon' > 0$ tetszőleges. Ehhez létezik $\delta' > 0$, hogy ha $\|h\| < \delta'$, akkor $\left\|\varphi(h)\right\| < \varepsilon'$. Ha tehát $0 \le \alpha < \delta'$, akkor $\varrho(\alpha) \le \varrho(\delta') = \sup_{\|h\| \le \delta'} \left\|\varphi(h)\right\| \le \varepsilon'$.

Legyen $V \in \mathcal{T}_F(0_F)$. Ekkor $\exists \varepsilon > 0$, hogy $B_\varepsilon(0_F) \subseteq V$. Legyen $U := B_\delta(0_E)$. Ha $\alpha \in [0,1]$ és $h \in U$ olyan, hogy $h \in \alpha \cdot U = B_{\alpha\delta}(0_E) \subseteq B_\delta(0_E)$, akkor $\left\|\varphi(h)\right\| \le \varrho(\|h\|)$, így ekkor $\|\omega(h)\| \le \|h\| \cdot \varrho(\|h\|) < (\alpha \cdot \delta) \cdot \varrho(\alpha \cdot \delta)$. Tehát ha $h \in \alpha \cdot U$, akkor $\omega(h) \in \alpha \cdot \delta \cdot \varrho(\alpha \cdot \delta) \cdot B_1(0_F) = \alpha \cdot \frac{\delta}{\varepsilon} \cdot \varrho(\alpha \cdot \delta) \cdot B_\varepsilon(0_F) \subseteq \alpha \cdot \frac{\delta}{\varepsilon} \cdot \varrho(\alpha \cdot \delta) \cdot V$.

Legyen tehát $r\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+$, $r(\alpha) := \frac{\delta}{\varepsilon} \cdot \varrho(\alpha \cdot \delta)$. Tehát tetszőleges $V \in \mathcal{T}_F(0_F)$ -hoz találtunk olyan $U \in \mathcal{T}_E(0_E)$ kiegyensúlyozottat és olyan r-et, melyekre $U \subseteq D(\omega)$, $\lim_{\alpha \searrow 0} r(\alpha) = 0$ és $r(0) = 0$, és minden $\alpha \in [0,1]$ esetén ha $h \in U$ olyan, hogy $h \in \alpha \cdot U$, akkor $\omega(h) \in \alpha \cdot r(\alpha) \cdot V$. Tehát ω valóban kisordó a 29. definíció értelmében. □

35. következmény. *Legyenek E és F valós normált terek, $f\colon E \rightarrowtail F$ és $x \in \overset{\circ}{D}(f)$. f pontosan akkor differenciálható x-ben a 31. definíció értelmében, ha ott Fréchet-differenciálható.*

Az általános topologikus csoportok esetén a 14. definícióban megadott derivált a valós normált terek speciális esetében tehát egyenértékű a Fréchet-deriválttal, így az valóban nevezhető a Fréchet-derivált egy általánosításának.

3.5. Az általánosítások közötti kapcsolat

A 3.4. szakaszban láttuk, hogy a 11. és 14. definíciókban topologikus csoportok esetére megfogalmazott differenciálhatóság fogalma valós topologikus vektorterek esetén a 29. és 31. definíciók segítségével ekvivalens módon átfogalmazható. Ez utóbbi alak már könnyebben összevethető az irodalomban fellelhető, topologikus vektorterekkel kapcsolatos differenciálhatóság fogalmakkal.

36. állítás. *Legyenek E és F valós topologikus vektorterek, legyenek*

$$\mathcal{B}_E = \left\{U \in \mathcal{T}_E(0_E) \,\middle|\, U \text{ kiegyensúlyozott és nyílt}\right\}, \tag{3.41}$$

$$\mathcal{B}_F = \left\{V \in \mathcal{T}_F(0_F) \,\middle|\, V \text{ kiegyensúlyozott és nyílt}\right\}, \tag{3.42}$$

p_U és p_V jelölje a Minkowski-funkcionálokat, továbbá legyen $\omega\colon E \rightarrowtail F$ olyan, melyre $0_E \in \overset{\circ}{D}(\omega)$. ω pontosan akkor kisordó a 29. definíció értelmében, ha minden $V \in \mathscr{B}_F$ -hez létezik olyan $U \in \mathscr{B}_E$, melyre minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, hogy ha $p_U(h) < \delta$, akkor $p_V(\omega(h)) \leq \varepsilon \cdot p_U(h)$.

Bizonyítás. (I) Legyen ω kisordó a 29. definíció értelmében. Legyen $V \in \mathscr{B}_F$ tetszőleges. Ekkor $V \in \mathscr{T}_F(0_F)$ -hez van olyan $U \in \mathscr{B}_E$ és $r\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+$, melyekre $U \subseteq D(\omega)$, $\lim_{\alpha\searrow 0} r(\alpha) = 0$ és $r(0) = 0$, és minden $\alpha \in [0,1]$ esetén ha $h \in U$ olyan, hogy $h \in \alpha \cdot U$, akkor $\omega(h) \in \alpha \cdot r(\alpha) \cdot V$. Ha tehát valamely $\alpha \in [0,1]$ esetén $p_U(h) < \alpha$, akkor $h \in \alpha \cdot U$, így ekkor $\omega(h) \in \alpha \cdot r(\alpha) \cdot V$, vagyis $p_V(\omega(h)) < \alpha \cdot r(\alpha)$. Így ha $p_U(h) < \frac{1}{2}$, akkor $2p_U(h) < 1$ és $p_U(h) < 2p_U(h)$, így $p_V(\omega(h)) < \left(2p_U(h)\right) \cdot r\left(2p_U(h)\right)$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $\lim_{\alpha\searrow 0} r(\alpha) = 0$, így $\exists\delta' > 0$, hogy ha $2p_U(h) < \delta'$, akkor $r\left(2p_U(h)\right) < \frac{\varepsilon}{2}$, tehát $2 \cdot r\left(2p_U(h)\right) < \varepsilon$. Legyen $\delta := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\delta'}{2}\right\}$. Ha tehát $p_U(h) < \delta$, akkor $p_V(\omega(h)) < \varepsilon \cdot p_U(h)$. Tehát tetszőleges $V \in \mathscr{B}_F$ -hez találtunk olyan $U \in \mathscr{B}_E$ -t, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz található olyan $\delta > 0$, hogy ha $p_U(h) < \delta$, akkor $p_V(\omega(h)) \leq \varepsilon \cdot p_U(h)$.

