Eötvös Loránd Tudomány Egyetem
Természet Tudományi Kar



**Juhász Máté Lehel**

matematikus szak


# Kévekohomológiák

Szakdolgozat


Témavezető:

**Némethi András**

egyetemi tanár



Budapest, 2009

Tartalomjegyzék

**Összefoglaló**

A szakdolgozat a kévekohomológiákról szól. Ezek az objektumok az algebrai geometriában és sok más helyen is használt technikai eszközök, amelyekkel össze lehet kapcsolni matematikai struktúrák lokális és globális tulajdonságait. Ez a szakdolgozat szándékaim szerint egy első lépés volna algebrai geometriai tanulmányaim irányában.

Áttekintem magának a kévéknek és a kévekohomológiának a definícióját, tulajdonságait és alkalmazását.

A kévéket definiálom, és bevezetek azokon néhány konstrukciót, mint például a szorzat kévét, illetve kéveleképezések magját.

Ezután rátérek a Godement által bevezetett kévekohomológia leírására, és összevetem néhány ismertebb kohomológiaelmélettel, többek közt a de Rham, a Čech és a Dolbeault kohomológiával. Bemutatom az általános de Rham tétel segítségével, hogy ezek megfelelő feltételek mellett ugyanazokat a struktúrákat hozzák létre.

A harmadik fejezetben néhány nagyon alapvető egzakt sort tekintek át. Végül teszek egy kísérletet a kohomológiaelmélet alkalmazására. Megmutatok néhány érdekes összefüggést a Cousin problémák, a divizorok és az algebrai görbék kapcsán. Mindezeknek az eddig felvázolt kévekohomológiák elmélete fog utat nyitni.

Szeretném megköszönni Némethi Andrásnak a szakdolgozat megírásában nyújtott segítségét, türelmét és útmutatásait.

# 1. Kévék

## 1.1. Kévetípusok, kévetulajdonságok

### 1.1.1. Kontravariáns funktorok, előkévék

Legyen $X$ egy topologikus tér, és legyen $\mathfrak{O}_X$ a nyílt halmazainak rendszere! Szeretnénk minden $U \in \mathfrak{O}_X$ nyílt részhalmazhoz valamiféle struktúrát rendeli, miközben bármely két nyílt halmaz között érvényben van egyfajta „kompatibilitás”. Természetesen ez akkor érdekes, ha a két halmaz nem diszjunkt.

Jelöljük az $X$-nek egy $U$ nyílt részhalmazához rendelt struktúráját $\mathcal{F}(U)$-val! Legyen továbbá $V \subseteq U$ két nyílt halmaz $X$-ben! Azt szeretnénk, hogy ekkor legyen egyfajta „megszorítási” művelet $\mathcal{F}(U)$-ról $\mathcal{F}(V)$-re. Természetesnek látszik feltenni, hogy ha $U = V$, akkor a megszorítás identikus legyen, illetve ha adott egy köztes $V \subseteq W \subseteq U$ nyílt részhalmaz, akkor ha először $W$-re szorítunk meg, azután $V$-re, akkor ugyanazt nyerjük, mintha először is $V$-re szorítottunk volna meg.

Ezek a tulajdonságok szorosan összefüggenek egy kategóriában a morfizmusok kompozíciójára vonatkozó tulajdonságokkal, amik az előkévék kategóriaelméleti definícióját fogják megalapozni. A struktúrák és a megszorítások egy megfelelően választott kategória objektumai és morfizmusai lesznek.

Először ellátjuk $\mathfrak{O}_X$-et egy kategória-struktúrával. Legyenek $X$ nyílt halmazai $\mathfrak{O}_X$ objektumai, és ha $V \subseteq U$ két nyílt részhalmaza $X$-nek, akkor értelmezzünk egy $\rho^U_V$ morfizmust $V$-ről $U$-ra! Tegyük fel továbbá, hogy $\rho^U_U$ az identikus morfizmus $U$-ról $U$-ra, és $V \subseteq W \subseteq U$ esetén $\rho^U_W \circ \rho^W_V = \rho^U_V$!

Ezek után ha rögzítünk egy $\mathcal{C}$ kategóriát, akkor $X$-en *előkévének* egy $\mathcal{F} : \mathfrak{O}_X \to \mathcal{C}$ kontravariáns funktort tekintünk. A rövidség kedvéért $\mathcal{F}(\rho^V_U)$-t is $\rho^V_U$-vel fogom jelölni.

Másként fogalmazva, ha $V \subseteq W \subseteq U$ nyílt részhalmazai $X$-nek, és a megszorítási műveleteket $*|_V$-vel jelöljük (klasszikus analízisből vett megszokásként nem jelölve, hogy honnét megy a megszorítás), akkor a következők teljesülnek:

- bármely $x \in \mathcal{F}(U)$-ra $x|_U = x$;

- ha $x \in \mathcal{F}(U)$, akkor $(x|_W)|_V = x|_V$ (ahol a bal oldalon a $V$-re való megszorítás $\mathcal{F}(W)$-ről, a jobb oldalon $\mathcal{F}(U)$-ról megy).

Ha $F$ és $G$ két előkéve ugyanazon $M$ topologikus tér felett, akkor lehet beszélni a két előkéve közötti előkévemorfizmusokról.

Egy $f$ leképezést előkévemorfizmusnak hívunk, ha minden $U \subseteq M$ nyílthoz adott egy $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ morfizmus a kategóriából, és szükséges, hogy ezek kompatibilisak legyenek a megszorításokkal. Ez azt jelenti, hogy ha adottak $V \subseteq U$ nyílt részhalmazai $M$-nek, akkor az $f_U$ és $f_V$ leképezések kompatibilisak a $|_V$ megszorításokkal, azaz a

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

diagramm kommutatív. Ez röviden azt jelenti, hogy az $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ egy természetes leképezés a két előkéve mint funktor közt.

Elképzelhető, hogy ha adott egy $U_i$ fedése $X$-nek, és két szelés $X$-en, $s$ és $t$, akkor $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ minden $i$-re, de $s \neq t$. Elképzelhető továbbá az is, hogy adott $X$-nek egy $U_i$ fedése, minden $U_i$-n egy $s_i$ szelés úgy, hogy páronként kompatibilisak (azaz $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$), mégsem létezik olyan globális szelés, aminek $U_i$-re vett megszorításai éppen $s_i$-k lennének.

Azokat az előkévéket, amik ilyen jelenségeket nem mutatnak, kévének hívjuk. Ezeken bármely szelést egyértelműen meghatároz az összes megszorítása. Egy nagyon általános eszközzel fogom megfogalmazni ezt a tulajdonságot precízen.

Először is nem csak az $X$-en, hanem annak tetszőleges $U$ részhalmazán fogom tekinteni a ragasztási axiómát. Legyen $U_i$ ennek az $U$ nyílt halmaznak egy fedése! Ha minden $U_i$-hez veszek azon egy szelést, akkor ez nem más, mint a $\prod_i \mathcal{F}(U_i)$ szorzat egy eleme. Legyen tehát $(s_i) \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$!

Az a feltétel, hogy $s_i$ és $s_j$ kompatibilis, úgy fogalmazható, hogy

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Ez tehát két leképezés, az egyik $\mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$, a másik $\mathcal{F}(U_j) \to \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$. Egy pillanatra tekintsük az elsőt: bármely $i$-hez az $\mathcal{F}(U_i)$ elemeihez hozzá tudom rendelni $\mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ egy-egy elemét, $j$ tetszőleges választása esetén. Szeretném ezt az összes $j$-re vizsgálni, és $\mathcal{F}(U_i)$-hez egyszerre hozzárendelni egy-egy elemet $\mathcal{F}(U_i \cap U_j)$-ből minden $j$-re. Ekkor egy

$$\mathcal{F}(U_i) \to \prod_l \mathcal{F}(U_i \cap U_l)$$

típusú leképezést nyerek. Azaz

$$s_i \in \mathcal{F}(U_i) \to (s_i|_{U_i \cap U_l}) \in \prod_l \mathcal{F}(U_i \cap U_l)$$

lesz a hozzárendelés. Hasonlóan, ha a második leképezésből indulok ki,

$$s_j \in \mathcal{F}(U_j) \to (s_j|_{U_k \cap U_j}) \in \prod_k \mathcal{F}(U_k \cap U_j)$$

lesz a leképezés.

Ekkor az első leképezést tekintve minden $s_i$-hez hozzárendeltem az összes $U_l$-re való megszorítását. Ahhoz, hogy a két leképezést össze tudjam vetni, az összes $U_i$-ra kell ezt tekintenem. Ha minden $U_i$-hez rendelek egy-egy $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ szelést, akkor azokhoz minden lehetséges $(i, l)$ rendezett pár esetén meg fogok adni egy-egy $\mathcal{F}(U_i \cap U_l)$ szelést. Ez tehát egy kettős produktum lesz:

$$(s_k)_k \in \prod_k \mathcal{F}(U_k) \to (s_k|_{U_k \cap U_l})_{(k,l)} \in \prod_k \prod_l \mathcal{F}(U_k \cap U_l).$$

Ugyanezt megcsinálhatjuk a második leképezésre is:

$$(s_l)_l \in \prod_l \mathcal{F}(U_l) \to (s_l|_{U_k \cap U_l})_{(k,l)} \in \prod_l \prod_k \mathcal{F}(U_k \cap U_l).$$

A két leképezés forrása izomorf struktúra, a produktumok pedig (izomorfia erejéig) felcserélhetők. Tehát egy

$$(s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$$

szelés-rendszerhez egyfelől hozzárendelhetjük az

$$(s_k|_{U_k\cap U_l})_{(k,l)} \in \prod_{k,l} \mathcal{F}(U_k \cap U_l)$$

elemet, másfelől az

$$(s_l|_{U_k\cap U_l})_{(k,l)} \in \prod_{k,l} \mathcal{F}(U_k \cap U_l)$$

elemet. Az, hogy az $(s_i)_i$ rendszer páronként kompatibilis elemekből áll, éppen azt jelenti, hogy ez a két leképezés ugyanazt rendeli hozzá. Ezek pedig a két leképezés *ekvalizátorának* elemei.

Az a tulajdonság, hogy az $F$ előkéve kéve, két dolgot jelent: egyfelől bármelyik $U$ halmazra, $U_i$ fedésére $U$-nak, továbbá $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ páronként kompatibilis elemekre létezik egy *ragasztásuk* $U$-n, másfelől ha $s, t \in \mathcal{F}(U)$ szelések, akkor ha az $U_i$-kre vett megszorításaik egyenlők, akkor maguk is egyenlők. Ez utóbbi azt jelenti, hogy az az

$$\mathcal{F}(U) \to \prod_i \mathcal{F}(U_i)$$

leképezés, ami minden $s \in \mathcal{F}(U)$-hoz $(s|_{U_i})_i \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$-t rendeli, injektív. Az első pedig azt jelenti, hogy a

$$\prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{(j,k)} \mathcal{F}(U_j \cap U_k)$$

leképezés-pár ekvalizátorában lévő elemek előállnak, mint a $\mathcal{F}(U) \to \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ leképezés képe.

Az $X$ topologikus téren értelmezett, $\mathcal{C}$ értékű *kéve* definíciója egy olyan $\mathcal{F}$ előkéve, melyre a

$$\mathcal{F}(U) \to \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{(j,k)} \mathcal{F}(U_j \cap U_k)$$

leképezésekre a bal oldali a jobb oldali pár ekvalizátora. Ezt az elvárást *ragasztási axiómának* hívjuk.

Az axióma egyik nem-triviális következménye, hogy $\mathcal{F}(\emptyset)$ a kategória végobjektuma. Ez halmazok és tetszőleges algebrai struktúra esetén az egy elemű halmaz.

### 1.1.2. Csírák és rostok, lokális homeomorfizmusok, étale terek

Tekintsünk egy $X$ Hausdorff-féle topologikus teret és felette egy $\mathcal{F}$ kévét! Legyen egy $x \in X$ pont rögzítve, és szeretnénk leírni efelett az $x$ pontbeli csírákat! Az $x$-beli csírák olyan $(U, s)$ párok ekvivalencia-osztályai, hogy $U$ egy $x$-et tartalmazó nyílt részhalmaza az $X$-nek, $s$ pedig egy szelés $U$ felett. Két ilyen párt, $(U, s)$-et és $(V, t)$-t azonosítunk, ha $x$ közelében azonosak. Azaz létezik $x$-nek egy $W \subseteq U \cap V$ környezete, hogy $s|_W = t|_W$. Ilyenkor ugyanis $(U, s) \sim (W, s|_W) = (W, t|_W) \sim (V, t)$.

Tekinthetjük úgy, hogy az $(U, s)$ elemek egy rögzített $U$-ra éppen $\mathcal{F}(U)$ elemei, és ha $W \subseteq U$ nyílt környezet, akkor lehet venni a $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(W)$ leképezést, ami egy $(U, s)$ elemhez éppen $(W, s|_W)$-t fogja rendelni. Ezután a szükséges azonosításokat a *direkt limesz* segítségével valósíthatjuk meg:

$$\mathcal{F}_x = \lim_U \operatorname{ind} \mathcal{F}(U).$$

Ezt az objektumot az $x$ *rostjának* hívjuk, elemeit pedig a szelések $x$-beli *csíráinak*.

Vehetjük egy $\mathcal{F}$ kévének a rostjainak a diszjunkt unióját, amit $\tilde{\mathcal{F}}$-fel jelölünk. Létezik továbbá egy természetes $\pi$ leképezés $\tilde{\mathcal{F}}$-ről $X$-re, ami $\mathcal{F}_x$ elemeihez $x$-et rendeli. Viszont az így nyert struktúra nem mutatja meg, hogy a csírák hogyan ragadnak össze. Ehhez értelmezni lehet természetes módon egy topológiát.

Ha adott egy $s \in \mathcal{F}(U)$ szelés valamilyen $U$ nyílton, akkor bármilyen $x \in X$-hez lehet venni az $s$-nek a csíráját $x$-ben, azaz $(U, s)$ ekvivalencia-osztályát a roston. Ezt $s(x)$-szel fogom jelölni. Legyen $\tilde{\mathcal{F}}$-nek a topológiája az a *legfinomabb* topológia, hogy ezek az $x \to s(x)$ leképezések folytonosak legyenek! A $\tilde{\mathcal{F}}$-et ezzel a topológiával az $\mathcal{F}$ kéve *étale*-terének hívjuk.

Ha tekintünk egy ilyen $U$ nyíltat, és fölötte egy $s$ szelést, akkor $s(U)$ nyílt lesz, hiszen ha $V$ nyílt, fölötte $t$ szelés, akkor $t^{-1}(s(U))$ azon $x \in U \cap V$-kből fog állni, ahol $t(x) = s(x)$. Az, hogy $t(x) = s(x)$, azt jelenti, hogy létezik egy $W$ nyílt környezete $x$-nek, ahol $t|_W = s|_W$. Ekkor pedig nyilván $W$ összes $y$ pontjára $t(y) = s(y)$ lesz. Tehát $x$ benne lesz $t^{-1}(s(U))$ belsejében. Ez azt jelenti, hogy a $\pi$ leképezés lokális homeomorfizmus.

Ennek fényében egy másik oldalról fogjuk megközelíteni a kévék fogalmát.

Legyen tehát $\pi : \tilde{\mathcal{F}} \to X$ egy folytonos lokális homeomorfizmus! Ekkor tekinthetjük azt az előkévét, ami az $U \subseteq X$ nyílt halmazhoz az $U$ feletti széléseket tartalmazza. Ezt az előkévét $\mathcal{C}(\tilde{\mathcal{F}})$-fel fogom jelölni ebben a részben.

**Állítás:** $\mathcal{C}(\tilde{\mathcal{F}})$ teljesíteni fogja a ragasztási axiómát, az étale tere izomorf lesz $\tilde{\mathcal{F}}$-fel. Ha $\tilde{\mathcal{F}}$ egy előkéve étale tere, akkor létezik $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{C}(\tilde{\mathcal{F}})(U)$ természetes leképezések családja, amik pontosan akkor létesítenek izomorfizmust, ha $\mathcal{F}$ teljesíti a ragasztási axiómát.

