Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Vidor Sára
matematikus hallgató

Síkgráfok és általánosításaik

Diplomamunka

Témavezetők:
Tóth Géza, tudományos tanácsadó
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
Vesztergombi Katalin, egyetemi docens
Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2009.

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Tóth Gézának a témafelvetést, az érdekes cikkeket, és a nagy segítséget nyújtó és izgalmas konzultációkat. Köszönöm Vesztergombi Katalinnak, hogy mint belső konzulensem lehetővé tette a megvalósítást, és köszönöm Vidor Péternek a módszertani részhez a nagyszerű ötleteket.

Nagyon hálás vagyok Besnyőné Titter Beátának, aki által a kigondolt óravázlataimat ki is próbálhattam gyerekekkel.

Végül, de nem utolsó sorban köszönöm Kangyerka Ádámnak, hogy bár nem matematikus, beleásta magát a témába, és sok segítséget nyújtott a hibák javításában és a formai megvalósításban.

1. Bevezetés

A gráfok síkbarajzolhatóságának gyökerei visszanyúlnak az ókori görögökhöz, akiktől írásos dokumentumok maradtak fent poliéderek vizsgálatáról. A követkző nagy előrelépés Euler nevéhez fűződik, aki már gráfokkal is foglalkozott. Ahhoz azonban, hogy beszéli tudjunk síkbarajzolhatóságról pontosan tudnunk kell, hogy mit is jelent egy gráf lerajzolás.

1.1. Definíció *Egy gráfnak a síkba való* ***lerajzolása*** *egy leképezéspár. Az első leképezés a gráf csúcsait képezi le injektív módon a síkra, a második, pedig az éleket képezi Jordan-görbékbe az alábbi feltételekkel:*

(1) *Egy élt reprezentáló görbe végpontjai az élre illeszkedő csúcsoknak megfeleltetett síkbeli pontok (ezen két csúcs egybeeshet ekkor a görbe két végpontja is egybeesik, tehát zárt görbe lesz).*
(2) *Egy élt reprezentáló görbe belső pontjai elkerülik a csúcsoknak megfeleltetett síkbeli pontokat.*
(3) *Két különböző élt reprezentáló görbének véges sok közös pontja van és közös belső pontjaikban átmetszik egymást.*

Most már definiálhatjuk a két legalapvetőbb fogalmat, amit a diplomamunka során használni fogunk.

1.2. Definíció ***Topologikus gráf****nak hívunk egy $G = (V, E)$ gráfot, ami le van rajzolva a síkba.*

Egy fontos osztályát ki kell emelnünk a topologikus gráfoknak, ezek pedig a geometriai gráfok.

1.3. Definíció *A* ***geometriai gráf*** *egy $G = (V, E)$ gráf, ami le van rajzolva a síkba, de Jordán-görbék helyett egyenes szakaszokkal.*

Ezentúl nem fogunk különbséget tenni az absztrakt G gráfban lévő csúcsok (élek) és a nekik megfelelő síkbeli pontok (síkbeli görbék) között. Azt is feltesszük a továbbiakban, hogy G absztrakt gráf egyszerű, azaz nincsenek benne párhuzamos élek és hurokélek.

1.4. Definíció *Egy $G = (V, E)$ gráfot* ***síkbarajzolható****nak vagy röviden csak* ***síkgráf****nak nevezünk, ha van olyan síkbarajzolása ahol az éleknek megfelelő Jordan-görbék nem metszik egymást a belsejükben.*

A síkgráfok megértéséhez vezető első mérföldkő L. Euler nevéhez fűződik. Az Euler tétel (1750) kimondja, hogy egy összefüggő síkbarajzolható gráfban az alábbi összefüggés igaz:

$$c - e + l = 2$$

ahol c jelöli a csúcsok, e az élek és l a lapok számát.

Ennek a tételnek ma már számos bizonyítását ismerjük. A legegyszerűbb bizonyítás szinte semmiféle előismeretet nem igényel, ahogy azt majd látni fogjuk a 7. fejezetben.

Az Euler tétel közvetlen következménye, hogy egy egyszerű síkgráfban az alábbi teljesül:

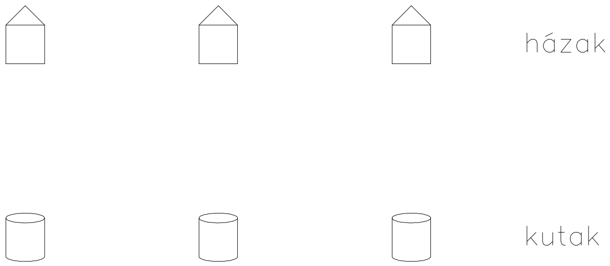
$$e \leq 3c - 6.$$

Vegyünk ugyanis egy olyan síkgráfot, amiben minden lapot három él határol. Ekkor $l = 2e/3$ ahonnan az Euler képletbe behelyettesítve kapjuk, hogy $e = 3c - 6$. Ha van egy tetszőleges egyszerű síkgráfunk akkor új élek hozzáadásával elérhető, hogy minden lapot három él határoljon és így $e \leq$ az új élek hozzáadásával keletkezett gráf élszáma, ami pedig $3c - 6$. Ugyanígy egy gyakran használt speciális gráfosztályra, az egyszerű páros síkgráfokra is kaphatunk az előzőnél még élesebb élszám becslést. Vegyük észre, hogy ha a gráf egyszerű és páros akkor egy lapot legalább négy él határol, és ezzel számolva azt kapjuk, hogy az egyszerű páros síkgráfok élszáma $\leq 2c - 4$.

Mindezekkel az eredményekkel még korántsem tudjuk eldönteni, hogy ha adott egy gráf akkor az síkbarajzolható-e vagy sem. Természetesen, ha jó sok éle van, több mint $3c - 6$, (illetve, ha azt is tudjuk, hogy páros akkor több mint $2c - 4$), akkor biztosak lehetünk benne, hogy nem síkbarajzolható. De mit tudunk mondani akkor, ha ennél kevesebb éle van? Biztos, hogy ekkor síkbarajzolható?

Nézzük a következő problémát. Van három házunk és három kutunk melyek az 1. ábrán látható módon helyezkednek el. Szeretnénk minden házból mindegyik kúthoz egy utat építeni, méghozzá úgy, hogy semelyik út ne keresztezze semelyik másikat.

Az előző tételből rögtön látszik, hogy ez nem fog sikerülni, hiszen nekünk $3 \cdot 3 = 9$ élet kéne behúznunk de a páros gráfra vonatkozó élszámkorlátból



1. ábra: 3 ház, 3 kút

következik, hogy 6 csúcsú síkgráfnak maximum $2 \cdot 6 - 4 = 8$ éle lehet. Vizsgáljuk meg, mi történik, ha ásunk még két kutat amit csak az első házzal kell összekötnünk.

Ekkor már az élszámkorlátnak nem mond ellent a feladat megoldhatósága, hiszen $3 \cdot 3 + 2 = 11$ élet kell behúznunk és az Euler tételből adódó élszámkorlát $8 \cdot 2 - 4 = 12$. Azonban nyilvánvaló, ha a három ház három kút feladatot sem tudtuk megoldani, akkor ezt sem fogjuk tudni.

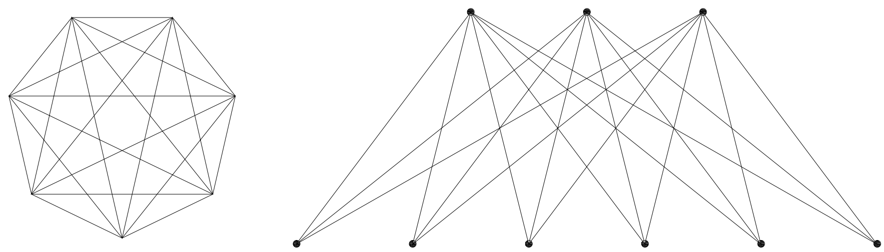
Látni fogjuk, hogy a síkbarajzolhatóság terén igen sokat tudunk. Meg fogjuk tudni pontosan adni, hogy egy gráf mikor síkbarajzolható, hogy milyen részgráfokat tilos tartalmaznia. Ez más hasonló problémáknál általában nem fog menni. A diplomamunka fejezetei során a síkbarajzolhatóság különböző irányú általánosításaival fogunk foglalkozni, melyeknél próbálunk minél jobb alsó és felső becslést adni majd az élek számára, de olyan karakterizációt mint a síkgráfoknál nem fogunk találni.

Még mielőtt pontosan megmondanánk, hogy egy gráf mikor síkbarajzolható, be kell vezetnünk néhány új fogalmat.