(II) Legyen ω olyan, hogy minden $V \in \mathscr{B}_F$ -hez létezik olyan $U \in \mathscr{B}_E$, melyre minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, hogy ha $p_U(h) < \delta$, akkor $p_V(\omega(h)) \leq \varepsilon \cdot p_U(h)$. Legyen $V \in \mathscr{T}_F(0_F)$ tetszőleges. Létezik $V' \in \mathscr{B}_F$, melyre $V' \subseteq V$. Ekkor V'-höz is létezik $U' \in \mathscr{B}_E$ az előbbi tulajdonsággal. Legyen

$$\varphi(h) := \begin{cases} \dfrac{p_{V'}(\omega(h))}{p_{U'}(h)} & \text{ha } h \in D(\omega) \setminus \left[p_{U'} = 0\right], \\ 0 & \text{ha } p_{U'}(h) = 0. \end{cases} \tag{3.43}$$

Mivel minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta_\varepsilon > 0$, hogy ha $p_{U'}(h) < \delta_\varepsilon$, akkor $\varphi(h) \leq \varepsilon$, így létezik $\delta > 0$, hogy $\left[p_{U'} < 2\delta\right] \subseteq D(\varphi)$ és φ korlátos $\left[p_{U'} < 2\delta\right]$-n. Ekkor a $\varrho\colon [0,\delta] \to \mathbb{R}_+$, $\varrho(\alpha) := \sup_{P_{U'}(h)\leq\alpha} \varphi(h)$ függvény monoton növő, és $\varrho(0) = 0$. Ezen felül $\lim_{\alpha\searrow 0} \varrho(\alpha) = 0$, ugyanis legyen $\varepsilon' > 0$ tetszőleges. Ehhez létezik $\delta' > 0$, hogy ha $p_{U'}(h) \leq \delta'$, akkor $P_{V'}(\varphi(h)) < \varepsilon'$. Ha tehát $0 \leq \alpha < \delta'$, akkor $\varrho(\alpha) \leq \varrho(\delta') = \sup_{P_{U'}(h)\leq\delta'} \varphi(h) \leq \varepsilon'$.

Legyen $U = \left[p_{U'} < \delta\right]$. Ha $\alpha \in [0,1]$ és $h \in U$ olyan, hogy $h \in \alpha \cdot U = \left[p_{U'} < \alpha \cdot \delta\right] \subseteq \left[p_{U'} < \delta\right]$, akkor $\varphi(h) \leq \varrho\left(p_{U'}(h)\right)$, így ekkor $p_{V'}(\omega(h)) \leq p_{U'}(h) \cdot \varrho\left(p_{U'}(h)\right) < (\alpha \cdot \delta) \cdot \varrho(\alpha \cdot \delta)$. Tehát ha $h \in \alpha \cdot U$, akkor $\omega(h) \in \alpha \cdot \delta \cdot \varrho(\alpha \cdot \delta) \cdot V' \subseteq \alpha \cdot \delta \cdot \varrho(\alpha \cdot \delta) \cdot V$.

Legyen tehát $r\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+$, $r(\alpha) := \delta \cdot \varrho(\alpha \cdot \delta)$. Tehát tetszőleges $V \in \mathscr{T}_F(0_F)$ -hez találtunk olyan $U \in \mathscr{T}_E(0_E)$ kiegyensúlyozottat és olyan r-et, melyekre $U \subseteq D(\omega)$, $\lim_{\alpha\searrow 0} r(\alpha) = 0$ és $r(0) = 0$, és minden $\alpha \in [0,1]$ esetén ha $h \in U$ olyan, hogy $h \in \alpha \cdot U$, akkor $\omega(h) \in \alpha \cdot r(\alpha) \cdot V$. Tehát ω valóban kisordó a 29. definíció értelmében. □

37. következmény. *Ha E és F topologikus vektorterek, akkor az $f\colon E \rightarrowtail F$ függvény pontosan akkor F-differenciálható az $x \in \overset{\circ}{D}(f)$ pontban, ha ott a 31. definíció értelmében differenciálható.*

Az általános topologikus csoportokra a 14. definícióban megfogalmazott differenciálás fogalom tehát a Hyers által megadott, a 8. definícióban megtalálható F-differenciállal egyenértékű abban a speciális esetben, amikor a szóban forgó topologikus csoportok valós topologikus vektorterek. A 10. példa alapján a kommutatív topologikus csoportok esetére Michal által definiált M'-differenciál a topologikus vektorterek speciális esetében nem ekvivalens az F-differenciállal. Ennek következtében a 14. definícióban meghatározott derivált általános kommutatív topologikus csoportok esetén sem egyenértékű az M'-differenciállal.

3.6. Lie-csoportok

A Lie-csoportokon létezik egy a csoportműveletekhez illeszkedő sima sokaság struktúra, és ebből következően már van egy differenciálhatóság fogalom. Ebben a szakaszban azt vizsgáljuk meg, hogy hogyan viszonyul egymáshoz egy Lie-csoportból egy másik Lie-csoportba képező függvénynek a 14. definíció szerinti differenciálhatósága a Lie-csoportok sokaság struktúrája alapján értelmezett differenciálhatóságához, és hogy mi a kapcsolat a kétféle derivált között.

Legyen G Lie-csoport, $\mathfrak{g}$ a Lie-algebrája, és $\exp_G\colon \mathfrak{g} \to G$ az exponenciális leképezés. Létezik olyan $U \in \mathscr{T}_{\mathfrak{g}}(0_{\mathfrak{g}})$ nyílt, melyre $\exp_G\big|_U$ egy diffeomorfizmus U és $\exp_G\langle U\rangle \in \mathscr{T}_G(e_G)$ között. Ha $x, y \in U$ olyanok, hogy $\exp_G(x)\exp_G(y) \in \exp_G\langle U\rangle$, akkor

$$x * y := \left(\exp_G\big|_U\right)^{-1}\left(\exp_G(x)\exp_G(y)\right) \tag{3.44}$$

egy olyan kétváltozós műveletet ad U-n, amellyel ellátva U egy lokális Lie-csoport, és $\exp_G\big|_U$ egy lokális Lie-csoport izomorfizmust ad U és $\exp_G\langle U\rangle$ között. Létezik olyan $\mathscr{T}_{\mathfrak{g}}(0_{\mathfrak{g}}) \ni C_{\mathfrak{g}} \subseteq U$ nyílt környezet, hogy ha $x, y \in C_{\mathfrak{g}}$, akkor $x * y$ -t előállítja egy $\mathfrak{g}$ kommutátorának segítségével kifejezhető hatványsor. Ezt a hatványsort a Campbell–Baker–Hausdorff-formula adja meg, amelynek a Dynkin-féle alakja:

$$x * y = \sum_{\substack{n=1\\k=1}}^{\infty} \sum_{\substack{i_1+j_1+\cdots+i_k+j_k=n\\ i_1+j_1\geq 1\\ \vdots \\ i_k+j_k\geq 1}} \frac{(-1)^{k+1}}{k\cdot n}\cdot\frac{\left[x^{i_1}y^{j_1}\ldots x^{i_k}y^{j_k}\right]}{i_1!\,j_1!\cdots i_k!\,j_k!} \qquad x, y \in C_{\mathfrak{g}}, \tag{3.45}$$

ahol

$$\left[x^{i_1}y^{j_1}\ldots x^{i_k}y^{j_k}\right] = [\underbrace{x,[x,\ldots[x,}_{i_1}[\underbrace{y,[y,\ldots[y,}_{j_1}\ldots[\underbrace{x,[x,\ldots[x,}_{i_k}[\underbrace{y,[y,\ldots y}_{j_k}]]\ldots]]. \tag{3.46}$$

