Banach nyíltleképezés és zárt gráf tétel és általánosításai

Diplomamunka

Írta: Tomsits András

Matematikus szak

Témavezető:

Kristóf János, docens
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2009.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A dolgozat témája a Banach nyíltleképezés és zárt gráf tétel, mely tételek alapvető fontossággal bírnak a funkcionálanalízisben. Ezeknek a tételeknek sok formája, sok általánosítása és rengeteg alkalmazása ismeretes a matematikában, melyek közül megmutatunk néhányat a következő fejezetekben.

A második fejezet Banach klasszikus eredményeit mutatja be, Banach-terek között ható folytonos opertátorokra vonatkozóan, illetve a tétel hasznosságát néhány alkalmazáson keresztül demonstrálja.

A következő fejezetben már kicsit tovább megyünk ennél, és áttérünk a topológikus vektorterek világába. A tételeket itt teljes és metrizálható topológikus vektorterekre mondjuk ki és bizonyítjuk be. Látni fogjuk, hogy hasonló formában a Banach-terekre vonatkozó tételek is bizonyíthatóak lettek volna, majd a bizonyítás során ki nem használt feltételeket elhagyva egy általánosabb, bár a teljes és metrizálható terek közötti verziót felhasználó tételhez jutunk el.

A negyedik fejezetben új topológia konstrukciókkal az induktívan előállított topológiákkal, a lokálisan konvex induktív limesszel, illetve a lokálisan konvex szigorú induktív limesszel ismerkedünk meg, és általánosítjuk Banach tételeit Fréchet-terek szigorú induktív limeszére.

Az ötödik fejezetben Pták eredményeit fogjuk taglalni, aki először vette észre ezeknek a tételeknek és a dualitás szoros kapcsolatát. Megismerkedhetünk a B-teljes és B_r-teljes terek fogalmával és a Banach nyíltleképezés és zárt gráf tétel ezek segítségével kimondott és bizonyított általánosításával.

Az utolsó fejezetben a zárt gráf tétel két újabb általánosítását mutatjuk be, melyek a leképezés gráfjának "zártság" tulajdonságából engednek. Ezek a tételek a Szuslin-gráf, illetve a Borel-gráf tételek.

2. fejezet

Banach nyíltleképezés és zárt gráf tétel (Klasszikus verzió)

2.1. Banach nyíltleképezés és zárt gráf tétel (Klasszikus verzió)

2.1.1. Definíció. *Legyenek X, Y normált terek. Egy $T : X \to Y$ lineáris operátor zártsága azt jelenti, hogy minden $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ X-ben haladó sorozatra, ha léteznek a $lim_{n\to\infty}$ x_n X-beli és $lim_{n\to\infty}$ $T(x_n)$ Y-beli határértékek, akkor $T(lim_{n\to\infty}x_n) = lim_{n\to\infty}T(x_n)$.*

Jelölje mostantól egy X normált tér nyílt egységgömbjét X_1, azaz legyen $X_1 := \{x \in$X:$\| x \|< 1\}$.

2.1.2. Lemma (Pták). *Legyen $\beta > \alpha > 0$, X Banach-tér, Y normált tér és legyen $TX \to Y$ olyan zárt lineáris leképezés, melyre $T(X_1) + \alpha \cdot Y_1 \supset \beta \cdot Y_1$. Ekkor $T(X_1) \supset (\beta - \alpha) \cdot Y_1$.*

Biz. T homogenitásából és a feltételből következik, hogy minden $t > 0$-ra $T((\frac{t}{\beta}) \cdot X_1) + (\frac{t\cdot\alpha}{\beta}) \cdot Y_1 \supset Y_1$. Az állítás igazolásához azt kellene belátnunk, hogy $T((\frac{1}{\beta-\alpha}) \cdot X_1) \supset t \cdot Y_1$. Ennek bizonyítását konstruktívan végezzük el, használva a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételét.

Első lépésben válasszuk t-t 1-nek, és rögzítsünk egy $y \in Y_1$ vektort. Így a feltétel szerint létezik egy olyan $x_1 \in (\frac{1}{\beta}) \cdot X_1$, melyre : $\| y - Tx_1 \|< \frac{\alpha}{\beta}$.

Második lépésben válasszuk a t-t $\frac{\alpha}{\beta}$-nak. Így az $(y - Tx_1) \in (\frac{\alpha}{\beta}) \cdot Y_1$-beli vektorhoz, létezik olyan $x_2 \in \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot X_1$, melyre igaz, hogy $\| (y - Tx_1) - Tx_2 \| < (\frac{\alpha}{\beta})^2$.

Hasonlóan folytatva, az n-edik általános lépésben válasszuk t-t $(\frac{\alpha}{\beta})^{n-1}$-nek, ekkor az előzőekhez hasonlóan, létezik olyan $x_n \in \frac{1}{\beta} \cdot (\frac{\alpha}{\beta})^{n-1} \cdot X_1$, melyre igaz, hogy $\| y - T(\sum_{i=1}^{n} x_i) \| < (\frac{\alpha}{\beta})^{n-1}$. Így a konstrukció szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor abszolút konvergens az X Banach-térben, ezért konvergens is. Tehát létezik az $y := \sum_{n=1}^{\infty} T(x_n)$, és létezik az $x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$, amelyre $\| x \| \leq \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{1-\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{1}{\beta - \alpha}$, és T zártsága miatt $Tx = y$. ■

2.1.3. Tétel. *Teljes metrikus térben nem üres zárt halmazok monoton fogyó sorozatának a metszete nem üres, ha a halmazok átmérőinek infimuma* 0.

2.1.4. Tétel (Baire-féle kategóriatétel). *Legyen az X teljes metrikus tér, és legyen $G_n \subseteq X$ nyílt, mindenütt sűrű részhalmaz (azaz $\overline{G_n} = X$) minden $n \in \mathbb{N}$-re; ekkor ezen megszámlálható sok nyílt mindenütt sűrű halmaz metszete is mindenütt sűrű:*

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n} = X.$$

Biz. Legyen G nyílt, mindenütt sűrű részhalmaz X-ben. Ekkor $\overline{G} = X$, ami pontosan azt jelenti, hogy minden $x \in X$-re és minden $\epsilon > 0$ valós számra a $B_\epsilon(x)$ nyílt gömb és a G halmaz metszete nem lehet üres. Így minden x-re és minden $\epsilon > 0$-ra létezik egy $x_1 \in G \bigcap B_\epsilon(x)$-beli pont, és létezik olyan$\epsilon_1 > 0$ amelyekre $B_{\epsilon_1}(x_1) \subseteq G \bigcap B_\epsilon(x)$, és ebből az következik, hogy létezik olyan ϵ_2, amire $\overline{B_{\epsilon_2}(x_1)} \subseteq G \bigcap B_\epsilon(x)$.

Tehát így azt kaptuk, hogy ha $G \subseteq X$ nyílt részhalmaz, akkor $\overline{G} = X$ pontosan akkor igaz, ha minden $S \subseteq X$ nyílt gömbhöz, létezik egy $\overline{S_1}$ nyílt gömb, amelyre $\overline{S_1} \subseteq G \bigcap S$.

Legyenek tehát $G_1, G_2, ...$ nyílt halmazok, melyek mindegyike mindenütt sűrű X-ben. Azt kell belátnunk, hogy a $H := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ jelölés mellett $\overline{H} = X$, azaz minden $x \in X$ pont ϵ sugarú környezetében van H-nak pontja. (Ahol H nem feltétlen nyílt.) Ennek bebizonyításához a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételét használjuk.

Első lépésben legyen $S_0 := B_\epsilon(x)$ tetszőleges nyílt gömb. Tekintsük a G_1 halmazt. Ez nyílt és mindenütt sűrű, így létezik $S_1 := B_{\epsilon_1}(x)$ úgy, hogy $\overline{S_1} \subseteq G_1 \bigcap S_0$, és feltehető, hogy $\epsilon_1 < 1$.

Az n. lépésben legyen $S_n := B_{\epsilon_n}(x)$ úgy, hogy $\overline{S_n} \subseteq G_n \bigcap S_{n-1}$ és feltehető, hogy $\epsilon_n < \frac{1}{n}$.

Az X teljes metrikus tér, és $\overline{S_1} \supset ...\overline{S_n}...$ zárt halmazok monoton fogyó sorozata, így az előző tétel szerint létezik egy olyan $x^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S_n}$ pont melyre igaz, hogy $x^* \in \overline{S_n}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, azaz $x^* \in G_n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Ebből azt kapjuk, hogy $x^* \in H$, ugyanakkor $x^* \in \overline{S_1} \subseteq G_1 \bigcap S_0$, ami azt jelenti, hogy x^* benne van S_0-ban is, amivel az állítást bebizonyítottuk. ■

2.1.5. Tétel (Baire-féle kategóriatétel teljes metrikus terekben). *A következő állítások mindegyike a Baire-féle kategóriatétel átfogalmazása:*

(1) Legyen (X, ϱ) teljes metrikus tér és tegyük fel, hogy $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ (ahol F_n zárt halmaz minden n-re) az X tér egy megszámlálható zárt halmazokból álló fedése. Akkor legalább az egyik F_n tartalmaz gömböt.

(2) Egy teljes metrikus tér bármely zárt halmazokból álló fedésének van valahol sűrű tagja.

(3) Teljes metrikus tér nem áll elő megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként.

(4) Teljes metrikus tér második kategóriájú.

Biz. Mi csak az első megfogalmazást bizonyítjuk, a többi nyilvánvalóan következménye az elsőnek. Indirekt tegyük fel, hogy egyetlen F_n sem tartalmaz gömböt, azaz minden n természetes számra $int(\overline{F_n}) = int(F_n) = \emptyset$. Tekintsük a $G_n := X \backslash F_n$ nyílt, mindenütt sűrű halmazt. Ekkor az előző tétel szerint $G := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ is mindenütt sűrű, azaz a komplementere sehol sem sűrű. (Ugyanis $\overline{G} = X$ amiből azt kapjuk, hogy $X \backslash G = \overline{G} \backslash G$, ami pont a G határán lévő pontokat jelenti, amiben viszont semmilyen $r > 0$ valós számra, nincs r sugarú gömb.)

$$\emptyset = int(\overline{G^C}) = int(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^C}) = int(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n}) = int(\overline{X}) = int(X) = X.$$

Amivel láthatóan ellentmondásba ütközünk, így az állítást bebizonyítottuk. ■

2.1.6. Tétel (Banach nyílt leképezés tétel). *Legyenek X, Y Banach-terek és legyen $T : X \to Y$ folytonos, lineáris operátor ahol T szürjektív. Ekkor T nyílt leképezés.*

Biz. Tudjuk, hogy $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} n{\cdot}X_1$, így $Y = T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(n{\cdot}X_1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{(T(n \cdot X_1)}$. Ekkor a Baire-féle kategóriatétel szerint létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ szám, amelyre $int(\overline{T(n_0 \cdot X_1)})$ nem üres. Azaz létezik olyan $y_0 \in Y$ pont és olyan $r_0 > 0$ sugár, melyre $B_{r_0}(y_0) \subseteq \overline{T(n_0 \cdot X_1)}$. Ekkor minden $y \in B_{r_0}(y_0)$-beli ponthoz és minden $\epsilon > 0$-hoz létezik olyan $x_1 \in n_0 \cdot X_1$, melyre $\parallel y - Tx_1 \parallel < \epsilon$.

Legyen $y \in r_0 \cdot Y_1$, és $\epsilon > 0$ rögzített. Ekkor $y_0 + y$ és $y_0 - y$ pontok benne vannak a $B_{r_0}(y_0)$ gömbben. Így léteznek olyan x_+ és x_- pontok $n_0 \cdot X_1$-ben, hogy $\| (y_0+y) - Tx_+ \|$ és $\| (y_0 + y) - Tx_- \|$ is kisebb mint epszilon. Itt $y := \frac{1}{2}[(y_0 + y) - (y_0 - y)]$, $x := \frac{1}{2}(x_+ + x_-) \in n_0 \cdot X_1$, amiből következik, hogy $\| y - Tx \| \leq \frac{1}{2} \| (y_0+y) - Tx_+ \| + \frac{1}{2} \| (y_0 - y) - Tx_- \| < \epsilon$.

Tehát minden $y \in r_0 \cdot Y_1$-hez, és minden $\epsilon > 0$-hoz létezik $x \in n_0 X_1$, melyre $\| y - Tx \| < \epsilon$. Ez pontosan akkor igaz, ha $r_0 Y_1 \subseteq \overline{T(n_0 X_1)}$, azaz $\frac{r_0}{n_0} Y_1 \subseteq \overline{T(X_1)}$. Ekkor minden $\delta \in]0, \frac{r_0}{n_0}[$ -ra igaz, hogy $T(X_1) + \delta Y_1 \supset \overline{T(X_1)} \supset \frac{r_0}{n_0} \cdot Y_1$. Így a Pták-lemma miatt azt kapjuk, hogy $T(X_1) \supset (\frac{r_0}{n_0} - \delta) Y_1$, mivel T zárt operátor, mert folytonos.

Tehát tudjuk, hogy a nyílt egységgömb képe tartalmaz 0 középpontú pozitív sugarú gömböt. Még azt kell belátnunk, hogy nyílt halmaz képe nyílt, azaz minden $U \subseteq X$ nyílt halmazra $T(U)$ nyílt. Ehhez válasszunk egy $r > 0$ valós számot, melyre $r \cdot Y_1 \subseteq T(X_1)$.

A T szürjektivitása miatt minden $y_0 \in T(U)$-hoz létezik $x_0 \in U$, melyre $Tx_0 = y_0$, és létezik $B_\epsilon(x_0) \subseteq U$ $(\epsilon > 0)$, de $B_\epsilon(x_0) = x_0 + \epsilon X_1$. Ebből látható, hogy $T(U) \supseteq T(B_\epsilon(x_0)) = Tx_0 + \epsilon \cdot T(X_1) \supseteq y_0 + \epsilon \cdot r Y_1 = B_{\epsilon \cdot r}(y_0)$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

2.1.7. Tétel (Banach tétele az inverz leképezésről). *Legyen X, Y Banach-terek, $T : X \to Y$ folytonos, lineáris operátor, legyen $T(X) = Y$, és $kerT = 0$ (azaz T szürjektív és injektív); ekkor $T^{-1} : Y \to X$ is folytonos, lineáris operátor, azaz T lineáris homeomorfizmus.*

Biz. A Banach nyílt leképezés tétele szerint T^{-1} pontosan akkor folytonos, ha $(T^{-1})^{-1} = T$ nyílt.

2.1.8. Tétel (Banach zárt gráf tétel). *Legyenek X, Y Banach-terek, $T : X \to Y$ lineáris operátor. Ekkor $T : X \to Y$ akkor és csak akkor folytonos lineáris operátor, ha T zárt leképezés.*

Biz. A balról jobbra irány az átviteli elv és a Hausdorff-itás miatt igaz.

A másik irány bizonyításához definiáljuk a következőt normát: $| x | := \| x \| + \| Tx \|$ $(x \in X)$.

2.1.9. Lemma. *Az $(X, | \cdot |)$ tér Banach-tér.*

Biz. Mivel a többi tulajdonság öröklődik ennél a konstrukciónál, ezért csak a teljességet igazoljuk. Vegyünk egy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $|\cdot|$ norma szerinti Cauchy sorozatot. Ez pontosan azt jelenti, hogy $\| x_n - x_m \| \to 0$ és $\| Tx_n - Tx_m \| \to 0$. Ez azzal ekvivalens, hogy léteznek a $lim x_n$ és a $lim Tx_n$ határértékek X-ben illetve Y-ban. Így T zártsága miatt $T(lim(x_n)) = lim(Tx_n)$, azaz $| x_n - lim x_n | \to 0$. ■

Az $I : (X, |\cdot|) \to (X, \| \cdot \|)$ identitás operátor folytonos, lineáris operátor, sőt kontrakció (a normája legfeljebb egy), így a Banch féle inverz operátor tétel szerint, létezik I^{-1} és ez szintén folytonos operátor. Ebből következik olyan $c > 0$ szám létezése, hogy $| x | = \| x \| + \| Tx \| \leq c \cdot \| Tx \|$ $(x \in X)$. Átrendezve azt kapjuk, hogy $c \cdot \| Tx \| \leq (c-1) \cdot \| x \|$, azaz T korlátos. ■

2.1.10. Definíció. *T gráfja (grafikonja): $G(T) := \{(x, Tx) : x \in X\}$*

2.1.11. Megjegyzés. *T pontosan akkor zárt leképezés, ha $G(T)$ zárt altere az $X \times Y$ szorzattérnek.*

2.2. Néhány alkalmazás

2.2.1. Tétel (Ekvivalens normák). *Legyen X olyan Banach-tér, amely teljes az $\| \cdot \|_1$ és $\| \cdot \|_2$ normákra vonatkozóan. Ha létezik olyan c_1 konstans, hogy $\| x \|_1 \leq c_1 \cdot \| x \|_2$ minden $x \in X$- re, akkor van olyan c_2 konstans is, hogy $\| x \|_2 \leq c_2 \cdot \| x \|_1$ minden $x \in X$-re. (Azaz a két norma ekvivalens.)*

Biz. A feltétel szerint az $(X, \| \cdot \|_2)$ és $(X, \| \cdot \|_1)$ Banach-terek közötti I identikus operátor folytonos, lineáris és bijektív. A Banach tétele az inverz leképezésről szerint az inverz is folytonos lineáris operátor, azaz létezik $c_2 > 0$, hogy $\| I^{-1}x \|_2 = \| x \|_2 \leq c_2 \| x \|_1$. ■

2.2.2. Tétel (Hellinger-Toeplitz). *Legyen $A, B : H \to H$ két lineáris leképezés a H Hilbert-térben. Ha $(Ax, y) = (x, By)$ minden $x, y \in H$-ra, akkor A és B folytonos.*

Biz. Az A leképezés folytonosságához (B esetén hasonlóan) elég belátni, hogy $x_n \to x$ és $Ax_n \to z$ esetén $z = Ax$. Ekkor ugyanis alkalmazhatjuk a zárt gráf tételt.

Az $(Ax_n, y) = (x_n, By)$ egyenlőségből $n \to \infty$ esetén $(z, y) = (x, By)$, vagyis $(Ax - z, y) = 0$ adódik minden $y \in H$-ra. Az $y := Ax - z$ választással a keresett $Ax = z$ egyenlőség adódik. ■

3. fejezet

Banach nyíltleképezés és zárt gráf tétel teljes és metrizálható topologikus vektorterekben

3.1. Banach nyíltleképezés és zárt gráf tétel teljes és metrizálható topologikus vektorterekben

3.1.1. Lemma. *Ha E, F topologikus vektorterek, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ és $Im(u)$ II. kategóriájú halmaz F-ben, akkor az $0 \in E$-nak minden V környezetére igaz, hogy $\overline{(u\langle V\rangle)}$ környezete lesz $0 \in F$-nek.*

Biz. Legyen V 0-nak egy környezete E-ben, és válasszuk W-t úgy meg, hogy legyen szimmetrikus és $W + W \subset V$-t. Válasszunk továbbá egy $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{K}\backslash\{0\}$ -beli sorozatot, hogy $sup_{n\in\mathbb{N}}(\mid \lambda_n \mid) = +\infty$. Ekkor $\bigcup_{\lambda\in\mathbb{N}} \lambda_n W = E$. Ekkor $Im(u) = u\langle E\rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\lambda_n u\langle W\rangle)$. Így létezik $n \in \mathbb{N}$, hogy $int(\overline{\lambda_n \cdot u\langle W\rangle}) \neq \emptyset$. Kicsit átalakítva kapjuk, hogy $int(\overline{\lambda_n \cdot u\langle W\rangle}) = \lambda_n int(\overline{u\langle W\rangle})$. Ebből azt láthatjuk, hogy $int(\overline{u\langle W\rangle}) \neq \emptyset$. Így rögzítsünk $int(\overline{u\langle W\rangle})$-ből egy y pontot. Ekkor létezik a 0-nak egy olyan U környezete F-ben amire $y + U \subseteq \overline{u\langle W\rangle}$, ahol U választható szimmetrikus halmaznak is. Ekkor $U \subseteq U + U = U - U = (y + U) - (y + U) \subseteq \overline{u\langle W\rangle} - \overline{u\langle W\rangle} = \overline{u\langle W\rangle} + \overline{u\langle -W\rangle} \subseteq \overline{u\langle W\rangle + u\langle -W\rangle}$. Így u additivitása miatt $\overline{u\langle W - W\rangle} = \overline{u\langle W + W\rangle} \subseteq \overline{u\langle V\rangle}$. Tehát azt kapjuk, hogy $\overline{u\langle V\rangle}$ környezete a 0-nak F-ben, amivel az állítást bebizonyítottuk. ■

3.1.2. Lemma. *Legyen X teljes metrikus tér, Y metrikus tér és $f : X \to Y$ olyan folytonos függvény, melyre teljesül az alábbi tulajdonság:*

$$(\forall r > 0)(\exists s > 0)(\forall x \in X) : B_s(f(x)) \subseteq \overline{f\langle B_r(x)\rangle}.$$

Ha $(r, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $x \in X$ pontra, igaz az, hogy $B_s(f(x)) \subseteq \overline{f\langle B_r(x)\rangle}$ akkor minden $r' > r$ számra és minden $x \in X$-beli pontra igaz, hogy

$$B_s(f(x)) \subseteq f\langle B_{r'}(x)\rangle.$$

Biz. Legyen $(r, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ olyan pár, hogy minden $x \in X$ pontra $B_s(f(x)) \subseteq \overline{f\langle B_r(x)\rangle}$ teljesül, és rögzítsünk egy $r' > r$ valós számot, és egy $x_0 \in X$ pontot. Azt kell megmutatnunk, hogy $B_s(f(x_0)) \subseteq f\langle B_{r'}(x_0)\rangle$. Válasszunk egy $y \in B_s(f(x_0))$ pontot. Olyan $x \in B_{r'}(x_0)$ pontot keresünk, amelyre $f(x) = y$ teljesül. Legyen $(r_k)_{k\in\mathbb{N}^+}$ olyan $\mathbb{R}^+$-beli sorozat, amelyre a $\sum_{k=1}^{\infty} r_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, és legyen $r_1 = r$, valamint $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < r'$. Az f függvény tulajdonsága alapján minden k nemnegatív egész számhoz létezik olyan $s_k \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x' \in X$ pontra $B_{s_k}(f(x')) \subseteq \overline{f\langle B_{r_k}(x')\rangle}$. Ezért választhatunk olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó $(s_k)_{k\in\mathbb{N}^+}$ sorozatot, hogy $s_1 = s$, $lim_{k\to\infty} s_k = 0$ és minden k nemnegatív egész számra és minden $x' \in X$-beli pontra $B_{s_k}(f(x')) \subseteq \overline{f\langle B_{r_k}(x')\rangle}$.