1.5. Definíció *K_n-nek nevezzük az n csúcsú teljes gráfot, azaz egy olyan n csúcsú gráfot, ahol minden csúcs minden csúccsal össze van kötve. (2.a ábra)*

1.6. Definíció *$K_{n,m}$-nek nevezünk egy olyan páros gráfot, ahol az egyik osztályban n a másikban m csúcs van, a két osztály között az összes él be van húzva, és más éle nincs. (2.b ábra)*

1.7. Definíció ***Felosztott*** *K_n-nek nevezünk egy olyan gráfot ami a K_n-ből keletkezik az éleinek pontokkal való felosztásával, azaz ha a K_n éleinek legalább*



2.a ábra: K_7, **2.b ábra:** $K_{3,6}$

egy élű, belsőleg diszjunkt utakkal történő helyettesítésével jön létre. Hasonlóan nevezzük ***felosztott*** *$K_{n,m}$-nek a $K_{n,m}$ éleinek pontokkal való felosztásával keletkező gráfot.*

Ezek után kimondhatjuk a síkgráfok karakteritációjára vonatkozó K. Kuratowskitól származó tételt:

1.1. Tétel [?] *Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz felosztott $K_{3,3}$-at vagy felosztott K_5-öt.*

Az, hogy a K_5 és a $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható az rögtön következik az élszámra adott korlátból, így az az irány, hogy ha tartalmaz felosztott K_5-öt vagy felosztott $K_{3,3}$-at akkor nem síkbarajzolható könnyen adódik. A másik irányhoz még szükséges pár észrevétel, amire most nem térünk ki.

Egy másik érdekes probléma, amire a síkbarajzolható gráfoknál választ tudunk adni, hogy mi a helyzet, ha topológikus illetve, ha geometriai gráfok síkbarajzolhatóságát vizsgáljuk. Az a meglepő helyzet, hogy a síkgráfok körében a két dolog ugyanaz, ahogy ezt az alábbi Fáry I.-tól és K. Wagner-től származó 1948-as tétel adja.

1.2. Tétel [?] *Ha egy G egyszerű gráf síkbarajzolható, akkor van olyan síkbarajzolása is, melynél minden élnek megfelelő Jordan-görbe egyenes szakasz.*

A következő fejezetekben a síkbarajzolhatósághoz hasonló problémákkal fogunk foglalkozni, csak nem azt fogjuk megkövetelni, hogy semelyik él se metssze egymást, hanem ezt különböző irányokba általánosítjuk. Ezen kívül a 6. fejezetben részletesebben bemutatunk egy ebben a témakörben használatos módszert. Az összefoglalás előtt (7. fejezet) kitérünk arra, hogy a diplomamunka témájából mi és hogyan adható át középiskolás diákoknak.

2. Kvázi-síkgráfok

A síkbarajzolhatóság legkézenfekvőbb általánosítása a következő. Egy topologikus gráfban megengedjük ugyan, hogy legyenek metsző élpárok, de azt kizárjuk, hogy legyen három él, amelyek közül bármely kettő metszi egymást. Az ilyen topologikus gráfokat nevezzük **kvázi-síkgráf**oknak. A toplogikus kvázi-síkgráfok egy fontos részhalmaza az **egyszerű kvázi-síkgráf**ok, ahol azt is megköveteljük, hogy bármely két él legfeljebb egyszer metsze egymást.

Vizsgáljuk meg, a kvázi-sík- illetve egyszerű kvázi-síkgráfok élszámát. Egyrészt szeretnénk egy olyan értéket találni aminél, ha egy gráfban több él van akkor, biztosan tartalmaz három olyan élet, amik páronként metszik egymást. Ezt nevezzük az élszámra vonatkozó felső becslésnek. Másrészt szeretnénk találni egy minél nagyobb élszámú kvázi-sík illetve egyszerű kvázi-sík gráfot. Ez lesz az alsó becslésünk az élszámra vonatkozólag.

Ezzel kapcsolatban az első lényeges eredmény P. K. Agarval, B. Aronov, Pach J., R. Pollack és M. Sharir nevéhez fűződik. Ők belátták, hogy egy n csúcsú egyszerű kvázi-sík topologikus gráfnak legfeljebb Cn éle van alkalmas C konstanssal. [?] Ezt általánosította Pach J., R. Radoičić és Tóth G. nem csak egyszerű kvázi-síkgráfokra. [?] A két tétel bizonyítása hasonló, és tele van nagyszerű ötletekkel.

2.1. Tétel *Ha $G(V,E)$ egy kvázi-sík topologikus gráf akkor $|E| = O(|V|)$.*

Emlékeztetünk arra, hogy végig feltettük, hogy a G gráf, mint absztrakt gráf egyszerű.

Bizonyítás. Legyen G egy n csúcsú kvázi-sík topologikus gráf. Rajzoljuk át G-t úgy, hogy kvázi-sík maradjon, de a lehető legkevesebb metszés legyen az élei között összességében. Ezt jelöljük $\tilde{G}$-mal. $\tilde{G}$-ban nyilván nincs önmagát metsző él, különben ezt a hurkot eltávolítva csökkenthetnénk a metszések számát. Hívjunk lencsének egy olyan tartományt, amit két olyan él közt találunk, amik legalább kétszer metszik egymást. Vizsgáljuk meg $\tilde{G}$ lencséit.

2.1. Állítás *$\tilde{G}$ minden lencséje tartalmaz csúcsot.*

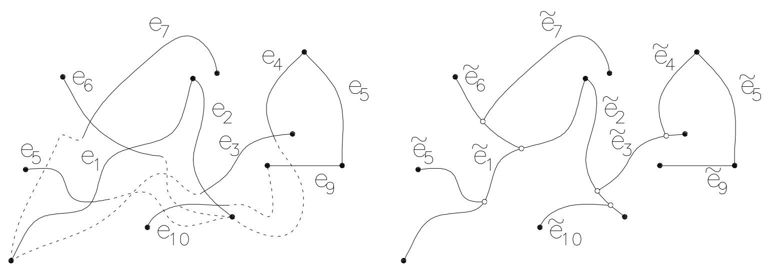
Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy van $\tilde{G}$-ban olyan l lencse, ami nem tartalmaz csúcsot. Vegyük tartalmazásra nézve az $l' \subseteq l$ minimális lencsét.

Kicserélve l' két oldalát (és egy kicsit „arrébb húzva”, hogy az átmetszési tulajdonság ne sérüljön) csökkenteni tudjuk a metszések számát. (lásd 9. ábra)

Feltehető hogy $\tilde{G}$ összefüggő, hiszen különben indukcióval készen lennénk. Legyen $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1} \in E(G)$ élek egy sorozata úgy, hogy $e_1, e_2, \ldots, e_i$ egy $T_i \subseteq \tilde{G}$ fa legyen minden $1 \leq i \leq n-1$. Tehát $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ $\tilde{G}$-nek egy T feszítőfáját alkotják.

Most ebből a T feszítőfából konstruálunk egy $\tilde{T}$ feszítőfaszerű „szerkezetet”. Először megkonstruáljuk $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \ldots, \tilde{T}_{n-1}$ metszés mentes topologikus gráfokat, amelyek fák. Legyen $\tilde{T}_1$ az a két csúcsú topologikus gráf aminek az egyetlen éle e_1 (úgy ahogy $\tilde{G}$-ban rajzolva volt). Tegyük fel, hogy $\tilde{T}_i$-t már definiáltuk valamely $i \geq 1$-re, és legyen v az e_{i+1} azon csúcsa, ami nem tartozik T_i-hez. Adjuk hozzá $\tilde{T}_i$-hez e_{i+1} azon kis darabját ami v és a $\tilde{T}_i$-vel való első metszéspontja között van. Precízebben mondva kövessük e_{i+1} élet v-től addig a v' pontig ahol először beleütközik $\tilde{T}_i$-be, és jelöljük ezt a darabját e_{i+1}-nek $\tilde{e}_{i+1}$-gyel. Ha v' csúcsa $\tilde{T}_i$-nek akkor adjuk $\tilde{T}_i$-hez v-t és $\tilde{e}_{i+1}$-et és legyen az így kapott topologikus gráf $\tilde{T}_{i+1}$. Ha v' belső pontja $\tilde{T}_i$ egy e élének akkor v' legyen egy új csúcs. Ez e-t két részre osztja e'-re és e''-re. Adjuk mindkettőt $\tilde{T}_i$-hez és töröljük e-t. Ezen kívül adjuk még hozzá v-t is és $\tilde{e}_{i+1}$-et is, és ez legyen $\tilde{T}_{i+1}$. $n-2$ lépés után megkapjuk $\tilde{T} := \tilde{T}_{n-1}$ topologikus fát. (3.Ábra) Erre az alábbiak teljesülnek:

- metszés mentes;
- kevesebb, mint $2n$ csúcsa van;
- $\tilde{G}$ minden csúcsát tartalmazza;
- minden éle vagy egy teljes él vagy egy $\tilde{G}$-beli él darabja.