A Campbell–Baker–Hausdorff-formula a legfeljebb negyedrendű tagokig kiírva:

$$x * y = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \frac{1}{12}[x,[x,y]] - \frac{1}{12}[y,[x,y]] - \frac{1}{24}[y,[x,[x,y]]] + \ldots \tag{3.47}$$

Ha $x \in C_{\mathfrak{g}}$, akkor a (3.47) egyenletből leolvasható, hogy $x * x = x + x$, és x-nek a $*$ műveletre vonatkozó inverze $-x$. Továbbá ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $x, 2x, 3x, \ldots, (n-1)x \in C_{\mathfrak{g}}$, akkor $\underbrace{x * x * \cdots * x}_{n} = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n} = nx$.

38. lemma. *Legyen G Lie-csoport, és $\mathfrak{g}$ a Lie-algebrája. Ekkor minden $\mathscr{T}_{\mathfrak{g}}(0_{\mathfrak{g}}) \ni V \subseteq C_{\mathfrak{g}}$ -hez létezik olyan $\mathscr{T}_{\mathfrak{g}}(0_{\mathfrak{g}}) \ni U \subseteq V$ kiegyensúlyozott és $0 < \delta \leq 1$, hogy minden $x, y \in U$ és $0 < \alpha < \delta$ esetén $\frac{1}{\alpha}\left[(\alpha x) * (\alpha y)\right] \in V$, továbbá minden $x, y \in U$ esetén $x + y \in V$, és $\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\left[(\alpha x) * (\alpha y)\right] = x + y$.*

Bizonyítás. Rögzítsünk $\mathfrak{g}$-n egy $\|\cdot\|$ normát. Létezik $\delta' > 0$, hogy $B_{\delta'}(0_{\mathfrak{g}}) \subseteq V$. Legyen $U := B_{\delta'/3}(0_{\mathfrak{g}})$. Legyenek $x, y \in U$, ekkor $x + y \in B_{\delta'}(0_{\mathfrak{g}}) \subseteq V$ nyilvánvalóan teljesül. Legyen $0 < \alpha \leq 1$.

Ekkor

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{\alpha}\left[(\alpha x)*(\alpha y)\right]\right\| &= \\ &= \left\|\frac{1}{\alpha}\left[\alpha x+\alpha y+\frac{1}{2}\left[\alpha x,\alpha y\right]+\frac{1}{12}\left[\alpha x,\left[\alpha x,\alpha y\right]\right]-\frac{1}{12}\left[\alpha y,\left[\alpha x,\alpha y\right]\right]+\ldots\right]\right\| \leq \\ &\leq \left\|x\right\|+\left\|y\right\|+\alpha\cdot\left\|\frac{1}{2}\left[x,y\right]+\alpha\cdot\left(\frac{1}{12}\left[x,\left[x,y\right]\right]-\frac{1}{12}\left[y,\left[x,y\right]\right]\right)+\ldots\right\|. \end{aligned} \tag{3.48}$$

A normán belüli rész egy $C_{\mathfrak{g}}\times C_{\mathfrak{g}}$-n abszolút és lokálisan egyenletesen konvergens hatványsor, így $\overline{B}_{\delta'/3}(0_{\mathfrak{g}})\times\overline{B}_{\delta'/3}(0_{\mathfrak{g}})$-n egy $c>0$ konstanssal tetszőleges $0\leq\alpha\leq 1$ esetén fölülről becsülhető. Legyen $\delta:=\min\left\{\frac{\delta'}{3c},1\right\}$. Ekkor ha $0<\alpha<\delta$, akkor

$$\left\|\frac{1}{\alpha}\left[(\alpha x)*(\alpha y)\right]\right\|\leq\left\|x\right\|+\left\|y\right\|+\alpha\cdot c<\delta', \tag{3.49}$$

tehát $\frac{1}{\alpha}\left[(\alpha x)*(\alpha y)\right]\in B_{\delta'}(0_{\mathfrak{g}})\subseteq V$.

$$\left\|\frac{1}{\alpha}\left[(\alpha x)*(\alpha y)\right]-(x+y)\right\|=\alpha\cdot\left\|\frac{1}{2}\left[x,y\right]+\alpha\cdot\left(\frac{1}{12}\left[x,\left[x,y\right]\right]-\frac{1}{12}\left[y,\left[x,y\right]\right]\right)+\ldots\right\|\leq\alpha\cdot c\xrightarrow{\alpha\to 0}0, \tag{3.50}$$

így valóban tetszőleges $x,y\in U$ esetén $\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\left[(\alpha x)*(\alpha y)\right]=x+y$. □

39. állítás. *Legyenek G és H Lie-csoportok, Lie-algebráik rendre $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{h}$, továbbá legyen $\phi\colon C_{\mathfrak{g}}\rightarrowtail C_{\mathfrak{h}}$ olyan, hogy $D(\phi)\in\mathcal{T}_{\mathfrak{g}}(0_{\mathfrak{g}})$ kiegyensúlyozott. ϕ egy folytonos lokális csoporthomomorfizmus a $*$ szorzásra nézve akkor és csak akkor, ha létezik olyan $u\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ Lie-algebra morfizmus, melyre $u\big|_{D(\phi)}=\phi$.*

Bizonyítás. (I) Legyen $u\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ Lie-algebra morfizmus, melyre $u\big|_{D(\phi)}=\phi$. u lineáris, és $\mathfrak{g}$ véges dimenziós, így u folytonos, tehát ϕ is folytonos. Legyenek $x,y\in D(\phi)$ olyanok, hogy $x*y\in D(\phi)$. Ekkor

$$\begin{aligned}\phi(x*y)=u(x*y)&=u\left(x+y+\frac{1}{2}\left[x,y\right]+\frac{1}{12}\left[x,\left[x,y\right]\right]-\frac{1}{12}\left[y,\left[x,y\right]\right]+\ldots\right)= \\ &=u(x)+u(y)+u\left(\frac{1}{2}\left[x,y\right]\right)+u\left(\frac{1}{12}\left[x,\left[x,y\right]\right]\right)-u\left(\frac{1}{12}\left[y,\left[x,y\right]\right]\right)+\ldots= \\ &=u(x)+u(y)+\frac{1}{2}\left[u(x),u(y)\right]+\frac{1}{12}\left[u(x),\left[u(x),u(y)\right]\right]- \\ &\quad-\frac{1}{12}\left[u(y),\left[u(x),u(y)\right]\right]+\ldots=u(x)*u(y)=\phi(x)*\phi(y).\end{aligned} \tag{3.51}$$

Tehát ϕ valóban egy folytonos lokális csoporthomomorfizmus.