Ugyanis ha $\mathcal{C}(\tilde{\mathcal{F}})$-fel jelöljük a szelések előkévéjét, akkor ennek az $x \in X$ feletti rostja izomorf lesz $\pi^{-1}(X)$-szel, mivel $\pi$ lokális homeomorfizmus. Továbbá ha $V$ környezete az $a \in \tilde{\mathcal{F}}$-nek, akkor lesz olyan $U$ környezete $a$-nak, amire a $\pi$ homeomorfizmust létesít, és így a $(\pi|_U)^{-1}$ egy szelés lesz. Tehát a $V$-nek megfelelő halmaz $\tilde{\mathcal{C}}(\tilde{\mathcal{F}})$-ben úgyszintén környezete lesz $a$-nak. Az, hogy $\tilde{\mathcal{C}}(\tilde{\mathcal{F}})$ nyílt halmazai nyíltnak felelnek meg $\tilde{\mathcal{F}}$-ben, a definícióból triviális.

Legyen most adott egy $F$ előkéve, és tekintsük a $\mathcal{C}(\tilde{F})$ kévét! A leképezés legyen az, ami egy $s \in F(U)$-hoz azt a szelést rendeli, ami $x \in U$-hoz az $s(x) \in F_x$-et rendeli! Ha ez a leképezés izomorfizmus, akkor $F$ nyilván kéve. Tegyük fel most, hogy $F$ kéve, és legyen $\sigma$ egy szelése $U$ felett $\tilde{F}$-nek! Mivel minden $x \in U$-ra ekkor $\sigma(x)$ reprezentálható egy $(s_x, V)$ halmazpárral, ezeknek a ragasztása lesz a $\sigma$.

Tudjuk azt is, hogy $\sigma$ folytonos, ezért bárhogyan választunk egy $s$ szelést és $U \subseteq X$ nyíltat, az $\{s(x) \mid x \in U\}$-nak $\sigma$ szerinti ősképe is nyílt. Tehát azok az $x$-ek, hogy $s(x) = \sigma(x)$, egy nyílt halmazt alkotnak. Ez nyilván a fenti $s_x$-ekre is igaz, az $U_x := \{y \mid s_x(y) = \sigma(y)\}$ halmaz nemüres és nyílt.

Ekkor pedig az $s_x|_{U_x}$ szelések kompatibilisak, és egyértelműen létezik a ragasztásuk, ami $\sigma$ ősképe lesz. Azért lesznek kompatibilisak, mert ha $s_x|_{U_x \cap U_y} \neq s_y|_{U_x \cap U_y}$ volna, akkor egyre sűrűbb fedésekkel lehetne egy olyan egy $p$ pontra húzódó $U_i$ sorozatot találni, amelyek mindegyikén eltérnének, és ekkor $s_x(p) \neq s_y(p)$ volna. Viszont az $U_x$ és $U_y$ halmazokat úgy választottuk meg, hogy azon $s_x(p) = \sigma(p)$, illetve $s_y(p) = \sigma(p)$ legyen.

Végül ha $s$ és $t$ is megfeleltethető volna a fenti módon $\sigma$-val, akkor az előző bekezdéshez hasonló módon lehetne találni egyetlen $p$ pontot, ahol $\sigma(p) = s(p) \neq t(p) = \sigma(p)$.

Egy $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ előkévemorfizmust *kévemorfizmusnak* hívunk, ha $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ kévék. Ha viszont a rostokon keresztül értelmezzük a kévehomomorfizmust, akkor $f : \tilde{\mathcal{F}} \to \tilde{\mathcal{G}}$ olyan folytonos leképezés kell legyen, ami megtartja a rostokat (azaz $f(\pi_{\mathcal{F}}^{-1}(x)) \subseteq \pi_{\mathcal{G}}^{-1}(x)$), és azokon a megfelelő struktúrával kompatibilis.

### 1.1.3. Generált kéve

A fentiek fényében lehet beszélni egy előkéve által generált kévéről. Ugyanis vehetjük az előkéve étale-terét, és ennek szelései egy kévét fognak alkotni. Sőt, a fenti módon bármelyik $s \in F(U)$-hoz meg lehet feleltetni azt a $\sigma \in \mathcal{F}(U)$-t, amire $\sigma(x) = s(x)$.

Ha tekintjük az $F$ előkéve által generált $\mathcal{F}$ kéve szeléseit, akkor a következőt látjuk. Rögzített $U \subseteq X$ nyílt halmazra az $s \in \mathcal{F}(U)$ szelés reprezentálható egy $U = \bigcup U_i$ lokálisan véges fedéssel, és $s_i \in F(U_i)$ szeléseivel az előkévének, ahol bármely két $(s_i, U_i)$ és $(s_j, U_j)$ esetén $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$. Ugyanis ha vesszük az $\tilde{F}$ egy $\sigma$ szelését $U$ felett, akkor minden $x \in U$-ra $\sigma(x)$ reprezentálható egy $s_x$ szeléssel, hogy $s_x(x) = \sigma(x)$. Vehetjük ekkor azt az $U_x$ halmazt, amire bármilyen $y \in U_x$ esetén $s_x(y) = \sigma(y)$, ami nyílt lesz, mert a $\sigma$ szerinti ősképe az $U$-ból vett $s$-szerinti képnek. Ezek az $(s_x, U_x)$ párok teljesíteni fogják a bekezdés elején kirótt feltételeket.

A generált kéve teljesít még egy fontos kategóriaelméleti univerzalitási tulajdonságot. Ha ugyanis $F$ egy előkéve, akkor egyértelműen létezik olyan $\mathcal{F}$ kéve, valamint egy $f : F \to \mathcal{F}$ előkévemorfizmus, hogy bármilyen $\mathcal{G}$ kéve és $g : F \to \mathcal{G}$ előkévemorfizmus esetén egyértelműen létezik egy $\gamma : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ kévehomomorfizmus, hogy $g = f \circ \gamma$. Ez pedig éppen az $F$ által generált kéve.

### 1.1.4. Triviális kévék

Tekintsünk egy rögzített $A$ objektumot a $\mathcal{C}$ kategóriából! Ha az $\mathcal{F}$ funktor minden nyílt halmazhoz $A$-t rendeli, és minden $\rho$-hoz az $\mathrm{id}_A$-t, akkor ezt *triviális előkévének* hívjuk.

Az ezáltal generált kévének minden rostja izomorf $A$-val, és egy innen vett elem reprezentálható egy olyan szeléssel, ami az adott pont környezetében konstans. Tehát a kéve minden szelése lokálisan konstans lesz, és ezek mind előállíthatók konstans szelések ragasztásaként.

Így ha $A$ az $X$-en értelmezett $A$ rostú *triviális kéve*, akkor $A(U) = \bigoplus^n A$, ahol $n$ az $U$ összefüggőségi komponenseinek száma.

### 1.1.5. Laza kévék, puha kévék

Ha a $\rho_V^U$ megszorítási operátorok szürjektívek, akkor a kévét *lazának* hívjuk. Ez egyenértékű azzal az elvárással, hogy a $\rho_V^X$ leképezések szürjektívek. Ekkor pedig minden szelés kiterjed globális szeléssé.

A laza kévéknek később lesz jelentőségük, mivel minden kohomológiájuk triviális, leszámítva a nulladikat.

Példa laza kévére egy komplex sokaságon értelmezett meromorf függvények kévéje. Ilyenkor a globális kiterjesztés egyértelmű.

Továbbá bármelyik $\mathcal{F}$ kévére tekinthetjük azt a $\mathcal{C}^0(\mathcal{F})$ kévét, aminek egy $U$ halmazának az összes, nem feltétlenül folytonos $\sigma : U \to \mathcal{F}$ szelés (azaz a $\sigma(x) \in \mathcal{F}_x$ tulajdonságot teljesítő függvények) eleme. Ilyenkor egy $U$ halmaz szelése pontosan akkor terjed ki egyértelműen, ha $U$-n kívül egy eleműek a rostok.

Legyen $H \subseteq X$ tetszőleges részhalmaza $X$-nek! Ekkor értelmezzük $\mathcal{F}(H)$-t úgy, mint a $\tilde{\mathcal{F}}$ étale-térnek a $H$ feletti szeléseit! Amennyiben $H$ nyílt, akkor ez a ragasztási axióma révén ugyanaz, mint ahogy $\mathcal{F}(H)$-t legelőször definiáltuk: az $\mathcal{F}$ funktor szerinti képe $H$-nak. Általában, az $\mathcal{F}(H)$ elemeit továbbra is *szeléseknek* fogjuk hívni. Ha $S \subseteq H$ tetszőleges részhalmaz, akkor az $S$-re vett megszorítást mint szelés megszorítását lehet definiálni.

Egy kévét *puhának* hívunk, ha bármilyen $F \subseteq X$ zárt részhalmazra és $s \in \mathcal{F}(F)$ szelésre az $s$ *kiterjed* az egész $X$-re, vagyis lesz egy $s' \in \mathcal{F}(X)$, hogy $s'|_F = s$.

### 1.1.6. Függvények kévéje

Ha $X$ és $Y$ topologikus terek, akkor tekinthetjük valamely $U \subseteq X$ nyílt részhalmazra az $U$-ból $Y$-ba menő folytonos leképezések halmazát. Ez egy $\mathcal{C}$ kéve lesz, ha a megszorításokat értelemszerűen definiáljuk. Ha $Y$ továbbá valamilyen algebrai struktúra, akkor bármely $U$ nyíltra $\mathcal{C}(U)$ maga is olyan algebrai struktúra lesz, a megszorítások pedig homomorfizmusok.

Ha $X$ és $Y$ nem pusztán topologikus tér, hanem $n$-szer differenciálható sokaságok, akárhányszor differenciálható sokaságok, analitikus sokaságok vagy komplex sokaságok, akkor az $X$ egy nyílt részhalmazáról $Y$-ba menő leképezéseket vehetjük differenciálhatónak, simának, analitikusnak, holomorfnak vagy meromorfnak.

### 1.1.7. Algebrai kévék, modulus értékű kévék

Algebrai struktúrával rendelkező kévéket nem csak a fenti módon csinálhatunk.

A $\mathcal{C}$ kategóriát választhatjuk olyannak, hogy objektumai azonos típusú algebrák, morfizmusai algebra-homomorfizmusok legyenek. Ekkor a szelések algebrai struktúrák lesznek, a megszorítások pedig homomorfizmusok.

A rostokon keresztül vizsgálva minden rost a fenti típusú algebrai struktúrával fog rendelkezni, és az algebraműveletek az étale-téren folytonosak lesznek. Ez azt jelenti, hogy ha adott az $f$ $n$-változós művelet az algebra típusában, akkor egy $\tilde{\mathcal{F}}$ étale-tér esetén az az $f : \{(u, v)|\pi(u) = \pi(v)\} \to \tilde{\mathcal{F}}$, ami a rostokon az algebraművelet, folytonos.

Ilyen módon lehet értelmezni többek közt csoport, Abel-csoport, gyűrű, vektortér vagy algebra értékű kévéket.

Az a megkötés, hogy az algebrák legyenek azonos típusúak, nem teszi lehetővé például azt, hogy a szelések tere olyan modulus legyen, aminek az alapgyűrűje függ a választott nyílt halmaztól. Mivel a kévekohomológiák esetén erre nagy szükség lesz, ezt külön definiáljuk.

Legyen ugyanis $X$ bármelyik $U$ nyílt részhalmazára az $\mathcal{M}(U)$ egy $\mathcal{R}(U)$-modulus, és ha adott egy $V \subseteq U$ nyílt részhalmaz, akkor értelmezzük a megszorítást úgy, hogy $u \in \mathcal{M}(U)$, $r \in \mathcal{R}(U)$ esetén $(ru)|_V = r|_V u|_V$.

A következő példa többek közt az egyik motiváció emögött a definíció mögött. Legyen ugyanis $M$ egy differenciálható (vagy sima, analitikus, komplex) sokaság, és jelölje $\mathcal{C}_M$ a differenciálható (vagy sima, analitikus, holomorf) függvények kévéjét! Ha $\pi : E \to M$ egy tetszőleges vektornyaláb $M$ felett, és $\mathcal{E}_M$ jelöli a szeléseinek kévéjét, akkor $\mathcal{E}_M(U)$ vektortér minden $U \subseteq M$ nyílt felett. Viszont ennek elemeit be lehet szorozni függvényekkel, azaz $\mathcal{E}_M(U)$ egy $\mathcal{C}_M(U)$ modulus is egyben.

Ha a $\mathcal{F}$ kéve Abel-csoport értékű, akkor lehet beszélni egy $s \in \mathcal{F}(U)$ szelés *tartójáról*. Azon $x \in U$ pontok lesznek benne $s$ tartójában, amikre $s(x) \neq 0$. Ez zárt lesz, ugyanis ha $s(x) = 0$, akkor lesz egy $V$ környezete $x$-nek, amire $s|_V = 0$. Itt tehát egy szelés nullhalmaza mindig nyílt, szemben egy nyaláb folytonos szeléseivel, ahol a nullhalmaz zárt. Viszont ha a kéve ilyen folytonos szelésekből áll, akkor a tartó vissza fogja adni a topologikus tartót, mivel ott a nem-nulla helyek halmazának lezártját tekintettük tartónak, kéveelméletileg pedig azok a pontok nem lesznek benne a tartóban, amik a nullhalmaz belső pontjai.

### 1.1.8. Gyűrű spektruma

Külön érdekes kévekonstrukciót mutatnak be a gyűrűk spektrumai. Egy affin varietást gyakran a rajta értelmezett függvényekkel írunk le. Ilyenkor egy pontot úgy tudunk megragadni, mint azok a függvények, amik ezen 0-t vesznek fel. Ez egy maximális ideálja lesz a függvények gyűrűjének. Praktikus viszont az összes prímideált is tekinteni, amik geometriai intuícióban az irreducibilis részsokaságoknak fognak megfelelni.

Olyan függvényeket is szeretnénk tekinteni, amik két függvény hányadosaként írhatók fel. Egy ilyen viszont nem lesz értelmezve ott, ahol a nevező nulla. Az ilyen jellegű problémákat remekül meg tudja ragadni a kéve fogalma, ahol a függvények csak bizonyos nyílt halmazokon értelmesek.

Legyen tehát $A$ egy integritási tartomány, és legyen a spektruma $\operatorname{Spec} A$ az $A$ prímideáljainak halmaza! Ha $f \in A$ egy gyűrű elem, akkor szeretnénk, hogy az $f$ nullhalmaza zárt legyen. A spektrumon nem tudunk nullhalmazról beszélni, viszont analógiát keresve, az ideál azokat a függvényeket jelöli, amiken azok „eltűnnek”. Legyen tehát azoknak a prímideáloknak a halmaza, amiknek az $f$ nem eleme, nyílt! Az ezáltal generált legszűkebb topológiát hívjuk a $\operatorname{Spec} A$ *Zariski-topológiájának*.

Legyen $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ egy prímideál $A$-ban! Ha ez egy $x$ ponton eltűnő függvények ideáljainak felel meg, akkor bármilyen függvénnyel oszthatunk, ami nem a 0-t veszi fel rajta. Általánosan tekintsük azt az $A_\mathfrak{p}$ gyűrűt, ami az $A$ hányadostestének, $K$-nak az a részgyűrűje, amiben azok az $f/g$-k vannak, hogy $f \in A$, $g \in A \setminus \mathfrak{p}$! Ezek lesznek a spektrum rostjai.

Tegyük fel, hogy adott egy $U$ Zariski-nyílt halmaz! Ekkor vehetjük az összes olyan $f = g/h$ elemet, amire $h \notin \mathfrak{p}$ minden $\mathfrak{p} \in U$-ra (egyébként $g, h \in A$, ekkor $f \in K$). Ezek lesznek az $U$ szelései, és egy $\mathfrak{p} \in U$-ban önmaga lesz a csíra.