3. ábra: $\tilde{T}$ konstrukciója T-ből

Jelölje D azt a nyílt tartományt, amit úgy kapunk, hogy a síkból elhagyjuk $\tilde{T}$ csúcsait és éleit.

Most definiálunk egy H konvex geometriai gráfot a $\tilde{T}$ segítségével. Egy geometriai gráfot **konvex geometriai gráf**nak nevezünk, ha a csúcsai egy konvex sokszögön helyezkednek el.

1. H csúcsai:

Sétáljunk körbe D határán az óramutató járásával megegyező irányba. Eközben kétféle objektummal találkozunk: $\tilde{T}$ csúcsaival és éleivel. Feleltessünk meg minden ilyen objektumnak egy x_i csúcsot H-ban az óramutató járásával megegyező irányban konvex helyzetben. Természetesen ugyanahhoz az élhez illetve csúcshoz több objektum is tartozik: minden élhez kettő a két oldalról, és minden csúcshoz annyi, amennyi a fokszáma $\tilde{T}$-ban. Könnyen látszik, hogy a csúcsok száma H-ban legfeljebb $8n$ (hiszen az élek száma $\tilde{T}$-ban $\leq 2n$, és így az össz-fokszám $\leq 4n$).

2. H élei:

Jelölje E' a $\tilde{G}\setminus T$-beli élek halmazát. Egy $e \in E'$ több pontban is metszeheti $\tilde{T}$-t. Ezek a metszések felosztják e-t részekre, amiket *szeletek*nek nevezünk. Jelölje S az összes $e \in E'$ él összes szeleteinek halmazát. A végpontjuktól eltekintve minden $s \in S$ szelet D-ben fut. s két végpontja két objektumhoz tartozik, amiket reprezentált két x_i, x_j csúcs H-ban. Kössük össze H-ban x_i-t és x_j-t egy egyenes szakasszal.

Vegyük észre, hogy H-ban nincs hurokél, hiszen, ha $x_i = x_j$ akkor használva azt, hogy $\tilde{T}$ összefüggő könnyen látszik, hogy az s és az x_i-hez tartozó $\tilde{T}$-beli él által meghatározott lencsében nincs csúcsa $\tilde{G}$-nek, ami ellentmond az első állításnak.

Természetesen különböző szeletek adhatnak ugyanazon $x_i, x_j \in H$-beli pontok közötti élt. Két ilyen szeletről azt mondjuk, hogy azonos típusúak. Vegyük észre, hogy két azonos típusú szelet nem metszheti egymást. Ha ugyanis két azonos típusú szelet metszené egymást akkor mivel egy él nem metszheti önmagát ezért a két szelethez tartozó $e_1, e_2 \in E$ élek különbözőek, és mivel két $\tilde{G}$-beli csúcs között legfeljebb egy él mehet ezért x_i és x_j közül legalább az egyik $\tilde{T}$ egy élét reprezentálja (és nem egy csúcsát). Ekkor viszont ez az él e_1-gyel és e_2-vel három páronként metsző élt alkot, ami ellentmond annak, hogy $\tilde{G}$ kvázi-sík.

2.2. Állítás *H egy kvázi-sík konvex geometriai gráf.*

Bizonyítás. Ha két H-beli él metszi egymást, akkor a végpontjuknak megfelelő $\tilde{T}$-beli objektumok felváltva az egyik illetve a másik élhez tartoznak, ahogy megyünk sorba az óramutató járásával megegyező irányba D határán. Ezért három páronként metsző élnek H-ban megfelel három páronként metsző szelet, ami ellentmondás.

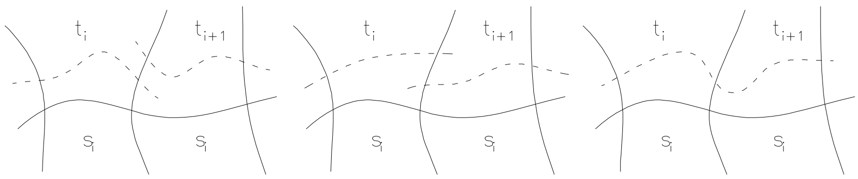
Soroljuk a szeleteket két osztályba. Az egyikben legyenek az úgynevezett *fedett szelet*ek azaz az olyan s szeletek, amikhez van két s_1 és s_2 azonos típusú szelet s mindkét oldalán. A másik osztályban legyen a többi szelet, amiket *fedetlen szelet*eknek nevezünk. Egy $e \in E$ élet fedetlennek nevezünk, ha legalább az egyik szelete fedetlen. A többi élet meg nevezzük fedettnek.

1. Fedetlen élek száma

Használjuk V. Capoyleas és Pach J. konvex geometriai gráfokra vonatkozó 3.1-es tételét a kvázi-sík gráfokra. [?] Eszerint egy n csúcsú konvex geometriai kvázi-síkgráf éleinek a száma legfeljebb $2 \cdot 2n - \binom{2 \cdot 2+1}{2} = 4n - 10$. Tehát mivel H-ról az előbb megmutattuk, hogy kvázi-sík ezért $|E(H)| \leq 4|V(H)| - 10 < 32n$ így kevesebb, mint $32n$-féle szelet van. Mivel legfeljebb két fedetlen szelet van minden típusban, ezért legfeljebb $64n$ fedetlen szelet van, ami felsőbecslés a fedetlen élek számára is E-ben.

2. Fedett élek száma

Azt állítjuk, hogy nem létezik fedett él. Tegyük fel ugyanis, hogy $e \in E$ fedett. Irányítsuk meg az e élet tetszőlegesen, és jelölje $s_1, s_2, \ldots, s_m \in S$ a szeleteit az irányításnak megfelelően. Legyen $t_i \in S$ $1 \leq i \leq m$ az $S - i$-vel azonos típusú tőle balra futó legközelebbi szelet. Mivel nem létezik sem önmagát metsző él, sem üres lencse $\tilde{G}$-ben ezért a t_i és a t_{i+1} ugyanahhoz az $f \in E$ élhez tartoznak minden $i < m$-re. (4. ábra) Ez azt jelenti, hogy e és f élek végpontjai megegyeznek, ami nem lehet (mert G egyszerű gráf).



4. ábra: t_i és t_{i+1} ugyanahhoz az élhez tartozik

Azt láttuk tehát, hogy E-nek legfeljebb $64n$ szelete van, amik mind fedetlenek. Ehhez hozzáadva a T feszítőfa $n-1$ élét összességében kevesebb, mint $65n$ éle van $\tilde{G}$-nak.

□

Ennél jobb becslést adtak E. Ackerman és Tardos G. kvázi-sík gráfokkal foglalkozó 2007-es cikkükben. [?] Az alábbi tételt látják be.

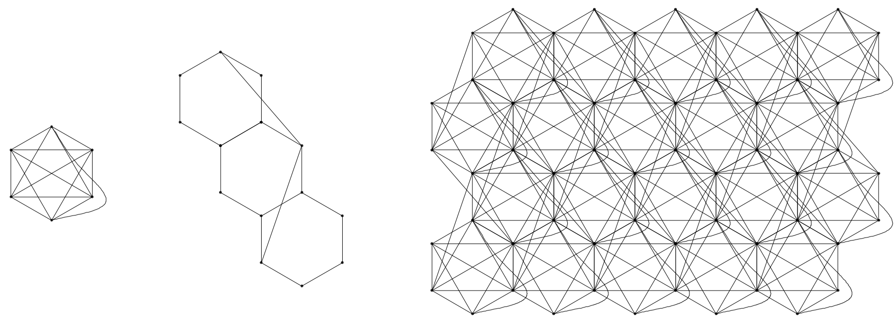
2.2. Tétel *A ≥ 3 csúcsú kvázi-síkgráfok élszáma legfeljebb $8n-20$.*

A tétel bizonyítása a 7. fejezetben fog előkerülni, ahol arról a módszerről adunk rövid összefoglalót amit E. Ackerman és Tardos G. is használnak a fenti tétel belátásához.

Nagyon hasonlóan be lehet látni azt is, hogy egy n csúcsú egyszerű kvázi-síkgráfnak legfeljebb $6.5n-20$ éle van.

Ugyanők alsó becslést is adnak az élszámra, mutatnak egy $7n-O(1)$ élű gráfot ami kvázi-sík. Illetve egy $6.5n-O(1)$ élszámú gráfot, ami egyszerű kvázi-sík, amiből kiderül, hogy az ilyen gráfokra a felső becslés éles az additív konstanstól eltekintve.