(II) Legyen ϕ egy folytonos lokális csoporthomomorfizmus. Ha $x\in D(\phi)$, és $p,q\in\mathbb{N}$ olyanok, hogy $\frac{p}{q}x\in D(\phi)$, akkor $D(\phi)$ kiegyensúlyozottsága miatt minden $1\leq k\leq\max\{p,q\}$ esetén

$\frac{k}{q}x \in D(\phi)$, és így ϕ lokális csoporthomomorfizmus volta miatt

$$\frac{p}{q}\cdot\phi(x) = \frac{p}{q}\cdot\phi\left(q\cdot\frac{1}{q}x\right) = \frac{p}{q}\cdot\phi\left(\underbrace{\left(\frac{1}{q}x\right)*\left(\frac{1}{q}x\right)*\cdots*\left(\frac{1}{q}x\right)}_{q}\right) =$$

$$= \frac{p}{q}\cdot\left[\underbrace{\phi\left(\frac{1}{q}x\right)*\phi\left(\frac{1}{q}x\right)*\cdots*\phi\left(\frac{1}{q}x\right)}_{q}\right] = \frac{p}{q}\cdot q\cdot\phi\left(\frac{1}{q}x\right) = p\cdot\phi\left(\frac{1}{q}x\right) =$$

$$= \underbrace{\phi\left(\frac{1}{q}x\right)*\phi\left(\frac{1}{q}x\right)*\cdots*\phi\left(\frac{1}{q}x\right)}_{p} = \phi\left(\underbrace{\left(\frac{1}{q}x\right)*\left(\frac{1}{q}x\right)*\cdots*\left(\frac{1}{q}x\right)}_{p}\right) = \phi\left(\frac{p}{q}x\right). \tag{3.52}$$

Legyenek $\alpha \in \mathbb{R}^+$ és $x \in D(\phi)$ olyanok, hogy $\alpha\cdot x \in D(\phi)$. Létezik olyan $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}^+$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ -re $r_n < \alpha$ és $\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha$. $D(\phi)$ kiegyensúlyozottsága miatt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $r_n \cdot x \in D(\phi)$, és így

$$\phi(\alpha\cdot x) = \phi\left(\lim_{n\to\infty} r_n x\right) = \lim_{n\to\infty}\phi(r_n\cdot x) = \lim_{n\to\infty} r_n\phi(x) = \alpha\cdot\phi(x). \tag{3.53}$$

Ha $\alpha\cdot x \in D(\phi)$, akkor $-\alpha\cdot x \in D(\phi)$, és így

$$\phi(-\alpha\cdot x) = -\phi(\alpha\cdot x) = -\alpha\cdot\phi(x). \tag{3.54}$$

Tehát tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ és $x \in D(\phi)$ esetén ha $\alpha\cdot x \in D(\phi)$, akkor $\phi(\alpha\cdot x) = \alpha\cdot\phi(x)$.

Belátjuk, hogy létezik olyan $\mathscr{T}_{\mathfrak{g}}(0_{\mathfrak{g}}) \ni U \subseteq D(\phi)$ kiegyensúlyozott, hogy minden $x, y \in U$ esetén $x + y \in D(\phi)$ és $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$. A 38. lemma alapján $C_{\mathfrak{h}}$-hoz létezik $\mathscr{T}_{\mathfrak{h}}(0_{\mathfrak{h}}) \ni U_{\mathfrak{h}} \subseteq C_{\mathfrak{h}}$ kiegyensúlyozott és $0 < \delta_{\mathfrak{h}} \leq 1$, hogy minden $x', y' \in U_{\mathfrak{h}}$ és $0 < \alpha < \delta_{\mathfrak{h}}$ esetén $\frac{1}{\alpha}\left[(\alpha x')*(\alpha y')\right] \in C_{\mathfrak{h}}$, továbbá minden $x', y' \in U_{\mathfrak{h}}$ esetén $x' + y' \in C_{\mathfrak{h}}$ és $\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\left[(\alpha x')*(\alpha y')\right] = x' + y'$. Legyen $\mathscr{T}_{\mathfrak{g}}(0_{\mathfrak{g}}) \ni V \subseteq \overset{-1}{\phi}\langle U_{\mathfrak{h}}\rangle$ kiegyensúlyozott. Ekkor a $\mathscr{T}_{\mathfrak{g}}(0_{\mathfrak{g}}) \ni V$-hez létezik $\mathscr{T}_{\mathfrak{g}}(0_{\mathfrak{g}}) \ni U \subseteq V$ kiegyensúlyozott és $0 < \delta_{\mathfrak{g}} \leq 1$, hogy minden $x, y \in U$ és $0 < \alpha < \delta_{\mathfrak{g}}$ esetén $\frac{1}{\alpha}\left[(\alpha x)*(\alpha y)\right] \in V$, továbbá minden $x, y \in U$ esetén $x + y \in V$ és $\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\left[(\alpha x)*(\alpha y)\right] = x + y$. Legyen $\delta := \min\{\delta_{\mathfrak{g}}, \delta_{\mathfrak{h}}\}$.

Ha $0 < \alpha < \delta \leq 1$ és $x, y \in U$, akkor $\frac{1}{\alpha}\left[(\alpha x)*(\alpha y)\right] \in V \subseteq D(\phi)$, így V kiegyensúlyozottsága miatt $(\alpha x)*(\alpha y) \in V \subseteq D(\phi)$, továbbá $\alpha x, \alpha y \in U \subseteq D(\phi)$, emiatt

$$\phi\left(\frac{1}{\alpha}\left[(\alpha x)*(\alpha y)\right]\right) = \frac{1}{\alpha}\cdot\phi\left((\alpha x)*(\alpha y)\right) = \frac{1}{\alpha}\left[\phi(\alpha x)*\phi(\alpha y)\right] = \frac{1}{\alpha}\left[(\alpha\cdot\phi(x))*(\alpha\cdot\phi(y))\right]. \tag{3.55}$$

$x, y \in U$, és ϕ folytonos, így a baloldal $\phi(x+y)$-hoz tart, ha α tart 0-hoz. $\phi(x), \phi(y) \in U_{\mathfrak{h}}$, ezért a jobboldal $\phi(x) + \phi(y)$-hoz tart, ha α tart 0-hoz.