Most a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételének alkalmazásával igazoljuk olyan E-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ rendszer létezését, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra $x_n \in B_{r_n}(x_{n-1})$ és $f(x_n) \in B_{s_{n+1}}(y)$.

Az $x_1 \in X$ pontot úgy kell megválasztani, hogy $x_1 \in B_{r_1}(x_0) = B_r(x_0)$, valamint $f(x_1) \in B_{s_2}(y)$ teljesüljön. Ezt megtehetjük, hiszen $y \in B_s(f(x_0)) \subseteq \overline{f\langle B_r(x_0)\rangle}$ és $B_{s_2}(y)$ az y-nak környezete, tehát $B_{s_2}(y) \bigcap f\langle B_r(x_0)\rangle \neq \emptyset$, így létezik olyan $x_1 \in B_r(x_0)$, hogy $f(x_1) \in B_{s_2}(y)$.

Tegyük most fel, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ és $(x_k)_{1\le k\le n}$ olyan rendszer X-ben hogy minden $1 \le k \le n$ természetes számra $x_k \in B_{r_k}(x_{k-1})$ és $f(x_k) \in B_{s_{k+1}}(y)$. Olyan $x_{n+1} \in B_{r_{n+1}}(x_n)$ pontot keresünk, amelyre $f(x_{n+1}) \in B_{s_{n+2}}(y)$. Ha x_{n+1} ilyen pont volna, akkor $f(x_{n+1}) \in B_{s_{n+2}}(y) \bigcap f\langle B_{r_{n+1}}(x_n)\rangle$ teljesülne, tehát $B_{s_{n+2}}(y) \bigcap f\langle B_{r_{n+1}}(x_n)\rangle \neq \emptyset$.

Megfordítva, ha $B_{s_{n+2}}(y) \bigcap f\langle B_{r_{n+1}}(x_n)\rangle \neq \emptyset$, akkor $f^{-1}\langle B_{s_{n+2}}(y) \bigcap B_{r_{n+1}}(x_n) \neq \emptyset$, és e halmaz bármely x elemére $f(x) \in B_{s_{n+2}}(y)$ és $x \in B_{r_{n+1}}(x_n)$ teljesülne, tehát az $x_{n+1} := x$ választás megfelelő volna. Tehát azt kell igazolni, hogy $B_{s_{n+2}}(y) \bigcap f\langle B_{r_{n+1}}(x_n)\rangle \neq \emptyset$. A $B_{s_{n+2}}(y)$ gömb környezete y-nak, ezért elég volna azt igazolni, hogy $y \in \overline{f\langle B_{r_{n+1}}(x_n)}$. Ez viszont igaz, mert $B_{s_{n+1}}(f(x_n)) \subseteq \overline{f\langle B_{r_{n+1}}(x_n)\rangle}$ és $f(x_n) \in B_{s_{n+1}}(y)$, vagyis $y \in B_{s_{n+1}}(f(x_n))$.

Legyen tehát $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ olyan X-beli sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $x_n \in B_{r_n}(x_{n-1})$ és $f(x_n) \in B_{s_{n+1}}(y)$. Legyen $m, n \in \mathbb{N}$ és $m < n$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$d_X(x_m, x_n) \leq \sum_{k=m+1}^{n} d_X(x_{k-1}, x_k) < \sum_{k=m+1}^{n} r_k < \sum_{k=m+1}^{\infty} r_k,$$

amiből következik, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$-re

$$d_X(x_m, x_n) \leq \sum_{k=min(m,n)}^{\infty} r_k.$$

A $\sum_{k\in\mathbb{N}^+} r_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, ezért $lim_{m\to\infty} \sum_{k=min(m,n)}^{\infty} r_k = 0$. Ebből adódik, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ Cauchy-sorozat X-ben. Az X tér teljessége folytán az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ sorozat konvergens X-ben, legyen $x := lim_{n\to\infty} x_n$.

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $d_X(x_0, x_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} r_k$, ezért $d_X(x_0, x) = lim_{n\to\infty} d(x_0, x_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} r_k < r'$, vagyis $x \in B_{r'}(x_0)$. Az f függvény folytonos, ezért $f(x) = lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Ugyanakkor minden $n \in \mathbb{N}^+$-re $f(x_n) \in B_{s_{n+1}}(y)$. és $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ zérussorozat $\mathbb{R}$-ben. Így $y = lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk. ■

3.1.3. Tétel (Banach nyíltleképezés tétele). *Legyenek X és Y teljes és metrizálható topologikus vektortér, valamint $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) u nyílt leképezés;

(ii) u szürjektív leképezés;

(iii) $Im(u)$ második kategóriájú részhalmaza F-nek.

Biz. $(i) \Rightarrow (ii)$:

Ha u nyílt leképezés, akkor $Im(u)$ környezete a 0-nak F-ben, ezért elnyelő halmaz. Ugyanekkor az $Im(u)$ halmaz zárt a skalárokkal vett szorzásra nézve, ezért $Im(u) = F$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$:

A Baire-féle kategóriatétel szerint F második kategóriájú részhalmaza az F teljes és metrizálható topologikus térnek.

$(iii) \Rightarrow (i)$:

Rögzíthetünk olyan E és F feletti metrikákat, amelyek transzlációinvariánsak, és az E és F topológiáját generálják. Ekkor E és F ezekkel a metrikákkal ellátva teljes metrikus terek. Továbbá, a (iii) hipotézis, és az előzőek szerint a $0 \in E$ vektor minden W környezetére az $\overline{u\langle W\rangle}$ halmaz környezete a $0 \in F$ vektornak. Ezért minden $r \in \mathbb{R}^+$-hez található olyan $s \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_s(0) \subseteq \overline{u\langle B_r(0)\rangle}$, ahol a gömböket az E és F felett adott transzláció-invariáns metrikák felett kell venni. Ha $r, s \in \mathbb{R}^+$ ilyen tulajdonságú számok, akkor az u additivitása folytán minden $x \in E$ esetén $B_s(u(x)) = u(x) + B_s(0) \subseteq u(x) + \overline{u\langle B_r(0)\rangle} = \overline{u(x) + u\langle B_r(0)\rangle} = \overline{u\langle x + B_r(0)\rangle} = \overline{u\langle B_r(x)\rangle}$, ahol kihasználtuk azt, hogy bármely $y \in F$ esetén az $F \to F; y' \mapsto y + y'$ leképezés homeomorfizmus. Ez azt jelenti, hogy az E és F teljes metrikus terek között ható u folytonos függvényre teljesül az előző lemma feltétele. Tehát ha $(r, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ olyan pár, hogy $B_s(0) \subseteq \overline{u\langle B_r(0)\rangle}$, akkor minden $r' > r$ valós számra és $x \in E$-re $B_s(u(x)) \subseteq u\langle B_{r'}(x)\rangle$.

Legyen most $\Omega \subseteq E$ tetszőleges nyílt halmaz és $x \in \Omega$. Legyen $r' \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_{r'}(x) \subseteq \Omega$, és rögzítsünk egy $r \in]0, r'[$ valós számot. Az előzőek alapján van olyan $s \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_s(0) \subseteq \overline{u\langle B_r(0)\rangle}$, ezért $B_s(u(x)) \subseteq u\langle B_{r'}(x)\rangle \subseteq u\langle\Omega\rangle$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy $u\langle\Omega\rangle$ nyílt részhalmaza F-nek, vagyis (i) igaz. ■

3.1.4. Következmény. *Teljes és metrizálható topologikus vektorterek között ható folytonos lineáris bijekció homeomorfizmus.*

Biz. Egy ilyen operátor szürjektív, tehát a Banach nyíltleképezés tétele szerint nyílt leképezés, ami azzal ekvivalens, hogy az inverze folytonos. ■

3.1.5. Megjegyzés. *A normált terekre vonatkozó Banach nyíltleképezés tétel is kimondható és bizonyítható az előző tételhez nagyon hasonló formában.*

3.1.6. Tétel (Zárt gráf tétel). *Ha E és F teljes és metrizálható topologikus vektorterek és $u : E \to F$ lineáris operátor, akkor u akkor és csak akkor folytonos ha u gráfja zárt az $E \times F$ szorzattérben.*

Biz. Tegyük fel először, hogy u gráfja zárt a szorzattérben, és legyen $G := \{(x, u(x)) \in E \times F : x \in E\}$. Jelöljük w-vel a következő leképezést: $w : E \to E \times F; x \mapsto (x, u(x))$. Ekkor w lineáris operátor, ugyanis u lineáris. A G definíciója miatt a w operátor ráképez G-re, és mivel w-nek van balinverze (nevezetesen $pr_1 \mid G$), így w injektív is. Tehát $w : E \to G$ lineáris bijekció és $w^{-1} = pr_1|G$. Ekkor $(pr_2|G) \circ w = u$, ahol $pr_2|G : G \to F$ lineáris operátor.

Az E és F topologikus vektorterek teljesek és metrizálhatóak, tehát az $E \times F$ topologikus lineáris szorzattér is teljes és metrizálható, igy G a szorzattopológia leszűkítésével ellátva szintén teljes és metrizálható topologikus vektortér. Azt szeretnénk belátni, hogy u folytonos, amit $pr_2|G$ és w folytonosságának bizonyításával kapunk. A $pr_2|G$ függvény a $pr_2 : E \times F \to F$ folytonos projekció megszorítása, tehát folytonos. A w operátor lineáris bijekció és w^{-1} folytonos, mert a $pr_1 : E \times F \to E$ folytonos és $w^{-1} = pr_1|G$. A Banach nyíltleképezés tételének előző következményét alkalmazva kapjuk, hogy a $w^{-1} : G \to E$ operátor lineáris homeomorfizmus, ezért w folytonos.

Most tegyük fel, hogy $u : E \to F$ folytonos függvény. Mivel F metrizálható így tudjuk azt, hogy F T_2 tér. Azt fogjuk belátni, hogy $(E \times F)\backslash G$ nyílt halmaz. Ennek a bizonyításához rögzítsünk egy $(x, y) \in (E \times F)\backslash G$-beli pontot. Ekkor $u(x) \neq y$, ugyanis $(x, u(x)) \in G$. Mivel F T_2-tér, így létezik olyan V nyílt környezete $u(x)$-nek és olyan W nyílt környezete y-nak, melyek diszjunktak. Mivel u folytonos az x pontban, ezért létezik olyan U nyílt környezete x-nek E-ben, melyre $u\langle U\rangle \subseteq V$. Ekkor az $U \times W$ halmaz nyílt környezete lesz az (x, y) pontnak az $E \times F$ szorzattérben. Erről a halmazról mutatjuk meg, hogy részhalmaza a $(E \times F)\backslash G$ halmaznak.

Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $(U \times W) \bigcap G \neq \emptyset$, azaz létezik olyan $x' \in U$ és $y' \in W$, hogy $(x', y') \in G$. Ekkor $y' = u(x')$. Tehát $y' \in u\langle U\rangle \bigcap W$. Így azt kapjuk, hogy $y' \in V \bigcap W$, ami ellentmondás. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

3.1.7. Következmény. *Legyenek E, F vektorterek és $\mathfrak{T}_E$ és $\mathfrak{T}_F$ legyenek teljes és metrizálható topológiák E és F felett. Ha $u : E \to F$ olyan lineáris operátor, amelyhez létezik olyan F feletti $\mathfrak{T}$ lineáris Hausdorff-topológia, hogy $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}_F$ és u folytonos a $\mathfrak{T}_E$ és $\mathfrak{T}$ topológiák szerint, akkor u folytonos a $\mathfrak{T}_E$ és $\mathfrak{T}_F$ topológiák szerint is.*

Biz. Ha $\mathfrak{T}$ olyan lineáris topológia E felett, hogy $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}_F$ és u folytonos a $\mathfrak{T}_E$ és $\mathfrak{T}$ topológiák szerint, akkor u gráfja zárt az $E \times F$-ben a $\mathfrak{T}_E \times \mathfrak{T}$ topológia szerint, így a $\mathfrak{T}_E \times \mathfrak{T}_F$ topológia szerint is zárt, ugyanis $\mathfrak{T}_E \times \mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}_E \times \mathfrak{T}_F$. Ezért a zárt gráf tétel alkalmazásával kapjuk, hogy u folytonos a $\mathfrak{T}_E$ és $\mathfrak{T}_F$ topológiák szerint. ■

3.1.8. Következmény. *Legyen E vektortér és $\mathfrak{T}_1$ és $\mathfrak{T}_2$ teljes és metrizálható lineáris topológiák E felett. Ha létezik olyan E feletti $\mathfrak{T}$ lineáris Hausdorff-topológia, hogy $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}_1$ és $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}_2$, akkor $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$.*

Biz. Az előző állítást kétszer alkalmazva az id_E operátorra kapjuk, hogy ez folytonos a $\mathfrak{T}_1$ és $\mathfrak{T}_2$ topológiák szerint azaz $\mathfrak{T}_2 \subseteq \mathfrak{T}_1$, valamint folytonos a $\mathfrak{T}_2$ és $\mathfrak{T}_1$ topológiák szerint is, azaz $\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2$. Így $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$ ■

3.2. Megjegyzések a tételhez és egy lehetséges általánosítás

3.2.1. Megjegyzés. *A Banach nyíltleképezés tételének bizonyítása során megfigyelhetjük a következőket:*

- az $(i) \Rightarrow (ii)$ *implikáció tetszőleges topologikus vektorterekre igaz;*

-a $(ii) \Rightarrow (iii)$ *következtetés bizonyítása során csak* F *teljességét és metrizálhatóságát használtuk ki, tehát* E *tetszőleges topologikus vektortér is lehetne;*

-a $(iii) \Rightarrow (i)$ *implikáció bizonyításában nem használtuk ki* F *teljességét.*

Ezért várható, hogy a tétel gyengébb feltételek mellett is érvényes. Itt következzék egy, amely lényegesen hivatkozik a Banach nyíltleképezés tételére, tehát nem helyettesítheti a korábbi bizonyítását, csak a tényeket általánosítja.

3.2.2. Tétel. *Legyen* E *olyan topologikus vektortér, amelyhez van olyan* $(E_n, v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat, hogy minden* n *egész számra* E_n *teljes metrizálható topologikus vektortér,* $v_n : E_n \to E$ *folytonos lineáris operátor és* $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Im(v_n)$*. Ekkor minden* F *teljes és metrizálható topologikus vektortérre és* $u : E \to F$ *folytonos lineáris operátorra a következő állítások ekvivalensek.*

(i) u *nyílt leképezés*

(ii) u *szürjektív leképezés*

(iii) $Im(u)$ *második kategóriájú részhalmaza* F*-nek*

Biz. $(i) \Rightarrow (ii)$:

Ha u nyílt leképezés, akkor $Im(u)$ környezete a 0-nak F-ben, ezért elnyelő halmaz. Ugyanakkor az $Im(u)$ halmaz zárt a skalárokkal vett szorzásra nézve, ezért $Im(u) = F$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$:

A Baire-féle kategóriatétel szerint F második kategóriájú részhalmaza az F teljes és metrizálható topologikus térnek.

$(iii) \Rightarrow (i)$:

Tegyük fel, hogy $Im(u)$ második kategóriájú részhalmaza F-nek, és legyen $(E_n, v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, hogy minden n egész számra E_n teljes metrizálható topologikus vektortér, $v_n : E_n \to E$ folytonos lineáris operátor és $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Im(v_n)$. Ekkor

$Im(u) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Im(u \circ v_n)$, ezért vehetünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, hogy $Im(u \circ v_n)$ második kategóriájú részhalmaza F-nek (hiszen megszámlálható sok első kategóriájú halmaz uniója is első kategóriájú halmaz). Az E_n és F topologikus vektorterek teljesek és metrizálhatóak, és az $u \circ v_n : E_n \to E$ nyílt szürjekció. Ha V a 0-nak környezete E-ben, akkor a $v_n : E_n \to E$ operátor folytonossága miatt létezik a 0-nak olyan V_n környezete E_n-ben, hogy $v_n\langle V_n\rangle \subseteq V$, tehát $(u \circ v_n)\langle V_n\rangle = u\langle v_n\langle V_n\rangle\rangle \subseteq u\langle V\rangle$, és az $u \circ v_n$ nyíltsága miatt $(u \circ v_n)\langle V_n\rangle$ a 0-nak környezete F-ben, tehát $u\langle V\rangle$ is környezete a 0-nak F-ben. Ebből következik, hogy $u : E \to F$ nyílt leképezés. ■

4. fejezet

Induktívan előállított lokálisan konvex topológiák, induktív limesz és Banach nyíltleképezés tétel általánosítása (LF)-terekre

4.1. Induktívan előállított lokálisan konvex topológiák

4.1.1. Definíció. *Legyenek E és E_α (ahol α egy tetszőleges A indexhalmazon fut végig) topologikus vektorterek, legyenek $g_\alpha : E_\alpha \to E$ lineáris operátorok, és legyenek $\mathfrak{T}_\alpha$ lokálisan konvex topológiák E_α ($\alpha \in A$) felett. Az $\{(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in A\}$ rendszer által induktívan előállított E feletti lokálisan konvex topológiának nevezzük azt a legnagyobb lokálisan konvex topológiát, melyre nézve minden g_α ($\alpha \in A$) leképezés folytonos.*

4.1.2. Tétel. *Az előző pontban definiált topológia egyértelműen létezik.*

Biz. Legyen $\mathfrak{S}$ azon E feletti $\mathfrak{T}$ lokálisan lokálisan konvex topológiák halmaza, melyre minden $\alpha \in A$ estén a $g_\alpha : E_\alpha \to E$ leképezés folytonos a $\mathfrak{T}_\alpha$ és $\mathfrak{T}$ topológiák szerint. Tekintsük a $\mathfrak{T} := sup_{\mathfrak{T}' \in \mathfrak{S}} \mathfrak{T}'$ topológiát, amelyről tudjuk, hogy lokálisan konvex topológia E felett. Ha $\mathfrak{T} \in \mathfrak{S}$ teljesülne, akkor akkor $\mathfrak{T}$ a legnagyobb lenne mindazon E feletti lokálisan konvex topológiák között, amelyre teljesül az, hogy minden $\alpha \in A$ esetén a $g_\alpha : E_\alpha \to E$ lineáris operátor folytonos a $\mathfrak{T}_\alpha$ és $\mathfrak{T}$ topológiák szerint.