Lehet beszélni az $f$ szelés által *felvett értékről* is. Az $A_\mathfrak{p}$ gyűrűk *lokális gyűrűk*, tehát van egy maximális ideáljuk, éppen $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Az ebben lévő elemek azok, amik $\mathfrak{p}$-ben „eltűnnek”, ezekkel tehát faktorizálhatunk. Definíció szerint $f$-nek $\mathfrak{p}$-ben felvett értéke az $f$-nek az $A_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ leképezés szerint vett képe. Amikor $A$ egy $X$ téren értelmezett összes valós függvényekből áll, és $\mathfrak{p}$ az $x$ pontban eltűnő függvények ideálja, akkor ez éppen az $f$-nek $x$-ben felvett értéke lesz.

### 1.2. Kéve konstrukciók

A következő konstrukciókat egyszerre fogjuk funktoriálisan és a rostok szintjén vizsgálni.

#### 1.2.1. Indukált kéve

Legyen $X$ topologikus tér, $\mathcal{F}$ kéve $X$ felett! Ekkor tekinthetjük a $\pi : \tilde{\mathcal{F}} \to X$ étale teret. Legyen $\mathcal{F}|Y$ a

$$\pi|_{\pi^{-1}(Y)} : \pi^{-1}(Y) \to Y$$

lokális homeomorfizmus által definiálva!

Az indukált kévével bevezetem a következő fogalmakat.

Bármilyen $Y$ feletti, Abel csoport értékű $\mathcal{L}$ kévéhez létezik egy egyértelmű $\mathcal{L}^X$ kéve a teljes $X$-en, hogy $\mathcal{L}^X|Y$ izomorf $\mathcal{L}$-lel, míg $\mathcal{L}^X|(X\setminus Y)$ izomorf az $X\setminus Y$ feletti triviális, 0 rostú kévével.

Ugyanis definiáljuk $\mathcal{L}^X(U)$-t úgy, mint $\mathcal{L}(U \cap Y)$ azon szelései, amik $U$-ban zárt tartójúak!

Ekkor ha $x \in X \setminus \operatorname{cl} Y$, akkor mivel $Y$ lokálisan zárt, lesz olyan nyílt $U$ környezete $x$-nek, ami diszjunkt $Y$-tól, így $\mathcal{L}(U \cap Y) = \mathcal{L}(\emptyset) = 0$ lesz. Ha viszont $x \in \operatorname{cl} Y \setminus Y$, válasszunk $x$-nek egy $U$ nyílt környezetét! Ekkor bármelyik $s \in \mathcal{L}^X(U)$-ra az $s$ tartója zárt, és nem tartalmazza $x$-et, így lesz az $s$ tartójától diszjunkt nyílt környezete $x$-nek. Tehát $\mathcal{L}^X|(X \setminus Y)$ tényleg a triviális kéve lesz.

Másfelől legyen $x \in Y$, ekkor lesz olyan nyílt $U$ környezete $x$-nek, amire $Y \cap U$ zárt $U$-ban, és ekkor bármelyik $V \subseteq U$-ra $\mathcal{L}^X(V) = \mathcal{L}(V \cap Y)$, és így $\mathcal{L}^X_x = \mathcal{L}_x$. Mivel pedig bármely $U$-ra $\mathcal{L}^X(U\cap Y)$ szelései kiterjeszthetők folytonosan 0-ként $U\setminus(U\cap Y)$-ra, ezért ennek a szelésnek az $U \cap Y$ feletti csírái $\mathcal{L}^X|Y$-nek egy szelését fogják adni. Így $\mathcal{L}^X|Y$ és $\mathcal{L}$ nem csak rostjaiban, hanem szeléseiben is megegyezik, azaz homeomorfak.

Ezek után belátható hogy létezik egy $\mathcal{F}_Y$ kéve $X$ felett, hogy $\mathcal{F}_Y|Y$ izomorf $\mathcal{F}|Y$-nal, és $\mathcal{F}_Y|(X \setminus Y) = 0$. Ez az $\mathcal{F}_Y$ ugyanis nem más, mint $(\mathcal{F}|Y)^X$.

### 1.2.2. Algebrai konstrukciók

Legyen $\Phi$ egy kovariáns bifunktor $\mathcal{C}$-ből $\mathcal{C}$-be! Azaz bármely $X$ és $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$-re $\Phi(X,Y) \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, illetve ha $\varphi \in \operatorname{Hom}(X,X')$ és $\psi \in \operatorname{Hom}(Y,Y')$, akkor $\Phi(\varphi,\psi) \in \operatorname{Hom}(\Phi(X,Y),\Phi(X',Y'))$. Példa ilyenre tetszőleges kategóriában a szorzat meg a koszorzat (ami a halmazok esetén a diszjunkt unió), illetve modulusok esetén a tenzorszorzat.

Ez a bifunktor generál egy bifunktort az előkévék kategóriájában: legyenek $A$ és $B$ előkévék, és legyenek a szelések $\Phi(A,B)(U) = \Phi(A(U),B(U))$, és ha $A$-n és $B$-n a megszorításokat $U$-ról $V$-re $\rho^A_V$-val és $\rho^B_V$-vel jelölöm, akkor $\rho^{\Phi(A,B)}_V = \Phi(\rho^A_V,\rho^B_V)$ legyen!

Bizonyos esetekben ha $A$-t és $B$-t kévének választjuk, akkor $\Phi(A,B)$ maga is kéve. Ilyenek halmazok esetén a direkt szorzat és a diszjunkt unió, modulusok esetén a direkt összeg. Amennyiben viszont nem lesz kéve, mint általában a tenzorszorzat esetén, akkor az általa generált kévét tekintjük szorzatkévének.

Általában ezek a konstrukciók a széleseken nehezen átláthatóan viselkednek. Viszont ha a $\Phi$ bifunktor felcserélhető az induktív limeszeken, akkor a csírákon a szokásos módon működnek.

A felcserélhetőség azt jelenti, hogy legyenek adottak az $X_\alpha$ objektumok $\alpha \in A$-ra, és $f_\alpha^\beta \in \mathrm{Hom}(X_\alpha, X_\beta)$ leképezések! Létezzen továbbá az $X = \lim \mathrm{ind}_\alpha X_\alpha$ induktív limesz! A fentiekkel azonosan legyenek adottak az $Y_\alpha$, $g_\alpha^\beta$ objektumok és leképezések, ugyanazon $\alpha \in A$ indexhalmaz szerint! Ekkor

$$\lim_\alpha \mathrm{ind}\, \Phi(X_\alpha, Y_\alpha) = \Phi(\lim_\alpha \mathrm{ind}\, X_\alpha, \lim_\alpha \mathrm{ind}\, Y_\alpha)$$

teljesülése jelenti azt, hogy a bifunktor felcserélhető az induktív limesszel.

Mivel a csírák definíciója induktív limesszel történik, ezért ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ előkévék, akkor a $\Phi(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ által generált kéve rostja az $x \in X$ pontban izomorf a $\Phi(\mathcal{A}_x, \mathcal{B}_x)$-szel.

A szorzat és a koszorzat nem csak két struktúrára értelmezhető. Ha $H_i$ halmazok, akkor

$$\prod_i H_i \qquad \coprod_i H_i$$

a direkt szorzat és a diszjunkt unió. Ha $M_i$ modulusok, akkor

$$\prod_i M_i \qquad \bigoplus_i M_i$$

a teljes direktszorzat és a diszkrét direkt összeg.

### 1.2.3. Részkévék, kéve-ekvivalenciarelációk

Legyen adott egy topologikus tér, $X$, rajta két halmazértékű előkéve, $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$, és köztük egy előkévehomomorfizmus, $\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$! Szeretnénk értelmezni a *képét* illetve *magját* ennek az $\eta$ leképezésnek.

Először tekintsük a széleseken! Ekkor az előkévehomomorfizmus egy természetes leképezés az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ funktorok között, tehát minden $U \subseteq X$ nyílt halmazhoz adott az $\eta(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}$ leképezés, ami ráadásul kompatibilis a megszorításokkal:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\eta(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow \rho_{\mathcal{F}} & & \downarrow \rho_{\mathcal{G}} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\eta(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Ilyenkor az $\operatorname{im} \eta$ egy olyan előkéve lesz, aminek a szelései részhalmazai $\mathcal{G}$ megfelelő széléseinek. Másfelől ha adott egy $\mathcal{F}$ előkéve, aminek a szelései $\mathcal{G}$ megfelelő széléseinek részhalmaza, és a megszorítások $\mathcal{F}$-en a $\mathcal{G}$-beli megszorítások megszorítása az $\mathcal{F}$-beli halmazokra, akkor $\mathcal{F}$ ténylegesen beágyazható $\mathcal{G}$-be, azaz az $\eta(U)$ beágyazások egy előkévehomomorfizmust adnak.

Tehát azt mondjuk, hogy az $\mathcal{F}$ előkéve részelőkévéje a $\mathcal{G}$ előkévének, amennyiben minden $U$ nyílt részhalmazára $X$-nek az $\mathcal{F}$ részhalmaza $\mathcal{G}$-nek, és bármely $V \subseteq U$ nyílt részhalmazaira $X$-nek az $\mathcal{F}$-beli $\rho^U_{V,\mathcal{F}}$ megszorítás nem más, mint a $\mathcal{G}$-beli $\rho^U_{V,\mathcal{G}}$-nek a megszorítása $\mathcal{F}(U)$-ra:

$$\rho^U_{V,\mathcal{F}} = \rho^U_{V,\mathcal{G}}|_{\mathcal{F}(U)}$$

Ezzel a tulajdonsággal definiálható egy $\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ előkévehomomorfizmus képelőkévéje úgy, hogy minden $U \subseteq X$ nyíltra az $(\operatorname{im} \eta)(U) = \operatorname{im}(\eta(U))$ definíciót alkalmazzuk, ami a $\mathcal{G}$ egy részelőkévéjét adja.

Ha $\mathcal{F}$-et és $\mathcal{G}$-t kévéknek választjuk, akkor a ragasztási axióma egyszerre fog teljesülni $\mathcal{F}$-beli szelésekre és azok képeire, ezért a részkéve definíciója kizárólag annyiban tér el a részelőkéve definíciójától, hogy kévékről szól. Nem hoz változást az sem, ha halmaz helyett algebrai struktúrákat tekintünk. A kévemorfizmus képkévéjének definíciója ugyanúgy alakul.

Most tekintsük a rostjait az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ kévéknek! Ekkor egy $\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ kévehomomorfizmus olyan folytonos leképezést jelent, ami megtartja a rostokat, tehát minden $x \in X$-re értelmezhető $\eta_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$, és megtartja azok struktúráját (amennyiben algebrai struktúra értékű kévékről van szó).

Megint szeretnénk áttekinteni a *rész* és a *kép* jelentéseit. Egyfelől ilyenkor minden $\eta_x$-nek van egy képe, ami a $\mathcal{G}_x$ egy része lesz. Másfelől a $\pi_{\mathcal{G}} : \tilde{\mathcal{G}} \to X$ lokális homeomorfizmus. A rosttartás úgy is kifejezhető, mintha bármelyik $\sigma \in \tilde{\mathcal{F}}$ csírára

$$\pi_{\mathcal{G}}(\eta(\sigma)) = \pi_{\mathcal{F}}(\sigma)$$

teljesülne. Ekkor tehát az $\eta(\tilde{\mathcal{F}})$ teljes kép nem más, mint $\pi_{\mathcal{G}}^{-1}(\pi_{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{F}})) = \pi_{\mathcal{G}}^{-1}(X)$, ami egy nyílt halmaz. Tehát az $\eta$ képe szükségszerűen nyílt részhalmaza lesz $\tilde{\mathcal{G}}$-nek.

Tehát tudjuk, hogy egy részkévének teljesítenie kell egyfelől, hogy a rostokon részstruktúra, másfelől hogy nyílt részhalmaza az étale-térnek. Már csak azt kell belátni, hogy ha ezt teljesíti, akkor kéve, és létezik kévehomomorfizmus a részkévéből a teljes kévébe. A struktúra műveleteinek folytonossága nem kérdéses. Az szükséges, hogy a $\pi$ leképezés lokális homeomorfizmus marad, ha megszorítjuk a részre, ez pedig abból következik, hogy feltettük a részkévéről, hogy nyílt.

Kicsit több változatosságot mutatnak a mag és faktor definíciójában felmerülő kérdések. A két fogalmat felváltva fogom vizsgálni. Ehhez először definiálni fogjuk az *előkévereláció* fogalmát.

Tekintsük először a széleseket! Ekkor ha adottak az $F$ és $G$ előkévék, valamint egy $\eta : F \to G$ előkévehomomorfizmus, akkor értelmezhetünk minden $U \subseteq X$ nyílt halmazra egy ekvivalenciarelációt $F(U)$-n a következőképpen. Legyenek $s, t \in F(U)$ szelések $U$-n, ekkor $s$ és $t$ relációban állnak $R(U)$ szerint, ha $\eta(U)$ szerinti képeik egyenlők. Úgy fogjuk jelölni, hogy $s\,R(U)\,t$. Mivel az $\eta$ kompatibilis a megszorításokkal, ez azt jelenti, hogy ha $V \subseteq U$ és $s\,R(U)\,t$ teljesül, akkor $s|_V\,R(V)\,t|_V$-nek is teljesülnie kell. Ezt a relációt fogjuk az $\eta$ leképezés *magjának* hívni.

Vizsgáljuk most meg, hogyan lehet eszerint a reláció szerint faktorizálni! Legyen adott minden $U \subseteq X$ nyíltra egy-egy $R(U)$ reláció $F(U)$-n úgy, hogy ha $V \subseteq U$ és $s, t \in F(U)$, akkor $s\,R(U)\,t$-ből következik $s|_V\,R(V)\,t|_V$! Eszerint a reláció szerint *faktorizálhatjuk* az $\mathcal{F}$ előkévét, és eredményül egy másik $F/R$ előkévét nyerünk.

Tehát egy $R(U)$ reláció pontosan akkor lehet leképezés magja, ha kompatibilis a megszorításokkal. Kévék esetén viszont erősebb feltételekre lesz szükség.

Tegyük most fel, hogy $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ kévék! Vizsgáljuk meg azt a ragasztási axiómából következő tulajdonságot, hogy ha $U$ nyílt halmaz $X$-ben, az $U_i$ annak nyílt fedése, és $s, t \in \mathcal{G}(U)$-re $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ minden $i$-re, akkor $s = t$. Ugyanis ha most $s, t \in \mathcal{F}(U)$ és $s|_{U_i}$-nak meg $t|_{U_i}$-nak ugyanazok a képei $\mathcal{G}$-ben az $U$ egy $\bigcup U_i$ fedésére, akkor szükségképpen $s$-nek és $t$-nek is. Tehát ha $s|_{U_i}\, R(U_i)\, t|_{U_i}$ fennáll, akkor $s\, R(U)\, t$ is teljesül.

Szeretném megmutatni, hogy ahhoz, hogy egy $R(U)$ relációrendszer egy kévemorfizmus magja legyen, ezek a feltételek elegendők. Legyen tehát adott egy $\mathcal{F}$ kéve, és $R(U)$ relációk olyan rendszere, hogy:

- Ha $s\, R(U)\, t$, akkor $s|_V\, R(V)\, t|_V$ (ahol $V \subseteq U$);
- Ha $s|_{U_i}\, R(U_i)\, t|_{U_i}$ minden $i$-re $U$ egy $U_i$ fedése esetén, akkor $s\, R(U)\, t$.