A konstrukció a következő. Rajzoljunk egy hatszög rácsot ahol a hatszögek összes átlóját behúzzuk egyenes szakasszal egy kivételével. Majd az 5. ábrán látható módon görbeként adjuk hozzá a hiányzó átlót is. Végül rajzoljuk be a hosszú éleket, minden csúcsba kettőt. (5. ábra) Megvizsgálva a gráfot igazolható, hogy kvázi-sík. Figyeljük meg, hogy azon csúcsok fokszáma, amik elég távol vannak a határtól 14. $O(\sqrt{n})$ csúcs van, ami közel van a határhoz, és fokszáma így kisebb, mint 14. Ennek a gráfnak így $7n-O(\sqrt{n})$ éle van. Ahhoz, hogy ezt javítsuk tekerjük fel a gráfunkat egy hengerre úgy, hogy három hatszög legyen körben, és a henger tetején és alján húzzunk be még öt-öt új élet. (utána ezt le tudjuk rajzolni újra a síkba.) Ha a hengeren m sor hatszög van, akkor a csúcsok száma $n=6m+6$ az éleké $e=7n-29$. Ha n nem osztható hattal, akkor a konstans tag egy kicsit rosszabb lesz.



5. ábra: konstrukció $7n - O(1)$ élű kvázis-síkgráfra

Tőlük származik a kvázi-sík gráfok valamilyen értelemben vett általánosítása. G-ről ahelyett, hogy egyszerű gráf a következőket teszik fel:

(1) G-ben nincs hurokél;

(2) minden lencsében, azaz két párhuzamos éldarabka által létrejövő lapban, van belül csúcsa a gráfnak;

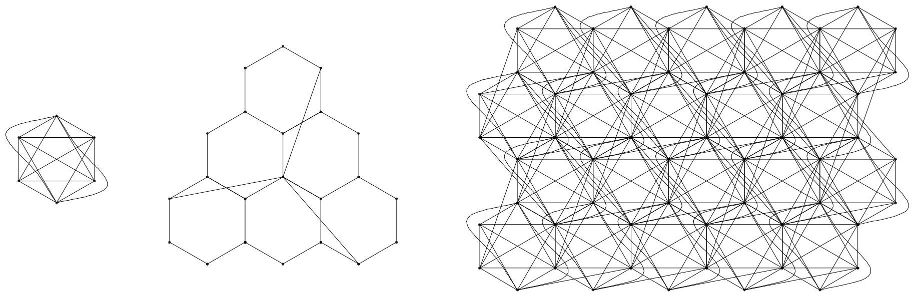
(3) minden három páronként metsző él által létrejövő háromszög belsejében van a G-nek pontja.

Azért kezdenek el foglalkozni az ilyen G gráfokkal, mert a bizonyítás során ezek a G lényeges tulajdonságai, és nem az, hogy G egyszerű és nem létezik három páronként metsző él. Így a bizonyítást egy ici-picit módosítva megkapjuk a következő tételt.

2.3. Tétel *Tegyük fel, hogy a G topologikus gráfra teljesülnek a fent leírt feltételek Ekkor $|G(E)| \leq 8n - 20$, és van ilyen n csúcsú gráf $8n - O(1)$ éllel.*

Ami az egészben lényeges az az, hogy így már a becslés éles, azaz létezik ilyen gráf aminek $8n - O(1)$ éle van. A konstrukció nagyon hasonlít az előzőhöz. Induljunk ki az előző konstrukció még nem feltekert gráfjából. Minden nem egyenes élhez adjunk hozzá egy párhuzamos élt, ami középpontosan szimmetrikus az eredeti élhez. (lásd 6. ábra) Két ilyen él egy lencsét alkot, amiben van két csúcs. Adjunk még hozzá egyenes éleket a 6. ábrán látható módon. Minden ilyen új él benne lesz két három páronként metsző élhalmazban, melyek mindegyikében lesz egy csúcsa a gráfnak.

Sokáig nem tudták, hogy a topologikus gráfokkal kapcsolatos kérdéseknél lényeges-e külön kezelni az egyszerű topologikus gráfokat a topologikus gráfoktól. Arra hogy lényeges külömbség lehet, jó példa a kvázi-sík gráfok, hiszen



6. ábra: $8n - O(1)$ **élű gráf, ami teljesíti az előző feltételeket**

itt ahogy láttuk élszámra nem ugyanaz az érték jön ki. (Egyszerű kvázi-síkgráf élszáma $6.5n - 20$ míg láttunk konstrukciót $7n - O(1)$ élű kvázi-síkgráfra.) Az alábbi E. Ackerman-tól és Tardos G.-tól származó 2007-es tétel valamelyest általánosítja, és összehozza ebben az esetben a két fogalmat. [?]

2.4. Tétel *Legyen G egy ≥ 4 csúcsú egyszerű topologikus gráf, amelyben nincs három olyan páronként metsző él amelyek egy olyan lapot fognak közre amiben nincs csúcsa a gráfnak. Ekkor G éleinek a száma legfeljebb $7n - 20$ és ez a korlát éles is konstanstól eltekintve.*

A tétel bizonyítása szintén hasonló az előzőekhez, illetve a konstrukció is az előbbi 6. ábrán láthatóhoz.

A kvázi-síkgráfok kézenfekvő általánosítása a következő. Vizsgáljuk az olyan topologikus gráfokat melyeknek egy rögzített k egészre van olyan síkbarajzolása, amiben nincs k darab páronként metsző él. Az ilyen gráfokat nevezik **k-kvázi-síkgráf**oknak.

Vizsgáljuk meg először, hogy mit tudunk mondani abban a speciális esetben, ha konvex geometriai gráfokat vizsgálunk. V. Capoyleas és Pach J. adott éles korlátot az élszámra vonatkozólag 1992-ben. [?] Jelöljük $t_c(C_k, n)$ azt a számot, ahány éle lehet maximum egy n csúcsú olyan konvex geometriai gráfnak, amiben nincs k páronként metsző él.

3.1. Tétel *Minden $n \geq 2k+1$-re*

$$t_c(C_{k+1}, n) = 2kn - \binom{2k+1}{2}.$$

Bizonyítás.

G csúcsainak száma szerinti indukcióval bizonyítunk. Legyen $k \geq 1$ rögzített. Ha $n = 2k+1$ akkor a tétel triviálisan következik, hiszen

$$2k(2k+1) - \binom{2k+1}{2} = \binom{2k+1}{2}.$$

Tegyük tehát most fel, hogy minden kisebb, mint n csúcsú gráfra igaz a tétel és legyen G egy maximális élszámú olyan gráf, aminek a csúcsai egy konvex n-szögön helyezkednek el és nem létezik benne $k+1$ páronként metsző él.

3.1. Állítás *Ha két csúcsot kevesebb, mint k csúcs választ el a konvex n-szög határán, akkor ők össze vannak kötve éllel.*

Nyilván egy ilyen élet adva a gráfhoz nem keletkezhet $k+1$ páronként metsző él. Viszont, ha csak az ilyen élek lennének behúzva az még kevés lenne, ugyanis ekkor az élszám $2kn/2 < 2kn - \binom{2k+1}{2}$. Vegyünk egy uv élet amire az u és a v végpontok legalább k csúccsal el vannak választva a konvex n-szög határán. Jelölje a csúcsokat G-ben az óramutató járásával megegyező irányban:

$$u, x_1, \ldots, x_{n_1}, v, y_1, \ldots, y_{n_2} \qquad (n_1, n_2 \geq k).$$

Definiáljuk a következő részbenrendezést G azon élein, amik metszik uv-t. Két x_iy_j és $x_{i'}y_{j'}$ él összehasonlítható, ha metszik egymást és ekkor

$$x_iy_j \prec x_{i'}y_{j'} \Leftrightarrow i < i' \ és\ j < j'.$$

Ez nyilván tranzitív.

Legyen egy x_iy_j él rangja $rang(x_iy_j)$ az olyan láncoknak a maximális hossza amiknek ő a maximális eleme. Ekkor az azonos rangú élek egy antiláncot alkotnak. Másrészt azt is tudjuk, hogy minden élre

$$1 \leq rang(x_iy_j) \leq k-1$$

hiszen máskülönben lenne $k+1$ páronként metsző él.

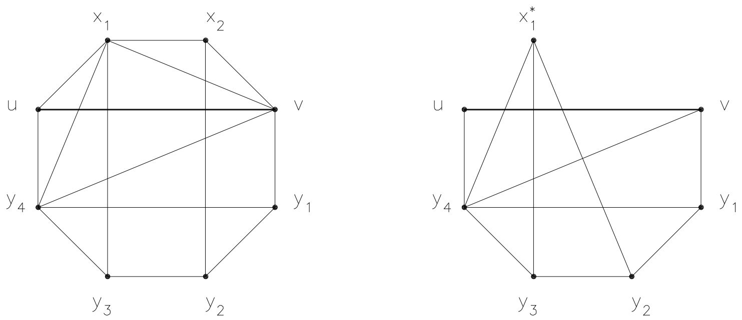
1.lépés: G_1 definiálása

G_1 csúcsai:

$u, x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, v, y_1, \ldots, y_{n_2}$ (óramutató járásával megeggyező irányban)

G_1 élei:

(1) $\{u, v, y_1, \ldots, y_{n_2}\}$ részgráfban ugyanazok legyenek az élek mint G-ben;
(2) $\{u, x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, v\}$ részgráfban csak az uv legyen él;
(3) $x_r^*y_j \in E(G_1)$ akkor és csak akkor, ha létezik $x_iy_j \in E(G)$ aminek a rangja éppen r.