Legyen $\alpha \in A$ rögzített; megmutatjuk, hogy $g_\alpha : E_\alpha \to E$ folytonos a $\mathfrak{T}_\alpha$ és $\mathfrak{T}$ topológiák szerint. Ehhez legyen V a 0-nak környezete E-ben a $\mathfrak{T}$ topológia szerint. Legyen $\Omega \in \mathfrak{T}$ olyan, hogy $0 \in \Omega \subseteq V$. A szuprémum-topológia értelmezése alapján léteznek olyan $(\mathfrak{T}'_\beta)_{\beta\in B}$ és $(\Omega_\beta)_{\beta\in B})$ nem üres véges rendszerek, hogy minden $\beta \in B$-ra $\mathfrak{T}'_\beta \in \mathfrak{S}$ és $(\Omega_\beta \in \mathfrak{T}'_\beta$, valamint $0 \in \bigcap_{\beta\in B}\Omega_\beta \subseteq \Omega$. Minden $\beta \in B$ esetén az a $g_\alpha : E_\alpha \to E$ lineáris operátor folytonos a $\mathfrak{T}_\alpha$ és a $\mathfrak{T}'_\beta$ topológiák szerint, tehát $g_\alpha^{-1}\langle\Omega_\beta\rangle$ környezete a 0-nak E_α-ban a $\mathfrak{T}_\alpha$ topológia szerint. Ezért $U := \bigcap_{\beta\in B} g_\alpha^{-1}\langle\Omega_\beta\rangle$ olyan környezete a 0-nak E_α-ban a $\mathfrak{T}_\alpha$ topológia szerint, hogy $g_\alpha\langle U\rangle \subseteq \Omega \subseteq V$, tehát g_α a 0-ban folytonos a $\mathfrak{T}_\alpha$ és $\mathfrak{T}$ topológiák szerint. ■

4.1.3. Megjegyzés. *Ha E vektortér, $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ topologikus vektorterek rendszere, $g_\alpha : E_\alpha \to E$ $(\alpha \in A)$ lineáris operátok rendszere, és $\mathfrak{T}_\alpha(\alpha \in A)$ lokálisan konvex topológiák az E_α topologikus vektorterek felett, akkor az $\{(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in A\}$ rendszer által induktívan előállított topológia nem szükségképpen lineáris; ez a topológia szigorúan nagyobb lehet az $\{(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in A\}$ által induktívan előállított E feletti lokálisan konvex topológiánál.*

4.1.4. Tétel. *Legyen E vektotér, $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ topologikus vektorterek rendszere, és $(g_\alpha)_{\alpha\in A}$ olyan rendszer, hogy minden $\alpha \in A$-ra $g_\alpha : E_\alpha \to E$ lineáris operátor. Jelölje $\mathfrak{C}$ az E összes konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak halmazát, továbbá minden $\alpha \in A$-ra $\mathfrak{F}_\alpha$ a 0 környezetszűrője E_α-ban. Ekkor a*

$$\mathfrak{B} := \{V \in \mathfrak{C} : (\forall\alpha \in A) : g_\alpha^{-1}\langle V\rangle \in \mathfrak{F}_\alpha\}$$

halmaz a 0-nak környezetbázisa az $\{(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in A\}$rendszer által induktívan előállított E feletti lokálisan konvex topológia szerint.

Biz. Ahhoz, hogy belássuk, hogy létezik E felett létezik egyetlen olyan lineáris topológia, amely szerint $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa a következő tulajdonság teljesülését kell leellenőríznünk:

(i) Minden $V \in \mathfrak{B}$ esetén V elnyelő és $(\forall V \in \mathfrak{B})(\exists W \in \mathfrak{B}) : eq(W) \subseteq V$;

(ii) $(\forall\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\})(\forall V \in \mathfrak{B})(\exists W \in \mathfrak{B}) : W \subseteq \lambda \cdot V$;

(iii) $(\forall V \in \mathfrak{B})(\exists W \in \mathfrak{B}) : W + W \subseteq V$.

Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{B}$ olyan rács, amelynek minden eleme 0-t tartalmazó részhalmaza E-nek, és $\mathfrak{B}$ rendelkezik az (i) tulajdonsággal. Ha $V \in \mathfrak{B}$ és $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$, akkor $\lambda \cdot V$ szintén konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő halmaz, továbbá minden $\alpha \in A$ esetén a g_α operátor homogenitása miatt $g_\alpha^{-1}\langle\lambda V\rangle = \lambda g_\alpha^{-1}\langle V\rangle$, tehát $g_\alpha^{-1}\langle V\rangle \in \mathfrak{F}_\alpha$ miatt $g_\alpha^{-1}\langle\lambda V\rangle \in \mathfrak{F}_\alpha$ vagyis $\lambda V \in \mathfrak{B}$, így $\mathfrak{B}$-re a (ii)-es tulajdonság is teljesül. Ha

$V \in \mathfrak{B}$, akkor az előzőek szerint bármely $r \in [0,1]$ valós számra $r \cdot V \in \mathfrak{B}$ és $(1-r) \cdot V \in \mathfrak{B}$, ugyanakkor a V konvexitása miatt $r \cdot V + (1-r) \cdot V \subseteq V$, tehát $\mathfrak{B}$-re (iii) is teljesül.

Ezért létezik egyetlen olyan E feletti $\mathfrak{T}'$ lineáris topológia, amely szerint $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa. A definíciója alapján nyilvánvaló, hogy a $\mathfrak{T}'$ topológia lokálisan konvex, továbbá minden $\alpha \in A$ esetén a $g_\alpha : E_\alpha \to E$ lineáris operátor folytonos az E_α topológiája és $\mathfrak{T}'$ szerint, mert ha V a 0-nak környezete a $\mathfrak{T}'$ szerint, akkor van olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $W \subseteq V$, és ekkor $g_\alpha^{-1}\langle W \rangle \subseteq g_\alpha^{-1}\langle V \rangle$ a 0-nak környezete E_α-ban. Ezért a $\mathfrak{T}'$ topológia kisebb-egyenlő az $\{(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in A\}$ rendszer által induktívan előállított E feletti lokálisan konvex topológiánál, amit $\mathfrak{T}$-vel fogunk jelölni.

Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'$, vagyis $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}'$. Legyen W a 0-nak környezetea $\mathfrak{T}$ topológia szerint. Létezik a 0-nak olyan V konvex, kiegyensúlyozott környezete $\mathfrak{T}$ szerint, amelyre $V \subseteq W$. Ekkor V elnyelő halmaz, tehát $V \in \mathfrak{C}$, és minden $\alpha \in A$ esetén $g_\alpha^{-1}\langle V \rangle$ a 0-nak környezete E_α-ban, hiszen a $\mathfrak{T}$ definíciója alapján a $g_\alpha : E_\alpha \to E$ operátor folytonos az E_α topológiája és $\mathfrak{T}$ szerint. Ebből következik, hogy $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}'$, tehát $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}'$, így $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa a $\mathfrak{T}$ topológia szerint. ■

4.1.5. Tétel. *Legyen E vektortér és legyenek $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ lokálisan konvex topologikus vektorterek a $\mathfrak{T}_\alpha$ topológiával ellátva, és legyenek $g_\alpha : E \to E_\alpha$ lineáris leképezések. Lássuk el az E-t az $\{(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in A\}$ rendszer által induktívan előállított lokálisan konvex topológiával. Ha F lokálisan konvex tér, akkor $v : E \to F$ lineáris leképezés pontosan akkor folytonos, ha $v \circ g_\alpha : E_\alpha \to F$ operátorok folytonosak minden $\alpha \in A$-ra.*

Biz. Legyen F lokálisan konvex tér és $v : E \to F$ lineáris operátor. Ha v folytonos, akkor minden $\alpha \in A$ esetén a $v \circ g_\alpha : E_\alpha \to F$ lineáris operátorok is folytonosak minden $\alpha \in A$-ra, mert a $g_\alpha : E_\alpha \to E$ lineáris operátorok folytonosak.

Megfordítva tegyük fel, hogy minden $\alpha \in A$-ra $v \circ g_\alpha : E_\alpha \to F$ lineáris operátorok folytonosak, és legyen V a 0-nak környezete F-ben, és vegyük a 0-nak olyan W-környezetét F-ben, amely konvex, kiegyensúlyozott, és $W \subseteq V$. Ekkor a W elnyelő is, így $v^{-1}\langle W \rangle$ konvex, kiegyensúlyozott, elnyelő halmaz E-ben, és minden $\alpha \in A$-ra $g_\alpha^{-1}\langle v^{-1}\langle W \rangle\rangle = (v \circ g_\alpha)^{-1}\langle W \rangle$ a 0-nak környezete E_α-ban, vagyis az előző állítás alapján $v^{-1}\langle W \rangle$ a 0-nak környezete E-ben. Ezért $v^{-1}\langle V \rangle$ is környezete a 0-nak E-ben, vagyis u folytonos a 0-ban. ■

Nézzünk meg néhány példát induktívan előállított lokálisan konvex topológiákra.

I. Hányadostér

Legyen E lokálisan kovex topologikus vektortér, és legyen M altere E-nek. Tudjuk, hogy ekkor E/M is lokálisan konvex topologikus vektortér. Jelöljük E topológiáját $\mathfrak{T}$-vel. Ekkor az E/M téren lévő hányadostopológia a $\{(E, \mathfrak{T}, \phi)\}$ rendszer által induktívan előállított E feletti lokálisan konvex topológia, ahol $\phi : E \to E/M$ a kanonikus szürjekció. Tudjuk, hogy ez a topológia akkor és csak akkor Hausdorff, ha M zárt altere E-nek.

II. Lokálisan konvex direkt összeg

Legyenek $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ lokálisan konvex vektorterek a $\mathbb{K}$ test felett. Ekkor a $\bigoplus_\alpha E_\alpha$ direkt összeget úgy definiáljuk, mint a $\prod_\alpha E_\alpha$ szorzat lineáris alterét, ahol véges sok kivételtől eltekintve minden $x_\alpha = p_\alpha(x)$ projekció eredménye 0. Nevezzük g_α-nak ($\alpha \in A$) a $g_\alpha : E_\alpha \to \bigoplus_\beta E_\beta$ kanonikus injekciót. Az $\{(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$ lokálisan konvex vektorterek lokálisan konvex direkt összegének nevezzük a $\bigoplus_\alpha E_\alpha$ teret a $\{(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in A\}$ rendszer által induktívan előállított lokálisan konvex topológiával ellátva. Jelöljük ezt a topológiát $E(\mathfrak{T}) = \bigoplus_\alpha E_\alpha(\mathfrak{T}_\alpha)$-val.

4.2. Induktív limesz, szigorúan induktív limesz

4.2.1. Definíció. *Legyen E vektortér és $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ lokálisan konvex terek olyan rendszere, hogy minden $\alpha \in A$-ra E_α lineáris altere az E vektortérnek. Minden $\alpha \in A$-ra jelöljük g_α-val az $E_\alpha \to E$ kanonikus injekciót. Ekkor az $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ lokálisan konvex térrendszer induktív limeszének nevezzük az E vektorteret az $\{(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in A\}$ rendszer által induktívan előállított lokálisan konvex topológiával ellátva, ahol $\mathfrak{T}_\alpha$ legyen E_α előre adott tetszőleges lokálisan konvex topológiája. Ezentúl az $\{(E_\alpha, \mathfrak{T}_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in A\}$ rendszert jelöljük rövidebben $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$-val.*

4.2.2. Állítás. *Legyen E vektortér, $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ hordós terek rendszere, és $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ olyan rendszer, hogy minden $\alpha \in A$-ra $g_\alpha : E_\alpha \to E$ lineáris operátor, akkor E az $\{(E_\alpha, g_\alpha) : \alpha \in A\}$ rendszer által induktívan előállított lokálisan konvex topológiával ellátva szintén hordós tér.*

Biz. Legyen T hordó E-ben; ekkor T konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő halmaz E-ben. Továbbá, minden $\alpha \in A$ esetén $g_\alpha^{-1}\langle T \rangle$ zárt E_α-ban, mert T zárt E-ben és g_α folytonos. Tehát minden $\alpha \in A$ esetén $g_\alpha^{-1}\langle T \rangle$ hordó E_α-ban, így a 0-nak környezete

E_α-ban, mert a hipotézis szerint E_α hordós tér. Ezért T a 0-nak környezete E-ben, vagyis E hordós tér. ■

Legyen E az $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ lokálisan konvex tér-rendszer induktív limesze. Jelölje $\mathfrak{C}$ az E összes konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak halmazát, és minden $\alpha \in A$-ra legyen $\mathfrak{F}_\alpha$ a 0 vektor környezetszűrője $\mathfrak{E}_\alpha$-ban. Ekkor a

$$\mathfrak{B} := \{V \in \mathfrak{C} : (\forall \alpha \in A) : V \bigcap E_\alpha \in \mathfrak{F}_\alpha\}$$

halmaz a 0-nak környezetbázisa E-ben, hiszen $\alpha \in A$ és $V \in \mathfrak{C}$ esetén $g_\alpha^{-1}\langle V \rangle = V \bigcap E_\alpha$, ahol g_α az $E_\alpha \to E$ kanonikus injekció. Ezért egy $V \subseteq E$ halmaz pontosan akkor környezete a 0-nak E-ben ha létezik olyan $W \subseteq E$ konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő halmaz, hogy $W \subseteq V$ és minden $\alpha \in A$-ra $W \bigcap E_\alpha$ a 0-nak környezete E_α-ban.

Ha E az $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ lokálisan konvex tér-rendszer induktív limesze, akkor minden $\alpha \in A$ esetén az $E_\alpha \to E$ kanonikus injekció folytonos, ezért az $E_\alpha$topológiája majorálja az E topológiájának E_α-ra vett leszűkítését, de azzal nem feltétlen egyenlő. A következő állítás erre az egyenlőségre mutat egy elégséges feltételt.

4.2.3. Állítás. *Legyen E az $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ lokálisan konvex tér-rendszer induktív limesze. Jelölje $\mathfrak{T}$ az E topológiáját, és minden $\alpha \in A$ esetén legyen $\mathfrak{T}_\alpha$ az E_α topológiája. Ekkor a következő két állítás ekvivalens.*

(i) Minden $\alpha \in A$-ra $\mathfrak{T}_\alpha = \mathfrak{T} \mid E_\alpha$.

(ii) Létezik olyan $\mathfrak{T}'$ lokálisan konvex topológia E felett , amelyre minden $\alpha \in A$ esetén $\mathfrak{T}' \mid E_\alpha = \mathfrak{T}_\alpha$.

Biz. (i) $\Rightarrow$ (ii)

Triviális, hiszen a $\mathfrak{T}' := \mathfrak{T}$ választás megfelel.

(ii)$\Rightarrow$ (i)

Legyen $\mathfrak{T}'$ olyan lokálisan konvex topológia E felett, amelyre minden $\alpha \in A$ esetén $\mathfrak{T} \mid E_\alpha = \mathfrak{T}_\alpha$ teljesül. Ekkor minden $\alpha \in A$-ra az $E_\alpha \to E$ kanonikus injekció folytonos a $\mathfrak{T}_\alpha$ és $\mathfrak{T}'$ topológiák szerint, tehát a $\mathfrak{T}$ definíciója alapján $\mathfrak{T}' \leq \mathfrak{T}$. Ebből következik, hogy minden $\alpha \in A$ esetén $\mathfrak{T}_\alpha = \mathfrak{T}' \mid E_\alpha \leq \mathfrak{T} \mid E_\alpha$, így $\mathfrak{T}_\alpha = \mathfrak{T} \mid E_\alpha$. ■

Példák induktív limeszekre:

1) Legyen T lokálisan kompakt tér, F normált tér, és tekintük az $T \to F$ kompakt tartójú folytonos függvények $\mathcal{K}(T, F)$ vektoterét. Jelölje $\mathfrak{T}$ a sup-norma által generált (normálható, tehát lokálisan konvex) topológiát $\mathcal{K}(T, F)$ felett. Legyen továbbá

minden $K \subseteq T$ kompakt halmazra

$$\mathcal{K}(T, K, F) := \{f \in \mathcal{K}(T, F) : supp(f) \subseteq K\},$$

és a $\mathcal{K}(T, K, F) \subseteq \mathcal{K}(T, F)$ lineáris alteret lássuk el a $\mathfrak{T} \mid \mathcal{K}(T, K, F)$ altértopológiával. Minden $K \subseteq T$ kompakt halmazra $\mathcal{K}(T, K, F)$ normálható topologikus vektortér, sőt ha F Banach-tér akkor ez teljes és normálható topologikus vektortér. A $\mathcal{K}(T, F)$ függvénytér feletti természetes induktív topológiának nevezzük a $\{(\mathcal{K}(T, K, F)) : K \in \mathfrak{K}\}$ lokálisan konvex tér-rendszer induktív limeszének topológiáját, ahol $\mathfrak{K}$ a T összes kompakt részhalmazainak a halmaza. A $\mathcal{K}(T, F)$ feletti természetes induktív topológia Hausdorff topológia, mert majorálja a sup-norma által indukált topológiát (vagyis $\mathfrak{T}$-t). Továbbá, az előző állítás szerint minden $K \subseteq T$ kompakt halmazra a $\mathcal{K}(T, F)$ természetes induktív topológia $\mathcal{K}(T, K, F)$-ra vett leszűkítése egyenlő a $\mathcal{K}(T, K, F)$ topológiájával. Ha H lokálisan konvex tér, akkor egy $u : \mathcal{K}(T, F) \to H$ lineáris operátor pontosan akkor folytonos a $\mathcal{K}(T, F)$ feletti természetes induktív topológia szerint, ha minden $K \subseteq T$ kompakt halmazra az u leszűkítése a $\mathcal{K}(T, K, F)$-re folytonos. Ha F Banach-tér, akkor $\mathcal{K}(T, F)$ a természetes induktív topológiával ellátva hordós tér, mert ekkor $\mathcal{K}(T, F)$ teljes és normálható topologikus vektoterek (tehát hordós terek) induktív limesze.

2) Legyen E véges dimenziós valós normált tér, $\Omega \subseteq E$ nyílt részhalmaz és F normált tér. Jelölje $C_0^\infty(\Omega, F)$ az $\Omega \to F$ kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvények vektorterét, továbbá minden $K \subseteq \Omega$ kompakt halmazra legyen

$$C^\infty(\Omega, K, F) := \{f \in C_0^\infty(\Omega, F) : supp(f) \subseteq K\}$$

. Legyen $K \subseteq \Omega$ rögzített kompakt halmaz, és minden $p \in \mathbb{N}$ esetén értelmezzük a

$$||| \cdot |||_{K,p}\colon C^\infty(\Omega, K, F) \to \mathbb{R}_+; f \mapsto \sup_{x \in K} \| \, (D^p f(x) \, \|$$

leképezést, amelyről könnyen látható, hogy félnorma a $C^\infty(\Omega, K, F)$ függvénytér felett. Lássuk el a $C^\infty(\Omega, K, F)$ vektorteret a $(\| \cdot \|_{K,p})_{p \in \mathbb{N}}$ félnorma sorozat által generált lokálisan konvex topológiával. Világos, hogy ekkor $C^\infty(\Omega, K, F)$ metrizálható lokálisan konvex tér, és belátható, hogy ha F Banach tér, akkor teljes is, vagyis ekkor $C^\infty(\Omega, K, F)$ Fréchet-tér. A $C_0^\infty(\Omega, F)$ függvénytér természetes induktív topológiájának nevezzük a $\{(C^\infty(\Omega, K, F)) : K \in \mathfrak{K}\}$ lokálisan konvex tér-rendszer induktív limeszének topológiáját, ahol a $\mathfrak{K}$ az Ω összes kompakt részhalmazainak halmaza. Világos, hogy a $C_0^\infty(\Omega, F)$ természetes induktív topológia Hausdorff topológia, mert majorálja a sup-norma által generált topológiát.

4.2.4. Lemma. *Legyen E lokálisan konvex tér, M lineáris altere E-nek, és W a 0-nak konvex, kiegyensúlyozott környezte az M topologikus lineáris altérben. Ekkor* *létezik a 0-nak olyan V konvex kiegyensúlyozott környezete E-ben, amelyre $V \bigcap M = W$. Ha $x \in E \setminus \overline{M}$, akkor létezik a 0-nak olyan V konvex környezete E-ben, amelyre $V \bigcap M = W$ és x nincs benne a W-ben.*

Biz. Az altértopológia definíciója alapján a W-hez létezik a 0-nak olyan V' környezete E-ben, hogy a $V' \bigcap M \subseteq W$, továbbá az E lokális konvexitása miatt V' megválasztható úgy, hogy konvex és kiegyensúlyozott legyen. Értelmezzük a $V := co(V' \bigcup W)$ halmazt, ami a 0-nak konvex környezete E-ben, és kiegyensúlyozott is, mert $V' \bigcup W$ kiegyensúlyozott, és kiegyensúlyozott halmaz konvex burka kiegyensúlyozott. Megmutatjuk, hogy $V \bigcap M = W$. Az nyilvánvaló, hogy $W \subseteq V \bigcap M$.