Kérdés, hogy ekkor létezik-e olyan $\mathcal{G}$ kéve és $\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ kévehomomorfizmus, hogy $\eta$ magja éppen a fenti $R$ legyen. Az első tulajdonságból következik, hogy van egy olyan $G$ előkéve és olyan $\eta_0 : \mathcal{F} \to G$ előkévehomomorfizmus, aminek éppen ez a magja. Vehetjük a $G$ által generált kévét, illetve egy $\iota : G \to \mathcal{G}$ előkévebeágyazást. Ekkor $\eta := \iota \circ \eta_0$ természetszerűleg kéveleképezés, aminek a magja nem szűkebb, mint $R$. De nem is bővebb, hiszen ha adott $U$, az $s, t \in \mathcal{F}(U)$, és $\eta(s) = \eta(t)$, ez csak úgy lehet, ha adott az $U_i$ fedése $U$-nak, hogy $\eta_0(s|_{U_i}) = \eta_0(t|_{U_i})$. Eszerint $s|_{U_i}\, R(U_i)\, t|_{U_i}$, és a kettes feltétel alapján ekkor $s\, R(U)\, t$. Ezt a $\mathcal{G}$-t fogjuk az $\mathcal{F}/R$ faktorkévének hívni.

Egy kicsit később mutatok példát arra, hogy a fenti módon $G$ nem lesz magától kéve.

Vizsgáljuk meg most a rostokon az ekvivalenciareláció viselkedését! Legyenek adottak a $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ kévék, és az $\eta : \tilde{\mathcal{F}} \to \tilde{\mathcal{G}}$ rosttartó folytonos leképezés! Definiáljuk minden $x \in X$-re az $R_x$ relációt úgy a $\mathcal{F}_x$-en, hogy ha $\sigma, \tau \in \mathcal{F}_x$, akkor $\sigma\, R_x\, \tau$ pontosan akkor, ha $\eta(\sigma) = \eta(\tau)$! Ez az $R_x$ azon túl, hogy ekvivalenciareláció, teljesíti azt a tulajdonságot is, hogy ha $\sigma\, R_x\, \tau$, akkor létezik olyan $U \ni x$ nyílt halmaz, és azon $\sigma$ és $\tau$ olyan $s, t \in \mathcal{F}(U)$ kiterjesztései, hogy bármely $u \in U$-ra az $s(u)\, R_u\, t(u)$ teljesül.

Könnyű belátni, hogy pontosan azok a relációk állnak elő magként, amik ezekkel a tulajdonsággal rendelkeznek.

A fenti módon lehet definiálni tehát a relációt, illetve egy $\eta$ homomorfizmus magját.

Amennyiben a kévék Abel-csoport értékűek, akkor egy adott $\mathcal{F}$ kévére a kéverelációk és a részcsoportok megfelelnek: ha adott $R$, akkor legyen $\mathcal{G}$ az a részkéve, amire

$$s \in \mathcal{G}(U) \iff s\, R(U)\, 0_U$$

vagy

$$\sigma \in \mathcal{G}_x \iff \sigma\, R_x\, 0_x.$$

**Példa:** Tekintsük $\mathcal{F} = C^\infty(S^1; \mathbb{R})$-et, azaz a körön értelmezett, akárhányszor differenciálható függvények kévéjét! Ez értelemszerűen azt jelenti, hogy minden $U \subseteq S^1$-hez $\mathcal{F}(U)$ az $U \to \mathbb{R}$ akárhányszor differenciálható leképezésekből áll. Ilyenkor $\mathcal{F}(U)$ örökli $\mathbb{R}$ Abel-csoport struktúráját. Legyen most $\mathcal{G}(U)$ ennek az a részkévéje, ami a lokálisan konstans függvényekből áll, és tekintsük a $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ faktort, mint előkévét! Bármilyen $U \neq S^1$ nyílt halmazra a konstans 1 függvény nyilván benne van a $(\mathcal{F}/\mathcal{G})(U)$ struktúrában, ugyanis ha $x \neq U$, akkor $S^1 \setminus \{x\}$ diffeomorf egy intervallummal, és vehetjük rajta az identitás függvényt. Ezek a konstans 1 függvények összeragadnak egy, az egész körön konstans 1 függvénnyé, ami könnyen láthatóan nem eleme $(\mathcal{F}/\mathcal{G})(U)$-nak.

Legyenek most $A$, $B$, $C$ előkévék! A fentiek alapján lehet beszélni arról, hogy a köztük menő $f$ és $g$ leképezésekkel a

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

sor egzakt. Pontosan akkor, ha bármelyik $U$ nyílt halmazra

$$0 \longrightarrow A(U) \xrightarrow{f(U)} B(U) \xrightarrow{g(U)} C(U) \longrightarrow 0$$

egzakt.

Lehet beszélni arról is, hogy ha $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ kévék, akkor a

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

sorozat egzakt, de ez nem ugyanazt jelenti, mint előkévék esetén. Ugyanis a $\mathcal{B}/\operatorname{im} f$-et ha nyílt halmazonként nézzük, akkor többnyire csupán előkévét kapunk. Viszont a rostokon keresztül szépen jellemezhető a fenti sor egzaktsága. Pontosan akkor lesz egzakt, ha

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{B}_x \xrightarrow{g_x} \mathcal{C}_x \longrightarrow 0$$

egzakt minden $x \in X$ pontra.

Általában csak annyi teljesül, hogy ha adottak $X$-en az $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ kévék, továbbá

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

egzakt, akkor

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(U) \xrightarrow{f(U)} \mathcal{B}(U) \xrightarrow{g(U)} \mathcal{C}(U)$$

is egzakt, tetszőleges $U \subseteq X$ esetén. Azaz az $U$-n vett szelés egy balegzakt funktor. Érdemes megjegyezni, hogy ha az $\mathcal{A}$ kéve laza, akkor minden $U$ halmazra

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(U) \longrightarrow \mathcal{B}(U) \longrightarrow \mathcal{C}(U) \longrightarrow 0$$

is egzakt. Ehhez csak annyit kell belátni, hogy $g(U)$ szürjektív.

Vegyünk egy $s \in \mathcal{C}(U)$ szelést, ez reprezentálható $(V, \sigma)$ párok halmazával, ahol $\sigma \in \mathcal{B}(V)$, és páronként kompatibilisak. Ha adott két szelés, $(V, \sigma)$ és $(W, \tau)$, akkor mivel $\upsilon_0 := \sigma|_{V \cup W} - \tau|_{V \cup W} \in \mathcal{A}(V \cup W)$, és $\upsilon_0$ kiterjed $\upsilon \in \mathcal{V}(W)$-vé, ezért $\sigma$ és $\tau + \upsilon$ kompatibilisak. Így létezik egy $\sigma'$ az $V \cup W$ halmazon is, ami továbbra is $s$-et reprezentálja. A ragasztási axióma révén bármely felszálló $(V_i, \sigma_i)$ lánc uniója is reprezentálni fogja ugyanazt az $s$-et, ezért Zorn lemmája alapján létezik maximális elem. Ennek az elemnek viszont szükségképpen az egész $U$-n kell értelmezve lennie. Tehát $g(U)$ szürjektív.

A laza kévéknek még egy fontos tulajdonsága, hogy ha

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

egzakt, és $\mathcal{A}$ meg $\mathcal{B}$ lazák, akkor $\mathcal{C}$ is. Ugyanis ha $s \in \mathcal{C}(U)$, akkor az előáll egy $s' \in \mathcal{B}(U)$-nak $g(U)$-szerinti képeként. Az $s'$ kiterjed az egész $X$-re, és annak képe $g(X)$ szerint olyan elem lesz, ami $U$-ra megszorítva egyenlő $s$-sel. Tehát $\mathcal{C}$ is laza.

### 1.2.4. Őskép és direkt kép

Legyenek adottak az $X$ és $Y$ topologikus terek, egy $f : X \to Y$ folytonos leképezés köztük!

Ha adott $X$-en az $\mathcal{A}$ kéve, akkor elkészíthető ennek az *direkt képe* a következő módon. Legyen $f^*(\mathcal{A})(U) = \mathcal{A}(f^{-1}(U))$! Ha $U \subseteq V$, akkor legyen a megszorítás a $\mathcal{B}$ kévén az $\mathcal{A}$ kévén tekintett megszorítás az $f^{-1}(U)$ és $f^{-1}(V)$ halmazok között!

Ezzel a definícióval egy $y \in Y$ pontra $f^*(\mathcal{A})_y$ izomorf lesz $\mathcal{A}(f^{-1}(y))$-nal.

Tekintsük most megint a fenti $f : X \to Y$ leképezést, és legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ tetszőleges kévék $X$ és $Y$ felett! Egy $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ leképezést $f$*-homomorfizmusnak* hívunk, ha bármely $x \in X$-re $\varphi$ az $\mathcal{A}_x$-et $\mathcal{B}_{f(x)}$-be viszi.

Létezik ekkor egy egyedi $f^*(\mathcal{B})$ kéve és egy $\overline{f} : f^*(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$-re menő $f$-homomorfizmus, hogy bármelyik $g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$-re menő $f$-homomorfizmushoz létezik egy egyértelmű $g_0 : \mathcal{A} \to f^*(\mathcal{B})$, amit $\overline{f}$-fel komponálva $g$-t kapjuk. Ezt az $f^*(\mathcal{B})$-ot fogjuk a $\mathcal{B}$-nek az $f$ szerinti *ősképének hívni.*

A konstrukció a következőképpen megy: legyen $f^*(\mathcal{B})(U)$ azoknak az $s : U \to \mathcal{B}$ folytonos leképezéseknek a halmaza, hogy $s(x) \in \mathcal{B}_{f(x)}$! Az így kapott $s$ szelés csíráit jelöljük $\tilde{s}(x)$-szel! A megszorítások értelmeszerűen definiálhatók, és ez tényleg egy kéve.

Az $x$ pontban vett rost izomorf lesz $\mathcal{B}_{f(x)}$-szel. Ugyanis bármely $\mathcal{B}$-beli, $U$ feletti szelés visszaemelhető egy $f^*(\mathcal{B})$-beli $f^{-1}(U)$-beli szeléssé oly módon, hogy $s \in f^*(\mathcal{B})(U)$-hoz az $x \to s(f(x))$ függvényt rendeli. Ez ad egy $\mathcal{B}_{f(x)} \to f^*(\mathcal{B})_x$ leképezést, ami injektív, hiszen ha $s$ és $s' \in \mathcal{B}(U)$, és $s(f(x)) \neq s'(f(x))$, akkor ezeknek a felemeltjei az $s \circ f$ és $s' \circ f$ függvények, és ha ezeknek az $x$-beli csírája egyenlő volna, akkor többek közt az $x$-beli értékük is megegyezne, amiről feltettük, hogy különböző. Másfelől ha adott egy $s : U \to \tilde{\mathcal{B}}$ leképezés az $x$-nek egy $U$ környezetén, akkor tekintsük az $s(x)$-nek egy reprezentánsát $\mathcal{B}$-ben! Legyen ez $t \in \mathcal{B}(V)$, ahol $V$ az $f(x)$ egy környezete! Mivel $t \circ f$ és $s$ is folytonosak, így azon $u \in X$ pontok, amiken $t(f(u)) = s(u)$, egy nyílt halmazt alkotnak $U \cap f^{-1}(V)$-ben. Tehát $s|_W = t \circ f|_W$, és ekkor $t \circ f$ képe egyenlő lesz $s$-sel. Tehát ez a leképezés szürjektív is lesz, így összességében injektív.

Mivel $\mathcal{B}_{f(x)}$ és $f^*(\mathcal{B})_x$ izomorfak, így az $\overline{f} : f^*(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$ értelmezhető a fenti módon a rostokon. Továbbá $\mathcal{B}$ topológiáját generálják az olyan alakú halmazok, hogy $U \subseteq Y$ nyílt, $s \in \mathcal{B}(U)$ szelés, és vesszük $s(U) \subseteq \tilde{(}\mathcal{B})$-t, egy ilyen ősképe $\overline{f}$ szerint éppen $s \circ f(f^{-1}(U))$ lesz, ami $f^*(\mathcal{B})$ étale-terében nyílt. Tehát $\overline{f}$ folytonos.

Az univerzalitási feltétel belátásához legyen most $g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ egy $f$-homomorfizmus, és rögzítsünk egy $U \subseteq X$ nyílt halmazt! Tekintsük az $s \in \mathcal{A}(U)$ szelést, és rendeljük hozzá $g_0(U)$-val azt az $s' \in f^*(\mathcal{B})(U)$-t, amire $s'(x) = g_x(s(x))$! Egyfelől ez az $s'$ tényleg eleme lesz $f^*(\mathcal{B})(U)$-nak, hiszen a feltevés szerint $g_x(s(x)) \in \mathcal{B}_{f(x)}$. Másfelől kompatibilis lesz a megszorításokkal, tehát $g_0$ tényleg kévehomomorfizmus. Végül pedig $\overline{f} \circ g_0 = g$, hiszen egy $\sigma \in \mathcal{A}_x$ csírát reprezentál egy $s \in \mathcal{A}(U)$ szelés, amit $g_0$ az $s'(x) = g_x(s(x))$-be visz, és ehhez $\overline{f}_x$ egy olyan $t$ szelést rendel, amire $t(f(x)) = s'(x) = g_x(s(x))$, tehát a $t$ csírája lesz $f(x)$-ben a $g_x(\sigma)$.

### 1.2.5. Induktív limesz

Legyen adott egy $\Lambda$ részben rendezett indexhalmaz, $\mathcal{F}_\lambda$ kévék minden $\lambda \in \Lambda$-ra, és ha $\lambda < \mu$, akkor egy $f_\mu^\lambda : \mathcal{F}_\lambda \to \mathcal{F}_\mu$ kévehomomorfizmus oly módon, hogy $\lambda < \mu < \nu$ esetén $f_\nu^\mu \circ f_\mu^\lambda = f_\nu^\lambda$ teljesüljön!

Vehetjük ekkor az $F(U) = \lim \mathrm{ind}_\lambda \mathcal{F}_\lambda(U)$ halmazok által definiált előkévét. Az ezáltal generált kévét, $\mathcal{F}(U)$-t nevezzük a $\mathcal{F}_\lambda$ kévék *induktív limeszének.*

Mivel a rostokat is induktív limesz segítségével lehet definiálni, és két induktív limesz felcserélhető, ezért $\mathcal{F}_x = \lim \mathrm{ind}_\lambda (\mathcal{F}_\lambda)_x$.

### 1.2.6. Homomorfizmuscsírák kévéje

Legyen $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ két kéve! Ekkor lehet tekinteni a $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ leképezések halmazát. Rendeljük hozzá minden $U$ nyílt halmazhoz a $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}|U, \mathcal{G}|U)$ kéveleképezéseket! Legyen egy $U$ halmazról a $V$ halmazra vett megszorítás értelemszerűen: ha $\varphi : \mathcal{F}|U \to \mathcal{G}|U$, akkor a $\varphi|_V : \mathcal{F}|V \to \mathcal{G}|V$ az a leképezés lesz, hogy egy $W \subseteq U$-ra $\varphi|_V(W \cap V) = \varphi(W) : \mathcal{F}(W) \to \mathcal{G}(W)$!

Ezekkel a leképezésekkel a $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) := \mathrm{Hom}(\mathcal{F}|U, \mathcal{G}|U)$ struktúra egy kéve lesz. Továbbá az $x$ pontbeli csírája egy $f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}|U, \mathcal{G})(U)$-nak éppen az $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ lesz.

## 2. Kohomológiaelméletek

Egy $X$ topologikus tér feletti $\mathcal{L}^i$ Abel-csoport értékű kévék sorozatát *fokszámozott kévének* hívunk. Ha adottak továbbá $d^i : \mathcal{L}^i \to \mathcal{L}^{i+1}$ leképezések, amelyekre a

$$\ldots \xrightarrow{d^{i-1}} \mathcal{L}^i \xrightarrow{d^i} \mathcal{L}^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \ldots$$

sor egzakt, akkor ezt egy *differenciálkévének* hívjuk.

Egy tipikus esete egy ilyen differenciálkévének az, amikor adott egy $\mathcal{S}$ kéve, és tekintjük egy *feloldását.* Több lehetőség is nyílik egy feloldás definíciójára. Megfelelő feltételek választása esetén az eredmények nem fognak függeni a feloldások választásától. Egyelőre csak a legáltalánosabb tulajdonságát írom le egy feloldásnak, illetve hogy hogyan számolható ki belőle a kohomológia.