7. ábra: G gráfhoz és uv élhez konstruált G_1, ahol $k = 2$

3.2. Állítás *G_1-ben nincs $k+1$ páronként metsző él.*

Ehelyett azt mutatjuk meg, hogy ha van t páronként metsző él, $x^*_{r_1}y_{j_1}, \ldots, x^*_{r_t}y_{j_t}$ $(r_1 > \ldots > r_t, j_1 > \ldots > j_t)$ G_1-ben akkor találunk hozzá G-ben t páronként metsző élt, amik mind metszik uv-t és van végpontjuk $\{y_j | j_1 \geq j \geq j_t\}$-ben. Innen az állítás következik. Először vegyünk t élet $x_{i_1}yj_1, \ldots, x_{i_t}y_{j_t} \in E(G)$, amire $rang(x_{i_1}yj_1) = r_1, \ldots, rang(x_{i_t}y_{j_t}) = r_t$. Ezeket fogjuk úgy módosítani, hogy eleget tegyenek a fent leírt követelményeknek. Legyen $x_{p_1}y_{q_1} = x_{i_1}y_{j_1}$ és tegyük fel, hogy már találtunk $x_{p_1}y_{q_1}, \ldots, x_{p_{t-1}}y_{q_{t-1}}$ $t-1$ élt, amik páronként metszik egymást és

(1) $rang(x_{p_1}y_{q_1}) = r_1, \ldots, rang(x_{p_{t-1}}y_{q_{t-1}}) = r_{t-1}$;

(2) $q_1 = j_1, q_2 \geq j_2, \ldots, q_{t-1} \geq j_{t-1}$.

Természetesen létezik olyan x_py_q r_t rangú él, ami metszi $x_{p_{t-1}}y_{q_{t-1}}$ élet (hiszen az $r_{t-1} > r_t$). Ha $q \geq j_t$ akkor ezt az élet választhatjuk $x_{p_t}y_{q_t}$-nek és indukcióval készen vagyunk. Ha $q < j_t$ akkor mivel két azonos rangú él nem metszheti egymást $p \geq i$. Ekkor $x_{p_t}y_{q_t} := x$. Ennek az élnek metszenie kell $x_{p_{t-1}}y_{q_{t-1}}$ élt (mert $p \geq i_t$) és így $x_{p_1}, \ldots, x_{p_{t-2}}y_{q_{t-2}}$ éleket is. Ezzel az állítást beláttuk.

3.3. Állítás $|E(G_1)| \leq t_c(C_{k+1}, n_2 + k + 1) - k^2 + k$

A 3.2-es állításból következik, hogy elég azt belátnunk, hogy hozzá tudunk venni G_1-hez $k^2 - k$ élet úgy, hogy továbbra se legyen benne $k+1$ páronként metsző él.

(1) $\{u, x^*_1, \ldots, x^*_{k-1}, v\}$-ben uv-t kivéve minden él hiányzik és 1. állításból adódóan be is húzható. Ez $\binom{k+1}{2} - 1$ él.

(2) Vegyük észre, hogy $x_1y_j \in E(G)$, $1 \leq j \leq k-1$-re $rang(x_iy_j) \leq j$. Ezért $x^*_ry_j \notin E(G_1)$ ha $r > j$. Ez $\sum_{j=1}^{k-1}(k-1-j)$ új élet ad.

Tehát összesen $\binom{k+1}{2} - 1 + \sum_{j=1}^{k-1}(k-1-j) = k^2 - k$ új élet vehetünk hozzá.

2.lépés: G_2 definiálása

Hasonlóan definiálhatjuk G_2 gráfot az

$$\{u, x_1, \ldots, x_{n_1}, v, y^*_1, \ldots, y^*_{k-1}\}$$

pontokon összekötve x_i-t y^*_r-gal, ha létezik $x_ix_j \in E(G)$ él, amire $rang(x_iy_j = r$, és $\{u, x_1, \ldots, x_{n_1}, v\}$-ben ugyanazokat az éleket húzzuk be, mint a nekik megfelelő G részgráfban. Úgy, mint az előbb

$$|E(G_2)| \leq t_c(C_{k+1}, n_1 + k + 1) - k^2 + k.$$

Jelölje $d_{G_i}(z)$ a $z \in V(G_i)$ fokát G_i-ben ($i = 1, 2$), és legyen e_r az r ($1 \leq r \leq k - 1$) rangú élek száma G-ben. Ha vesszük az r rangú éleket, akkor ebben a részgráfban nyilván nem lehet kör, amiből az következik, hogy minden r-re az r rangú élek egy erdőt alkotnak. Minden r-re az r rangú élekből alkotott részgráf csúcsszáma $d_{G_1}(x_r^*) + d_{G_2}(y_r^*)$. Ebből adódik a következő.

3.4. Állítás $e_r \leq d_{G_1}(x_r^*) + d_{G_2}(y_r^*) - 1$ *minden* $1 \leq r \leq k - 1$.

Az előző állításból és abból, hogy $uv \in E(G_1) \cap E(G_2)$

$$|E(G)| \leq |E(G_1)| + |E(G_2)| - 1 - \sum_{r=1}^{k-1} (d_{G_1}(x_r^*) + d_{G_2}(y_r^*) - e_r) \leq |E(G_1)| + |E(G_2)| - k.$$

Az 3.3 állításból és ebből kapjuk, hogy

$$|E(G)| \leq t_c(C_{k+1}, n_1 + k + 1) + t_c(C_{k+1}, n_2 + k + 1) - 2k^2 + k.$$

G_1-re és G_2-re alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, hiszen $n_1 + n_2 + 2 = n$, $n_1 \geq k$, $n_2 \geq k$ tehát $2k + 1 \leq n_i + k + 1 < n$ $i = 1, 2$-re, azaz a tétel feltevései teljesülnek. Így

$$|E(G)| = t_c(C_{k+1}, n) \leq 2k(n_1 + k + 1) + 2k(n_2 + k + 1) - 2\binom{2k+1}{2} - 2k^2 + k$$

$$= 2k(n_1 + n_2 + 2) - 2k^2 + k = 2kn - \binom{2k+1}{2}.$$

Még azt kell belátnunk, hogy a becslés éles. Ezt az alábbi konstrukció igazolja.

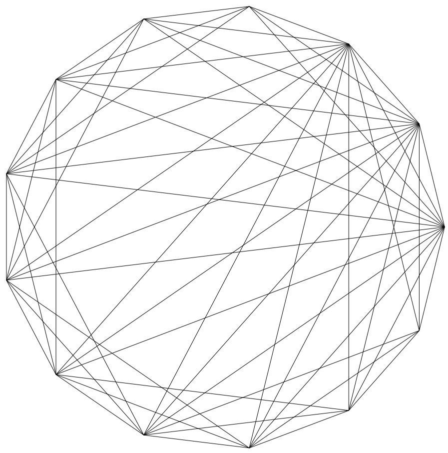
Legyenek $x_1, \ldots, x_n$ egy konvex n-szög csúcsai az óramutató járásával megegyező irányba.

Kössük össze x_i-t x_j-vel, ha

(1) kevesebb, mint k csúccsal vannak egymástól elválasztva a sokszög határán;

(2) $i \leq k$.

□

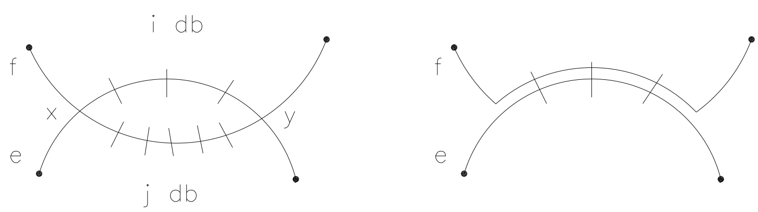


8. ábra: konstrukció $n = 13$ és $k = 3$-ra

Mielőtt rátérnénk annak az esetnek a vizsgálatára, amikor nem kötjük ki, hogy konvex geometriai gráfról van szó, hanem egyszerű topologikus gráfokat vizsgálunk, be kell vezetnünk pár ehhez szükséges új fogalmat.