Megfordítva, legyen $x \in V \bigcap M$; ekkor léteznek olyan $\alpha, \beta \in [0,1]$ valós számok és $y \in V'$, $z \in W$ vektorok, hogy $\alpha + \beta = 1$ és $x = \alpha \cdot y + \beta \cdot z$. Ha $\alpha = 0$, akkor $\beta = 1$, tehát $x = z \in W$. Ha $\alpha > 0$, akkor $y = \alpha^{-1} \cdot (x - \beta \cdot z) \in M$, mert $x \in M$, és $z \in W \subseteq M$; ekkor $y \in V' \bigcap M \subseteq W$, tehát a W konvexitása folytán $x \in W$.

Ha $x \in E \setminus \overline{M}$, akkor V' megválasztható úgy, hogy $(x + V') \bigcap M = \emptyset$ legyen, ekkor $V := co(V') \bigcup W$ a 0-nak olyan konvex kiegyensúlyozott környezete E-ben, amelyre $V \bigcap M = W$ és x nincs benne V-ben. Valóban, ha $x \in V$ igaz volna, akkor léteznének olyan $\alpha, \beta \in [0,1]$ valós számok és $y \in V'$, $z \in W$ vektorok, hogy $\alpha + \beta = 1$ és $x := \alpha \cdot y + \beta \cdot z$, így a V' kiegyensúlyozottsága folytán $x - \alpha \cdot y = \beta \cdot z \in (x + V') \bigcap M$ teljesülne, ami $(x + V') \bigcap M = \emptyset$ miatt lehetetlen. ■

4.2.5. Állítás. *Legyen E az $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lokálisan konvex tér-sorozat induktív limesze, és tegyük fel, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $E_n \subseteq E_{n+1}$, valamint E_n topologikus lineáris altere E_{n+1}-nek (vagyis E_{n+1} topológiájának E_n-re vett leszűkítése megegyezik E_n topológiájával), és $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$-re az E topológiájának E_n-re vett leszűkítése egyenlő az E_n topológiájával, és ha minden $n \in \mathbb{N}$-re E_n szeparált, akkor E is szeparált.*

Biz. (I) Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített, és legyen W a 0-nak konvex kiegyensúlyozott környezete E_n-ben. Megmutatjuk, hogy létezik a 0-nak olyan V konvex kiegyensúlyozott környezete E-ben, amelyre $V \bigcap E_n = W$; ebből következni fog, hogy E_n topologikus lineáris altere E-nek.

A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételének és ez előző lemmának alkalmazásával könnyen látható olyan $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozat létezése, hogy $V_0 = W$, és minden $k \in \mathbb{N}$ estén V_k a 0-nak konvex kiegyensúlyozott környezete E_{n+k}-ban, és $V_{k+1} \bigcap E_{n+k} = V_k$. Legyen $V = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k$. Világos, hogy ez kiegyensúlyozott halmaz, és konvex is, mert a $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ halmazsorozat monoton növő. Ugyanakkor a V halmaz elnyelő E-ben, mert $x \in E$ esetén van olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $x \in E_{n+k}$, így V_k elnyeli x-et, hiszen V_k a 0-nak környezete E_{n+k}-ban, ezért V még inkább elnyeli x-et, hiszen $V_k \subseteq V$.

Megmutatjuk, hogy $V \bigcap E_n = W$. Ehhez először teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $V_k \bigcap E_n = W$. Ez nyilván igaz, ha $k = 0$, mert $V_0 := W$ és $W \subseteq E_n$. Ha $k \in \mathbb{N}$ és $V_k \bigcap E_n = W$, akkor $E_n \subseteq E_{n+k}$ miatt $V_{k+1} \bigcap E_n = (V_{k+1} \bigcap E_{n+k}) \bigcap E_n = V_k \bigcap E_n = W$, vagyis az állítás igaz a $k+1$ számra is. Ebből következik, hogy $V \bigcap E_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (V_k \bigcap E_n) = W$.

Bebizonyítjuk, hogy minden $m \in \mathbb{N}$-re $V \bigcap E_m$ a 0-nak környezete E_m-ben. Valóban, ha $m \in \mathbb{N}$ és $m \leq n$, akkor $E_m \subseteq E_n$ miatt $V \bigcap E_m = (V \bigcap E_n) \bigcap E_m = W \bigcap E_m$, és W a 0-nak környezete E_n-ben, valamint a hipotézis szerint az E_n topológiájának E_m-re vett leszűkítése egyenlő az E_m topológiájával, tehát a $W \bigcap E_m$ a 0-nak környezete E_m-ben. Ezért elegendő azt igazolni, hogy ha $m \in \mathbb{N}$ és $m > n$, akkor $V \bigcap E_m$ a 0-nak környezete E_m-ben. Tehát az a kérdés, hogy ha $k \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges, akkor $V \bigcap E_{n+k}$ a 0-nak környezete-e E_{n+k}-ban? Erre a kérdésre viszont a válasz nyilvánvalóan igen, mert minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $V_k = V_{k+1} \bigcap E_{n+k} \subseteq V \bigcap E_{n+k}$ és V_k a 0-nak környezete E_{n+k}-ban.

Tehát azt kaptuk, hogy V olyan konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmaza E-nek, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $V \bigcap E_m$ a 0-nak környezete E_m-ben. Ebből következik, hogy V a 0-nak környezete az E induktív limeszben, továbbá $V \bigcap E_n = W$. Ezzel igazoltuk azt, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re az E topológiájának E_n-re vett leszűkítése egyenlő az E_n topológiájával.

(II) Tegyük fel hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén E_n szeparált. Az E szeparáltságának bizonyításához legyen $x \in E \setminus \{0\}$ rögzített. Az $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ feltétel alapján van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $x \in E_n \setminus \{0\}$. Az E_n szeparáltsága folytán a 0-nak van olyan W környezete E_n-ben, hogy az x nincs benne a W-ben. Az E_n topologikus altere E-nek, ezért létezik a 0-nak olyan V környezete E-ben, hogy $V \bigcap E_n = W$; ekkor az x nincs benne a a V halmazban sem, így E szeparált lokálisan konvex tér. ∎

4.2.6. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az E lokálisan konvex tér az $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lokálisan konvex tér-sorozat szigorú induktív limesze, ha E az $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lokálisan konvex tér-sorozat induktív limesze, és minden $n \in \mathbb{N}$-re E_n zárt topologikus lineáris altere E_{n+1}-nek, valamint $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.*

4.2.7. Állítás. *Ha az E lokálisan konvex tér az $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lokálisan konvex tér-sorozat szigorú induktív limesze, akkor minden $n \in \mathbb{N}$-re E_n zárt lineáris altere E-nek.*

Biz. A hipotézis szerint minden $n \in \mathbb{N}$ estén E_n zárt topologikus lineáris altere E_{n+1}-nek, ezért teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén minden $m \geq n$ természetes számra E_n zárt topologikus lineáris altere E_m-nek.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzítve és vegyünk olyan E_n-ben haladó $(x_i)_{i\in I}$ általánosított sorozatot és olyan $x \in E$ vektort, hogy $(x_i)_{i\in I}$ konvergál x-hez E-ben; azt kell bizonyítani, hogy $x \in E_n$. Az $E = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m$ feltétel alapján van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $x \in E_m$; és mivel az $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat tartalmazás tekintetében monoton növő, feltehető, hogy $m \geq n$. Ekkor az $(x_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat E_m-ben halad és $x \in E_m$, valamint E_m topologikus lineáris altere E-nek, ezért $(x_i)_{i\in I}$ konvergál x-hez az E_m topologikus lineáris altérben. Az E_n halmaz zárt E_m-ben, és az $(x_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat E_n-ben halad, ezért $x \in E_n$ ■

Példák szigorúan induktív limeszekre

1) Legyen T σ-kompakt lokálisan kompakt tér; ekkor létezik a T részhalmazainak olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $K_n \subseteq int(K_{n+1})$ és $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Legyen F normált tér. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\mathcal{K}(T, K_n, F)$ vektorteret a sup-norma által generált topológiával látjuk el. Ekkor a $\mathcal{K}(T, F)$ függvénytér a természetes induktív topológiával ellátva egyenlő a $\{\mathcal{K}(T, K_n, F) : n \in \mathbb{N}\}$ normálható topologikus vektortér-sorozat szigorú induktív limeszével. A definíció alapján ez nyilvánvaló, ha figyelembe vesszük azt, hogy minden $K \subseteq T$ kompakt halmazhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $K \subseteq int(K_n)$, ezért $\mathcal{K}(T, K, F) \subseteq \mathcal{K}(T, K_n, F)$.

2) Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, Ω nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^k$-nek és F normált tér. Létezik az Ω kompakt részhalmazainak olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $K_n \subseteq int(K_{n+1})$ és $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Ekkor a $C_0^\infty(\Omega, F)$ függvénytér a természetes induktív topológiával ellátva egyenlő a $\{(C_0^\infty(T, K_n, F) : n \in \mathbb{N}\}$ metrizálható topologikus vektortér-sorozat szigorú induktív limeszével.

4.2.8. Tétel. *Legyenek $(E_n)_{n\in N}$ lokálisan konvex topologikus vektorterek, és legyen E_n topológiája $\mathfrak{T}_n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Legyen E az $(E_n)_{n\in N}$ terek szigorú induktív limesze és legyen $\mathfrak{T}$ az E topológiája. Egy $B \subset E$ pontosan akkor korlátos E-ben a $\mathfrak{T}$ topológia szerint, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy B korlátos részhalmaza E_n-nek a $\mathfrak{T}_n$ topológia szerint.*

4.2.9. Lemma. *Legyen E topologikus vektortér $\mathbb{K}$ felett, és legyen A részhalmaza E-nek. Ekkor A akkor, és csak akkor korlátos részhalmaza E-nek az E topológiája szerint, ha minden $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nullsorozatra, és minden $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ A-ban haladó pontsorozatra $(\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E-ben haladó nullsorozat.*

Biz. Legyen A korlátos halmaz E-ben és legyen V kiegyensúlyozott környezete a 0-nak E-ben. Ekkor létezik egy μ K-beli nemnulla elem, melyre $\mu A \subset V$. Ha $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges nullsorozat K-ban, ekkor létezik egy $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\mid \lambda_n \mid \leq \mid \mu \mid$ minden $n \geq n_0$. Ekkor minden $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ A-ban haladó sorozatra, és minden $n_0 \geq n$-re $\lambda_n x_n \in V$.

Megfordítva legyen A nem korlátos E-ben. Ekkor létezik egy olyan U környezete 0-nak, hogy U nem nyeli el az A halmazt, tehát minden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $\lambda \in \mathbb{K}$, hogy $\mid \lambda \mid \neq \alpha$ és $A\backslash(\lambda \cdot U) \neq \emptyset$. Vegyük a 0-nak egy ilyen környezetét és rögzítsünk egy olyan $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathbb{R}^+$-ban, amelyre $lim_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n^{-1} = 0$. Kiválasztunk olyan $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\lambda_n \geq \alpha_n$ és $A\backslash\lambda_n \cdot U) \neq \emptyset$. A kiválasztási axióma alkalmazásával veszünk egy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} A\backslash(\lambda_n \cdot U)$ sorozatot. Ekkor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan A-ban haladó és $(\lambda_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{K}$-ban haladó zérussorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $x_n \notin \lambda_n \cdot U$, vagyis $\lambda_n^{-1} \cdot x_n \notin U$. Ez azt jelenti, hogy a $(\lambda_n^{-1} \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vektorsorozat nem tart a 0-hoz E-ben. ■

Biz. A (4.2.4)-es állítás miatt B korlátossága nyilvánvaló, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy B korlátos részhalmaz E_n-ben a $\mathfrak{T}_n$ topológia szerint.

A másik irány bizonyításához, tegyük fel, hogy B korlátos halmaz, de nincs olyan $n \in \mathbb{N}$ melyre $B \subset E_n$. Ekkor létezik egy $\{k_1, k_2, ...\}$ természetes számokból álló, szigorúan monoton növő sorozat, és egy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ B-ben haladó pontsorozat úgy, hogy $x_n \in E_{k_n}$ de x_n nincs benne E_{k_n}-ben. A (4.2.4)-es állítás alapján ekkor indukcióval készítsunk egy $\{V_{k_n}\}$ konvex, kiegyensúlyozott halmazokból álló sorozatot úgy, hogy V_{k_n} 0 környezete E_{k_n}-ben minden k_n indexre. Ezen kívül minden $n \in \mathbb{N}$-re $n^{-1}x_n$ ne legyen benne a $V_{k_{n+1}}$ halmazban és $V_{k_{n+1}} \bigcap E_{k_n} = V_{k_n}$ feltétel teljesüljön. Ekkor a $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{k_n}$ környezete a 0-nak E-ben, de $n^{-1}x_n$ nincs benne a V halmazban semmilyen $n \in \mathbb{N}$-re. Ez pedig a lemma miatt ellentmondás, tehát az állítás, hogy B nem részhalmaza E_n-nek, semmilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén nem igaz. Ezzel a tételt beláttuk. ■

4.2.10. Tétel. *Teljes, lokálisan konvex topologikus vektorterek szigorúan induktív limesze is teljes topologikus vektortér.*

Biz. Legyenek $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teljes lokálisan konvex topologikus vektorterek, és legyen E_n topológiája $\mathfrak{T}_n$. Továbbá legyen E az $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ terek szigorú induktív limesze, és legyen $\mathfrak{T}$ az E topológiája. Legyen $\mathfrak{F}$ Cauchy-szűrő az E topologikus vektortérben, és $\mathfrak{U}$ a környezetszűrője 0-nak E-ben. Ekkor $\mathfrak{F} + \mathfrak{U} = \{F + U : F \in \mathfrak{F}, U \in \mathfrak{U}\}$ Cauchy-rács E-ben, amely akkor és csak akkor konvergens, ha $\mathfrak{F}$ konvergens. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, amelyre $\mathfrak{F} + \mathfrak{U}$ nyoma az E_{n_0} halmazon (vagyis

$\{H \bigcap E_{n_0} \; : \; H \in \mathfrak{F} + \mathfrak{U}\}$ halmazrendszer) rács. Tehát ha $\mathfrak{F} + \mathfrak{U}$ nyoma konvergens E_{n_0}-ban a $\mathfrak{T}_{n_0}$ topológia szerint, mivel E_{n_0} teljes és $\mathfrak{F}$ konvergens E-ben. Most indirekt tegyük fel, hogy az $\mathfrak{F} + \mathfrak{U}$ nyoma az E_n halmazon nem rács, ami azzal ekvivalens, hogy ennek a nyomnak eleme az üres halmaz, vagyis létezik $F_n \in \mathfrak{F}$ és W'_n $\mathfrak{U}$, amelyre $(F_n + W'_n) \bigcap E_n = \emptyset$. Így kiválasztva egy $(W'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazsorozatot $\mathfrak{U}$-ban (vagyis 0 környezetszűrőjében), az E lokális konvexitása miatt választhatunk olyan újabb $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ halmazsorozatot $\mathfrak{U}$-ban, amely már a tartalmazás tekintetében monoton fogyó, és minden tagja konvex és kiegyensúlyozott halmaz, valamint minden $n \in \mathbb{N}$-re $W_n \subseteq W'_n$, tehát megmarad az $(F_n + W_n) \bigcap E_n = \emptyset$. Legyen U a konvex, kiegyensúlyozott burka az $W_n \bigcap E_n$ halmazok uniójának, ahol n végigfut a természetes számok halmazán. Ekkor U környezete lesz 0-nak E-ben. Megmutatjuk, hogy $(F_n + U) \bigcap E_n = \emptyset$, minden $n \in \mathbb{N}$-re. Legyen $y \in E_n \bigcap (F_n + U)$, ekkor $y = z_n + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$, ahol $\sum \mid \lambda_i \mid \leq 1$, $x_i \in W_i \bigcap E_i (i = 1, ...p)$ és $z_n \in F_n$, így

$$y - \sum_{i \leq min(n,p)} \lambda_i x_i = z_n + \sum_{n < i \leq p} \lambda_i x_i .$$

Mivel $W_i \subset W_n$ minden $i > n$-re, és W_n konvex, kiegyensúlyozott halmaz, így az utolsó egyenlőség jobb oldala benne van az $F_n + W_n$ halmazban, míg az egyenlőség baloldala E_n-ben van, ami lehetetlen, mivel $(F_n + U) \bigcap E_n = \emptyset$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Mivel $\mathfrak{F}$ Cauchy filter, így létezik olyan $F \in \mathfrak{F}$ úgy, hogy $F - F \subset U$. Legyen $w \in F$, ekkor $w \in E_k$ valamilyen $k \in \mathbb{N}$-re. Legyen $v \in F_k \bigcap F$, ekkor $w = v + (w - v) \in v + (F - F) \subset F_k + U$, ami ellentmondás. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. ■

4.3. A Banach nyíltleképezés tétel általánosítása (LF)-terekre

4.3.1. Definíció. *A teljes és metrizálható lokálisan konvex topologikus vektortereket Frechét-térnek nevezzük, és az (F)-tér jelölést használjuk rá.*

A Frechét-terek szigorúan induktív limeszét (LF)-térnek nevezzük.

4.3.2. Tétel (Banach nyíltleképezés tétel általánosítása (LF)-terekre). *Legyen E (LF)-tér, és legyen F lokálisan konvex (F) vagy (LF)-tér. Ekkor minden $u : E \rightarrow F$ folytonos, lineáris, szürjektív operátor nyílt leképezés.*

Biz. Legyen E az $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Fréchet-terek szigorú induktív limesze, és F legyen az $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Fréchet-terek szigorú induktív limesze. Az az eset mikor F Fréchet-tér formálisan úgy kezelhető, hogy $F = F_n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Minden $n, m \in \mathbb{N}$-re legyen

$G_{m,n} := E_m \bigcap u^{-1}(F_n)$. Mivel $G_{m,n}$ zárt részhalmaza E_m-nek, így $G_{m,n}$ teljes és metrizálható. Mivel $u(E) = F$ és $u(G_{m,n}) = u(E_m) \bigcap F_n$, ezért $\bigcup_{m=1}^{\infty} u(G_{m,n}) = F_n$, minden rögzített $n \in \mathbb{N}$-re. Mivel F_n II. kategóriájú, így létezik olyan n-től függő m_0, hogy $u(G_{m_0,n} = F_n)$ a Banach nyíltleképezés tétel teljes és metrizálható topologikus vektorterekre vonatkozó változata szerint. Legyen U konvex, kiegyensúlyozott környezete a 0-nak E-ben, ekkor $U \bigcap G_{m_0,n}$ környezete lesz a 0-nak $G_{m_0,n}$-ben a (4.2.4.)-es tétel szerint. Így $u(U \bigcap G_{m_0,n})$ környezete lesz 0-nak F_n-ben és $u(U) \bigcap F_n$ is környezete 0-nak F_n-ben. Mivel ez minden $n \in \mathbb{N}$-re igaz, ebből következik, hogy $u(U)$ a 0-nak környezete lesz F-ben, amiből következik, hogy u nyílt leképezés. ■

5. fejezet

Általánosított nyíltleképezés és zárt gráf tétel

5.1. B-teljes és B_r-teljes terek

A fejezetet kezdjük néhány alapvető fogalom bevezetésével, amelyek használatával fogunk eljutni az általánosított nyíltleképezés és zárt gráf tételekhez.

Legyen F, G két K feletti vektortér és legyen f egy bilineáris forma $F \times G$-n úgy, hogy teljesüljön rá a következő két axióma:

(i) ha $f(x_0, y) = 0$ minden $y \in G$ esetén, akkor $x_0 = 0$

(ii) ha $f(x, y_0) = 0$ minden $x \in F$ esetén, akkor $y_0 = 0$.

Ekkor az (F, G, f) hármast duális rendszernek, vagy dualitásnak hívjuk. Hogy f-et megkülönböztessük a többi bilineáris formától $F \times G$-n, f-et kanonikus bilineáris formának hívjuk, és gyakran a következőképpen jelöljük: $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$. Az $(F, G, \langle , \rangle)$ hármasra rövidebben csak a $\langle F, G \rangle$ jelölést használjuk.