Egy feloldás egy olyan $\mathcal{S}^i$ differenciálkéve lesz, amire $i < 0$ esetén $\mathcal{S}^i = 0$, továbbá adott egy $\iota : \mathcal{S} \to \mathcal{S}^0$ leképezés, hogy a

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{\iota} \mathcal{S}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{S}^1 \xrightarrow{d^1} \ldots$$

sor egzakt.

Ha tekintünk egy balegzakt funktort, akkor az egy feloldás hosszú egzakt sorát félig egzakt sorba viszi. Ennek a sornak az egzaktságának hiányát méri a kohomológia.

Ebben a dolgozatban a funktor, amit vizsgálunk, a globális szelések funktora lesz, azaz $\Gamma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(X)$, ahol $X$ a teljes topologikus tér. Értelemszerűen ha $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, akkor $\Gamma(f) = f(X)$. A $\Gamma$ funktor az $X$ feletti kévék kategóriájából megy az Abel-csoportok kategóriájába.

Egy egzakt sor $\Gamma$ szerinti képe féligegzakt lesz, hiszen a $d^i \circ d^{i-1}$ a csírákat 0-ba viszi, így az egész szelést is. Általában nem lesz egzakt, és lehet tekinteni a

$$H^i = \frac{\ker \Gamma(d^i)}{\operatorname{im} \Gamma(d^{i-1})}$$

faktormodulust. Megfelelően választott feloldás esetén ez izomorf lesz a hamarosan definiálandó kévekohomológiával.

Az $\mathcal{S}$ kéve feloldásából való kohomológiaszámításnál az $\mathcal{S}$-et nem vesszük be, a legelső kohomológia tehát $H^0 = \ker \Gamma(d^0)$ lesz.

### 2.1. Kanonikus feloldás és kévekohomológia

Először bevezetjük a *kanonikus feloldását* egy kévének.

Legyen $\mathcal{A}$ egy tetszőleges kéve, és legyen $C^0(\mathcal{A})$ a következőképpen értelmezve:

$$C^0(\mathcal{A})(U) = \{f : U \to \mathcal{A} \mid f(x) \in \mathcal{A}_x\},$$

azaz az összes nem feltétlenül folytonos szelés $U$ fölött. Ilyenkor mindig létezik egy $\iota : \mathcal{A} \to C^0(\mathcal{A})$ injekció.

Legyen ezután

$$C^n(\mathcal{A}) = C^0\left(\frac{C^{n-1}(\mathcal{A})}{C^{n-2}(\mathcal{A})}\right)$$

azzal a kiegészítéssel, hogy $C^{-1}(\mathcal{A})$ helyére $\mathcal{A}$-t írunk. Ezek között értelmezhető a $d : C^n(\mathcal{A}) \to C^{n+1}(\mathcal{A})$ úgy, mint a $C^n(\mathcal{A}) \to C^n(\mathcal{A})/C^{n-1}(\mathcal{A})$ természetes leképezés és az $\iota$ beágyazás kompozíciója.

Ekkor a

$$\mathcal{A} \longrightarrow C^0(\mathcal{A}) \longrightarrow C^1(\mathcal{A}) \longrightarrow \dots$$

kévék sora egzakt. Ennek a sornak

$$C^0(\mathcal{A}) \longrightarrow C^1(\mathcal{A}) \longrightarrow \dots$$

a globális szeléseinek a kohomológiája a *Godement-kohomológia* vagy egyszerűen a *kévekohomológia.*

Ha $i = 0$, akkor $H^i(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Ha $i > 0$-ra a $H^i(\mathcal{A}) = 0$, akkor az $\mathcal{A}$ kévét *aciklikusnak* hívjuk.

A kohomológiák számításában nagyon praktikusak lesznek a laza kévék, ugyanis ezek aciklikusak.

Ha adott egy

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

kévék rövid egzakt sora, és az $\mathcal{A}$ kéve laza, akkor bármely $U$ nyílt halmazra

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(U) \longrightarrow \mathcal{B}(U) \longrightarrow \mathcal{C}(U) \longrightarrow 0$$

úgyszintén egzakt, a leképezések értelemszerű választása esetén. Ha ezen felül $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ is lazák, akkor $\mathcal{C}$ is. Ugyanis legyen adott $U \subseteq X$ egy nyílt halmaz, és adott az $s \in \mathcal{C}(U)$ szelés! Mivel $\mathcal{A}$ laza, ezért a

$$\mathcal{B}(U) \longrightarrow \mathcal{C}(U) \longrightarrow 0$$

sor is egzakt, és lesz egy $t \in \mathcal{B}(U)$, aminek a képe éppen $s$. Ez a $t$ kiterjed a teljes $X$-re, és a képe nyilván kiterjeszti $s$-et. Tehát a $\mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(U)$ megszorítás szürjektív.

Ezek alapján ha tehát $\mathcal{A}$ egy laza kéve, akkor a

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow C^0(\mathcal{A}) \longrightarrow \dots$$

egzaktsága azt jelenti, hogy a

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow C^0(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}/C^0(\mathcal{A}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}/C^0(\mathcal{A}) \longrightarrow C^1(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}/C^1(\mathcal{A}) \longrightarrow 0$$

$$\vdots$$

rövid egzakt sorokban rekurzívan belátható, hogy minden tag laza. Hiszen az első két tag laza, tehát a harmadik is, ami a következő sor első tagja. Így a globális széléseik is egzakt sort adnak, és a kohomológiacsoportok triviálisak lesznek.

Ha adott két kéve, $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$, illetve egy $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ leképezés köztük, akkor értelmezhető az $f$-nek a $C^0$ szerinti képe, $C^0(f) : C^0(\mathcal{A}) \to C^0(\mathcal{B})$ úgy, hogy egy $s : U \to \mathcal{A}$ nem feltétlenül folytonos széléshez a $C^0(f)(s)(x) = f_x(s(x))$-et rendeli.

Továbbá ha adott egy ilyen $f$, akkor a $C^n(f)$-ek mind definiálhatók, és kompatibilisak lesznek a $d$ operációval. Ily módon a globális szélésekből előállított kohomológiákra is kiterjed, amit $H^n(f)$-fel fogunk jelölni.

Ekkor ha

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

egzakt, akkor a rostokon is egzaktak, és így

$$0 \longrightarrow C^0(\mathcal{A}) \xrightarrow{C^0(f)} C^0(\mathcal{B}) \xrightarrow{C^0(g)} C^0(\mathcal{C}) \longrightarrow 0$$

is egzakt lesz. Ez alapján egy egzakt sor tagonként vett kanonikus feloldásainak ugyanazon indexű elemei ismét egzakt sort fognak adni:

$$0 \longrightarrow C^i(\mathcal{A}) \xrightarrow{C^i(f)} C^i(\mathcal{B}) \xrightarrow{C^i(g)} C^i(\mathcal{C}) \longrightarrow 0.$$

A $C^i(\mathcal{A})$ kévék mind lazák, és így a fenti egzakt sor globális szelései is egzaktak lesznek.

Homologikus algebrából tudjuk, hogyha hosszú féligegzakt sorok között vannak leképezések, akkor azok a kohomológiákban származtatnak egy hosszú egzakt sort. Ezt a fenti esetre alkalmazva egy

$$\ldots \longrightarrow H^{i-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow H^i(\mathcal{A}) \longrightarrow H^i(\mathcal{B}) \longrightarrow H^i(\mathcal{C}) \longrightarrow H^{i+1}(\mathcal{A}) \longrightarrow \ldots$$

egzakt sort nyerünk.

## 2.2. Az általánosított de Rham tétel

A kanonikus feloldást kiszámolni nehézkes. Több klasszikus kohomológia-elmélet van, mint például a szinguláris, vagy a de Rham-féle kohomológiák, és ezeket sokkal könnyebb kezelni.

Szeretnénk megvizsgálni, hogy ezek milyen összefüggésben vannak a Godement-féle kévekohomológiával. Fel fogjuk írni ezeket, mint egy bizonyos $\mathcal{S}$ kéve *aciklikus feloldása*, azaz minden $\mathcal{S}^i$ maga aciklikus lesz. Be fogjuk látni a következő tételt:

**Tétel:** Egy aciklikus feloldás ugyanazt a kohomológiát adja, mint a kanonikus kohomológia. Azaz ha

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{S}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{S}^1 \xrightarrow{d^1} \ldots$$

az $\mathcal{A}$ kéve egy aciklikus feloldása, akkor

$$\frac{\ker(d^i : \mathcal{S}^i \to \mathcal{S}^{i+1})}{\operatorname{im}(d^{i-1} : \mathcal{S}^{i-1} \to \mathcal{S}^i)} = H^i(\mathcal{A}).$$

Ehhez először egy homologikus algebrai lemmára lesz szükség, aminek nem bocsátkozom a bizonyításába.

### 2.2.1. Egy homologikus algebrai lemma

Elsőként definiálom a *duplakomplexust*.

Legyen adott modulusok egy $K^{ij}$ rendszere, és $d^{ij} : K^{ij} \to K^{i+1,j}$, illetve $d'^{ij} : K^{ij} \to K^{i,j+1}$ leképezések úgy, hogy a következő diagrammon:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow d'^{i,j+2} & & \uparrow d'^{i+1,j+2} & & \uparrow d'^{i+2,j+2} & & \\
\dots & \xrightarrow{d^{i-1,j+2}} & K^{i,j+2} & \xrightarrow{d^{i,j+2}} & K^{i+1,j+2} & \xrightarrow{d^{i+1,j+2}} & K^{i+2,j+2} & \xrightarrow{d^{i+2,j+2}} & \dots \\
 & & \uparrow d'^{i,j+1} & & \uparrow d'^{i+1,j+1} & & \uparrow d'^{i+2,j+1} & & \\
\dots & \xrightarrow{d^{i-1,j+1}} & K^{i,j+1} & \xrightarrow{d^{i,j+1}} & K^{i+1,j+1} & \xrightarrow{d^{i+1,j+1}} & K^{i+2,j+1} & \xrightarrow{d^{i+2,j+1}} & \dots \\
 & & \uparrow d'^{i,j} & & \uparrow d'^{i+1,j} & & \uparrow d'^{i+2,j} & & \\
\dots & \xrightarrow{d^{i-1,j}} & K^{i,j} & \xrightarrow{d^{i,j}} & K^{i+1,j} & \xrightarrow{d^{i+1,j}} & K^{i+2,j} & \xrightarrow{d^{i+2,j}} & \dots \\
 & & \uparrow d'^{i,j-1} & & \uparrow d'^{i+1,j-1} & & \uparrow d'^{i+2,j-1} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

a sorok és az oszlopok félig egzakt sort alkotnak, továbbá $d$ és $d'$ antikommutálnak! (azaz $d \circ d' + d' \circ d = 0$)

Ekkor lehet tekinteni a

$$K^n = \bigoplus_{i=0}^{n} K^{i,n-i}$$

modulusokat a

$$D^i = \bigoplus_{i=0}^{n} (d^{i,n-i} + d'^{i,n-i})$$

leképezésekkel. Ez úgyszintén félig egzakt sorozatot fog adni, mivel

$$D^{n+1} \circ D^n = \bigoplus_{i=0}^{n+1} (d'^{i+1,n-i} \circ d^{i,n-i} + d^{i,n+1-i} \circ d'^{i,n-i}) = 0.$$

Ennek a kohomológiáit így fogjuk jelölni:

$$H^i(\mathcal{K}^*, D^*) = \frac{\ker(D^i : K^i \to K^{i-1})}{\operatorname{im}(D^{i-1} : K^{i-1} \to K^i)}$$

Legyen adott a $\mathcal{A}^i$ differenciálmodulus $\partial^i$ operátorokkal, ahol $\partial^{i+1} \circ \partial^i = 0$, és $\iota^i : \mathcal{A}^i \to \mathcal{K}^{i,0}$ injekciók úgy, hogy a

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{j+1} & \xrightarrow{\iota^{j+1}} & K^{0,j+1} \\ \uparrow \partial^j & & \uparrow d^{0,j} \\ \mathcal{A}^j & \xrightarrow{\iota^j} & K^{0,j} \end{array}$$

diagramm kommutatív, továbbá a

$$\mathcal{A}^j \xrightarrow{\iota^j} K^{0,j} \xrightarrow{d'^{0,j}} K^{1,j} \xrightarrow{d'^{1,j}} \dots$$

sorok egzaktak!

Ez esetben ha az $\mathcal{A}^i$ és $\partial^i$-ből képezhető kohomológiákat így jelöljük:

$$H^i(\mathcal{A}^*, \partial^*) = \frac{\ker(\partial^i : \mathcal{A}^i \to \mathcal{A}^{i-1})}{\operatorname{im}(\partial^{i-1} : \mathcal{A}^{i-1} \to \mathcal{A}^i)},$$

akkor $H^*(K, D)$ és $H^*(\mathcal{A}, \partial)$ izomorfak lesznek.

### 2.2.2. Az általánosított de Rham tétel bizonyítása

A fenti állítás alapján be fogom látni az *általános de Rham tételt.*

Nevezetesen, ha adott egy $\mathcal{F}$ kévének egy $(\mathcal{A}^i, \partial^i)$ aciklikus feloldása, azaz ahol az $\mathcal{A}^i$-k aciklikusak, akkor az ebből a feloldásból nyerhető kohomológiák izomorfak lesznek a Godement-féle kévekohomológiákkal.

Vegyük a

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 & & \uparrow \partial^i & & \uparrow C^0(\partial^i) & & & & \uparrow C^j(\partial^i) & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}^i & \xrightarrow{\iota_i} & C^0(\mathcal{A}^i) & \xrightarrow{d_i^0} & \ldots & \xrightarrow{d_i^{j-1}} & C^j(\mathcal{A}^i) & \xrightarrow{d_i^j} & \ldots \\
 & & \uparrow \partial^{i-1} & & \uparrow C^0(\partial^{i-1}) & & & & \uparrow C^j(\partial^{i-1}) & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 & & \uparrow \varepsilon & & \uparrow C^0(\varepsilon) & & & & \uparrow C^j(\varepsilon) & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\iota} & C^0(\mathcal{F}) & \xrightarrow{d^0} & \ldots & \xrightarrow{d^{j-1}} & C^j(\mathcal{F}) & \xrightarrow{d^j} & \ldots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & & & 0 & &
\end{array}$$

kéveduplakomplexust! Itt a $(\mathcal{C}^j(\mathcal{A}^i), d_i^j)$ sorok az $\mathcal{A}^i$ kanonikus feloldásait jelölik, $\iota_i$ beágyazással, míg a $(\mathcal{A}^i, \partial^i)$ sor maga az $\mathcal{F}$ kéve feloldása, $\varepsilon$ beágyazással.

A fenti diagramm sorai egzaktak, mivel a kanonikus feloldás egzakt. Az oszlopai is egzaktak, mivel a $C^j$-k egzakt sort egzaktba visznek. Végül könnyen látható a $C^j(f)$ definíciójából, hogy a diagramm kommutatív. Úgy tehető antikommutatívvá, hogy minden páros sorszámú oszlopban a $C^{2n}(\partial^i)$-k helyébe $-C^{2n}(\partial^i)$-t írunk, ami nem befolyásolja a homologikus tulajdonságait az oszlopnak.

Ha ebben a diagrammra alkalmazzuk a globális szelés funktort, modulusok egy olyan dupladiagrammját kapjuk, amikre az első sor és oszlop féligegzakt lesz. A többi oszlop egzakt lesz, mivel a $C^j(\mathcal{F})$-ek és $C^j(\mathcal{A}^i)$-k lazák. A sorok az első kivételével úgyszintén egzaktak lesznek, mivel feltettük, hogy az $\mathcal{A}^i$-k aciklikusak.