3.1. Definíció *G gráf **metszési száma** $cr(G)$ az a legkisebb szám amire G-nek van olyan lerajzolása, amiben $cr(G)$ darab metszés van az élek között.*

Könnyű látni, hogy ha csak az olyan lerajzolásokat vizsgáljuk, amikben minden két él legfeljebb egyszer metszi egymást, attól a $cr(G)$ értéke nem változik. Vegyünk ugyanis egy olyan lerajzolást, amiben $cr(G)$ metszés van, és tegyük fel, hogy van két él e és f amik legalább kétszer metszik egymást. Legyen két egymás utáni metszéspontjuk x és y. Ekkor e és f x és y közötti darabját metszi néhány él, e-t i darab f-et j darab. Tegyük fel, hogy $j \geq i$. Ekkor, ha f-et az ábrán látható módon e "felett" vezetjük akkor a metszések száma csökken, ami ellentmondás. (9. ábra)



9. ábra: metszések csökkentése

3.2. Definíció *Vegyük G gráf csúcsainak az összes kétrészes partícióját V_1, V_2 és jelölje $E(V_1, V_2)$ a G összes olyan élét, aminek egyik végpontja V_1-ben a* *másik V_2-ben van. Ekkor G-nek a **szélessége***

$$b(G) = \min_{|V_1|,|V_2| \leq 2n/3} |E(V_1, V_2)|.$$

Az alábbi összefüggést fogjuk használni, ami a Lipton-Tarjan szeparációs tétel következménye. [?]

3.1. Lemma *Legyen G egy n csúcsú gráf, és jelölje a pontok fokszámait $d_1, \ldots, d_n$ Ekkor*

$$b^2(G) \leq (1.58)^2 (16cr(G) + \sum_{i=1}^{n} (d_i^2)).$$

Most már megvannak a szükséges eszközök Pach J., F. Shahrokhi és Szegedy M. tételének kimondásához, amiben felső korlátot adnak olyan egyszerű topologikus gráfok élszámára, amiben nincs $k+1$ páronként metsző él. [?]

3.2. Tétel *Legyen G egy n csúcsú olyan egyszerű topologikus gráf, amiben nincs $k+1$ páronként metsző él. Ekkor*

$$|E(G)| \leq 3n(10 \log n)^{2k-2}.$$

Bizonyítás. Bizonyítás helyett most csak a gondolatmenet lényegét vázoljuk, kihagyva sok kevésbé izgalmas számolást.

Indukcióval bizonyítunk k és n szerint. Ez azt jelenti, hogy feltesszük, hogy igaz az állítás egy adott k-ra és az összes n-re majd belátjuk, $k+1$-re és hozzá az összes n-re. $n = 1$-re minden k-ra igaz. Legyen G egy olyan n csúcsú egyszerű topologikus gráf, amiben nincs $k+2$ páronként metsző él.

Elsőként felülről becsüljük $cr(G)$ értékét, amihez konstruáljuk meg a G_e gráfot. Minden $e \in E(G)$-re legyen G_e az a gráf amiben G azon élei szerepelnek, amik elmetszik e-t. Ekkor G_e-ben nincs $k+1$ páronként metsző él, ami miatt G_e-re már az indukciós feltevést alkalmazhatjuk. Innen kapjuk, hogy $cr(G) \leq 1/2 \sum_{e \in E(G)} (|E(G_e)|)$, amire az indukciós feltevés miatt már igaz a tétel így $cr(G) \leq 3/2|E(G)| \cdot n(10 \log n)^{2k-2}$. Ebből kis számolással $b(G)$-re is kapunk egy felső becslést használva $cr(G)$ becslését, és azt, hogy $\sum_{i=1}^{n} (d_i^2) \leq 2|E(G)| \cdot n$.

Ezek után bontsuk két részre V_1 és V_2 $G(V)$ csúcsait úgy, hogy mindkét rész legfeljebb $2n/3$ és köztük pontosan $b(G)$ él legyen. Jelölje G_1 és G_2 a V_1 illetve

V_2 által feszített részgráfokat G-ben. G_1 és G_2 sem tartalmaz $k+2$ páronként metsző élt, viszont kevesebb csúcsuk van, mint n így rájuk is alkamazható az indukciós feltevés. Ezek után az $|E(G)| = |E(G_1)| + |E(G_2)| + b(G)$-t kell felülről becsülni a már megkapott $b(G)$ becslésből és az indukciós feltevéssel, és számolni egy kicsit. $\square$

A ma tudott legjobb felső korlát k-kvázi-síkgráfok élszámára $n(\log n)^{c \log k}$, ami J. Fox-tól és Pach J.-tól származik. [?] A sejtés azonban a következő.

3.1. Sejtés *Minden $k \geq 3$-ra létezik olyan $c_k > 0$ konstans, hogy minden n csúcsú $c_k n$ élű topologikus gráf tartalmaz k páronként metsző élt.*

4. Rácsok

A kvázi-síkgráf problémát általánosítsuk még tovább, úgynevezett rácsokat vizsgálva. **(k,l)-rács**-nak nevezünk egy topologikus gráf olyan élhalmazát, ami E_1 és E_2-ből áll, úgy, hogy $|E_1| = k$, $|E_2| = l$ és minden E_1-beli él metsz minden E_2-belit. Egy (k,l)-rácsot **természetes**nek nevezünk, ha az E_1 élek diszjunktak és az E_2 élek is diszjunktak. Ebben az esetben egyelőre elég keveset tudunk az élek számára vonatkozó felső becslésre. Az a sejtés, hogy rögzített $k, l \geq 1$ egészekhez létezik $c_{k,l}$ konstans, hogy egy természetes (k,l)-rács mentes n csúcsú topologiai gráfnak legfeljebb $c_{k,l}n$ éle lehet. A sejtést E. Ackerman balátta $k = 2$ $l = 1$ esetben. [?]

4.1. Tétel *Egy természetes (2,1)-rács mentes n csúcsú egyszerű topologikus gráfnak $O(n)$ éle van.*

Habár úgy tűnhet első látásra, hogy $k = 2$, $l = 1$-re könnyen kijöhet a sejtés, a tétel bizonyítása koránt sem egyszerű. Úgynevezett szöveteket (thracle) használ a bizonyításhoz. Ezek olyan topologikus gráfok, amiknek minden két éle pontosan egyszer találkozik, akár az élen belül akár a csúcspontban. Másrészt valahogyan színezi az éleket. Telis-tele van szebbnél szebb ötletekkel. A végén az fog kiderülni, hogy a tételben leírt gráfok élszáma kisebb, mint $65n$.

A sejtés speciális eseteként a geometriai gráfokra 2009-ben E. Ackerman, J. Fox, Pach J. és A Suk belátták, hogy az n csúcsú természetes (k,k)-rács mentes gráfok élszáma legfeljebb $O(k^2 n \log^2 n)$. [?] Ugyanők belátták egyszerű topologikus gráfokra, hogy a felső korlát $O(n(\log n)^{4k-6})$.

Ha nem követeljük meg, hogy a rács természetes legyen, akkor a $(k,1)$-rácsokról $1 \leq k \leq 5$ Pach J. és Tóth G. belátta, hogy minden n csúcsú topologikus gráfnak, aminek több, mint $(k+2)(n-2)$ éle van $(1 \leq k \leq 5)$, van olyan éle, amit legalább k él metsz. [?] Ez a korlát éles $k = 1, 2, 3$-ra. Metszési számok felhasználásával könnyen megkapható az is, hogy ha egy gráfnak $\geq c\sqrt{k}n$ éle van, akkor van olyan éle, amit legalább k él metsz.

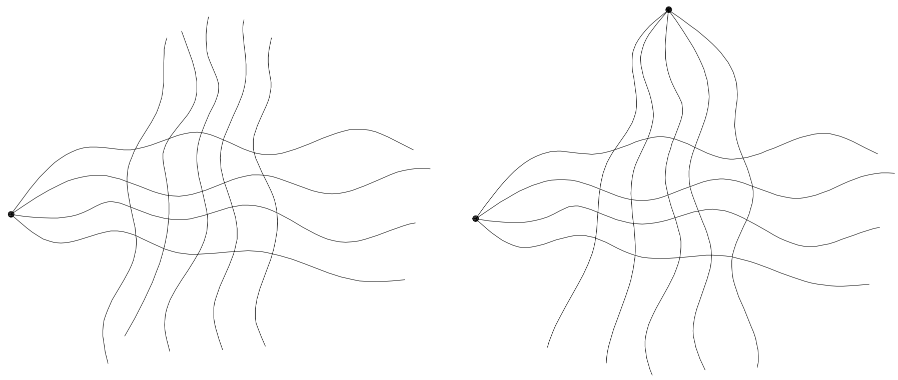
Pach J., R. Radoičić és Tóth G. az olyan (2,k)-rácsokat vizsgálták, ahol feltették még azt is, hogy az E_1-be tartozó két él metszi egymást, (az E_2-beli k élről nem tették fel, hogy diszjunktat, azok metszhetik is egymást meg nem is). [?] Ekkor a következő tétel igaz.