Legyen F vektortér K felett és legyen T egy F-beli halmaz. Legyen $\mathfrak{S}$ T részhalmazainak egy rendszere a halmazelméleti $' \subseteq'$ tartalmazással, mint rendezéssel ellátva. $\mathfrak{S}$ egy $\mathfrak{S}_1$ részrendszerét fundamentálisnak nevezzük, ha kofinális $\mathfrak{S}$-sel a tartalmazásra nézve (azaz minden $\mathfrak{S}$-beli halmaz tartalmaz $\mathfrak{S}_1$-beli halmazt). Legyen F^T az összes $T \to F$ leképezések vektortere. F legyen topologikus vektortér, és legyen $\mathfrak{B}$ a 0-nak egy környezetbázisa F-ben. Mikor S végigfut a $\mathfrak{S}$ rendszeren és V befutja $\mathfrak{B}$-t, akkor a

$$M(S, V) = \{f \in F^T : f(S) \subseteq V\}$$

halmazok a 0-nak környezetbázisát alkotják F^T-ben, egy egyértelműen meghatározott eltolásinvariáns topológiára nézve, amit az egyenletes konvergencia topológiájának nevezünk az $S \in \mathfrak{S}$ halmazokon, vagy rövidebben csak $\mathfrak{S}$-topológiának. Ha $V_3 \subseteq V_1 \bigcap V_2$ és $S_1 \bigcup S_2 \subseteq S_3$, akkor $M(S_1, V_1) \bigcap M(S_2, V_2) \subseteq M(S_3, V_3)$, így az $M(S, V)$ alakú hamazok halmaza rács lesz ebben a vektortérben, amely aztán generál egy szűrőt F^T-ben, amelyre igaz, hogy $M(S, V) + M(S, V) \subseteq M(S, U)$, ahol $V + V \subseteq U$. $(*)$-ban a $\mathfrak{S}$-et helyettesíthetjük tetszőleges fundamentális alrendszerével, és a $\mathfrak{S}$-topológia nem függ a $\mathfrak{B}$ választásától.

5.1.1. Definíció. *Ha T topologikus tér és F egy uniform tér, ekkor egy $H \subseteq F^T$ részhalmaz ekvifolytonos egy $t_0 \in T$ pontban, ha minden $N \subseteq F \times F$ nyílt részhalmazra létezik t_0-nak egy $U(t_0)$ környezete úgy, hogy $[f(t), f(t_0)] \in N$ minden $t \in U(t_0)$-ra és $f \in H$-ra.*

5.1.2. Definíció. *Legyen E lokálisan konvex topologikus vektortér. Egy $\mathfrak{S} \neq \{\emptyset\}$ E korlátos részhalmazaiból álló halmazrendszert telített rendszernek nevezzük, ha:*

(i) Minden elemének tartalmazza tetszőleges részhalmazát.

(ii) Minden elemének tartalmazza tetszőleges skalárszorosát.

(iii) Tartalmazza bármely véges sok elemének uniójának zárt, konvex, kiegyensúlyozott burkát.

5.1.3. Definíció. *Legyen E lokálisan konvex topologikus vektortér. Ekkor E-t B-teljes térnek (vagy Pták-térnek) nevezzük, ha minden $Q \subseteq E'$ altér zárt a $\sigma(E', E)$ topológia szerint, valahányszor $Q \bigcap A$ zárt részhalmaza A-nak a $\sigma(E', E)$ topológia szerint minden $A \subseteq E'$ ekvifolytonos részhalmazra.*

5.1.4. Definíció. *Legyen E lokálisan konvex topologikus vektortér. Ekkor E-t B_r-teljes térnek nevezzük, ha minden $Q \subseteq E'$ sűrű altér zárt a $\sigma(E', E)$ topológia szerint, valahányszor $Q \bigcap A$ zárt részhalmaza A-nak a $\sigma(E', E)$ topológia szerint minden $A \subseteq E'$ ekvifolytonos részhalmazra.*

5.1.5. Megjegyzés. *A definíciókból azonnal látszik, hogy az E'-beli összes ekvifolytonos halmazok rendszerét helyettesíthetjük tetszőleges alrendszerrel, például az E lokálisan konvex topologikus vektortér 0-beli környezetbázisához tartozó halmazok polárisaival.*

Példák B-teljes terekre:

1) Minden (F)-tér B-teljes az alábbi tétel szerint.

5.1.6. Tétel (Krein-Smulian). *Legyen E metrizálható lokálisan konvex topologikus vektortér. Ekkor E pontosan akkor teljes, ha egy $M \subseteq E'$ konvex halmaz $\sigma(E', E)$ zárt valahányszor $M \bigcap U^\circ$ zárt részhalmaz E'-ben a $\sigma(E', E)$ topológia szerint minden U E-beli környezetére a 0-nak.*

2) Legyen E (F)-tér. Ekkor az E'_τ Mackey-duálisa B-teljes tér lesz.

3) Minden gyengén teljes lokálisan konvex topologikus vektortér B-teljes. Valójában $E = E'^*$, ami azt mutatja, hogy $\tau(E', E)$ a legnagyobb lokálisan konvex topológia E' felett.

4) Majd megmutatjuk, hogy egy B-teljes tér minden zárt altere és minden szeparált hányadostere is B-teljes tér.

5.1.7. Tétel. *Egy $G \subseteq F^T$ vektortér akkor és csak akkkor lesz topologikus vektortér egy alkalmas $\mathfrak{S}$ topológiával, ha minden $f \in G$-re és $S \in \mathfrak{S}$-re $f(S)$ korlátos F-ben.*

Biz. Az $M(S, V) \bigcap G$ halmazok, (ahol $S \in \mathfrak{S}, V \in \mathfrak{B}$) környezetbázisát alkotják a 0-nak G-ben a $\mathfrak{S}$-topológia által indukált $\mathfrak{T}$ topológia szerint, ezután ezeket a halmazokat fogjuk $M(S, V)$-vel jelölni, eszünkben tartva, hogy most $M(S, V) = \{f \in G : f(S) \subseteq V\}$.

Most tegyük fel, hogy minden $S \in \mathfrak{S}$-re és minden $f \in G$-re az $f(S)$ halmazok korlátosak F-ben. Ekkor egy rögzített f-re. S-re és V-re létezik egy $\lambda > 0$ valós szám, amire $f(S) \subseteq \lambda V$, és mivel $f \in M(S, \lambda V) = \lambda M(S, V)$, amiből következik, hogy $M(S, V)$ elnyelő. Megfordítva, ha $\mathfrak{T}$ egy vektortér topológia G-n, akkor minden $M(S, V)$ elnyelő, ezért minden rögzített f-re, S-re és V-re létezik egy $\lambda > 0$ valós szám úgy, hogy $f \in \lambda M(S, V) = M(S, \lambda V)$. Így $f(S) \subseteq \lambda V$, ami bizonyítja, hogy $f(S)$ korlátos F-ben.

A következő három lemmát bizonyítás nélkül említjük meg. Mindháromra szükségünk lesz majd a későbbiek során.

5.1.8. Lemma. *Legyen E topologikus vektortér $\mathbb{C}$ felett, és legyen E_0 az L alatt fekvő valós topologikus vektortér. Legyen $f(x) = g(x) - ig(ix)$ $(x \in E)$, ahol g egy valós, lineáris leképezés E-en. Ekkor f $\mathbb{R}$-lineáris bijekció $(E_0)^*$ és $(E^*)_0$ között, ahol $(E^*)_0$ az E^* alatt fekvő valós vektorteret jelenti.*

5.1.9. Lemma. *Legyen E lokálisan konvex topologikus vektortér és legyenek A és B nemüres, diszjunkt, konvex részhalmazai L-nek. Legyen A zárt, és B kompakt. Ekkor létezik L-ben egy valódi, zárt hipersík, amely szigorúan elválasztja A-t a B-től.*

5.1.10. Következmény. *Legyen E tetszőleges lokálisan konvex topologikus vektortér, és legyen $\mathfrak{T}$ az L topológiája. Továbbá legyen A tetszőleges konvex részhalmaza E-nek. Ekkor A $\mathfrak{T}$ topológia szerinti lezártja megegyezik a $\sigma(E, E')$ topológia szerinti lezárásával.*

5.1.11. Lemma. *Legyenek F, G vektorterek, és $\langle F, G\rangle$ egy dualitás. Legyen M tetszőleges részhalmaza F-nek. Ekkor M° egy $\sigma(G, F)$ zárt, konvex részhalmaza G-nek, amely tartalmazza $0 \in G$-t. Ha M kiegyensúlyozott, akkor M° is az. Ha M altere F-nek, akkor M° altere lesz G-nek.*

5.1.12. Tétel. *Legyen $\langle F, G\rangle$ egy dualitás. Ekkor minden M részhalmazára F-nek igaz az, hogy az M $M^{\circ\circ}$ bipolárisa $\sigma(F, G)$-zárt konvex burka $M \bigcup \{0\}$-nak.*

Biz. Az (4.2.4.)-es lemma alapján $M^{\circ\circ}$ $\sigma(F, G)$ zárt, konvex halmaz, tartalmazza a 0-t, és nyilvánvalóan tartalmazza M-et. Így $M_1 \subseteq M^{\circ\circ}$, ahol M_1-gyel az $M \bigcup \{0\}$ zárt, konvex burkát jelöljük. Az állítás bizonyításához azt kell megmutatnunk, hogy ha x nincs benne az M_1-ben, akkor nincs benne az M második polárisában sem. Tegyük fel tehát, hogy x_0 olyan pont, ami nincs benne M_1-ben. Az $(II.9.2)$-as elválasztási tétel szerint, létezik egy zárt, valódi hipersík F-ben, amely szigorúan elválasztja M_1-et és $\{x_0\}$-at egymástól. Mivel $0 \in M_1$, ezért $H := \{x \in F : f(x) = 1\}$ egy ilyen hipersík lesz egy alkalmas F feletti $\sigma(F, G)$-folytonos, f valós lineáris funkcionálra. Ekkor az (5.1.8.)-es lemma miatt $f(x) = Re\langle x, y_0\rangle$ minden $x \in F$-re és egy megfelelő $y_0 \in G$ pontra. Most mivel $0 \in M_1$, azt kaptuk, hogy $Re\langle x, y_0\rangle < 1$, ha $x \in M_1$, így $Re\langle x_0, y_0\rangle > 1$. Ebből azt kapjuk, hogy $y_0 \in M_1^\circ \subseteq M^\circ$, ahonnan következik, hogy x_0 nincs benne az $M^{\circ\circ}$ második polárisban. ■

5.1.13. Következmény. *Minden $M \subseteq F$ halmazra igaz, hogy $M^{\circ\circ\circ} = M^\circ$*

5.1.14. Következmény. *Legyen $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$ tetszőleges rendszere F $\sigma(F, G)$ zárt, konvex 0-t tartalmazó részhalmazainak. Legyen $M = \bigcap_\alpha M_\alpha$. Ekkor M polárisa az $\bigcup_\alpha M_\alpha^\circ$ halmaz konvex burkának $\sigma(F, G)$ topológia szerinti lezártja.*

Biz. Legyen N az $\bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha^\circ$ halmaz zárt, konvex burka. Mivel $M_\alpha^{\circ\circ} = M_\alpha$ minden $\alpha \in A$-ra, így $N^\circ = [\bigcup M_\alpha^\circ]^\circ = \bigcap M_\alpha = M$, ahol az egyenlőségek az (5.1.11.)-es lemma, az (5.1.12.)-es tétel és az (5.1.13.)-es következmény miatt teljesülnek. Így megkaptuk azt, hogy $M^\circ = N^{\circ\circ} = N$, amit szerettünk volna bizonyítani. ■

5.1.15. Állítás. *Legyen E szeparált lokálisan konvex tér és $H \subseteq E'$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) A H halmaz ekvifolytonos E'-ben.

(ii) A H° poláris halmaz a 0-nak környezete E-ben.

(iii) Létezik a 0-nak olyan V környezete E-ben, hogy $H \subseteq V^\circ$.

Biz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Világos, hogy

$$\{x \in E : (\forall u \in H) :\mid u(x) \mid \leq 1\} = \bigcap_{u \in H} u^{-1}\langle \overline{B_1}(0; \mathbb{K})\rangle,$$

tehát ha H ekvifolytonos halmaz, akkor az $\{x \in H : (\forall u \in H) :\mid u(x) \mid \leq 1\}$ halmaz a 0-nak környezete E-ben, és nyilvánvaló, hogy ez a halmaz része a H° polárisnak, így H° is a 0-nak környezete E-ben.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Nyilvánvaló, mert $U \subseteq H^{\circ\circ}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Legyen V a 0-nak olyan környezete E-ben, hogy $H \subseteq V^\circ$, és vegyük a 0-nak olyan U kiegyensúlyozott környezetét E-ben amelyre $U \subseteq V$. Ekkor $H \subseteq U^\circ$, és minden $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén $\epsilon \cdot U$ a 0-nak olyan környezete E-ben, amelyre

$$\epsilon \cdot U \subseteq \bigcap_{u \in H} u^{-1}\langle \overline{B_\epsilon}(0; \mathbb{K})\rangle,$$

ami azt jelenti, hoy H ekvifolytonos halmaz. ■

Nyilvánvaló, hogy minden E topologikus vektortérre igaz, hogy a 0 egy környezetbázisának polárisa egy fundamentális rendszere ekvifolytonos halmazoknak. Lokálisan konvex topologikus vektorterekre ennek a megfordítása is igaz.

5.1.16. Következmény. *Legyen E lokálisan konvex topologikus vektortér. Vegyünk tetszőleges ($\langle E, E'\rangle$ dualitásnak megfelelő) fundamentális rendszerét E'-beli ekvifolytonos halmazoknak. Ekkor ennek a rendszernek a polárisa környezetbázisa lesz a 0-nak E-ben.*

Biz. Legyen $\mathfrak{S}$ E'-beli ekvifolytonos halmazok egy fundamentális rendszere, és legyen U a 0-nak egy rögzített környezete E-ben, mivel E lokálisan konvex, így U választható konvex, zárt halmaznak, így a (4.2.9.) következmény miatt U $\sigma(E, E')$ zárt is. Mivel U° ekvifolytonos, így létezik egy $S \in \mathfrak{S}$, amire $U^\circ \subseteq S$, és $S^\circ \subseteq U^{\circ\circ} = U$. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. ■

5.1.17. Tétel. *Legyen E lokálisan konvex topologikus vektortér, és legyen $\mathfrak{T}$ az E topológiája. Legyen $\mathfrak{S}$ egy telített rendszere E korlátos részhalmazainak. Ekkor E' akkor és csak akkor lesz teljes a $\mathfrak{S}$ topológia szerint, ha minden f E feletti lineáris funkcionál pontosan akkor folytonos $\mathfrak{T}$ szerint, ha minden $S \in \mathfrak{S}$ halmazra az $f \mid_S$ folytonos a $\mathfrak{T} \mid S$ altértopológiája szerint.*

Biz. Először bizonyítsuk az elégségességet. Legyen $\mathfrak{F}$ Cauchy filter E'-ben a $\mathfrak{S}$ topológiára nézve. Mivel $\mathfrak{S}$ tartalmazza E-t, így $\mathfrak{F}$ pontonként konvergál egy f lineáris funkcionálhoz, és a konvergencia minden $S \in \mathfrak{S}$ halmazon egyenletes. Legyen f_S megszorítása f-nek az S halmazra (minden $S \in \mathfrak{S}$-re). Mivel f az f_S funkcionálok egyenletes limesze a $\mathfrak{T}$ topológia szerint S-en, így azt kapjuk, hogy f is folytonos a $\mathfrak{T}$ topológia szerint. tehát f folytonos lineáris funkcionál az E topologikus vektortér felett, amivel az elégségességet igazoltuk.

Most nézzük meg a szükségesség bizonyítását. Elegendő megmutatnunk, hogy minden $f \in E^*$ funkcionálra, ha $f \mid_S$, vagyis az f S-re vett leszűkítése, folytonos a $\mathfrak{T} \mid S$ altértopológia szerint (minden $S \in \mathfrak{S}$ esetén) akkor f egyenletesen approximálható E feletti folytonos lineáris funkcionálokkal (minden $S \in \mathfrak{S}$ esetén). Legyen $S \in \mathfrak{S}$ és legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges valós szám. Mivel $\mathfrak{S}$ egy telített rendszer így feltehetjük, hogy S konvex, kiegyensúlyozott és $\sigma(E, E')$ zárt halmaz. Legyen $f \in E^*$, és tegyük fel, hogy $f \mid_S$ folytonos $\mathfrak{T} \mid S$ szerint a $0 \in S$ pontban. Ekkor létezik egy U konvex, kiegyensúlyozott, a $\sigma(E, E')$ topológia szerint zárt környezete a 0-nak (a $\mathfrak{T}$ topológia szerinti környezet), amelyre igaz, hogy $\mid f(x) \mid \leq \epsilon$ minden $x \in S \bigcap U$. Ez ekvivalens azzal, hogy $f \in \epsilon(S \bigcap U)^\circ$, ahol a poláris a $\langle E, E^* \rangle$ dualitás szerint értendő. Mivel S és U szükségképpen $\sigma(E^*, E)$-zárt halmazok, így a (5.1.14)-es következmény szerint az $(S \bigcap U)^\circ$ halmaz tartalmazza az $U^\circ + S^\circ$ halmaz $\sigma(E^*, E)$ topológia szerinti lezártját. De mivel U° kompakt, és S° zárt halmaz a $\sigma(E^*, E)$ topológia szerint, így $U^\circ + S^\circ$ zárt, és így $f \in \epsilon(U^\circ + S^\circ)$. Ebből azt kapjuk, hogy egy alkalmas $g \in \epsilon U^\circ \subseteq E'$-re $f - g \in \epsilon S^\circ$, ami azt jelenti, hogy $\mid f(x) - g(x) \mid \leq \epsilon$, ha $x \in S$, amivel az állítás bizonyítását befejeztük. ■

5.1.18. Következmény. *Legyen E lokálisan konvex topologikus vektortér. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(a) E teljes

(b) Minden E'-beli lineáris funkcionál, amely $\sigma(E', E)$-folytonos E' minden ekvifolytonos részhalmazán, az $\sigma(E', E)$-folytonos az egész E'-n.

(c) Legyen $H \subseteq E'$ olyan hipersík, amelyre $H \bigcap A$ halmaz az A-nak zárt részhalmaza a $\sigma(E', E) \mid A$ altértopológia szerint minden A ekvifolytonos részhalmazára E'-nek. Ekkor H zárt E'-ben is a $\sigma(E', E)$ topológia szerint.

Biz. Az (a) és (b) pont ekvivalenciája az előző tételből azonnal látható, mivel az E topológiája az $\mathfrak{S}$-topológia, ahol $\mathfrak{S}$ az E' (a $\sigma(E, E')$ topológiával ellátva) ekvifolytonos részhalmazainak egy telített rendszere. A (5.1.12.)-es tétel harmadik következménye szerint ekkor E az E' duálisa (a $\sigma(E, E')$ topológiával).

$(c) \Rightarrow (b)$

Legyen $H := \{x' \in E' : f(x') = \alpha\}$; ekkor $H \bigcap A = \{x' \in A : f(x') = \alpha\}$ gyengén zárt A-ban, ha az f megszorítása A ra $\sigma(E', E)$ folytonos.