Definiáljuk a

$$K^{ij} := \Gamma(C^j(\mathcal{A})^i)$$

duplakomplexust! Ekkor a $\Gamma(\mathcal{A}^*) \xrightarrow{\Gamma(\iota_*)} \Gamma(K^{*,*})$ diagrammok meg fognak felelni a fenti algebrai állítás feltételeinek. Így a $H^i(\mathcal{F})$ izomorf lesz a $H^i(K)$ kohomológiákkal. Hasonlóan a $\Gamma(C^*\mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(C^*(\varepsilon))} \Gamma(K^{*,*})$ diagrammok is, így a $H^i(K)$ kohomológia izomorf lesz az $\mathcal{A}^i$-ken keresztül nyert kohomológiákkal is.

### 2.3. Čech kohomológia

Legyen adott egy tetszőleges $\mathcal{A}$ kéve az $M$ sokaság felett! Ha adott egy $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ fedése $M$-nek ($i \in I$ indexhalmazzal), akkor bármelyik $S = (i_0, \ldots, i_n)$ rendezett $n$-esre $i_k \in I$ esetén értelmezzük $U_S := \cap_{i \in S} U_i$-t! Ekkor lehet tekinteni a

$$C^n(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) := \prod_{|S|=n+1} \mathcal{A}(U_S)$$

definícióval vett struktúrát.

Értelmezhető a $d : C^n(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) \to C^{n+1}(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$ differenciáloperátor a következő definícióval: (értelemszerűen megszorítva a jobb oldali függvényt)

$$(df)_{(i_0,\ldots,i_{n+1})} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k f_{(i_0,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_{n+1})}.$$

Legyenek az $M$-nek az $\mathfrak{U}$ és $\mathfrak{V}$ fedései! Az $\mathfrak{U} \ll \mathfrak{V}$, azaz $\mathfrak{U}$ *finomabb*, mint $\mathfrak{V}$, ha létezik egy $b : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ leképezés, hogy bármely $U \in \mathfrak{U}$-re $U \subseteq b(U)$. Ilyenkor létezik egy $C^n(\mathfrak{U}; \mathcal{A}) \to C^n(\mathfrak{V}; \mathcal{A})$ leképezés, ami a $(s_U)_{u \in \mathfrak{U}}$-hoz a $(\sum_{V=b(U)} s_U|_V)_{V \in \mathfrak{V}}$ elemet rendeli, és ez kommutál a differenciáloperátorral.

A Čech-kokomplexusok a fenti $C^n(\mathfrak{U}; \mathcal{A})$ struktúrák direkt limeszeként áll elő:

$$\check{C}^n(\mathcal{A}) = \lim_{\mathfrak{U}} \operatorname{ind} C^n(\mathfrak{U}; \mathcal{A}).$$

Ezekre úgyszintén átvihető a differenciáloperátor.

Végül elkészíthető a Čech-kohomológia:

$$\check{H}^n(\mathcal{A}) = \frac{\ker(d : \check{C}^n(\mathcal{A}) \to \check{C}^{n+1}(\mathcal{A}))}{\operatorname{im}(d : \check{C}^{n-1}(\mathcal{A}) \to \check{C}^n(\mathcal{A}))}$$

Ha adott egy

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

rövid egzakt sor, akkor a megfelelő Čech-kokomplexusaik

$$0 \longrightarrow \check{C}^n(\mathcal{A}) \xrightarrow{\check{C}^n(f)} \check{C}^n(\mathcal{B}) \xrightarrow{\check{C}^n(g)} \check{C}^n(\mathcal{C})$$

egy egzakt sort fognak alkotni. Viszont ha $((s_U)_{U\in\mathfrak{U}},\mathfrak{U})$ egy reprezentánsa $\check{C}^n(\mathcal{C})$-nek, akkor bármely $s_U \in \mathcal{C}(U)$-hoz kell legyen olyan $U_i$ fedése $U$-nak és $t_{U_i} \in \mathcal{B}(U_i)$-k, hogy $g(t_{U_i}) = s_U|_{U_i}$, mivel az eredeti sor egzakt volt. Vehetjük az összes $U$-ra ezeknek az $U_i$-knek az $\mathfrak{U}'$ unióját, és a $b(U_i) = U$ definícióval $\mathfrak{U}' \ll \mathfrak{U}$, tehát az $((s_U)_{U\in\mathfrak{U}},\mathfrak{U})$-t finomíthatjuk a $\mathfrak{U}'$ fedésre, és ott előáll a $((t_{U_i})_{U_i\in\mathfrak{U}'},\mathfrak{U}')$ képeként. Így a

$$0 \longrightarrow \check{C}^n(\mathcal{A}) \xrightarrow{\check{C}^n(f)} \check{C}^n(\mathcal{B}) \xrightarrow{\check{C}^n(g)} \check{C}^n(\mathcal{C}) \longrightarrow 0$$

is egzakt.

A Čech-kohomológia kévésíthető. Ha minden $U \subseteq X$ nyílt halmazhoz hozzárendeljük az $\mathcal{A}|U$ Čech-kohomológiáit, és a megszorítást értelemszerűen definiáljuk, akkor egy laza kévét kapunk.

Azt is állítom, hogy a

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{A}) \longrightarrow \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A}) \longrightarrow \dots$$

sor egzakt.

Egyfelől a $0 \to \mathcal{A} \to \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{A}) \to \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{A})$ egzaktsága következik a ragasztási axiómából: ha $\mathfrak{U}$ egy fedése $U$-nak, akkor

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(U) \longrightarrow \prod_{U_1\in\mathfrak{U}} \mathcal{A}(U_1) \longrightarrow \prod_{U_1,U_2\in\mathfrak{U}} \mathcal{A}(U_1 \cap U_2)$$

egzakt, és lehet venni a direkt limeszt $U$-ban, $\mathfrak{U}$-ban.

Másfelől legyen $x \in X$ egy rögzített pont, és tekintsünk egy $s \in C^n(U)$ szelést $U$-n, $x$ egy környezetén, amire $ds = 0$ lesz! Vehetjük továbbá $s$-nek egy reprezentációját egy $\{U_i|i \in I\}$ fedéssel, azaz $s_S \in C^n(U_S)$, ahol $S \subseteq I$. Tegyük fel, hogy $U \subseteq U_0$! Ekkor definiáljuk a $t$ szelést a következőképpen:

$$t_{i_0\dots i_{n-1}} = s_{0,i_0\dots i_{n-1}}$$

Ezzel a definícióval

$$(dt)_{i_0\dots i_{n-1}} = \sum (-1)^k s_{0,i_0\dots\hat{\imath}_k\dots i_n} = s_{i_0\dots i_n} - (ds)_{0,i_0\dots i_n},$$

tehát $dt = s$, és ezt kellett megmutatni.

Mivel a Čech kokomplexusok kévéi lazák, így azok egy aciklikus feloldását adják az $\mathcal{A}$ kévének.

### 2.4. Puha kévék

Legyen $\mathcal{L}$ egy Abel-csoport értékű puha kéve az $X$ sokaság felett!

Ekkor az $\mathcal{L}$ kéve aciklikus lesz. Ez azért van, mert ha a

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

kévék rövid egzakt sora, és $\mathcal{A}$ meg $\mathcal{B}$ puha, akkor $\mathcal{C}$ is az.

Először azt fogom bemutatni, hogy ha a fenti egzakt sorban $\mathcal{A}$ puha, akkor a globális szelés megtartja a sor egzaktságát. Ehhez azt kell látni, hogy egy $s \in \mathcal{C}(U)$ előáll egy $\mathcal{B}(U)$-beli elem képeként. Tudjuk, hogy létezik $U$-nak $U_i$ nyílt fedése, és $t_i \in \mathcal{B}(U_i)$, hogy $g(U_i)(t_i) = s|_{U_i}$. Vegyünk $F_i \subseteq U_i$ zárt részhalmazokat, amik nyílt halmazok lezártjai!

Legyen $\Lambda$ azoknak a $(t, J)$ pároknak a halmaza, amire $J \subseteq I$, és az $F_J := \bigcup_{j \in J} F_j$ definícióval $t \in \mathcal{B}(F_J)$ és $g(t) = s|_{F_J}$! Ez a $\Lambda$ nyilván nem üres, és felszálló, tehát van egy maximális $(t, J)$ eleme. Tegyük fel, hogy $J \neq I$! Ekkor van egy $i \in I \setminus J$, és erre $g(t|_{F_J \cap F_i} - t_i|_{F_J \cap F_i}) = 0$. Így létezik egy $u \in \mathcal{A}(F_J \cap F_i)$, amire $f(u) = t|_{F_J \cap F_i} - t_i|_{F_J \cap F_i}$. Mivel $\mathcal{A}$ puha, ezért ez az $u$ kiterjed a teljes $U_i$-re, és a $t$ meg az $f(u) + t_i$ összeragad egy $F_{J \cup \{i\}}$ feletti szeléssé. Mivel $J$ maximális, ezért csakis úgy lehet ez, hogy $I = J$, és ekkor $t$ az egész $U$-n értelmes, és $g(t) = s$.

Ezután a bizonyítás után könnyű belátni, hogy amennyiben a $\mathcal{B}$ is puha, akkor $\mathcal{C}$ is. Legyen ugyanis $F$ egy zárt halmaz, és vegyük az $s \in \mathcal{C}(F)$ szelést! Ekkor a

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}|F \xrightarrow{f|F} \mathcal{B}|F \xrightarrow{g|F} \mathcal{C}|F \longrightarrow 0$$

sor is egzakt, és mivel $\mathcal{A}|F$ továbbra is puha, ezért a globális szelésük is egzakt, ami viszont nem más mint

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(F) \xrightarrow{f(F)} \mathcal{B}(F) \xrightarrow{g(F)} \mathcal{C}(F) \longrightarrow 0.$$

Ekkor $s \in \mathcal{C}(F)$-t felveszi egy $t \in \mathcal{B}(F)$, ami kiterjed egy $t' \in \mathcal{B}(X)$-szé, és $f(U)(t')$ kiterjeszti $s$-et $\mathcal{C}$-n.

Így a kanonikus feloldás összes eleme puha lesz, és a globális szelés megtartja annak egzaktságát.

Ha az $\mathcal{A}$ gyűrű értékű kéve puha, akkor ha a $\mathcal{M}$ egy $\mathcal{A}$-modulus értékű kéve, akkor az is puha. Ugyanis egy $s \in \mathcal{M}(F)$ az $F$ zárt halmazon lévő szelés kiterjeszthető az $F$ egy $U$ környezetére. Vehetjük utána azt a $t \in \mathcal{A}(F \cup (X \setminus U))$ szelést, hogy $t|_F = 1$, a gyűrű egységeleme, és $t|_{X \setminus U} = 0$. Ekkor $ts$ kiterjeszthető 0-ként az egész $X$-re.

### 2.5. Szinguláris kohomológia

Rögzítsünk egy $A$ gyűrűt! Bármilyen $X$ topologikus téren értelmezhető az $A$ együtthatós *szinguláris kohomológiák* elmélete.

Legyen $S_n = \{0, \ldots, n\}$ az egész számok halmaza 0-tól $n$-ig! Tekinthetjük a $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ szimplexet, aminek azok az $(x_0, \ldots, x_n)$ pontok az elemei, hogy $x_i \geq 0$ és $\sum_{i=0}^{n} x_i = 1$. Ha adott egy $f : S_n \to S_m$ függvény, ez generál egy $\overline{f} : \Delta_n \to \Delta_m$ leképezést oly módon, hogy $\overline{f}(x_0, \ldots, x_n) = (y_0, \ldots, y_m)$, ahol $y_k = \sum_{i \in f^{-1}(k)} x_i$.

Legyen ekkor $H_n = \{\sigma : S_n \to X\}$ az úgynevezett *$n$-dimenziós szinguláris szimplexek* halmaza! Az ezek által szabadon generált $A$-modulust $C_{sing,n}(X)$-szel fogjuk jelölni, és *$n$-dimenziós komplexusoknak* fogjuk hívni.

Tekinthetjük a szigorúan monoton $f_i : S_{n-1} \to S_n$ leképezéseket, ahol $i$ fogja azt jelölni, hogy melyik elemét nem veszi fel $S_n$-nek. Ennek segítségével tudjuk értelmezni egy $C_{sing,n}(X)$-beli komplexus határát. Legyen ugyanis $\sigma \in H_n$ egy generátora $C_{sing,n}(X)$-nek! Vehetjük az összes $f_i : S_{n-1} \to S_n$ szigorúan monoton leképezést, és értelmezzük a határt a következő módon:

$$\partial \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ \overline{f}_i$$

Könnyen belátható, hogy $\partial^2 = 0$.

Most rátérek a szimpliciális kokomplexusok definíciójára. Legyen

$$C^n_{sing}(X;A) = \mathrm{Hom}(C_{sing,n}(X), A)$$

a modulus-homomorfizmusok modulusa, és a határ-leképezés $\psi \in C^n_{sing}(X;A)$, $\sigma \in C_{sing,n}(X)$-re:

$$d\psi(\sigma) = \psi(\partial\sigma).$$

Ekkor lévén $d^2 = 0$, értelmezhető a

$$H^n_{sing}(X;A) = \frac{\ker(d : C^n_{sing}(X;A) \to C^{n+1}_{sing}(X;A))}{\mathrm{im}(d : C^{n-1}_{sing}(X;A) \to C^n_{sing}(X;A))}$$

szinguláris kohomológia.

A szimpliciális kohomológiát könnyen lehet kévésíteni: ha adott az $X$ topologikus tér, $U \subseteq M$ nyílt részhalmaza, akkor legyen $\mathcal{C}^n(X;A)(U)$ az $U$ szinguláris kokomplexusa, és $V \subseteq U$-ra legyen a megszorítás úgy értelmezve, hogy egy $\psi \in \mathcal{C}^n(X;A)(U)$ a $\sigma : \Delta_n \to V$-hez rendelje hozzá a $\psi(\iota_U \circ \sigma)$ beágyazással vett kompozíción a képét!

Ha a triviális, $A$ rostú kévét is $A$-val jelöljük, akkor a következő sor:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \mathcal{C}^0(X;A) \longrightarrow \mathcal{C}^1(X;A) \longrightarrow \dots$$

egzakt, feltéve hogy minden pontnak van kontraktibilis környezete, aminek nincsen szinguláris kohomológiája. A szinguláris kohomológia ezeknek a kévéknek a globális szeléseiként előálló sornak a kohomológiája lesz.

**Állítás:** Ha az $X$ topologikus tér minden pontjának van kontraktibilis környezete, akkor a szinguláris kohomológiák éppen az $A$ kévekohomológiáival lesznek izomorfak. Azaz

$$H^n(A) \cong H^n_{sing}(X).$$

Ehhez azt kell belátni, hogy a $\mathcal{C}^i$-k aciklikusak.

A $C^n(X;A)$ vektortérből lehet készíteni $\mathcal{C}^0(M;A)$-modulust, azaz a nem feltétlenül folytonos, $A$-beli szelések kévéje felett, ha rögzítjük a $\Delta_n$ egy $O_n$ pontját. Legyen ugyanis adott egy $f : C_{sing,n}(X) \to A$, egy $\varphi \in \mathcal{C}^0(M; A)$, és legyen $(\varphi \cdot f)(\sigma) = \varphi(\sigma(O_n))f(\sigma)$! Mivel $\mathcal{C}^0(M; A)$ puha, ezért a $C^n$ kévék is. Így a szinguláris komplexusok egy aciklikus feloldását adják $A$-nak, a triviális, $M$ alapú, $A$ rostú kévének.

### 2.6. De Rham kohomológia

Ha adott egy differenciálható sokaság $M$, tekinthetjük a koérintő nyalábját, $T^*M$-et. A koérintőnyalábjának tekinthetjük az $n$-edik Grassman algebráját, $\bigwedge^n T^*M$-et. Ezt $\mathcal{E}^n(M)$-mel fogjuk jelölni, és *n-edrendű differenciálformáknak* hívjuk. A Grassman algebra gyűrűstruktúrája miatt létezik egy $\wedge : \mathcal{E}^m(M) \otimes \mathcal{E}^n(M) \to \mathcal{E}^{m+n}(M)$ bilineáris leképezés.