Tehát tetszőleges $x, y \in U$ esetén $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$. Így ϕ egy folytonos lokális csoporthomomorfizmus a $(\mathfrak{g}, +)$ és $(\mathfrak{h}, +)$ kommutatív csoportok között, tehát a 30. állítás miatt egyértelműen létezik olyan $u\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ lineáris leképezés, hogy minden $\mathscr{T}_{\mathfrak{g}}(0_{\mathfrak{g}}) \ni U' \subseteq D(\phi)$ kiegyensúlyozott környezet esetén $u|_{U'} = \phi|_{U'}$. Speciálisan, mivel maga $D(\phi)$ is kiegyensúlyozott, $u|_{D(\phi)} = \phi|_{D(\phi)} = \phi$.

Most belátjuk, hogy u Lie-algebra morfizmus. Legyen $x,y \in U$ rögzített, és $0<\alpha\leq 1$ tetszőleges. Ekkor $\alpha x, \alpha y \in U$. Egyrészt

$$\begin{aligned}
&u\left(\frac{1}{\alpha^2}\left[(\alpha x)*(\alpha y)-\alpha x-\alpha y\right]\right)=\\
&=u\left(\frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\alpha x+\alpha y+\frac{1}{2}[\alpha x,\alpha y]+\frac{1}{12}[\alpha x,[\alpha x,\alpha y]]-\frac{1}{12}[\alpha y,[\alpha x,\alpha y]]+\dots\right)-\alpha x-\alpha y\right]\right)=\\
&=u\left(\frac{1}{2}[x,y]+\alpha\left[\frac{1}{12}[x,[x,y]]-\frac{1}{12}[y,[x,y]]+\dots\right]\right)=\\
&=\frac{1}{2}\cdot u([x,y])+\alpha\cdot u\left(\frac{1}{12}[x,[x,y]]-\frac{1}{12}[y,[x,y]]+\dots\right),
\end{aligned} \tag{3.56}$$

másrészt

$$\begin{aligned}
&u\left(\frac{1}{\alpha^2}\left[(\alpha x)*(\alpha y)-\alpha x-\alpha y\right]\right)=\frac{1}{\alpha^2}\left[u((\alpha x)*(\alpha y))-u(\alpha x)-u(\alpha y)\right]=\\
&=\frac{1}{\alpha^2}\cdot\phi((\alpha x)*(\alpha y))-\frac{1}{\alpha}\cdot u(x)-\frac{1}{\alpha}\cdot u(y)=\\
&=\frac{1}{\alpha^2}\left[\phi(\alpha x)*\phi(\alpha y)\right]-\frac{1}{\alpha}\cdot u(x)-\frac{1}{\alpha}\cdot u(y)=\\
&=\frac{1}{\alpha^2}\left[u(\alpha x)*u(\alpha y)\right]-\frac{1}{\alpha}\cdot u(x)-\frac{1}{\alpha}\cdot u(y)=\\
&=\frac{1}{\alpha^2}\left[(\alpha\cdot u(x))*(\alpha\cdot u(y))\right]-\frac{1}{\alpha}\cdot u(x)-\frac{1}{\alpha}\cdot u(y)=\\
&=\frac{1}{\alpha^2}\Big[\alpha\cdot u(x)+\alpha\cdot u(y)+\frac{1}{2}[\alpha\cdot u(x),\alpha\cdot u(y)]+\frac{1}{12}[\alpha\cdot u(x),[\alpha\cdot u(x),\alpha\cdot u(y)]]-\\
&\quad-\frac{1}{12}[\alpha\cdot u(y),[\alpha\cdot u(x),\alpha\cdot u(y)]]+\dots\Big]-\frac{1}{\alpha}\cdot u(x)-\frac{1}{\alpha}\cdot u(y)=\\
&=\frac{1}{2}[u(x),u(y)]+\alpha\left(\frac{1}{12}[u(x),[u(x),u(y)]]-\frac{1}{12}[u(y),[u(x),u(y)]]+\dots\right).
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Így a kettőt összevetve az $\alpha\to 0$ határátmenet után kapjuk, hogy $x,y\in U$ esetén

$$u([x,y])=[u(x),u(y)]. \tag{3.58}$$

Ha $x,y\in\mathfrak{g}$ tetszőleges, akkor U elnyelősége miatt léteznek $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ és $x',y'\in U$, hogy $x=\alpha x'$ és $y=\beta y'$. Így

$$\begin{aligned}
&u([x,y])=u([\alpha x',\beta y'])=\alpha\beta\cdot u([x',y'])=\\
&=\alpha\beta\cdot[u(x'),u(y')]=[u(\alpha x'),u(\beta y')]=[u(x),u(y)],
\end{aligned} \tag{3.59}$$

tehát u valóban Lie-algebra morfizmus. □

40. lemma. *Legyenek G és H Lie-csoportok, $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{h}$ a Lie-algebráik, $\|\cdot\|$ norma $\mathfrak{g}$-n, továbbá $\omega\colon(C_{\mathfrak{g}},*)\rightarrowtail(C_{\mathfrak{h}},*)$ olyan, hogy $0_{\mathfrak{g}}\in\mathring{D}(\omega)$. Ekkor ω pontosan akkor kisordó a 11. definíció értelmében, ha*

$$\lim_{h\to 0_{\mathfrak{g}}}\frac{\omega(h)}{\|h\|}=0_{\mathfrak{h}}. \tag{3.60}$$