$(b) \Rightarrow (c)$

Tegyük fel, hogy $H = \{x' \in E' : f(x') = \alpha\}$ egy hipersík E'-ben úgy, hogy $H \bigcap A$ zárt a $\sigma(E', E)$ topológia szerint, ahol A ekvifolytonos halmaz. Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy f $\sigma(E', E)$ folytonos A-n, elég megmutatni, hogy egy tetszőleges konvex, kiegyensúlyozott A halmazra való f_A megszorítása az f-nek folytonos a 0 pontban. Először jegyezzük meg, hogy minden $x'_0 \in E'$-re $H \bigcap A + x'_0 = (H + x'_0) \bigcap (A + x'_0)$, és mivel $A + x'_0$ ekvifolytonos, ha A az, így a $\{x' \in A : f(x') = \beta\}$ zárt A-ban minden $\beta \in K$-ra és minden A ekvifolytonos halmazra. Ha f_A nem lenne folytonos $0 \in A$-ban, akkor létezne egy $B \subseteq A$ végtelen részhalmaz, amire $0 \in \overline{B}$ úgy, hogy $f(x) = \beta_0$, $\beta_0 \neq 0$, minden $x \in B$-re, ami ellentmondásban áll azzal, hogy $\{x' \in A : f(x') = \beta_0\}$ zárt A-ban. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. ■

5.1.19. Következmény. *Legyen E teljes, szeparábilis, lokálisan konvex topologikus vektortér, és legyen f egy lineáris funkcionál E'-n. Ekkor f $\sigma(E', E)$ folytonosságához elegendő az, hogy $lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$, ahol $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tetszőleges $\sigma(E', E)$ zérussorozat.*

5.1.20. Lemma. *Legyen L egydimenziós Hausdorff topologikus vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor L izomorf K_0-lal, ahol K_0 jelölje a K-t, mint önmaga feletti vektorteret. Pontosabban minden $\Phi : K_0 \to L$; $\lambda \mapsto \lambda x_0$ leképezés izomorfizmus minden $x_0 \in L$ $x_0 \neq 0$-ra, és minden $K_0 \to L$ izomorfizmus az előbbi alakban írható fel.*

Biz. A topologikus vektortér definiáló tulajdonságai miatt a $\Phi : K_0 \to L$; $\lambda \mapsto \lambda x_0$ leképezés folytonos; továbbá algebrai izomorfizmus. Ahhoz, hogy megmutassuk azt, hogy $\lambda x_0 \mapsto \lambda$ folytonos, elegendő megmutatnunk, hogy a leképezés $0 \in L$-ban folytonos. Válasszunk egy tetszőleges $0 < \epsilon < 1$ valós számot. Ekkor létezik egy λ_0 K-beli elem úgy, hogy $0 <| \lambda_0 |< \epsilon$, és mivel L Hausdorff-tér, így létezik L-ben a 0-nak egy kiegyensúlyozott V környezete úgy, hogy $\lambda_0 x_0$ pont nincs benne V-ben. Így $\lambda x_0 \in V$ esetén $| \lambda |<| \lambda_0 |< \epsilon$, mert V kiegyensúlyozott. Tehát a $\lambda x_0 \mapsto \lambda$ leképezés a 0-ban folytonos. ■

5.1.21. Lemma. *Legyen L vektotér, és legyen $H \subseteq L$ részhalmaza. H akkor és csak akkor lesz hipersík L-ben, ha $H = \{x : f(x) = \alpha\}$ valamilyen $\alpha \in K$-ra, és valamilyen nemnulla $f \in L^*$-ra, ahol f-et és α-t H meghatározza egy $\beta \in K$-beli nemnulla szorzótényezőtől eltekintve.*

Biz. Legyen f tetszőleges L feletti nemnulla, folytonos, lineáris funkcionál. Ekkor $M = f^{-1}(0)$ egy maximális valódi altere L-nek, továbbá ha x_0 olyan pontja L-nek, amelyre $f(x_0) = \alpha$, akkor $H = \{x : f(x) = \alpha\} = x_0 + M$, ami azt mutatja, hogy H hipersík. Megfordítva, ha H hipersík, akkor a $H = x_0 + M$, ahol M L-nek olyan altere, amire $dim L/M = 1$, tehát L/M algebrailag izomorf K_0-lal. Legyen Φ a természetes $L \to L/M$ leképezés, és legyen g az $L/M \to K_0$ között haladó izomorfia. Ekkor $f = g \circ \Phi$ egy nemnulla lineáris operátor lesz L-en úgy, hogy $H = \{x : f(x) = \alpha\}$, ahol $\alpha = f(x_0)$. Ha $H = \{x : f_1(x) = \alpha_1\}$ egy másik megadása H-nak, akkor amiatt, hogy $f_1^{-1}(0) = M$ azt kapjuk, hogy $f_1 = g_1 \circ \Phi$, ahol $g_1 : L/M \to K_0$ izomorfizmus. Válasszunk egy tetszőleges $\xi \in L/M$-beli elemet, amire $g(\xi) = 1$, és $g_1(\xi) = \beta$, akkor $f_1(x) = f(x)\beta$ minden $x \in L$ elemre. Ezzel az állítást beláttuk. ■

5.1.22. Állítás. *Legyen E topologikus vektortér és M altere E-nek. Ekkor E/M akkor és csak akkor lesz Hausdorff-tér, ha M zárt E-ben.*

Biz. Legyen Φ az $E \to E/M$ nányadosleképezés. Ha L/M Hausdorff, akkor a $\{0\} \subset L/M$ zárt, így Φ folytonossága miatt az $M = \Phi^{-1}(0)$ is zárt halmaz. Megfordítva, ha $\widehat{x} \neq 0$ L/M-ben, akkor $\widehat{x} = \Phi(x)$, ahol $x \notin M$. Ha M zárt, akkor M komplementuma egy környezete lesz x-nek, ezért $\Phi(U)$ olyan környezete lesz $\widehat{x}$-nak, ami nem tartalmazza a 0-t. Mivel $\Phi(U)$ tartalmaz $\widehat{x}$ egy zárt környezetét, így L/M Hausdorff-tér. ■

5.1.23. Lemma. *Legyen E topologikus vektortér és H egy hipersík E-ben.Ekkor H vagy zárt, vagy sűrű E-ben. $H := \{x : f(x) = \alpha\}$ akkor és csak akkor zárt E-ben, ha f folytonos operátor.*

Biz. Tegyük fel, hogy $H \subseteq E$ hipersík, de nem zárt. Ekkor H-nak sűrűnek kell lennie, különben H lezártja egy valódi affin altere lenne E-nek, ellentmondásban H maximalitásával. A második állítás bizonyításához, elegendő megmutatnunk, hogy $f^{-1}(0)$ akkor és csak akkor zárt, ha f folytonos. Ha f folytonos, akkor $f^{-1}(0)$ zárt, mivel $\{0\}$ zárt az alaptestben. Ha $f^{-1}(0)$ zárt E-ben, akkor $L/f^{-1}(0)$ 1-dimenziós Hausdorff topologikus vektortér. Így az előző lemma miatt f folytonos leképezéss. ■

5.1.24. Tétel. *Minden B-teljes tér B_r-teljes, és minden B_r-teljes tér teljes.*

Biz. Az első állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy E B_r-teljes tér, és H egy hipersík E'-ben úgy, hogy $H \bigcap A$ zárt arészhalmaza A-nak a $\sigma(E', E)$ topológia szerint, minden A ekvifolytonos részhalmazára E'-nek. Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy H zárt altere E'-nek, elegendő megmutatni, hogy H valamely eltoltja zárt E'-ben a $\sigma(E, E')$ topológia szerint. Ezért feltehető, hogy $0 \in H$. Ha H nem lenne zárt, akkor az (5.1.23.)-as lemma miatt sűrű volna, és így $H = E'$, mivel E B_r-teljes, ami ellentmondás volna. Tehát H zárt, így az állítás következik a (5.1.19.)-es következményből. ■

5.1.25. Tétel. *Legyenek $\langle F, G\rangle$ és $\langle F_1, G_1\rangle$ két dualitás, és legyen $u : F \to F_1$ gyengén folytonos, lineáris operátor, és legyen u' az u duálisa. Legyen $A \subseteq F$ és legyen $B \subseteq F_1$.Ekkor a következő állítások igazak:*

(a) $[u(A)]^\circ = (u')^{-1}(A^\circ)$,

(b) ha $u(A) \subseteq B$, akkor $u'(B^\circ) \subseteq A^\circ$,

(c) ha A, és B zárt, konvex részhalmazok a gyenge topológia szerint, amelyek tartalmazzák a 0-t esetén $u'(B^\circ) \subseteq A^\circ$, akkor $u(A) \subseteq B$.

Biz. (a) $[u(A)]^\circ = \{y' \in G_1 : Re\langle ux, y'\rangle \leq 1$ ha $x \in A\} = \{y' \in G_1 : Re\langle x, u'y'\rangle \leq 1$, ha $x \in A\} = (u')^{-1}(A^\circ)$.

(b) $u(A) \subseteq B$ feltételből azt kapjuk, hogy $B^\circ \subseteq [u(A)]^\circ = (u')^{-1}(A^\circ)$, amiből az következik, hogy $u'(B^\circ) \subseteq A^\circ$.

(c) A (b) pont felhasználásával, $u''(A^{\circ\circ}) \subseteq B^{\circ\circ}$, így $u(A) \subseteq B$, mivel $u'' = u$ és a (5.1.12)-es lemma szerint $A = A^{\circ\circ}$ és $B = B^{\circ\circ}$. ■

5.1.26. Tétel. *Legyenek $\langle F, G\rangle$ és $\langle F_1, G_1\rangle$ dualitások és legyen $u : F \to F_1$ gyengén folytonos lineáris operátor, és legyen u' az u duálisa. Legyenek $\mathfrak{S}$ és $\mathfrak{S}_1$ telített rendszerek az $\sigma(F, G)$ illetve a $\sigma(F_1, G_1)$ topológiák szerinti korlátos részhalmazaiból F-nek illetve F_1-nek. Jelöljük $\mathfrak{T}$-vel az $\mathfrak{S}$ topológiát G felett, illetve $\mathfrak{T}_1$-gyel az $\mathfrak{S}_1$ topológiát G_1 felett. Ekkor $u' : G_1 \to G$ operátor akkor és csak akkor folytonos a $\mathfrak{T}_1$ - $\mathfrak{T}$ topológiák szerint, ha $u(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{S}_1$.*

Biz. Legyenek $\widehat{\mathfrak{S}}$ és $\widehat{\mathfrak{S}_1}$ az összes gyengén zárt, konvex, kiegyensúlyozott $\mathfrak{S}$ illetve $\mathfrak{S}_1$-beli részhalmazok rendszere. Mivel $\widehat{\mathfrak{S}}$ és $\widehat{\mathfrak{S}_1}$ fundamentális alrendszerei $\mathfrak{S}$ illetve $\mathfrak{S}_1$-nek, így az $\mathfrak{U} = \{S^\circ : S \in \mathfrak{S}\}$ és $\mathfrak{U}_1 = \{S_1^\circ : S_1 \in \mathfrak{S}_1\}$ rendszerek a 0-nak környezetbázisai a $\mathfrak{T}$ és $\mathfrak{T}$ topológiák szerint. Az előző tétel (b) és (c) pontjainak felhasználásával azt kapjuk, hogy $u(S) \subseteq S_1$ és $u'(S_1^\circ) \subseteq S^\circ$ feltételek ekvivalensek minden nemüres $S \in \widehat{\mathfrak{S}}$ és $S_1 \in \widehat{\mathfrak{S}_1}$ halmazokra, amivel az állítást bebizonyítottuk. ■

5.1.27. Tétel. *Legyen* $\langle F, G\rangle$ *egy dualitás és legyen* M *egy altere* F*-nek. Jelöljük* $\mathfrak{S}_1'$*-vel és* $\mathfrak{S}_2'$*-vel a* G *illetve a* G/M° *halmazok gyengén korlátos részhalmazaiból álló telített rendszereket, ahol a megfelelő dualitások legyenek a* $\langle F, G\rangle$ *és a* $\langle M, G/M^\circ\rangle$*. Jelöljük* $\mathfrak{T}_1$*-gyel és* $\mathfrak{T}_2$*-vel az* $\mathfrak{S}$ *topológiákat a* F*-en illetve* M*-en. Duálisan legyenek* $\mathfrak{S}_1$ *és* $\mathfrak{S}_2$ *a* F *illetve a* M *halmazok gyengén korlátos részhalmazaiból álló telített rendszerek, és legyenek* $\mathfrak{T}_1'$ *és* $\mathfrak{T}_2'$ $\mathfrak{S}$ *topológiákat a* G*-en illetve* G/M°*-en. Legyen psi a* $F \to F$ *kanonikus beágyazást, és legyen Phi a* $G \to G/M^\circ$ *hányadosleképezés. Nézzük meg a következő tulajdonságokat:*

(a) $\Phi(\mathfrak{S}_1') = \mathfrak{S}_2'$

(b) $T_2 = \mathfrak{T}_1 \mid M$

(c) $\psi^{-1}(\mathfrak{S}_1) = \mathfrak{S}_2$

(d) $\mathfrak{T}_2'$ *hányadostopológiája* $\mathfrak{T}_1$*-nek*

Ekkor az $(a) \Rightarrow (b)$*; és a* $(d) \Rightarrow (c)$ *implikációk egyéb feltételek nélkül is teljesülnek. Ha* $\mathfrak{T}_1'$ *konzisztens a* $\langle F, G\rangle$ *dualitással, akkor teljesül a* $(b) \Rightarrow (a)$ *implikáció; és ha ezenkívül* M *zárt, akkor igaz a* $(c) \Rightarrow (d)$ *implikáció is.*

Biz. A könnyebb nyomonkövethetőség kedvéért jelöljük a $\langle F, G\rangle$ dualitás szerinti polárist a $\circ$ jellel és a $\langle M, G/M^\circ\rangle$ dualitás szerinti polárist a $\bullet$ jellel.

$(a) \Rightarrow (b)$:

Ha $S_1 \in \mathfrak{S}_1'$ akkor a (5.1.25.)-ös tétel (a) pontja szerint

$$[\Phi(S_1)]^\bullet = \psi^{-1}(S_1^\circ) = S_1^\circ \bigcap M.$$

Ahogy S_1 halmaz végigfut a $\mathfrak{S}_1'$ halmazrendszer elemein, akkor S_1° végigfut a 0 környezetbázisán F-ben a $\mathfrak{T}_1$ topológia szerint, így a feltétel miatt $\Phi(S_1)$ végigfut a $\mathfrak{S}_2'$ halmazrendszeren. Így világos, hogy $\mathfrak{T}_1$ indukálja a $\mathfrak{T}_2$ topológiát M-en.

$(d) \Rightarrow (c)$:

Legyen $\mathfrak{U}$ a 0-nak környezetbázisa G-ben a $\mathfrak{T}_1'$ topológia szerint. Ekkor $\mathfrak{B} = \Phi(\mathfrak{U})$ környezetbázisa lesz a 0-nak G/M°-ben a hányadostopológia szerint. Megint felhasználva a (5.1.25.)-ös tétel (a) pontját, azt kapjuk, hogy

$$V^\bullet = [\Phi(U)]^\bullet = \psi^{-1}(U^\circ) = U^\circ \bigcap M$$

minden $U \in \mathfrak{U}$ halmazra. Ha az U° halmazokkal végigmegyünk az $\mathfrak{S}_1$ elemein, akkor U végigfut az $\mathfrak{U}$ környezetbázis elemein. Így abból a feltételből, hogy $\mathfrak{T}_2'$ a $\mathfrak{T}_1'$ hányadostopológiája, azt kapjuk, hogy $\psi^{-1}(\mathfrak{S}_1) = \mathfrak{S}_2$.

$(b) \Rightarrow (a)$

Most tegyük fel, hogy $\mathfrak{T}_1$ konzisztens a $\langle F, G\rangle$ dualitással. Jelölje $\mathfrak{U}_1$ az F-beli 0 $\mathfrak{T}_1$ topológia szerinti zárt, konvex környezeteinek egy rendszerét. Ekkor $\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{U}_1 \bigcap M$ környezetbázisa lesz 0-nak M-ben a $\mathfrak{T}_2$ topológia szerint. Megjegyezzük, hogy ha U° ($U \in \mathfrak{U}_1$) kompakt halmaz, akkor $U^\circ + M^\circ$ zárt a $\sigma(G, F)$ topológia szerint, és $\Phi(U^\circ)$ kompakt (ezért zárt is), ekkor Φ folytonos a $\sigma(G, F)$ és a $\sigma(G/M^\circ, M)$ topológiák szerint. Ekkor a (5.1.14)-es következmény miatt azt kapjuk, hgy

$$\Phi(U^\circ) = \Phi(U^\circ + M^\circ) = \Phi([U \bigcap \overline{M}]^\circ) = [U \bigcap M]^\bullet,$$

ahol $\overline{M}$ jelentse az M halmaz lezártját a $\sigma(F, G)$ topológia szerint. Ha U-t végigfuttatjuk az $\mathfrak{U}_1$ rendszeren, U° végigfut a $\mathfrak{S}'_1$ rendszeren; így $[U \bigcap M]^\bullet$ végigfut az $\mathfrak{S}'_2$ fundamentális alrendszeren. Mivel mindkét rendszer telített, így azt kapjuk, hogy $\Phi(\mathfrak{S}'_1) = \mathfrak{S}'_2$.

$(c) \Rightarrow (d)$

Most tegyük fel, hogy $\mathfrak{T}'_1$ konzisztens a $\langle F, G\rangle$ dualitással és, hogy M zárt a $\sigma(F, G)$ gyenge topológia szerint. Mivel $\psi(\mathfrak{S}_2) \subseteq \mathfrak{S}_1$, így a (5.1.26.)-ös tétel szerint Φ folytonos a $\mathfrak{T}'_1$ és a $\mathfrak{T}'_2$ topológiák szerint. Ezért $\mathfrak{T}'_2$ topológia durvább, mint a $\mathfrak{T}'_1$ hányadostopológia. Tehát elegendő azt megmutatni, hogy minden $S_1 \in \mathfrak{S}_1$ konvex, zárt, kiegyensúlyozott halmazra $\Phi(S_1^\circ)$ környezete lesz a 0-nak G/M°-ben a $\mathfrak{T}'_2$ topológia szerint. Ha $S_2 = S_1 \bigcap M$ akkor az (5.1.25.)-es tétel (a) pontja szerint és a (5.1.14)-es következmény miatt

$$\Phi^{-1}(S_2^\bullet) = [\psi(S_2)]^\circ = [S_1 \bigcap M]^\circ = (S_1^\circ + M^\circ)^-.$$

Ahol $V = S_1^\circ + M^\circ$ egy $\mathfrak{T}'_1$ topológia szerinti környezete a 0-nak, ugyanúgy mint a V $\sigma(F, G)$ topológia szerinti lezártja. És mivel $\mathfrak{T}'_1$ konzisztens a $\langle F, G\rangle$ dualitással és V konvex, így V lezártja a $\mathfrak{T}'_1$ topológia szerint szintén környezete lesz a 0-nak. Ebből azt kapjuk, hogy $(S_1^\circ + M^\circ)^- = \overline{V} \subseteq V + V = 2S_1^\circ + 2M^\circ$. Ebből az következik, hogy $S_2^\bullet \subseteq 2\Phi(S_1^\circ)$, ami mutatja, hogy $\Phi(S_1^\circ)$ környezete a 0-nak G/M°-ben a $\mathfrak{T}'_2$ topológia szerint.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

A következő állítást csak kimondjuk.

5.1.28. Állítás (Hahn-Banach tétel geometriai alakja). *Legyen E topologikus vektortér és legyen M egy lineáris altere E-nek. Továbbá legyen A egy nemüres, konvex, nyílt részhalmaza M-nek, úgy, hogy ne messe A-t. Ekkor létezik E-ben egy olyan zárt hipersík, amely tartalmazza M-et, és nem metsz bele az A halmazba.*

5.1.29. Lemma (Hahn-Banach tétel algebrai alakja). *Legyen E egy vektortér a $\mathfrak{T}$ topológiával, legyen adva egy p félnorma E felett, és legyen M egy altere E-nek. Ha f olyan lineáris funkcionál M-en amire teljesül, hogy $\mid f(x) \mid \leq p(x)$ minden M-beli x-re, akkor létezik f-nek egy olyan f_1 kiterjesztése E-re, hogy $\mid f_1(x) \mid \leq p(x)$ minden $x \in L$-re.*

Biz. Mivel az $f = 0$ esetre az állítás triviálisan teljesül, így feltehetjük, hogy van olyan $x \in M$, amelyre $f(x) \neq 0$. Tudjuk, hogy a $V_n := \{x \in L : p(x) < n^{-1}\}$ halmazok környezetbázisát adják a 0-nak E-ben a $\mathfrak{T}$ topológia szerint (ahol $\mathfrak{T}$ legyen a p félnorma által generált topológia), amennyiben n-et végigfuttatjuk a természetes számok halmazán. Definiáljuk H-t a következőképpen: $H := \{x \in M : f(x) = 1\}$. Ekkor H egy hipersík lesz M-ben és egy affin altere lesz E-nek. Legyen $A = V_1$; ekkor A nyílt halmaz E-ben , és $A \bigcap H = \emptyset$, mivel $p(x) \geq 1$ minden $x \in H$ pontra. Ekkor az előző állítás felhasználásával azt kapjuk, hogy létezik egy H_1 hipersík E-ben, ami tartalmazza H-t, de nem metszi az A halmazt. Mivel $H_1 \bigcap M \neq M$ (mivel 0 nincs benne H_1-ben), és $H \subseteq H_1$, azt kapjuk, hogy $H_1 \bigcap M = H_1$, így a H, mert a H és $H_1 \bigcap M$ hipersíkok M-ben. Ekkor az (5.1.21.)-es lemma miatt írhatjuk, hogy $H_1 = \{x : f_1(x) = 1\}$ valamely alkalmas E feletti lineáris funkcionálra, mivel 0 nincs benne a H_1-ben. Most abból, hogy $H = H_1 \bigcap M$ az következik, hogy $f(x) = f_1(x)$ minden $x \in M$-re, tehát f_1 kiterjesztése lesz az f funkcionálnak E-re. Abból, hogy $H_1 \bigcap A = \emptyset$ következik, hogy $\mid f_1(x) \mid \leq p(x)$ minden $x \in L$-re. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk. ■

5.1.30. Tétel. *Legyen E lokálisan konvex topologikus vektortér, és M egy lineáris altere E-nek. Ekkor ha f egy , folytonos lineáris funkcionál M felett, akkor létezik egy folytonos lineáris funkcionál E felett, amely az f kiterjesztése.*

Biz. Mivel f folytonos M felett, így a $V = \{x :\mid f(x) \mid \leq 1\}$ környezete lesz a 0-nak M-ben. Ekkor létezik egy U konvex, kiegyensúlyozott környezete a 0-nak E-ben úgy, hogy $U \bigcap M \subseteq V$.