Létezik egy $d$ deriválás, ami megszorítva az $n$-edik formák terére $d : \mathcal{E}^n(M) \to \mathcal{E}^{n+1}(M)$ típusú, $d^2 = 0$, és bármely $\varphi \in \mathcal{E}^m$ és $\psi \in \mathcal{E}^n(M)$ formákra $d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-1)^m \varphi \wedge d\psi$.

Ezek alapján definiálható a differenciálformák *de Rham-kohomológiája*:

$$H^n_{dR}(M) = \frac{\ker(d : \mathcal{E}^n(M) \to \mathcal{E}^{n+1}(M))}{\operatorname{im}(d : \mathcal{E}^{n-1}(M) \to \mathcal{E}^n)(M)},$$

amire öröklődik a $\wedge$-szorzás.

A de Rham-kohomológiából a következőképpen lehet kévésíteni. Először is az $M$ bármely nyílt $U$ részhalmazára értelmezhető $\mathcal{E}^n(U)$, és ha adottak $V \subseteq U$ nyílt részhalmazok, akkor tekinthető a $\varphi \to \varphi|_V$ megszorító leképezések $\mathcal{E}^n(U)$-ról $\mathcal{E}^n(V)$-re.

Ekkor viszont a $d$ leképezésekkel együtt ezek kévék egy egzakt sorát alkotnak:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\iota} \mathcal{E}^0(M) \xrightarrow{d^0} \mathcal{E}^1(M) \xrightarrow{d^1} \dots,$$

ahol $\mathbb{R}$ a lokálisan konstans, valós értékű függvények kévéje. Azért lesz egzakt, mert egy pont bármilyen környezete tartalmaz euklideszi környezetet, amire megszorítva ez a sor egzakt, a Poincaré-lemma miatt. Ebből a feloldásból kaphatjuk a *de Rham-kohomológiát.*

**Állítás:** A de Rham-kohomológiák izomorfak az $\mathbb{R}$ kévekohomológiáival, azaz

$$H^n(\mathbb{R}) \cong H^n_{dR}(M).$$

Az általánosított de Rham tétel alapján elég belátni, hogy az $\mathcal{E}^i(M)$ kévék aciklikusak.

Tudjuk, hogy az $\mathcal{E}^i(M)$ kévék az akárhányszor differenciálható függvények, $\mathcal{E}^0(M)$ feletti modulus. Belátom, hogy $\mathcal{E}^0(M)$ puha, és ebből következik, hogy $\mathcal{E}^i(M)$ is az, és így aciklikus.

$\mathcal{E}^0(M)$-n léteznek *egység osztási függvények*: bármely $U_i$ fedésére $M$-en olyan $\eta_i$ függvények, amelyeknek a tartója $U_i$-n van, és $\sum_i \eta_i = 1$. Az ilyen kévét *finomnak* hívják.

Legyen most $K \subseteq M$ egy zárt halmaz, és $s \in \mathcal{E}^0(K)$ egy szelés! Be lehet látni, hogy ekkor létezik egy $U \supseteq K$ nyílt halmaz, amire $s$ kiterjed $\tilde{s}$-ként. Az $M$-nek egy lehetséges fedése az $U$ és $M \setminus K$. Ezen van egy $\eta_U$ és egy $\eta_{M\setminus K}$ függvény, amelyek összege 1. Válasszuk az $\eta_U \cdot \tilde{s}$-et $s'$-nek! Mivel $\eta_{M\setminus K}|_K = 0$, így $\eta_U|_K = 1$, és $\tilde{s}|_K = s$.

### 2.7. Dolbeault kohomológia

Legyen most $M$ egy komplex differenciálható sokaság! Az $M$ lokális koordinátáit jelöljük $x_i$-kkel és $y_i$-kkel úgy, hogy a $z_i = (x_i, y_i)$ koordinátákban a lokális térképek holomorfak legyenek!

Vehetjük ekkor a $\mathcal{T}M$ érintőnyaláb komplexifikáltját, $\mathbb{C} \otimes \mathcal{T}M$-et, hasonlóan a $\mathcal{T}^*M$-ét: $\mathbb{C} \otimes \mathcal{T}^*M$. A következő koordináta-áttéréssel:

$$z_i = x_i + iy_i;$$

$$\overline{z_i} = x_i - iy_i,$$

ami a $\mathbb{C} \otimes \mathcal{T}^*M$-en

$$dz_i = dx_i + idy_i \qquad d\overline{z_i} = dx_i - idy_i,$$

a $\mathbb{C} \otimes \mathcal{T}M$-en

$$\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - i\frac{\partial}{\partial y_i}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z_i}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + i\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$$

áttérést hozza létre, felbontható a $\mathbb{C} \otimes \mathcal{T}^*M$ a $dz_i$-k által kifeszített $T^*M$-re, illetve a $d\overline{z_i}$-k által kifeszített $\overline{T^*M}$-re.

Egy $f : M \to \mathbb{C}$ függvény holomorfitása azt jelenti, hogy kielégíti a Cauchy–Riemann differenciálegyenleteket, azaz

$$\frac{\mathrm{Re}\partial f}{\partial x_i} = \frac{\mathrm{Im}\partial f}{\partial y_i};$$

$$\frac{\mathrm{Im}\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\mathrm{Re}\partial f}{\partial y_i},$$

amit az új koordinátarendszerben úgy is fel lehet írni, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i} = 0.$$

Ez alapján jöhet az ötlet, hogy a $d$ differenciáloperátort a formák terén kettébontsuk egy $\partial$ és egy $\overline{\partial}$ operátorra a következő módon.

Tekintsük az $\mathcal{E}^n(M)$ differenciálformák terét! A fenti koordinátarendszer segítségével $\mathbb{C} \otimes \mathcal{E}^n(M)$ felbontható $\Omega^{p,q}(M)$-ekre, ahol $p + q = n$ a következőképpen: az $\Omega^{p,q}(M)$-et mint $\mathcal{E}^0(M)$-modulust feszítsék ki a $dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{j_q}$ formák! Ekkor a $d$ operátor ezekre megszorítva

$$d : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+1,q}(M) \oplus \Omega^{p,q+1}(M)$$

módon hat, és eszerint kettébontjuk $d$-t a $\partial$ és $\overline{\partial}$ operátorokra.

Jelöljük $\Omega^p(M)$-mel az $M$ feletti $p$-edfokú holomorf formákat! Ha rögzítjük a $p$-t, akkor az $\Omega^{p,q}(M)$-k a $\overline{\partial}$ differenciáloperátorral egy féligegzakt sort alkotnak. Az egész kévésítésével ez kévék egzakt sora lesz a Poincaré–Dolbeault tétel miatt.

$$0 \longrightarrow \Omega^p(M) \xrightarrow{\iota} \Omega^{p,0}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}^0} \ldots \xrightarrow{\overline{\partial}^{q-1}} \Omega^{p,q}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}^q} \Omega^{p,q+1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}^{q+1}} \ldots$$

Az első láncszem egzaktsága éppen a Cauchy–Riemann kritériumnak felel meg.

Az ebből a sorból nyert kohomológiát *Dolbeault-kohomológiának* hívjuk, és úgy jelöljük, hogy $H^{p,q}(M)$.

**Állítás:** A Dolbeault kohomológiák felírhatók, mint bizonyos kévék kévekohomológiái. Azaz

$$H^{p,q}(M) \cong H^q(\Omega^p(M)).$$

Ugyanis a

$$0 \longrightarrow \Omega^p(M) \xrightarrow{\iota} \Omega^{p,0}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}^0} \Omega^{p,1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}^1} \dots$$

sorban az $\Omega^{p,q}(M)$-ek $\mathcal{E}^0(M)$-modulusok, így ahogy azt a de Rham-kohomológiáknál megmutattam, puhák. Tehát ez egy aciklikus feloldása $\Omega^p(M)$-nek, és mint ilyen, a kohomológiája az $\Omega^p(M)$ kévekohomológiájával izomorf.

Érdemes megemlíteni, hogy ha az $M$ komplex sokaságon adott egy $\beta$ Hermite-féle forma, akkor annak a képzetes része alternáló. Ezt $\omega$-val szokás jelölni. Ha $d\omega = 0$, akkor az $M$ sokaságot *Kähler-sokaságnak* hívják. Belátható, hogy egy ilyen sokaságon az $M$ de Rham-kohomológiái természetesen felhasadnak Dolbeault-kohomológiákra:

$$H^n(\mathbb{C}) = \bigoplus_{i=0}^{n} H^{i,n-i}(M)$$

Ez a *Hodge-felbontás.*

## 3. Egzakt sorok

### 3.1. Rövid és hosszú egzakt sorok

Ismert homologikus algebrából, hogy ha adottak az $A_i$, $B_i$ és $C_i$ modulusok, továbbá $f_i$, $g_i$ és $d_i$ leképezések úgy, hogy a következő diagramm kommutál:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_0 & \xrightarrow{f_0} & B_0 & \xrightarrow{g_0} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow d_0^A & & \downarrow d_0^B & & \downarrow d_0^C & & \\
0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{f_1} & B_1 & \xrightarrow{g_1} & C_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow d_1^A & & \downarrow d_1^B & & \downarrow d_1^C & & \\
0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{f_2} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & C_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow d_2^A & & \downarrow d_2^B & & \downarrow d_2^C & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

ahol a sorok egzaktak, akkor az oszlopok homológiái egy hosszú egzakt sort fognak adni:

$$\ldots \xrightarrow{\partial^{i-1}} H^i(A_*) \xrightarrow{H^i(f)} H^i(B_*) \xrightarrow{H^i(g)} H^0(C_*) \xrightarrow{\partial^i} H^{i+1}(A_*) \xrightarrow{\cdots}$$

Ennek kévekohomológiai szempontból az a jelentősége, hogy ha adottak a $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$, $X$ topologikus tér feletti kévéknek a következő rövid egzakt sora:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \longrightarrow 0,$$

akkor vehetjük ezeknek a kanonikus feloldásainak globális szeléseit. Ezek a globális szelések egy a fentihez hasonló diagrammot fognak alkotni, és ennek eredményeként egy hosszú egzakt sort nyerünk:

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{A}) \xrightarrow{H^0(f)} H^0(\mathcal{B}) \xrightarrow{H^0(g)} H^0(\mathcal{C}) \xrightarrow{\partial^0} H^1(\mathcal{A}) \xrightarrow{\cdots}$$

A következőkben ezzel az eszközzel úgy fogunk egzakt sorokat nyerni, hogy felírjuk kévék rövid egzakt sorát, és vesszük a kohomológiáikat.

## 3.2. Relatív kohomológiák, pár és hármas egzakt sora

Legyen $A \subseteq X$ zárt részhalmaz, és $\mathcal{F}$ kéve $X$-en! Ekkor adott a $\iota : A \to X$ beágyazás, ami szerint vehetjük a $\mathcal{F}|A$ kéve direkt képét. Könnyen látható, hogy a $\iota(\mathcal{F}|A)$ izomorf lesz $\mathcal{F}_A$-val. Természetes módon értelmezhető a következő leképezés is:

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\iota^*} \iota(\mathcal{F}|A),$$

ami egy $s \in \mathcal{F}(U)$-hoz a $s|(U \cap A)$-t fogja rendelni. Vehetjük ennek a leképezésnek a magját, és ezt fogjuk a relatív komplexusok kévéjének hívni.

Maga a $\iota^*$ leképezés szürjektív, amit a rostok segítségével lehet látni. Ugyanis itt a $\iota(\mathcal{F}|A)$ és $\mathcal{F}|A$ kévék rostjai abban térnek el, hogy egy $x \in A$-ra izomorfak, egy $x \notin A$-ra pedig az elsőben 0, a másodikban nem létezik. Mivel pedig a $\mathcal{F} \to \mathcal{F}|A$ leképezés szürjektív, ezért a $\iota^*$ leképezés úgyszintén.

Ha $\ker \iota^*$-ot $\mathcal{F}_{(X,A)}$-val jelöljük, akkor a

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{(X,A)} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_A \longrightarrow 0$$

sor egzakt.

Vehetjük ekkor $\mathcal{F}$ kanonikus feloldását, és a következő hosszú egzakt sort tudjuk készíteni:

$$\ldots \longrightarrow H^{n-1}(\mathcal{F}_A^*) \longrightarrow H^n(\mathcal{F}_{(X,A)}^*) \longrightarrow H^n(\mathcal{F}^*) \longrightarrow H^n(\mathcal{F}_A^*) \longrightarrow H^{n+1}(\mathcal{F}_{(X,A)}^*) \longrightarrow \ldots$$

Ez a pár egzakt sora.

Az algebrában második izomorfizmus tételként ismert állítás modulusokon azt jelenti, hogy ha $A \leq B \leq C$ modulusok, akkor a

$$0 \longrightarrow B/A \longrightarrow C/A \longrightarrow C/B \longrightarrow 0$$

sor egzakt. Itt a $B/A$ nem más, mint az $A \to B$ beágyazás kokernelje.

Ennek analógiájaként meg lehet fogalmazni az izomorfizmus tétel duálisát. Legyenek $A$, $B$, $C$ modulusok, és legyen $B$ az $A$ faktora, $C$ pedig a $B$ faktora! Ekkor $A$ maga is a $B$ faktora, és az alábbi kommutatív diagrammon

$$
\begin{array}{ccccc}
A & = & A & \longrightarrow & B \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
B & \longrightarrow & C & = & C \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & W
\end{array}
$$

minden oszlop és sor egzakt.

Legyen tehát most $U \subseteq V$ két részhalmaza $X$-nek! Ekkor a

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{(X,V)} \longrightarrow \mathcal{F}_{(X,U)} \longrightarrow \mathcal{F}_{(V,U)} \longrightarrow 0$$

sor egzakt lesz, hiszen a kévék rostonként a $\mathcal{F}_X$, $\mathcal{F}_U$, $\mathcal{F}_V$ kévék „kofaktorai”.

A fenti egzakt sorból elkészíthető a *hármas hosszú egzakt sora*:

$$\ldots \longrightarrow H^n(\mathcal{F}^*_{(X,V)}) \longrightarrow H^n(\mathcal{F}^*_{(X,U)}) \longrightarrow H^n(\mathcal{F}^*_{(V,U)}) \longrightarrow H^{n+1}(\mathcal{F}^*_{(X,V)}) \longrightarrow \ldots$$

Mellesleg mivel $A$ zárt, az alábbi sor egzakt lesz:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_A \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_{X \setminus A} \longrightarrow 0,$$

és így $\mathcal{F}_{(X,A)}$ izomorf $\mathcal{F}_{X \setminus A}$-val.

### 3.3. Mayer–Vietoris egzakt sor

Legyen $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ két kéve! Ekkor létezik egy izomorfizmus

$$H^n(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}) \rightarrow H^n(\mathcal{F}) \oplus H^n(\mathcal{G})$$

között. Ugyanis ekkor a $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ kévék kanonikus feloldásainak tagonként vett direktösszege éppen $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ kanonikus feloldása lesz, és $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ globális szelései $\mathcal{F}(X) \oplus \mathcal{G}(X)$-szel izomorf struktúrát alkotnak.

Ha adott egy $\mathcal{F}$ kéve az $X$ topologikus tér felett, bármely $U \subseteq X$ nyílt halmazra tekinthetjük a $\mathcal{F}_U$kévét, amire $\mathcal{F}_U(W) = \mathcal{F}(U \cap W)$.

Legyen most rögzített az $U$ és $V$ nyílt halmaz, amire $U \cup V = X$, és legyen $W = U \cap V$! Ekkor a következő sor:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_W \longrightarrow \mathcal{F}_U \oplus \mathcal{F}_V \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

egzakt lesz azokkal a leképezésekkel, amik $\mathcal{F}_W$ egy $x$-beli $\sigma$ rostjához a $\sigma \oplus \sigma$-t rendeli, illetve $\sigma \oplus \tau$-hoz $\sigma - \tau$-t. Az egzaktság úgyszintén a rostokon látszik.