Bizonyítás. ω-nak a 11. definíció szerinti kisordósága azt jelenti, hogy minden $\mathcal{T}_{\mathfrak{h}}(0_{\mathfrak{h}}) \ni V \subseteq C_{\mathfrak{h}}$ -hez van olyan $\mathcal{T}_{\mathfrak{g}}(0_{\mathfrak{g}}) \ni U \subseteq C_{\mathfrak{g}}$ és $N\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, melyekre $U \subseteq D(\omega)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{n} = +\infty$, és ha valamely $n \in \mathbb{N}$ -re $h \in U$ olyan, hogy minden $1 \le j \le n$ esetén $\underbrace{h * h * \cdots * h}_{j} \in U$, akkor minden $1 \le k \le N(n)$ esetén $\underbrace{\omega(h) * \omega(h) * \cdots * \omega(h)}_{k} \in V$. Mivel azonban $\underbrace{h * h * \cdots * h}_{j} = \underbrace{h + h + \cdots + h}_{j} = jh$ és $\underbrace{\omega(h) * \omega(h) * \cdots * \omega(h)}_{k} = \underbrace{\omega(h) + \omega(h) + \cdots + \omega(h)}_{k} = k\omega(h)$, így ez egyenértékű azzal, hogy az $\omega\colon (\mathfrak{g},+) \rightarrowtail (\mathfrak{h},+)$ függvény a 25. definíció értelmében kisordó, ami a 28. és 34. állítások következtében egyenértékű azzal, hogy $\lim_{h\to 0_{\mathfrak{g}}} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = 0_{\mathfrak{h}}$. □

41. lemma. *Legyenek G és H Lie-csoportok, $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{h}$ a Lie-algebráik, $u\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ lineáris, továbbá $\mu, \omega\colon C_{\mathfrak{g}} \rightarrowtail C_{\mathfrak{h}}$ olyanok, hogy $D(\omega) \cap D(\mu) \in \mathcal{T}_{\mathfrak{g}}(0_{\mathfrak{g}})$, és minden $h \in D(\omega) \cap D(\mu)$ esetén $u(h) * \omega(h) = u(h) + \mu(h)$. Ekkor μ kisordó akkor és csak akkor, ha ω kisordó.*

Bizonyítás. Vezessünk be $\mathfrak{g}$-n és $\mathfrak{h}$-n normát, melyeket az egyszerűség kedvéért egyformán $\|\cdot\|$-val fogunk jelölni.

(I) Legyen ω kisordó. $\lim_{h\to 0_{\mathfrak{g}}} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = 0_{\mathfrak{h}}$, így van olyan $\delta > 0$, hogy $B_\delta(0_{\mathfrak{g}}) \subseteq D(\omega) \cap D(\mu)$ és minden $h \in B_\delta(0_{\mathfrak{g}})$ esetén $\|\omega(h)\| \le \|u\| \cdot \|h\|$. Legyen $h \in B_\delta(0_{\mathfrak{g}}) \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$.

$$\begin{aligned} \mu(h) &= u(h) * \omega(h) - u(h) = \\ &= \omega(h) + \frac{1}{2}\big[u(h), \omega(h)\big] + \frac{1}{12}\big[u(h), \big[u(h), \omega(h)\big]\big] - \frac{1}{12}\big[\omega(h), \big[u(h), \omega(h)\big]\big] + \ldots \end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\mu(h)}{\|h\|}\right\| \le \left\|\frac{\omega(h)}{\|h\|}\right\| + \|h\| \cdot \Bigg\| &\frac{1}{2}\left[\frac{u(h)}{\|h\|}, \frac{\omega(h)}{\|h\|}\right] + \frac{1}{12}\left[\frac{u(h)}{\|h\|}, \left[\frac{u(h)}{\|h\|}, \omega(h)\right]\right] - \\ &- \frac{1}{12}\left[\frac{\omega(h)}{\|h\|}, \left[\frac{u(h)}{\|h\|}, \omega(h)\right]\right] + \ldots \Bigg\| \end{aligned} \tag{3.62}$$

A jobboldalon az első tag ω kisordó volta miatt tart $0_{\mathfrak{h}}$-hoz, ha h tart $0_{\mathfrak{g}}$-hez, a második tagban levő kifejezés korlátos, így $\|h\|$-val szorozva az is $0_{\mathfrak{h}}$-hoz tart, így μ is kisordó.

(II) Legyen μ kisordó. $\lim_{h\to 0_{\mathfrak{g}}} \frac{\mu(h)}{\|h\|} = 0_{\mathfrak{h}}$, így van olyan $\delta > 0$, hogy $B_\delta(0_{\mathfrak{g}}) \subseteq D(\omega) \cap D(\mu)$ és minden $h \in B_\delta(0_{\mathfrak{g}})$ esetén $\big\|\mu(h)\big\| \le \|u\| \cdot \|h\|$. Legyen $h \in B_\delta(0_{\mathfrak{g}}) \setminus \{0_{\mathfrak{g}}\}$.

$$\begin{aligned} \omega(h) &= \big(-u(h)\big) * \big(u(h) + \mu(h)\big) = \mu(h) + \frac{1}{2}\big[-u(h), u(h) + \mu(h)\big] + \\ &+ \frac{1}{12}\big[-u(h), \big[-u(h), u(h) + \mu(h)\big]\big] - \frac{1}{12}\big[u(h) + \mu(h), \big[-u(h), u(h) + \mu(h)\big]\big] + \ldots \end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\omega(h)}{\|h\|}\right\| \le \left\|\frac{\mu(h)}{\|h\|}\right\| + \|h\| \cdot \Bigg\| &\frac{1}{2}\left[\frac{-u(h)}{\|h\|}, \frac{u(h)}{\|h\|} + \frac{\mu(h)}{\|h\|}\right] + \frac{1}{12}\left[\frac{-u(h)}{\|h\|}, \left[\frac{-u(h)}{\|h\|}, u(h) + \mu(h)\right]\right] - \\ &- \frac{1}{12}\left[\frac{u(h)}{\|h\|} + \frac{\mu(h)}{\|h\|}, \left[\frac{-u(h)}{\|h\|}, u(h) + \mu(h)\right]\right] + \ldots \Bigg\| \end{aligned} \tag{3.64}$$

A jobboldalon az első tag μ kisordó volta miatt tart $0_{\mathfrak{h}}$-hoz, ha h tart $0_{\mathfrak{g}}$-hez, a második tagban levő kifejezés korlátos, így $\|h\|$-val szorozva az is $0_{\mathfrak{h}}$-hoz tart, így ω is kisordó. □

42. lemma. *Legyenek G és H Lie-csoportok, $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{h}$ a Lie-algebráik. Legyen $f\colon \left(C_{\mathfrak{g}},*\right) \rightarrowtail \left(C_{\mathfrak{h}},*\right)$ olyan, hogy $0_{\mathfrak{g}} \in \overset{\circ}{D(f)}$ és $f(0_{\mathfrak{g}}) = 0_{\mathfrak{h}}$. f pontosan akkor differenciálható $0_{\mathfrak{g}}$-ben a 14. definíció értelmében, ha ott mint vektorérből vektortérbe képező függvény differenciálható, és a deriváltja egy Lie-algebra morfizmus.*