5.1.31. Következmény. *Ha $\langle F, G \rangle$ egy dualitás és M egy lineáris altere F-nek, akkor a $\sigma(M, G/M^{\circ})$ topológia a $\sigma(F, G)$ topológia által indukált topológia M-en. Másrészt a $\sigma(G/M^{\circ}, M)$ akkor és csak akkor lesz a $\sigma(G, F)$ topológia hányadostopológiája, ha M $\sigma(F, G)$ zárt F-ben.*

Biz. Az első állítás az (5.1.21)-es tétel $(a) \Rightarrow (b)$ részéből következik azzal a szereposztással, hogy a $\mathfrak{S}'_1$ és a $\mathfrak{S}'_2$ telített rendszerek álljanak a G illetve a G/M° véges részhalmazok halmaza által generált telített halmazrendszerekből. A második állításban az elégségességet hasonlóan láthatjuk az (5.1.21)-es tétel $(c) \Rightarrow (d)$ részéből. Megfordítva, ha a $\sigma(M, G/M^\circ)$ topológia a $\sigma(G, F)$ topológia hányadostopológiája, akkor azt kapjuk (mivel $M^\circ = \overline{M}^\circ$), hogy $\sigma(G/M^\circ, M) = \sigma(G/M^\circ, \overline{M})$, amiből a következő állítás segítségével azonnal kapjuk, hogy $M = \overline{M}$, tehát M zárt.

5.1.32. Állítás. *Legyen $\langle F, G\rangle$ és $\langle F_1, G_1\rangle$ duális rendszerek úgy, hogy legyen $G_1 \subseteq G$. Ha $G_1 \neq G$, akkor a $\sigma(F, G_1)$ topológia szigorúan nagyobb mint a $\sigma(F, G)$ topológia.*

Legyen E lokálisan konvex topologikus vektortér, és M egy altere E-nek, és legyen $F = E/N$. Jelöljük Ψ-vel illetve Φ-vel az $M \to E$ illetve az $E \to E/N$ kanonikus leképezéseket. Ekkor az $f \mapsto f \circ \Psi$ egy $E' \to M'$ lineáris leképezés, és ez egy algebrai izomorfizmust definiál az M' és az E'/M° terek között. Duálisan a $g \mapsto g \circ \Phi$ leképezés szintén egy algebrai izomorfizmus lesz az F' és az $N^\circ \subseteq E'$ között. Ezt figyelembe véve M duálisa azonosítható E'/M°-vel. (És ugyanígy E/N duálisa is N°-rel.) Így az alábbi következményt azonnal megkapjuk az előzőből:

5.1.33. Következmény. *Legyen M altere és F egy hányadostere az E lokálisan konvex topologikus vektortérnek. Ekkor a $\sigma(M, M')$ gyenge topológia a $\sigma(F, F')$ topológia által indukált topológia, és a $\sigma(F, F')$ a $\sigma(E, E')$ hányadostopológiája.*

5.1.34. Tétel (IV.8.2.). *Minden B-teljes tér tetszőleges zárt altere is B-teljes. Minden B_r-teljes tér tetszőleges zárt altere is B_r-teljes.*

Biz. Legyen M zárt altere E-nek. Megmutatjuk, hogy az M duálisa az E'/M° tér, és a (5.1.31)-es következmény felhasználásával megmutatjuk, hogy a $\sigma(E'/M^\circ)$ gyenge topológia a hányadostopológiája a $\sigma(E', E)$ topológiának. Legyen $\psi : E' \to E'/M^\circ$ a hányadosleképezés. Mindkét állítást bizonyítjuk olymódon, hogy Q tetszőleges (illetve gyengén sűrű) altere E'/M°-nek és az E tér B-teljes (B_r-teljes).

Legyen Q olyan részhalmaza E'/M°-nek, hogy $Q \bigcap V^\circ$ gyengén zárt részhalmaza legyen E'/M°-nek, minden $V \in \mathfrak{B}$-re, ahol $\mathfrak{B}$ egy környezetbázisa a 0-nak M-ben. Azt kellenne megmutatnunk, hogy Q zárt a $\sigma(E'/M^\circ, M)$ topológiára nézve. Feltehetjük, hogy $\mathfrak{B} = \{U \bigcap M : U \in \mathfrak{U}\}$, ahol $\mathfrak{U}$ zárt, konvex halmazokból álló környezetbázisa a 0-nak E-ben. Ebből a (5.1.14.) következmény felhasználásával azt kapjuk, hogy $\psi'(U^\circ) = V^\circ$, ahol $V = U \bigcap M$ és $U \in \mathfrak{U}$. Ekkor $P = (\psi')^{-1}(Q)$ altere lesz E'-nek. Mivel ψ' folytonos, így $(\psi')^{-1}(V^\circ \bigcap Q) = (U^\circ + M^\circ) \bigcap P$ zárt részhalmaza E'-nek a $\sigma(E', E)$ topológia szerint. Mivel U° kompakt a $\sigma(E', E)$ topológia szerint, így U° zárt az $U^\circ + M^\circ$-ben, és így azt kapjuk, hogy $U^\circ \bigcap P$ zárt részhalmaza $(U^\circ + M^\circ) \bigcap P$-nek. Mivel az utóbbi halmaz zárt a $\sigma(E', E)$ topológia szerint, ezért $U^\circ \bigcap P$ is zárt E'-ben a $\sigma(E', E)$ topológia szerint. Ezért P, ami sűrű, ha Q is az, a feltétel szerint zárt a $\sigma(E', E)$ topológia szerint, és mivel $M^\circ \subseteq P$, így azt kapjuk, hogy $\psi'(P) = Q$ zárt a $\sigma(E'/M^\circ, M)$ hányadostopológiára nézve, amivel a tétel bizonyítását befejeztük. ■

5.2. Általánosított nyíltleképezés és zárt gráf tétel

5.2.1. Definíció. *Legyen E topologikus vektortér és legyen B részhalmaza E-nek. Ekkor B-t teljesen korlátosnak nevezzük, ha létezik B-nek egy olyan B_0 véges részhalmaza amire igaz, hogy $B \subseteq B_0 + U$.*

5.2.2. Lemma. *Legyen E, M két topologikus vektortér $\mathbb{K}$ felett, és legyen $u : E \to M$ folytonos, lineáris operátor. Ha B korlátos (teljesen korlátos) részhalmaza E-nek, akkor $u(B)$ korlátos (teljesen korlátos) részhalmaza M-nek.*

Biz. Legyen V tetszőleges környezete a 0-nak M-ben. Ekkor $u^{-1}(V)$ környezete lesz a 0-nak E-ben, így ha B korlátos halmaz, akkor $B \subseteq \lambda u^{-1}(V)$ egy alkalmas $\lambda \in K$-ra. Így azt kaptuk, hogy $u(B) \subseteq \lambda V$. Tehát $u(B)$ korlátos részhalmaza M-nek.

Ha B teljesen korlátos, akkor $B \subseteq B_0 + u^{-1}(V)$ egy véges $B_0 \subseteq B$ halmazra, amiből azt kapjuk, hogy $u(B) \subseteq u(B_0)+V$. Tehát $u(B)$ teljesen korlátos részhalmaza M-nek. ■

5.2.3. Lemma. *Legyen F lokálisan konvex topologikus vektortér és T egy tetszőleges topologikus tér. Legyen $\mathfrak{S}$ a T részhalmazainak egy olyan rendszere, melyek uniója sűrű T-ben. Ha G olyan altere az F^T vektortérnek, amely elemei folytonosak T-n és korlátosak minden $S \in \mathfrak{S}$ esetén, akkor G lokálisan konvex topologikus vektortér az $\mathfrak{S}$ topológiával ellátva.*

Biz. Legyen $\mathfrak{B}$ a 0-nak konvex halmazokból álló környezetbázisa F-ben. Ekkor minden $M(S, V)$ konvex halmaz lesz. Így a (4.3.1.)-es tétel alapján az $\mathfrak{S}$ topológia lokálisan konvex. Már csak azt kell belátnunk, hogy a $\mathfrak{S}$ topológia Hausdorff. Ennek bizonyításához válasszunk egy $f \in G$ nemnulla elemet. Ekkor f folytonos függvény és $\bigcup\{S : S \in \mathfrak{S}\}$ sűrű T-ben, ezért létezik egy $t_0 \in S_0 \in \mathfrak{S}$-beli pont, melyre $f(t_0)$ nincs benne V_0-ban egy alkalmas $V_0 \in \mathfrak{B}$-re. Ebből viszont azt kapjuk, hogy f nincs benne $M(S_0, V_0)$-ban sem, azaz a $\mathfrak{S}$ Hausdorff topológia G felett. ■

5.2.4. Lemma. *Legyenek E, F topologikus vektorterek, és $u : E \to F$ lineáris operátor. $Dom(u) = D_u \subseteq E$ legyen olyan, hogy $N \subseteq D_u$, ahol $N = Ker(u)$. Jelöljük Φ-vel az $E \to E/N$ kanonikus leképezést. Legyen u_0 az u-hoz kanonikusan asszociált $\Phi(D_u) \to F$ lineáris operátor. Ekkor az u_0 gráfja pontosan akkor lesz zárt az $(E/N) \times F$-ben ha u gráfja zárt az $E \times F$-ben. Ezen kívül, ha u az E egy sűrű alterén van értelmezve, akkor U_0 is sűrűn definiált, és ha u zárt és F szeparált, akkor N zárt altere lesz E-nek.*

Biz. Az $(E/N) \times F$ teret és az $(E \times F)/(N \times \{0\})$ teret kanonikusan azonosíthatjuk. Jelöljük Φ_1-gyel az $E \times F \to (E \times F)/(N \times \{0\})$ hányados-leképezést. Ha G és G_0 az u illetve az u_0 gráfja, akkor $\Phi_1(G) = G_0$. Mivel $N \times \{0\} \subseteq G$, így $G = \Phi^{-1}(G_0)$ és $\widetilde{G_0} = \Phi_1(\widetilde{G})$, ahol a szimbólum a teljesítést jelöli. Mivel Φ_1 folytonos és nyílt leképezés, így az előbbi két egyenlőség miatt G pontosan akkor lesz zárt, ha G_0 is az. Ha D_u sűrű E-ben, akkor $\Phi(D_u)$ sűrű lesz E/N-ben, így Φ folytonos. Ha F szeparált (azaz $\{0\}$ zárt F-ben), akkor $N \times \{0\}$ zárt G-ben, és mivel G zárt $E \times F$-ben, így N is zárt lesz E-ben. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. ■

Legyenek E, F topologikus vektorterek, és $u : E \to F$ zárt lineáris operátor. $Dom(u) = E_0$ sűrű részhalmaza E-nek. Ekkor $u_0 : \Phi(E_0) \to F$ (ahol $\Phi(E_0)$ természetes módon azonosítható E_0/N-nel) szintén zárt és sűrűn definiált operátor E/N-ben. Most u kanonikus felbontása legyen az $u = \psi \circ u_0 \circ \Phi_0$, ahol $\Phi_0 : E_0 \to E_0/N$, és $\psi : u(E_0) \to F$ a kanonikus leképezések. Ebből azt kapjuk, amit az előbb is, hogy u akkor és csak akkor lesz folytonos (és nyílt), ha u_0 folytonos (és így nyílt). A zárt gráfú gyengén nyílt lineáris operátorokat a következő lemma karakterizálja.

5.2.5. Lemma. *Legyenek E, F lokálisan konvex topologikus vektorterek, és $u : E \to F$ olyan sűrűn definiált lineáris operátor, amelynek a gráfja zárt az $E \times F$ szorzattérben. Ekkor u akkor és csak akkor lesz gyengén nyílt ha u' értékkészlete $\sigma(E', E)$-zárt.*

Biz. A (5.2.4.)-es tétel és a (5.1.33.)-as következmény szerint feltehető, hogy az u egy-egy értelmű. Jelöljük E_0-lal az u definíciós tartományát. Ha u gyengén nyílt, akkor u^{-1} $\sigma(F, E')$ és $\sigma(E_0, E')$ folytonos; ezért u^{-1}-nek létezik egy $v : E' \to F'$ duálisa. Nyilvánvaló, hogy u' egy-egy értelmű és $v = (u')^{-1}$. Ebből az következik, hogy u' képtere E', ami zárt. Megfordítva, ha H jelöli az u' értékkészletét, és H gyengén zárt, akkor $H = E'$. Legyen $x \in H^\circ$ (a polárist az $\langle E, E' \rangle$ dualitás szerint tekintsük), ekkor $x \in D_u = E_0$, mivel $u'' = u$, így $x = 0$, mert $D_{u'}$ sűrű F'-ben a $\sigma(F', F)$ topológia szerint, és u egy-egy értelmű leképezés. Ebből azt kapjuk, hogy $H^\circ = \{0\}$ és $H = H^{\circ\circ} = E'$. Most $U = \{x \in E_0 :\mid \langle x, x'_i \rangle \mid\leq 1, i = 1, ...n\}$ a 0-nak gyenge környezete E_0-ban, így léteznek $y'_i \in D_{u'}$ vektorok úgy, hogy $u'(y'_i) = x'_i$ minden $i < n$-re. Ebből az következik, hogy $u(U) = V$, ahol $V = \{y \in F :| \langle y, y'_i \rangle | \leq 1, i = 1, ..., n\}$, és így u gyengén nyílt. ■

5.2.6. Definíció. *Legyenek E, F topologikus vektorterek, ekkor az $u : E \to F$ lineáris operátort majdnem nyíltnak nevezzük, ha minden $U \subseteq E$ környezetére a 0-nak, $u(U)$-hoz létezik a 0-nak egy olyan környezete F-ben, amiben $u(U)$ sűrű.*

Ekkor u akkor és csak akkor majdnem nyílt, ha minden $G \subseteq E$ nyílt részhalmazt u $\overline{u(G)}$ belsejébe képezi le. Ha E, F lokálisan konvex topologikus vektorterek akkor ahhoz, hogy u majdnem nyílt leképezés legyen elegendő az, hogy minden $U \subseteq E$ konvex környezetére a 0-nak, $u(U)$ gyengén sűrű legyen a 0 egy megfelelő $u(E)$-beli környezetére.

5.2.7. Tétel. *Legyen E lokálisan konvex topologikus vektortér. És nézzük a következő tulajdonságokat.*

(a) E B-teljes tér

(b) Minden folytonos, majdnem nyílt lineáris operátor E-ből bármely F lokálisan konvex topologikus vektortérbe nyílt leképezés.

(c) E B_r teljes tér.

(d) Minden, injektív, folytonos, és majdnem nyílt $E \to F$ leképezés nyílt leképezés, ahol F lokálisan konvex topologikus vektortér.

Ekkor (a) ekvivalens (b)-vel, és (c) ekvivalens (d)-vel.

Biz. Elegendő lesz az (a) és (b) ekvivalenciáját bebizonyítani, ekkor a (c) és (d) ekvivalenciája automatikusan teljesül a (5.1.25.)-as tétel következménye miatt, ha azt arra az esetre fogalmazzuk meg, amikor az u leképezés injektív és a Q altér gyengén sűrű E'-ben.

$(a) \Rightarrow (b)$

Legyen $u : E \to F$ folytonos, majdnem nyílt leképezés . Feltehető, hogy $u(E) = F$. Ha $N = u^{-1}(0)$ és $u_0 : E/N \to F$ az u-hoz tartozó folytonos lineáris operátor (azaz, ha ϕ az $E \to E/N$ kanonikus leképezés, akkor u_0 az a leképezés amire $u = u_0 \circ \phi$), akkor u_0 majdnem nyílt. Mivel az $E \to E/N$ nyílt leképezés, így elegendő azt megmutatni, hogy u_0 nyílt. Legyen U tetszőleges, zárt, konvex környezete a 0-nak E/N-ben. Ha $V = u_0(U)$, akkor $\overline{V}$ környezete a 0-nak F-ben. Jelöljük u'_0-val u_0

duálisát, ekkor a (5.1.25)-ös tétel következménye miatt $Q = u_0'(F')$ sűrű altere lesz N°-nek a $\sigma(E', E)$ topológia szerint. Ekkor a (5.1.25)-ös tétel (a) pontja szerint

$$(u_0')^{-1}(U^\circ) = [u_0(U)]^\circ = V^\circ = \overline{V}^\circ.$$

Ekkor V° zárt és ekvifolytonos, és emiatt kompakt F'-ben a $\sigma(F', F)$ topológia szerint, és így u_0' folytonos a $\sigma(F', F)$ és a $\sigma(E', E)$ topológiák szerint, így $u_0'(V^\circ) = U^\circ \bigcap Q$ kompakt és zárt E'-ben a $\sigma(E', E)$ topológia szerint. Mivel U tetszőleges, ekkor az E B-teljességéből azt kapjuk, hogy Q zárt az E'-ben a $\sigma(E', E)$ topológia szerint, így u_0 a (5.2.5)-as tétel szerint gyenge izomorfizmus. Mivel U zárt E/N-ben, így ez gyengén zárt, amiből azt kapjuk, hogy $V = u_0(U)$ gyengén zárt F-ben. Mivel $V = \overline{V}$, ebből azt kapjuk, hogy u_0 nyílt.

$(b) \Rightarrow (a)$

Legyen $\mathfrak{U}$ konvex, kiegyensúlyozott halmazokból álló környezetbázisa a 0-nak E-ben, és legyen Q egy altere E'-nek úgy, hogy $Q \bigcap U^\circ$ a $\sigma(E', E)$ topológia szerint zárt legyen minden $U \in \mathfrak{U}$ halmazra.Azt kell megmutatnunk, hogy Q zárt E'-ben a $\sigma(E', E)$ topológia szerint. Az $\langle E, E' \rangle$ dualitás szerinti polárist jelöljük $^\circ$-vel, legyen F az E/Q° hányadostér topológia nélkül. A kanonikus bilineáris forma $F \times Q$-n létrehoz egy dualitást F és Q között. Jelöljük $\mathbb{B}$-vel E részhalmazainak a $\{(U^\circ \bigcap Q)^\circ : U \in \mathfrak{U}\}$ rendszerét, és legyen $\mathfrak{T}$ az a lokálisan konvex topológia F felett, melyre $\Phi(\mathbb{B})$ a 0-nak környezetbázisa, ahol $\Phi : E \to E/Q^\circ$ hányadosleképezés. Az $\langle F, Q \rangle$ dualitás szerint, $\mathfrak{T}$ $\mathfrak{S}$-topológia F-en; ahol $\mathfrak{S} = \{U^\circ \bigcap Q : U \in \mathfrak{U}\}$. A feltétel szerint, minden $S \in \mathfrak{S}$ halmaz zárt, így kompakt E'-ben a $\sigma(E', E)$ topológia szerint és így kompakt a $\sigma(Q, F)$ topológia szerint is. Ekkor a definíció miatt $\mathfrak{S}$ lefedi Q-t, és az összes $S \in \mathfrak{S}$-beli halmazok rendszere telített rendszert alkot a $\sigma(Q, F)$ topológia szerint. Ezért a $\mathfrak{T}$ konzisztens az $\langle F, Q \rangle$ dualitással. Most, ha $U \in \mathfrak{U}$, a $\Phi(U)$ polárisa az $\langle F, Q \rangle$ dualitás szerint $Q \bigcap U^\circ$, ahol $\Phi[(U^\circ \bigcap Q)^\circ]$ a $\mathfrak{T}$ lezártja $\Phi(U)$-nak. Ekkor a bipoláris tétel szerint, $\Phi : E \to F$ majdnem nyílt lineáris operátor, következésképpen $\mathfrak{T}$ az F topológiája. Mivel $\mathfrak{T}$ durvább F felett, mint az E/Q° hányadostopológiája, ezért ϕ szintén folytonos operátor, és mivel a hipotézis szerint nyílt is, így beláttuk, hogy az E/Q° hányadostopológiája éppen $\mathfrak{T}$. Ekkor a (4.1.cor1) és a (5.1.33.)-as következmény szerint ekkor Q szükségképpen zárt E'-ben a $\sigma(E', E)$ topológia szerint. ■

5.2.8. Következmény (Nyíltleképezés tétel). *Minden $u : E \to F$ folytonos lineáris szürjektív operátor nyílt leképezés, ha E B-tejes tér, és F pedig hordós tér.*

Biz. Mivel $u(E) = F$, ezért E-ben a 0-nak minden U kiegyensúlyozott, konvex környezetére $u(U)$ lezártja hordó lesz F-ben, így u majdnem nyílt, ezért u nyílt leképezés, mivel F B-teljes tér. ■