4.2. Tétel *Minden rögzített pozitív egész k-hoz létezik c_k konstans, hogy minden topologikus gráfban, aminek az élszáma nagyobb, mint $c_k n$ van $k+2$ olyan él, hogy az első kettő metszi egymást is és a maradék k élt is.*

A bizonyítás menete nagyon hasonlít a kvázi-síkgráfok élszámára vonatkozó tétel bizonyításához. A tételben arról nincs szó, hogy az éleknek függetleneknek kellene lenniük, azaz a végpontjaik nem egyeznek meg. Ha ezt is feltesszük, akkor csak az alábbi sejtést fogalmazhatjuk meg.

4.1. Sejtés *Minden $k \geq 2$-höz létezik c_k konstans, hogy minden n csúcsú topologikus gráfban, aminek legalább $c_k n$ éle van tartalmaz $k+2$ független élt, hogy az első kettő metszi a többi k-t.*

Mit tudunk mondani általánosan a (k,l)-rácsok élszámáról? Sajnos megszorítások nélkül nem tudtunk konstansszor csúcsszám méretű korlátot adni, viszont újabb kitételeket adva a rácsok tulajdonságára sikerül. A megkötés pedig a következő. Tegyük fel, hogy a (k,l)-rácsban az E_1-hez tartozó k él egy csúcsra illeszkedik. Ekkor a rácsot **sugaras**nak nevezzük. (10.a ábra) Ha ezen felül még azt is feltesszük, hogy az E_2-höz tartozó l él is egy pontra illeszkedik akkor a rácsot **kétsugaras**-nak nevezzük. (10.b ábra)



10.a ábra: sugaras (4,5)-rács, 10.b ábra: kétsugaras (4,5)-rács

Az ilyen rácsokra vonatkozó tételek Pach J.-tól, R. Pinchasi-tól, M. Sharir-tól és Tóth G.-tól származnak. [?]

4.3. Tétel *Minden $k, l \geq 1$-re egy több mint $16 \cdot 24^{4^l} kn$ élű topologikus gráf tartalmaz sugaras (k,l)-rácsot.*

4.4. Tétel *Minden $k, l \geq 1$-re egy több mint $8 \cdot 24^l kn$ élű egyszerű topologikus gráf tartalmaz sugaras (k,l)-rácsot.*

A 4.4-es tétel egy könnyen belátható következménye, hogy minden $k, l \geq 1$-hez van olyan $c = c_{kl}$ konstans, hogy minden n csúcsú egyszerű topologikus gráfnak, aminek legalább cn éle van tartalmaz olyan sugaras (k, l)-rácsot aminek az első k éle a többi l élet ugyanolyan sorrendben metszi, azaz tényleg úgy fog kinézni mint egy természetes módon elképzelt rács.

Az előbbi tételnek megmutatjuk a bizonyítását, aminek az alapötlete hasonló ahhoz, amit a kvázi-síkgráfoknál olvastunk, ezt fejleszti tovább.

Bizonyítás. A bizonyítás eleje ugyanaz, mint a kvázi-síkgráfok élszámára vonatkozó tétel bizonyítása addig, amíg megkonstruáljuk a $\tilde{T}_i$ gráfokat illetve $\tilde{T}$-t. Ezen kívül szükségünk lesz az alábbi M. Schaefertől és D. Štefankovič-tól származó állításra. [?]

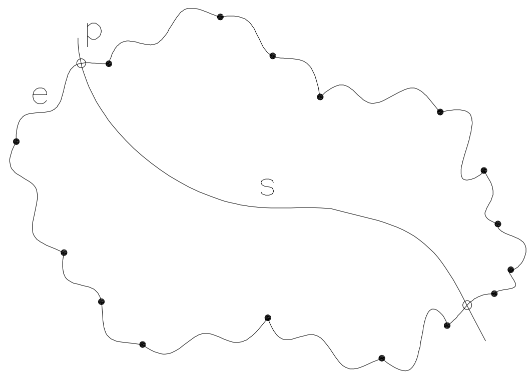
4.1. Állítás *Minden $e \in \tilde{G}(E)$-re és $m > 0$-ra minden 2^m egymást követő metszés e-n legaláb m különböző éltől származik.*

Innentől már újabb ötletekre van szükségünk.

1. lépés: Megkonstruáljuk $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \ldots, \tilde{H}_m = \tilde{H}$ metszésmentes topologikus gráfokat, és hozzá megadjuk ez $\tilde{E}_i$ úgynevezett *használt élek*et.

$\tilde{E}_i := \tilde{G}$-nek azon élei, amiknek van darabja $\tilde{H}_i$-ben. $\tilde{H}_1 := \tilde{T}$ és $\tilde{E}_1 := \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$. Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk $\tilde{H}_i$-t és $\tilde{E}_i$-t valamely $i > 1$-re. $E_i := E(\tilde{G}) \backslash \tilde{E}_i$ az úgynevezett *nem használt él*ek. Minden $e \in E_i$-t metsz $\tilde{H}_i$ valahány pontban (lehet, hogy egyben sem) felosztva az e élt kis darabokra, úgynevezett *szelet*ekre. Jelölje s az összes $e \in E_i$ összes szeletének halmazát. Úgy fogjuk megkapni $\tilde{H}_i$-ből $\tilde{H}_{i+1}$-et, hogy hozzáadunk egy bizonyos tulajdonságú s szeletet. A szeletek végpontjai vagy $\tilde{H}_i$-beli csúcsok vagy egy p pont $\tilde{H}_i$ egy e élén. Az utóbbi esetben, $\tilde{H}_{i+1}$-hez a szeleten kívül hozzávesszük a p pontot is és az e él helyett e_1, e_2 éleket, ahol p e-t e_1, e_2 részekre osztotta. Ha egy szeletet hozzáveszünk $\tilde{H}_i$-hez akkor ez $\tilde{H}_i$ egy celláját két részre osztja. Ha az így keletkezett cellák mindegyike legalább 8 oldalú (beleszámítva az új hozzávett szelet által adódó oldalt) akkor *megengedett vágás*ról beszélünk. (11. ábra)

Ezek után két esetet különböztetünk meg:



11. ábra: s **szelet megengedett vágást ad**

(1) Ha nem létezik olyan $s \in S$, ami $\tilde{H}_i$-nek megengedett vágását adja, akkor $m := i$, $\tilde{H} := \tilde{H}_i$, $\tilde{E} := \tilde{E}_i$ valamint $E := E(G) \backslash \tilde{E}$ és ezzel $\tilde{H}_i$-k konstruálását befejeztük.

(2) Ha létezik olyan $s \in S$ ami megengedett vágását adja $\tilde{H}_i$-nek, akkor $\tilde{H}_i$-hez vegyük hozzá ezt az s szeletet az előbbiekben leírt módon (azaz, ha kell vegyünk hozzá új csúcsot is és éleket is bontsunk két részre) és legyen ez $\tilde{H}_{i+1}$ valamint, ha s az $e \in E_i$ egy darabja akkor $\tilde{E}_{i+1} := \tilde{E}_i \cup \{e\}$.

Mivel $\tilde{G}$-nek véges sok éle van az eljárás véges sok lépésben véget ér.

2.lépés: Használt élek számának becslése.

4.2. Állítás *$\tilde{H}$-nak kevesebb, mint $8n$ éle van, amiből az is következik, hogy $|\tilde{E}| < 8n$.*

Ez egy kis számolgatásból könnyen kijön. Legyen ϵ_i (δ_i) az élek (cellák) száma $\tilde{H}_i$-ben. Azt tudjuk, hogy $\epsilon_1 < 2n$ és $\delta_1 = 1$ ($\tilde{T}$ tulajdonságai miatt). Ezen kívül minden i-re $\epsilon_{i+1} \leq \epsilon_i + 3$ és $\delta_{i+1} = \delta_i + 1$ amiből következik, hogy $\epsilon_m < 3m+2n-3$ és $\delta_m = m$. Másrészről minden cella mérete legalább 8, hiszen ez igaz $\tilde{H}_1 = \tilde{T}$-re, ha feltesszük, hogy $n \geq 5$, és a lépések során ez mindig igaz is marad. Így $\epsilon_m \geq 4\delta_n$. Ezeket összerakva kapjuk, hogy $3m + 2n - 3 > \epsilon_m \geq 4\delta_m = 4m$ azaz $2n - 3 > m$ és így $\epsilon_m < 3m + 2n - 3 < 6n - 9 + 2n - 3 < 8n$.

3.lépés: Nem használt élek számának becslése.