Bizonyítás. (I) Legyen f differenciálható $0_{\mathfrak{g}}$-ben a 14. definíció értelmében, és legyen $\phi\colon C_{\mathfrak{g}} \rightarrowtail C_{\mathfrak{h}}$ egy olyan deriváltja, melyre $D(\phi)$ kiegyensúlyozott. Ekkor a 39. állítás következtében létezik olyan $u\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ Lie-algebra morfizmus, melyre $\phi\big|_{D(\phi)} = u\big|_{D(\phi)}$. f differenciálhatósága miatt

$$\omega(h) := \left(-\phi(h)\right) * \left(-f(0_{\mathfrak{g}})\right) * f\left(0_{\mathfrak{g}} * h\right) = \left(-\phi(h)\right) * f(h), \qquad h \in D(\phi) \cap D(f) \tag{3.65}$$

kisordó. Legyen

$$\mu(h) := f(0_{\mathfrak{g}} + h) - f(0_{\mathfrak{g}}) - u(h) = f(h) - u(h), \qquad h \in D(f). \tag{3.66}$$

Ekkor minden $h \in D(\mu) \cap D(\omega) = D(\phi) \cap D(f)$ esetén

$$u(h) * \omega(h) = \phi(h) * \left(-\phi(h)\right) * f(h) = f(h) = u(h) + \mu(h), \tag{3.67}$$

így ω kisordó volta miatt a 42. lemma következtében μ is kisordó. Tehát f mint vektortérből vektortérbe képező függvény differenciálható $0_{\mathfrak{g}}$-ben, és a deriváltja u Lie-algebra morfizmus.

(II) Legyen f mint vektortérből vektortérbe képező függvény differenciálható $0_{\mathfrak{g}}$-ben, és a deriváltja legyen u Lie-algebra morfizmus. Ekkor

$$\mu(h) := f(0_{\mathfrak{g}} + h) - f(0_{\mathfrak{g}}) - u(h) = f(h) - u(h), \qquad h \in D(f) \tag{3.68}$$

kisordó. Legyen

$$\omega(h) := (-u(h)) * \left(-f(0_{\mathfrak{g}})\right) * f\left(0_{\mathfrak{g}} * h\right) = (-u(h)) * f(h), \qquad h \in D(f) \cap \left(-\overset{-1}{u}\langle C_{\mathfrak{h}}\rangle\right). \tag{3.69}$$

Ekkor minden $h \in D(\mu) \cap D(\omega)$ esetén

$$u(h) * \omega(h) = \phi(h) * \left(-\phi(h)\right) * f(h) = f(h) = u(h) + \mu(h), \tag{3.70}$$

így μ kisordó volta miatt a 42. lemma következtében ω is kisordó. Mivel $u\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ egy Lie-algebra morfzmus, így ha $\mathscr{T}_{\mathfrak{g}}(0_{\mathfrak{g}}) \ni U \subseteq C_{\mathfrak{g}}$ kiegyensúlyozott, akkor a 39. állítás következtében $u\big|_U\colon \left(C_{\mathfrak{g}},*\right) \rightarrowtail \left(C_{\mathfrak{h}},*\right)$ egy lokális csoporthomomorfizmus. Tehát f differenciálható $0_{\mathfrak{g}}$-ben a 14. definíció értelmében, és $u\big|_U$ derváltja lesz f-nek $0_{\mathfrak{g}}$-ben. □

Ha G Lie-csoport, és $\mathfrak{g}$ a Lie-algebrája, akkor legyen $\log_G := \left(\exp_G\big|_{C_{\mathfrak{g}}}\right)^{-1}$. Ha $f\colon G \rightarrowtail H$ a sima sokaságstruktúra értelmében differenciálható az $x \in \overset{\circ}{D(f)}$ pontban, akkor az x pontbeli érintőleképezése (deriváltja) $T_x f\colon T_x G \to T_{f(x)} H$ az érintőterek között egy lineáris leképezés. Az e_G-beli $T_{e_G} G$ érintőtér azonosítható $\mathfrak{g}$-vel. Ha $g \in G$, akkor az $L_g\colon G \to G$, $L_g(x) = gx$ baleltolás és $R_g\colon G \to G$, $R_g(x) = xg$ jobbeltolás diffeomorfizmusok.

43. lemma. *Legyenek G és H Lie-csoportok, $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{h}$ a Lie-algebráik, és $f: G \rightarrowtail H$ olyan, hogy $e_G \in \overset{\circ}{D(f)}$ és $f(e_G) = e_H$. f differenciálható e_G-ben a 14. definíció értelmében akkor és csak akkor, ha a sima sokaságstruktúra értelmében differenciálható az e_G-ben, és $T_{e_G} f: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ Lie-algebra morfizmus. Ebben az esetben $\exp_H \circ T_{e_G} f \circ \log_G$ a 14. definíció értelmében vett deriváltja lesz f-nek e_G-ben.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $D(f) \subseteq \exp_G \langle C_\mathfrak{g} \rangle$. Ha f bármelyik értelemben differenciálható e_G-ben, akkor ott folytonos is, így az is feltehető, hogy $R(f) \subseteq \exp_H \langle C_\mathfrak{h} \rangle$. Legyen $\hat{f} := \log_H \circ f \circ \exp_G: \mathfrak{g} \rightarrowtail \mathfrak{h}$. Ekkor $f = \exp_H \circ \hat{f} \circ \log_G$. Mivel $\exp_G$ és $\exp_H$ lokális topologikus csoportizomorfizmusok, ezért f pontosan akkor differenciálható a 14. definíció értelmében az e_G-ben, ha $\hat{f}$ is differenciálható ugyanilyen értelemben a $0_\mathfrak{g}$-ben, és a deriváltak közötti kapcsolatot a 20. lemma adja meg. A 42. lemma következtében viszont $\hat{f}$ pontosan akkor differenciálható a 14. definíció értelmében a $0_\mathfrak{g}$-ben, ha ott mint vektortérből vektortérbe képező függvény differenciálható, és a deriváltja $T_{0_\mathfrak{g}} \hat{f}$ egy Lie-algebra morfizmus. Továbbá ekkor $T_{0_\mathfrak{g}} \hat{f}$ a 14. definíció értelmébeni deriváltja lesz $\hat{f}$-nek $0_\mathfrak{g}$-ben. $\exp_G$ és $\exp_H$ lokális diffeomorfizmusok, így f pontosan akkor differenciálható a sima sokaságstruktúra értelmében az e_G-ben, ha $\hat{f}$ mint vektortérből vektortérbe képező függvény differenciálható $0_\mathfrak{g}$-ben, és a deriváltak között fennáll $T_{e_G} f = T_{0_\mathfrak{h}} \exp_H \circ T_{0_\mathfrak{g}} \hat{f} \circ T_{e_G} \log_G = \mathrm{id}_\mathfrak{h} \circ T_{0_\mathfrak{g}} \hat{f} \circ \mathrm{id}_\mathfrak{g} = T_{0_\mathfrak{g}} \hat{f}$. Tehát $\Phi := \exp_H \circ T_{e_G} f \circ \log_G$ a 14. definíció értelmébeni deriváltja lesz f-nek e_G-ben. □