5.2.9. Következmény. *Legyen E B-teljes tér, és legyen F lokálisan konvex tér úgy, hogy $u(E) = F$ valamilyen u majdnem nyílt folytonos lineáris operátorra. Ekkor F B-teljes tér.*

Biz. Legyen G lokálisan konvex tér és $v : F \to G$ folytonos, majdnem nyílt, lineáris operátor. Mivel u majdnem nyílt, ezért $v \circ u$ is majdnem nyílt, következésképpen nyílt, mert E B-teljes. Mivel G és v tetszőlegesek, ebből azt kapjuk, hogy F szintén B-teljes tér. ■

A második következményt az $E \to E/N$ kanonikus leképezésre alkalmazva, ahol N zárt altere E-nek, azt kapjuk, hogy:

5.2.10. Következmény. *Egy B-teljes tér minden hányadostere B-teljes tér.*

5.2.11. Lemma (IV.4.3). *Legyen $\{E_\alpha : \alpha \in A\}$ lokálisan konvex topologikus vektorterek egy rendszere, és legyen $E = \prod_{\alpha \in A} E_\alpha$. Ekkor E' algebrailag izomorf a $\bigoplus_{\alpha \in A} E'_\alpha$-val.*

5.2.12. Megjegyzés. *A $\sigma(E', E) = \bigoplus_{\alpha \in A} \sigma(E'_\alpha, E_\alpha)$ akkor és csak akkor teljesül, ha A véges halmaz.*

Biz. Egyből látható, hogy minden $f = (f_\alpha) \in \bigoplus_\alpha E'_\alpha$ egy lineáris leképezést definiál E felett a következőképpen: $x \mapsto f(x) = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x_\alpha)$. Ez a leképezés folytonos, ugyanis $f = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha \circ p_\alpha$, ahol p_α az $E \to E_\alpha$ projekció (az összegben csak véges sok nem nulla tag szerepel). Ezért $f : \bigoplus_{\alpha \in A} E'_\alpha \to E'$ egy injektív leképezés. Már csak azt kell megmutatnunk, hogy minden $g \in E'$ előállítható az előbbi módon. E-ben létezik a 0-nak olyan U környezete, amelyen g korlátos. Feltehető, hogy U a következőképpen néz ki: $U = \prod_{\alpha \in H} U_\alpha \times \prod_{\alpha \notin H} E_\alpha$, ahol $H \subseteq A$ egy alkalmas véges indexhalmaz. Jelöljük f_α-val ($\alpha \in A$) a g leszűkítését E_α-ra, ekkor $f_\alpha \in E'_\alpha$ ha $\alpha \in A$, és $f_\alpha = 0$, ha $\alpha \notin H$. Ekkor minden E-beli x-re azt kapjuk, hogy

$$g(x) = g(\sum_{\alpha \in A} p_\alpha(x)) = \sum_{\alpha \in H} f_\alpha(x_\alpha).$$

Ezzel a tétel első állítását bebizonyítottuk. ■

5.2.13. Lemma. *Legyenek E, F lokálisan konvex topologikus vektorterek és legyen $u : E \to F$ sűrűn definiált lineáris operátor. Legyen u duális operátora v, ahol v gráfja gyengén zárt $F'_\sigma \times E'_\sigma$-ban, és legyen D_v (ahol D_v jelölje értelmezési tartományát)pontosan akkor gyengén sűrű F'-ben, ha u-nak létezik zárt kiterjesztése. Továbbá, ha D_v gyengén sűrű F'-ben, akkor a v duálisa a legkisebb zárt kiterjesztése az u-nak.*

Biz. A (5.2.11.)-es tétel szerint $E \times F$ duálisa izomorf az $E' \times F'$ szorzattérrel. Ekkor az $(E \times F) \times (E' \times F')$-en a kanonikus bilineáris forma az $\langle (x, y), (x', y') \rangle = \langle x, x' \rangle + \langle y, y' \rangle$, továbbá a $\chi : (y', x') \mapsto (-x', y')$ leképezés izomorfizmus az $F' \times E'$ és az $E' \times F'$ között. Legyen G az u gráfja. Ekkor az $\langle ux, y' \rangle - \langle x, vy' \rangle = 0$ egyenlőség fennáll a $D_u \times D_v$-n. Így $G^\circ = \chi(H)$, és ezért $\chi(H)$ zárt az $E' \times F'$ szorzattérben, így H zárt $F' \times E'$-ben.

Most tegyük fel, hogy D_v sűrű F'-ben. Jelöljük v duálisát $\overline{u}$-val és $\overline{u}$ gráfja legyen G_1. Ekkor G_1 gyengén zárt az $E \times F$-ben (ezért az eredeti topológiák szorzata szerint is zárt $E \times F$-ben). Ezért $D_{\overline{u}}$ tartalmazza D_u-t. Ezért $\overline{u}$ zárt kiterjesztése u-nak. Ezenkívül, ha $\chi'(G_1) = H^\circ$, ahol χ' jelölje a χ duálisát, és mivel H és G_1 zárt, a $(IV.2.3)$-as tétel alapján azt kapjuk, hogy $\chi'(G_1) = H^\circ$ ekvivalens azzal, hogy $G_1 = \chi(H)^\circ$. Így $G_1 = G^{\circ\circ}$, ami a (5.1.25.)-ös tétel szerint G lezártja $E \times F$-ben, és így $\overline{u}$ a legkisebb zárt kiterjesztése u-nak.

Még azt kell belátnunk, hogy D_v sűrű F'-ben a $\sigma(F', F)$ topológia szerint, valahányszor u zárt leképezés. Legyen $y \in D_v^\circ$, ekkor $(y, 0) \in H^\circ$, és $(0, y) \in \chi(H)^\circ$. Ha G zárt, akkor $\chi(H)^\circ = G^{\circ\circ} = G$, és $(0, y) \in G$-ből azt kapjuk, hogy $y = 0$, amiből következik, hogy D_v sűrű F'-ben a $\sigma(F', F)$ topológia szerint. ■

5.2.14. Lemma. *Legyenek $\langle F, G \rangle$ és $\langle F_1, G_1 \rangle$ dualitások a K test felett. Legyen $u : F \to F_1$ lineáris operátor. Az u akkor és csak akkor lesz folytonos a $\sigma(F, G)$ és a $\sigma(F_1, G_1)$ topológiákra nézve, ha $u^*(G_1) \subseteq G$. Ekkor u'-vel jelölve az u^* leszűkítését G_1-re, az u' folytonos a $\sigma(G_1, F_1)$ és a $\sigma(G, F)$ topológiák szerint, valamint $u'' := (u')' = u$.*

Biz. Ha $u^*(G_1) \subseteq G$, akkor az $x \mapsto \langle ux, y' \rangle = \langle x, u'y' \rangle$ (minden $x \in F$-re, és minden $y' \in G_1 - re$) folytonos a $\sigma(F, G)$ topológia szerint, mert a hipotézis szerint $u^*y' \in G$. Ezért, és a $\sigma(F_1, G_1)$ topológia definíciója szerint u operátor folytonos a $\sigma(F, G)$ és $\sigma(F_1, G_1)$ topológiák szerint.

Megfordítva, ha u folytonos a $\sigma(F, G)$ és a $\sigma(F_1, G_1)$ topológiák szerint, akkor $x \mapsto \langle ux, y' \rangle = \langle x, u^*y' \rangle$ folytonos a $\sigma(F, G)$ topológia szerint, tehát $u^*y' \in G$.

Ezért ekkor az $\langle ux, y' \rangle = \langle x, u'y' \rangle (x \in F, y' \in G_1)$, egyenlőség alapján u' nyilvánvalóan folytonos a $\sigma(G_1, F_1)$ és a $\sigma(G, F)$ topológiák szerint. Ezután a szimmetria felhasználásával az állítást bebizonyítottuk. ■

5.2.15. Tétel. *Legyen E B-teljes tér, F tetszőleges lokálisan konvex tér, és legyen $u : E \to F$ sűrűn definiált, majdnem nyílt, lineáris operátor úgy, hogy u gráfja legyen zárt $E \times F$-ben. Ekkor u nyílt. Ha u egy-egyértelmű, akkor E B_r teljes tér.*

Biz. Az általános esetet a (5.2.4.)-es tétel szerint visszavezethetjük arra az esetre mikor u egy-egyértelmű. Ugyanis az N nulltere u-nak zárt E-ben, és a (5.2.7.)-es tétel harmadik következménye szerint E/N B-teljes tér. Az u-hoz tartozó kanonikus $E/N \to F$ operátor a (5.2.4.)-es tétel szerint sűrűn definiált, és zárt gráffal rendelkezik, és nyilván majdnem nyílt, ha u majdnem nyílt. Így feltehetjük, hogy az u-hoz tartozó kanonikusan faktorizált operátor E_0 értelmezési tartománya sűrű E-ben, és a gráfja zárt az $E \times F$ szorzattérben, ezért E B_r-teljes. Végül pedig azt, hogy $u(E_0)$ sűrű F-ben, ami nem korlátozza az általánosságot.

Legyen u' u duálisa és $Dom(u') = F'_0$, ami sűrű F'-ben a $\sigma(F', F)$ topológia szerint. Legyen $Q = u'(F'_0)$, ahol Q sűrű E'-ben. Legyen U zárt konvex környezete a 0-nak E-ben, ekkor $U^\circ = (U \bigcap E_0)^\circ$ az (5.1.12.)-es tétel szerint, és mivel $U \bigcap E_0$ sűrű, így gyengén sűrű U-ban. A (5.2.14.)-es tétel szerint ekkor u folytonos a $\sigma(E_0, Q)$ és a $\sigma(F, F'_0)$ topológiák szerint, és u' folytonos a $\sigma(F'_0, F)$ és az $\sigma(Q, E_0)$ topológiák szerint. Legyen $V = u(U \bigcap E_0)$, ekkor V lezártja környezete lesz a 0-nak $u(E_0)$-ben. A hipotézis szerint u majdnem nyílt, ha V° V polárisa a $\langle F, F' \rangle$ dualitás szerint, ekkor $V^\circ \subseteq F'_0$. Ekkor egy $y' \in V^\circ$ elemre $x \mapsto Re\langle ux, y' \rangle \leq 1$ az $U \bigcap E_0$ halmazon, és így folytonos E_0-on. Ebből az következik, hogy V^0 kompakt a $\sigma(F'_0, F)$ topológia szerint, így $u'(V^\circ) = U^\circ \bigcap Q$ kompakt a $\sigma(Q, E_0)$ topológia szerint az u' erre a két topológiára vett folytonossága miatt. Mivel E_0 sűrű E-ben és $U^\circ \subseteq E'$ ekvifolytonos, ekkor $U^\circ \bigcap Q$ kompakt a $\sigma(E', E)$ topológiára nézve. Mivel a hipotézis szerint E B_r teljes, és Q zárt E'-ben (így $Q = E'$), ezért a (5.2.5.)-ös tétel miatt u gyengén nyílt, vagy ami ezzel ekvivalens; u^{-1} gyengén folytonos. Így a konvexitás miatt $\overline{V}$ a V gyenge lezártja $u(E_0)$-ban, így azt kapjuk, hogy

$$U \bigcap E_0 = u^{-1}(V) \subseteq u^{-1}(\overline{V}) \subseteq U \bigcap E_0,$$

minden olyan $U \bigcap E_0$ halmazra, amelyek zártak E_0-ban. Így $u(U \bigcap E_0) = V = \overline{V}$, ami mutatja, hogy u nyílt leképezés. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. ■

Ezután az általános zárt gráf tételt már egyszerű következményként megkaphatjuk.

5.2.16. Tétel. *Legyen E hordós tér, és F B_r-teljes tér. Ha $u : E \to F$ lineáris leképezés úgy, hogy u gráfja zárt az $E \times F$ szorzattérben. Ekkor u folytonos.*

Biz. Ahogy az előző bizonyításban láttuk, az általános eset helyett elég bizonyítanunk arra az esetre mikor u egy-egyértelmű, mivel $N = u^{-1}(0)$ zárt E-ben és a u-hoz tartozó $E/N \to F$ leképezés gráfja zárt $E/N \times F$-ben és E/N hordós tér. Ezenkívül feltehetjük, hogy $u(E)$ sűrű F-ben, mivel a (8.2)-es tétel miatt egy B_r teljes tér minden zárt altere B_r-teljes tér.

Feltehető tehát, hogy u egy-egyértelmű, és a képtere egy sűrű altere F-nek. Mivel u zárt, így u^{-1} is zárt lineáris operátor, amely sűrűn definiált $F \to E$ leképezés, amely majdnem nyílt , mivel E hordós tér. Így az előző tétel szerint u folytonos.

6. fejezet

Szuszlin-gráf és Borel-gráf tétel

6.1. Szuszlin-gráf tétel

Először definiáljuk a Szuszlin-tér fogalmát.

6.1.1. Definíció. *Egy topológikus teret Szuszlin-térnek hívunk, ha egy szeparábilis teljesen metrizálható topológikus tér folytonos képe.*

A következő fogalom, amit definiálunk a törzs fogalma:

6.1.2. Definíció. *Legyen A egy halmaz és $\mathcal{T}$ az A részhalmazainak egy rendszere. A $\mathcal{T}$ halmazrendszert törzsnek nevezzük A-n, ha a következők tulajdonságokkal rendelkezik:*

(i) minden $\mathcal{T}$-beli halmaz minden komplementere is $\mathcal{T}$-ben van;

(ii) $\mathcal{T}$ elemeinek megszámlálható metszete is $\mathcal{T}$-beli.

Most néhány lemmát fogunk bizonyítani. Ehhez szükségünk lesz még egy definícióra:

6.1.3. Definíció. *Egy E topológikus térben lévő X részhalmazt megközelíthetőnek nevezünk, ha létezik egy $U \subset E$ nyílt részhalmaza, amelynek a szimmetrikus különbsége az X halmazzal első kategóriájú.*

6.1.4. Lemma. *Egy E topológikus tér minden Borel-részhalmaza megközelíthető.*

Biz. Elég azt megmutatni, hogy E megközelíthető részhalmazainak a $\mathcal{T}$ rendszere törzs. Ha X_n és Y_n E részhalmazainak két tetszőleges rendszere, akkor

$$(\bigcup X_n)\bigcap(\bigcup Y_n)^C \subseteq \bigcup(X_n \bigcap Y_n^C).$$

Ez azt mutatja, hogy $\mathcal{T}$-beli halmazok megszámlalható uniója is $\mathcal{T}$-beli.

Legyen X egy $\mathcal{T}$-beli halmaz és U nyílt részhalmaza E-nek, amire $U\bigcap X^C$ és $X\bigcap U^C$ halmazok első kategóriájúak. Legyen továbbá $V = int(U^C)$. Ekkor $U^C\bigcap V^C$ olyan zárt halmaz aminek a belseje üres, tehát első kategóriájú. Ráadásul $V\bigcap X$ részhalmaza lesz $U^C\bigcap X$-nek és $X^C\bigcap V^C$ részhalmaza a $(X^C\bigcap U)$ és a $(U^C\bigcap V^C)$ halmazok uniójának, amik első kategóriájúak. Ezért X^C $\mathcal{T}$-beli, így $\mathcal{T}$ törzs. ■

6.1.5. Lemma. *Legyen G topológikus csoport és B olyan Borel-halmaz, ami második kategóriájú részhalmaza G-nek. Ha G Baire-halmaz, akkor BB^{-1} környezete lesz az egységelemnek G-ben.*

Biz. Legyen U olyan nyílt részhalmaza G-nek amire teljesül, hogy $U\bigcap B^C$ és $B\bigcap U^C$ halmazok első kategóriájúak. Tehát ekkor U második kategóriájú és így nem üres. Így elég megmutatnunk azt, hogy $UU^{-1} \subset BB^{-1}$. Legyen $x \in UU^{-1}$; ekkor a $U\bigcap xU$ nyílt, nemüres halmaz, és mivel G egy baire-tér így második kategóriájú. Legyen $Z = (U\bigcap xU)\bigcap(B\bigcap xB)^C$. Ekkor

$$Z \subset (U\bigcap B^C)\bigcup x(U\bigcap B^C),$$

ezért Z első kategóriájú. Így Z nem tartalmazza a $(U\bigcap xU)$ halmazt, és így azt kapjuk, hogy a $B\bigcap xB$ szintén egy nemüres halmaz, azaz $x \in BB^{-1}$. Tehát a BB^{-1} halmaz környezete az egységelemnek. ■

Ezután bebizonyítjuk a Szuszlin-gráf tételt.

6.1.6. Tétel (Souslin-gráf tétel). *Legyen G és H két szeparábilis topológikus csoport és $u : G \to H$ csoporthomomorfizmus. Tegyük fel, hogy G baire-tér és u Γ gráfja Szuszlin-i altere $G \times H$-nak. Ekkor u folytonos.*

Biz. Mivel $u(G) = pr_2\langle\Gamma\rangle$ és H szeparált, ezért $u\langle G\rangle$ Szuszlin-tér, és így van benne megszámlálható sűrű halmaz. Egy ilyen halmazt jelöljünk D-vel. Legyen W az egységelem egy környezete H-ban. Megmutatjuk hogy $u^{-1}\langle W\rangle$ második kategóriájú. Ha ez első kategóriájú lenne akkor minden eltoltja is az lenne. De $u\langle G\rangle \subset \bigcup_{x\in D} xW$, tehát G a $u^{-1}\langle W\rangle$ halmaz megszámlálható sok eltoltjának az uniója, ellentmondásban azzal a ténnyel, hogy G egy Baire-tér. Legyen V az egységelem egy környezete

H-ban, és legyen W az egységelem egy olyan nyílt környezete amire igaz hogy, $WW^{-1} \subset V$. Ekkor a $pr_2^{-1}\langle W\rangle \bigcap \Gamma$ nyílt részhalmaza Γ-nak. Mivel a pr_1 projekció Γ-ra vett megszorítása egy $\Gamma \to H$ folytonos bijekció, ezért az állítás miatt $u^{-1}\langle W\rangle = pr_1(pr_2^{-1}\langle W\rangle \bigcap \Gamma)$ G egy Borel-részhalmaza. Így a lemma miatt $u^{-1}\langle V\rangle$ halmaz, ami tartalmazza a $u^{-1}(W) \cdot (u^{-1}(W))^{-1}$ halmazt, környezte lesz az egységelemnek H-ba, amiből látható u folytonossága. ■

6.2. Borel-gráf tétel

Az utolsó alfejezetben kimondjuk és bizonyítjuk a Borel-gráf tételt.

6.2.1. Tétel (Borel-gráf tétel). *Legyen E Banach-terek lokálisan konvex induktív limesze, F egy lokálisan konvex Szuszlin-tér, és $u : E \to F$ lináris operátor. Ha u gráfja Borel-részhalmaza az $E \times F$ szorzattérnek, akkor u folytonos.*

Biz. Legyen $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Banach-terek rendszere, és $(u_i)_{i\in\mathbb{N}} : E_i \to E$ folytonos lineáris operátorok rendszere úgy, hogy E topológiája legyen az legnagyobb lokálisan konvex topológia, amire nézve az u_i operátorok folytonosak a megfelelő topológiák szerint. Elegendő azt megmutatni, hogy az $u \circ u_i$ kompozíciók folytonosak vagy, hogy az $u \circ u_i$ folytonos minden olyan $G \subset E_i$ zárt részhalmazra megszorítva, amely előáll megszámlálható sok mindenütt sűrű halmaz uniójaként. Egy ilyen megszorítás gráfja a teljes inverz képe a u gráfjának a $u_i \times Id_F : G \times F \to E \times F$ folytonos operátornál, tehát Borel-részhalmaza $G \times F$-nek. Ráadásul a $G \times F$ Szuszlin-tér, és egy Szuszlin-tér minden Borel-részhalmaza Szuszlin. Így a Szuszlin-gráf tétel alapján az állítást bebizonyítottuk. ■

Irodalomjegyzék

[1] Sebestyén Z.; Czách L. Funkcionálanalízis *Előadásjegyzet*, 2001.

[2] Komornik V. Valós analízis előadások *Typotex*, 2003.

[3] Karátson J.; Kurics T. Bevezetés a funkcionálanalízisbe *Egyetemi jegyzet*,

[4] Kristóf J. A matematikai analízis elemei III. *Egyetemi jegyzet*, 1998.

[5] Kristóf J. A matematikai analízis elemei IV. *Egyetemi jegyzet*, 1998.

[6] H. H. Scheafer Topological Vector Spacies *Springer-Verlag*, 1971.

[7] N. Bourbaki Élements de mathematique Topologe Générale *Springer-Verlag*, 2007.

[8] N. Bourbaki Élements de mathematique Espaces vectoriels topologiques *Élements de mathematique*, 2007.