A kohomológiák hosszú egzakt sora tehát a következőképpen fog kinézni:

$$\ldots \longrightarrow H^{n-1}(\mathcal{F}) \longrightarrow H^n(\mathcal{F}_W) \longrightarrow H^n(\mathcal{F}_U \oplus \mathcal{F}_V) \longrightarrow H^n(\mathcal{F}) \longrightarrow H^{n+1}(\mathcal{F}_W) \longrightarrow \ldots$$

Itt természetesen $H^n(\mathcal{F}_U \oplus \mathcal{F}_V) \cong H^n(\mathcal{F}_U) \oplus H^n(\mathcal{F}_V)$.

Mivel egy $U$ és $V$ nyílt halmazokra az $\mathcal{F}_U(V)$ izomorf $(\mathcal{F}|U)(U \cap V)$-vel, a $V$-ben vett megszorításokkal kompatibilis módon, ezért a $\mathcal{F}_U$ és $(\mathcal{F}|U)$ kévék kohomológiái izomorfak lesznek.

A fenti sorból képzett hosszú egzakt sora a kohomológiáknak tehát így is felírható:

$$\ldots \longrightarrow H^{n-1}(\mathcal{F}) \longrightarrow H^n(\mathcal{F}|W) \longrightarrow H^n(\mathcal{F}|U) \oplus H^n(\mathcal{F}|V) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^n(\mathcal{F}) \longrightarrow H^{n+1}(\mathcal{F}|W) \longrightarrow \ldots$$

Ez az $U$ és $V$ nyílt halmazokhoz tartozó *Mayer–Vietoris* egzakt sor.

## 4. Alkalmazások

### 4.1. Divizorok, Cousin probléma

Legyen adott egy $M$ komplex sokaság, és tekintsük egy $U$ nyílt halmazán a holomorf, sehol sem eltűnő függvények $\mathcal{O}^*(U)$ és a meromorf függvények $\mathcal{M}^*(U)$ multiplikatív csoportját! Az első része a másiknak, lehet ezért tekinteni a $D(U) = \mathcal{M}^*(U)/\mathcal{O}^*(U)$ faktorcsoportot. Ezt a csoportot a *lokális divizorok* csoportjának fogjuk hívni.

Szeretnénk megvizsgálni a következőt. Legyen adott az $M$ sokaságnak egy $U_i$ fedése, és ezek mindegyikén megadunk egy-egy lokális divizort! Azt szeretnénk, hogy az $U_i \cap U_j$ metszeteken ugyanazt a divizort adják, ami azt jelenti, hogy ha reprezentáljuk őket $f_i$ meromorf függvényekkel az $U_i$ halmazokon, akkor legyen $\frac{f_i|_{U_i \cap U_j}}{f_j|_{U_i \cap U_j}}$ holomorf és sehol sem nulla! Egy így megadott divizort *Cartier-divizornak*, vagy röviden divizornak fogunk hívni, és $\mathcal{D}(M)$-mel jelöljük. Kérdés, hogy meg lehet-e adni egy globális meromorf függvényt, $f$-et, ami ugyanennek a divizornak felel meg, azaz hogy az $\frac{f|_{U_i}}{f_i}$ függvények holomorfak és sehol sem eltűnők legyenek. Ez a *Cousin-probléma.*

Ennek egy előnyös megfogalmazása, ha csoportok helyett kévéket tekintünk. Ekkor ugyanis ekkor vehetjük $\mathcal{D}$-t mint a fenti csoportok kévésítése, és kévék egy egzakt sorát kapjuk:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathcal{M}^* \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow 0$$

A kérdést ekkor úgy lehet átfogalmazni, hogy a globális szelés funktora mikor viszi ezt az egzakt sort egzaktba.

Mivel egy divizor lényegében azt írja le egy meromorf függvényről, hogy hol van zérushelye, illetve pólusa, mindezt multiplicitással, ezért a divizorokat ezekkel a halmazokkal is le tudjuk írni. Egy meromorf függvény egy 1-kodimenziós részsokaság mentén tűnik el, és egy ugyanilyen mentén lesz pólusa. Egy divizort úgy fogunk felírni, mint

$$\sum_i n_i V_i,$$

ahol $V_i$ irreducibilis 1-kodimenziós részsokaságot jelöl, $n_i$ egész szám, és ha pozitív, azt jelöli, hogy hányszoros nullhelye, ha negatív, akkor hogy hányszoros pólusa van a divizornak.

Egyébként az összes ilyen módon felírható objektumot *Weil-divizornak* is szokás hívni.

### 4.2. Holomorf egyenesnyalábok

Tekintsünk most egy $\pi : E \to M$ komplex vektornyalábot! Lokálisan úgy lehet ezt leírni, hogy rögzítünk egy $U$ nyílt fedést, és azokon trivializáljuk a nyalábot. Ekkor viszont szükség lesz az áttérési leképezésekre.

Legyen tehát $U$ egy nyílt halmaz, és $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$ egy lokális trivializáció! A trivializáció megtartja a fibrumok vektortérstruktúráját, ezért ha egy $V$ nyílt halmazt veszünk egy $\psi : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathbb{C}^n$ lokális trivializációval, akkor a

$$\psi \circ \varphi^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{C}^n \to (U \cap V) \times \mathbb{C}^n$$

leképezés minden $u \in U \cap V$ pontra megtartja a szorzatstruktúrát, és a

$$(\psi \circ \varphi^{-1})|_{\{u\}\times\mathbb{C}^n} : \{u\} \times \mathbb{C}^n \to \{u\} \times \mathbb{C}^n$$

leképezések lineárisak.

Ha a komplex vektornyaláb további struktúrával rendelkezik, jelen pillanatban minket a holomorf struktúra fog érdekelni, akkor a trivializáció ezt is meg kell tartsa. Így az áttérési leképezés is ilyen tulajdonságú lesz. A továbbiakban kizárólag holomorf vektornyalábokra szorítkozunk, de amiket leírok, természetesen más feltételek mellett is értelmezhető lesz.

Ha most minden $U$ és $V$ nyílt halmazra adott egy $g_{U,V} : U \cap V \to GL(\mathbb{C}^n)$ holomorf leképezés, ami minden $u \in U \cap V$-hez hozzárendeli, hogy az $u$ rostján milyen lineáris transzformációval lehet áttérni az egyik trivializációról a másikra! Ezeknek a $g_{U,V}$-knek kell teljesíteniük néhány fontos tulajdonságot:

- $g_{U,U} = \mathbf{1}_U$, azaz minden $u \in U$-ra $g_{U,U}(u) = \mathbf{1}$;
- $g_{U,V} = g_{V,U}^{-1}$;
- $g_{U,V} \circ g_{V,W} = g_{U,W}$.

Ezek közül a második következik a két szélsőből.

Másfelől ha adott két vektornyaláb ugyanazon az $M$ halmazon, és feltesszük, hogy ugyanarra az $U$ fedésre lehet őket trivializálni, akkor pontosan akkor izomorfak, ha léteznek $\lambda_U : U \to GL(\mathbb{C}^n)$ transzformációk, amik az egyik trivializációt átviszik a másikba, és a további feltétel teljesül:

- $\lambda_U \circ g^1_{U,V} \circ \lambda_V^{-1} = g^2_{U,V}$

Itt $g^1$ és $g^2$ értelemszerűen az első és a második vektornyaláb ragasztásait jelölik.

Ezek a feltételek nagyon hasonlítanak a 2-kociklusok és 2-kohatárok feltételeire.

Ha a vektornyaláb egy dimenziós, akkor *egyenesnyalábokról* beszélünk. Ilyenkor $GL(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ kommutatív, és a fenti feltételek ténylegesen a második Čech-kohomológia feltételei lesznek. Tehát egy $M$ tér feletti komplex egyenesnyalábok éppen $\check{H}^1(\mathcal{O}^*)$, a $\mathbb{C}^*$-értékű holomorf függvények Čech-kohomológiája.

Tekintsük ismét a

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathcal{M}^* \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow 0$$

egzakt sort! Ebből a kohomológia egy hosszú egzakt sort fog létrehozni. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^*(M) \longrightarrow \mathcal{M}^*(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(\mathcal{M}^*) \longrightarrow \dots$$

Itt a $H^1(\mathcal{O}^*)$ nem más, mint a holomorf egyenesnyalábok csoportja.

A Cousin probléma azt jelenti, hogy a $\mathcal{M}^*(M) \to \mathcal{D}(M)$ leképezés szürjektív. Ha például $H^1(\mathcal{O}^*)$ triviális, akkor ez teljesül.

### 4.3. Divizorosztályok és algebrai görbék

Egy divizort *principálisnak* hívunk, ha létezik egy globális meromorf függvény, aminek ő a divizora. A divizoroknak vehetjük az ekvivalencia osztályait úgy, hogy ha egy principális divizorban térnek el, akkor ekvivalensek. Ezek lesznek a *divizorosztályok*, és $Cl$-lel jelöljük.

Egy $f \in \mathcal{M}^*(U)$ meromorf függvény természetesen kiterjed az egész $M$ topologikus térre meromorf függvényként, tehát az $\mathcal{M}^*$ kéve laza. Így minden $n > 0$-ra az $n$-edik kohomológiái triviálisak, és a $\mathcal{D}(M) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}^*)$ leképezés szürjektív.

Ez alapján a

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}^*(M)/\mathcal{O}^*(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}^*) \longrightarrow 0$$

sor egzakt. Mivel az $\mathcal{M}^*(M)/\mathcal{O}^*(M)$ maga a principális divizorok csoportja, ezért $H^1(\mathcal{O}^*) \cong Cl$.

Legyen adott a $\mathbb{CP}^2$ projektív sík, és benne egy $M$ algebrai görbe! Ebben az esetben az $\mathcal{M}(M)$ azoknak a $\mathbb{CP}^2$-en értelmezett meromorf függvényeknek az $M$-re vett megszorításaiból áll, amiknek a pólusainak a halmaza nem tartalmazza az egész $M$-et. Egy ilyen meromorf függvény felírható, mint két homogén, azonos fokú, három változós polinom hányadosának megszorítása.

Egy $\sum n_i V_i$ formában felírt divizornak definiálható a foka oly módon, hogy

$$\deg\left(\sum n_i V_i\right) = \sum n_i.$$

Bézout tétele pontosan meghatározza, hogy két algebrai görbének hány metszéspontja van, multiplicitással. Legyen tehát $M$ az $f$ homogén polinom által meghatározva, $g/h$ pedig egy homogén 0 fokú meromorf függvény úgy, ha $g$ és $h$ homogén polinomok, és egyikük sem tűnik el $M$-en. Ekkor $f$ és $g$ metszéspontjainak száma meghatározott a fokuk által, és így ugyanannyi, mint $f$ és $h$ metszéspontjainak száma. Tehát $g/h$-nak ugyanannyi zérushelye lesz az $M$ görbén, mint pólusa, és így az általa meghatározott divizor foka 0 lesz. Így létezik egy

$$\mathcal{M}^*(M) \xrightarrow{\text{div}} \mathcal{D}(M) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

féligegzakt sor.

Ez a fokszám továbbá kiterjed a $Cl$ divizorosztályok csoportjára. Egyfelől a fokszám csoporthomomorfizmus: ha $f$ és $g$ két divizor, akkor $\deg(fg) = \deg f + \deg g$. Másfelől bármelyik principális divizor egy globális meromorf függvénnyel reprezentálható, aminek a foka 0. Így a deg kiterjed $Cl$-re is.

Külön érdekes típust reprezentálnak a nulla fokú divizorosztályok, amiket $Cl^0$-val fogok jelölni. Legyen az $M$ egy nem-elfajuló, harmadfokú görbe! Rögzítsük egy tetszőleges $P_0$ pontját! Elkészíthető minden $P$ pontjához az $M$ görbének egy divizor, aminek a $P$-ben zérushelye, $P_0$-ban pólusa van, és ennek a divizornak nulla lesz a foka. Viszont nem írható fel a $P = P_0$ eset kivételével principális divizorként, hiszen ha $h$ egy meromorf függvény volna, akkor arra úgy is tekinthetnénk, mint egy $h : M \to \mathbb{CP}^1$ leképezés, és mivel a $P$-ben egyszeres zérushelye van, ezért $h$ foka 1 lenne. Viszont ez azt jelentené, hogy $M$ és $\mathbb{CP}^1$ biracionálisan ekvivalens (lásd: Igor Shafarevich: Basic Algebraic Geometry), ami nem áll fenn.

Tehát létezik egy $M \to Cl^0$ beágyazás, amiről belátható, hogy izomorfizmus.

### 4.4. Az algebrai görbe és a divizorosztályok kapcsolata

Egy holomorf függvény exponenciálisa egy sehol sem eltűnő holomorf függvény lesz. Ott lesz az érték 1, ahol $2\pi i$ egy egész számszorosát veszi fel. Tehát

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2\pi i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$

kévék egzakt sora. Ha ezek kohomológiáit tekintjük, akkor a következő hosszú egzakt sort nyerjük:

$$H^0(\mathcal{O}) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(\mathbb{Z})$$

Itt a $H^i(\mathbb{Z})$-k izomorfak az egész értékű szinguláris kohomológiákkal.

Vegyük most az alap $M$ topologikus teret egy $\mathbb{CP}^2$-beli algebrai görbének! Ekkor $H^0(\mathcal{O}^*) = \mathbb{C}^*$, hiszen egy globális, holomorf függvény csak konstans lehet. Viszont egy nem-nulla konstans függvény előáll egy holomorf függvény exponenciálisaként, így a $H^0(\mathcal{O}) \to H^0(\mathcal{O}^*)$ szürjektív.

Egy komplex algebrai görbe topológiailag egy összefüggő, irányítható topologikus 2-sokaság, így az első és második szinguláris kohomológiái $\mathbb{Z}^{2g}$ és $\mathbb{Z}$, ahol $g$ a görbe génusza.

Egy algebrai felületen ha veszünk egy Hermite-féle formát, és annak a képzetes részét $\omega$-val jelöljük, akkor $d\omega \in \mathcal{E}^3 = 0$, tehát az algebrai görbe egy Kähler-sokaság lesz.

Mivel $H^1(\mathbb{C})$ a komplex értékű szimpliciális kohomológiacsoporttal izomorf, ezért az $\mathbb{C}^{2g}$, és így $\mathbb{C}^{2g} = H^{1,0}(M) \oplus H^{0,1}(M)$ a Hodge felbontás révén. A $H^{0,1}(\mathbb{C})$ és a $H^{1,0}(\mathbb{C})$ konjugált izomorfak, $H^{0,1}(M)$ pedig éppen a holomorf függvények első kohomológiacsoportja. Tehát $H^1(\mathcal{O}) = \mathbb{C}^g$.

Be lehet látni, hogy a $H^1(\mathcal{O}^*) \to H^2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ leképezés nem más, mint a deg leképezés, azaz minden holomorf függvényhez annak fokát rendeli hozzá.

Tehát a következő sort nyerjük:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{2g} \longrightarrow \mathbb{C}^g \longrightarrow Cl \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

Legyen most $g = 1$, ekkor a $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ egy tórusz lesz. Az $M$ sokaság egy $P$ pontjához hozzárendelhetjük a $P - P_0$ divizort, aminek a foka 0. Tehát előáll, mint a $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ tórusz egy pontjának képe, és így $Cl^0 \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$. Az előző fejezetből pedig kapjuk, hogy $Cl^0 \cong M$.

**Irodalomjegyzék**

Igor R. Shafarevich: *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1977, 1994

Roger Godement: *Théorie des Faisceaux*, Hermann, Paris, 1958

Mike Field: *Several Complex Variables and Complex Manifolds II*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 66

Glen E. Bredon: *Sheaf Theory*, Springer-Verlag New York, Inc., 1997

Phillip Griffiths, Joseph Harris: *Princpiles of Algebraic Geometry*, Wiley Classics Library, 1994