44. tétel. *Legyenek G és H Lie-csoportok, $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{h}$ a Lie-algebráik, valamint $f: G \rightarrowtail H$ és $x \in \overset{\circ}{D(f)}$. f differenciálható x-ben a 14. definíció értelmében akkor és csak akkor, ha a sima sokaságstruktúra értelmében differenciálható az x-ben, és $T_{f(x)} L_{f(x)^{-1}} \circ T_x f \circ T_{e_G} L_x: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ Lie-algebra morfizmus (vagy ami ezzel egyenértékű: $T_{f(x)} R_{f(x)^{-1}} \circ T_x f \circ T_{e_G} R_x: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ Lie-algebra morfizmus). Ebben az esetben*

$$\Phi_R := \exp_H \circ T_{f(x)} L_{f(x)^{-1}} \circ T_x f \circ T_{e_G} L_x \circ \log_G \tag{3.71}$$

a 14. definíció értelmében vett jobboldali deriváltja,

$$\Phi_L := \exp_H \circ T_{f(x)} R_{f(x)^{-1}} \circ T_x f \circ T_{e_G} R_x \circ \log_G \tag{3.72}$$

pedig baloldali deriváltja lesz f-nek x-ben.

Bizonyítás. Legyen $\tilde{f}_R(h) := f(x)^{-1} f(xh)$, azaz $\tilde{f}_R = L_{f(x)^{-1}} \circ f \circ L_x$. A 21. lemma alapján f pontosan akkor differenciálható jobbról x-ben a 14. definíció értelmében, ha $\tilde{f}_R$ jobbról differenciálható e_G-ben, és a jobboldali deriváltak halmaza megegyezik. Viszont a 43. lemma következtében $\tilde{f}_R$ pontosan akkor differenciálható e_G-ben a 14. definíció értelmében, ha ott a sima sokaságstruktúra értelmében differenciálható, és $T_{e_G} \tilde{f}_R = T_{f(x)} L_{f(x)^{-1}} \circ T_x f \circ T_{e_G} L_x$ Lie-algebra morfizmus. Továbbá $\Phi_R = \exp_H \circ T_{f(x)} L_{f(x)^{-1}} \circ T_x f \circ T_{e_G} L_x \circ \log_G$ jobboldali deriváltja $\tilde{f}_R$-nek e_G-ben, így jobboldali deriváltja f-nek x-ben. A baloldali deriváltra vonatkozó összefüggés a 22. lemmának az $\tilde{f}_L = R_{f(x)^{-1}} \circ f \circ R_x$ függvényre történő alkalmazásából hasonlóan adódik. □

4. fejezet

Összegzés

A diplomamunkámban a Fréchet-differenciál topologikus csoportokra és topologikus vektorterekre történő általánosításaival foglalkoztam. Áttekintettem a topologikus vektorterekre vonatkozó, az irodalomban fellelhető általánosítások közül az F-differenciál, az M- és az M'-differenciál fogalmát. Ezek közül az M'-differenciálnak létezik kommutatív topologikus csoportokra történő általánosítása, majd általános topologikus csoportokra történő olyan általánosítása, amelynél a derivált értelmezési tartománya a kiindulási tér centruma.

Definiáltam a Fréchet-differenciál egy általánosítását általános topologikus csoportokra. Nemkommutatív csoportok esetén külön jobb- és baloldali differenciálhatóságot kellett bevezetni, amelyekről azonban beláttam, hogy ekvivalensek, és megadtam a jobboldali és a baloldali deriváltak közötti kapcsolatot. Beláttam, hogy kommutatív csoportok esetén differenciálható függvények kompozíciója is differenciálható, és a deriváltak kompozíciója a kompozíciónak deriváltja lesz.

Ezen differenciálhatóság fogalomnak megadtam egy ekvivalens átfogalmazását valós topologikus vektorterek esetére, amelynek segítségével megmutattam, hogy ebben az esetben a derivált egyértelmű, megadtam folytonos multilineáris leképezések deriváltját, és beláttam, hogy a normált terek esetében a Fréchet-differenciálhatóságot kapjuk vissza. Megmutattam továbbá, hogy ez a differenciálhatóság fogalom valós topologikus vektorterek esetén ekvivalens az F-differenciálhatóságal, és ennek következményeként adódott, hogy kommutatív topologikus csoportok esetén viszont nem ekvivalens az M'-differenciállal.

Abban a speciális esetben, amikor a szóban forgó topologikus csoportok Lie-csoportok, megmutattam, hogy mi a kapcsolat az általam definiált differenciálhatóság és a Lie-csoportok differenciálható sokaság struktúrájából adódó differenciálhatóság fogalma között.

Topologikus csoportok esetén mutattam példát arra az esetre, amikor a derivált nem lényegében egyértelmű. További érdekes vizsgálati téma lehet, hogy milyen feltételek teljesülése esetén lesz a derivált lényegében egyértelmű, továbbá nemkommutatív topologikus csoportok esetén milyen feltételek mellett lehet differenciálható függvények kompozíciójának differenciálhatóságát bizonyítani.

Irodalomjegyzék

[1] KRISTÓF JÁNOS, *A matematikai analízis elemei I–IV.*, ELTE–TTK, Egyetemi jegyzet.

[2] A. D. MICHAL, *Differential calculus in linear topological spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 24:340, 1938.

[3] D. H. HYERS, *Linear topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 51:1, 1945.

[4] D. H. HYERS, *A generalization of Fréchet's differential*, Revista Ci., Lima 47:645, 1945.

[5] D. H. HYERS, *Pseudo-normed linear spaces and abelian groups*, Duke Math. J. 5:628, 1939.

[6] A. D. MICHAL, *Differentials of functions with arguments and values in topological abelian groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 26:356, 1940.

[7] A. D. MICHAL, *First order differentials of functions with arguments and values in topological Abelian groups*, Revista Ci., Lima 47:389, 1945.

[8] K. MILLSAPS, *Differential calculus in topological groups. I.*, Revista Ci., Lima 44:485, 1942.

[9] K. MILLSAPS, *Differential calculus in topological groups. II.*, Revista Ci., Lima 45:45, 1943.

[10] G. A. REID, *A theory of distributions for locally compact Abelian groups and compact groups*, Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser. 16:415, 1966.