Jelölje $d_{\tilde{H}}(v)$ a $v \in \tilde{G}$ fokát $\tilde{H}$-ban. Adjunk meg egy körüljárási irányt v-re illeszkedő nem használt $\tilde{H}$-beli éleken. Azt fogjuk megmutatni, hogy $\tilde{H}$ két egymást követő e' és e'' éle közt legfeljebb $(2k-2)24^{4^l}$ nem használt éle van $\tilde{G}$-nek. Jelöljük $E_v(e', e'')$-vel ezen nem használt éleket. Egy $e \in E_v(e', e'')$ élt nevezzünk *rövid*nek, ha kevesebb, mint 4^l-szer metszi $\tilde{H}$ illetve nevezzük *hosszú*nak, ha többször.

Fontos lesz számunkra a későbbiekben, hogy meg tudjuk különböztetni egy él két oldalát. Ennek érdekében irányítsuk meg az éleket a következő képpen: $\tilde{H}$ éleit tetszőlegesen, egy $E_v(e', e'')$-beli élet pedig v-től kifelé. ha két irányított él e és f metszi egymást egy p pontban, akkor azt mondjuk, hogy e f*-et balról jobbra metszi*, ha e átforgatható p középponttal az óramutató járársával megeggyező irányba f-be úgy, hogy a forgatás szöge kisebb mint Π.

Most definiáljuk, mit értünk egy él típusán. Először vizsgáljuk a hosszú éleket. Ha $e = vw \in E_v(e', e'')$ egy hosszú él, akkor tekintsük e első 4^l metszéspontját $\tilde{H}$-val ahogy haladunk v-től w felé és a metszéspontoknak megfelelő $\tilde{H}$-beli élek legyenek $\langle h_1, h_1, \ldots, h_{4^l} \rangle$. Minden $1 \leq i \leq 4^l$-hez írjunk $t_i = h_i^-$ (illetve $t_i = h_i^+$-t), ha h_i-t e balról jobbra (jobbról balra) metszi. Az e él típusa legyen ezek alapján $T(e) = \langle t_1, t_2, \ldots, t_{4^l} \rangle$. Egy rövid $e = vw$ él típusát ugyanúgy definiáljuk, mint a hosszú élét annyi különbséggel, hogy $T(E)$ lehet, hogy rövidebb, és w-t hozzávesszük a listához mint utolsó elemet.

4.3. Állítás *A típusok száma legfeljebb* 24^{4^l}.

Mivel $\tilde{H}$-nak nincs megengedett vágása, ezért egy $e = v\vec{w} \in E_v(e', e'')$ egy szeletének két végpontja közel van egymáshoz, azaz a távolság kisebb, mint 6 $\tilde{H}$ megfelelő cellájának a határán. Azaz, ha rögzítjük az első $i < 4^l$ elemét a $T(e)$ sorozatnak akkor a következőt legfeljebb 24 féle képpen választhatjuk, ugyanis mindkét irányba választhatjuk a 6 legközelebbi élet illetve a 6 legközelebbi csúcsot, ha e rövid él (és ezek egybe is eshetnek, ezért a legfeljebb 24). Ebből következik, hogy a típusok száma legfeljebb 24^{4^l}.

4.4. Állítás *Az* $E_v(e', e'')$*-ben minden típusú élből legfeljebb* $2k-2$ *van.*

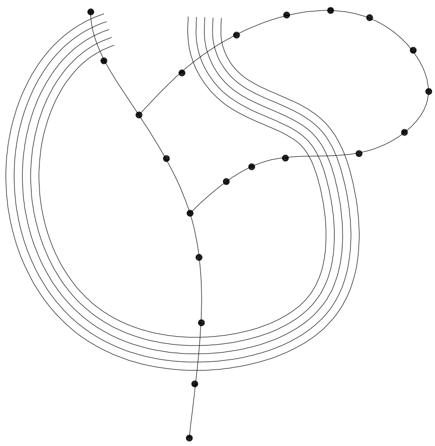
Az állítás abban az esetben, ha rövid élekről van szó, rögtön következik, hiszen, ha két $E_v(e', e'')$-beli rövid él típus megegyezik, akkor mindkét végpontjuk megegyezik, ami ellentmond annak, hogy G gráf egyszerű, azaz nincsenek benne párhuzamos élek. Tehát most vizsgáljuk a hosszú éleket.

Tegyük fel indirekt, hogy létezik $2k-1$ $e_1, e_2, \ldots, e_{2k-1} \in E_v(e', e'')$ hosszú él amiknek azonos a típusa. Legyen ez a típus $\langle t_1, t_2, \ldots, t_{4^l} \rangle$ ahol minden j-re $t_j = h_j^+$ vagy h_j^-.

Mielőtt belekezdenénk az állítás bizonyításába, vezessünk be pár jelölést, hogy könnyebben tudjunk beszélni bizonyos dolgokról.

Minden $1 \leq i \leq 2k-1$-re és minden $1 \leq j \leq 4^l$-re jelölje e_i^j az e_i élnek a $\tilde{H}$-val való $j-1$ és j metszéspontja közti szeletét. Legyen e_i^1 az e_i-nek azon szelete, ami v és v-ből indulva ez első $\tilde{H}$-val való metszéspont között van. Továbbá legyen $\bar{e_i} = \bigcup_{j=1}^{4^l} e_i^j$, azaz e_i-nek azon darabja, ami v-edik és a 4^l-dik $\tilde{H}$-val való metszéspont között van.

Figyeljük meg, hogy minden rögzített $1 \leq j \leq 4^l$-re az e_i^j $1 \leq i \leq 2k-1$ szeletek páronként diszjunktak. Ha ugyanis lenne két metsző szelet, akkor vegyük ezek közül azt, amire a j a lehető legkisebb, legyenek ezek e_i^j és $e_{i'}^j$ és a metszéspontjuk p. Ekkor $\bar{e_i}$-nek és $\bar{e_{i'}}$-nek v és p közti darabja egy olyan lencsét alkotna, amiben nincs csúcs, ami ellentmondás (nincs üres lencse $\tilde{G}$-ban). Tehát az $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \ldots, \bar{e_{2k-1}}$ görbék párhuzamosan haladnak, azaz, ha $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \ldots, \bar{e_{2k-1}}$ v-ből ebben a sorrendben erednek akkor minden $1 \leq j \leq 4^l$-re $e_1^j, e_2^j, \ldots, e_{2k-1}^j$ h_j-vel ugyanilyen sorrendben találkoznak. (12. ábra)



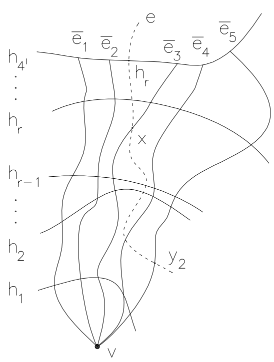
12. ábra: párhuzamosan haladó élek

A 4.1 állításból következik, hogy létezik $2l$ különböző éle $\tilde{G}$-nek, ami metszi $\bar{e_k}$-t. Legyen ezek közül e az egyik, és metssze $\bar{e_k}$-t x-ben.

Megmutatjuk, hogy e vagy az $\{\bar{e_1}, \bar{e_2}, \ldots, \bar{e_k}\}$ vagy az $\{\bar{e_k}, \bar{e_{k+1}}, \ldots, \bar{e_{2k-1}}\}$ összes elemét metszi. Ebből pedig már könnyen következik az ellentmondás hiszen a $2l$ $\tilde{G}$-beli $\bar{e_k}$-t diszjunkt élek közül legalább a fele metszi a fentebb leírt halmazok közül az egyiknek az összes elemét, ami pont egy sugaras (k, l)-rács.

Tegyük tehát fel indirekt, hogy létezik két görbe $\bar{e_a}$ és $\bar{e_b}$, hogy $a < k < b \leq 2k-1$ és nem metszi őket e. Jelölje R^j $1 < j \leq 4^l$ azt a tartományt, amit e_a^j, e_b^j és h_{j-1} és h_j azon darabkái határolnak, amik az e_a^j és e_b^j-vel való metszéspontjuk között van.

Az előzőekből látszik, hogy R^j tartalmazza e_k^j-t és $\tilde{H}$-nak nincs csúcsa a belsejében. Legyen $j \leq k$ a legkisebb olyan szám, amire e-nek van pontja R^j-ben. Mivel e nem végződik R^j-ben ezért kell, hogy metssze R^j valamelyik oldalát. Megmutatjuk, hogy e metszi h_{j-1}-et feltéve, hogy $j > 1$. Definíció miatt e-t nem metszheti e_a^j és e_b^j sem. Viszont az sem lehet, hogy e h_j oldalról lép be is és hagyja is el R^j-t hiszen akkor kapnánk egy üres lencsét, ami nem lehet. Így tehát, ha $j > 1$ akkor e R^j-t a h_{j-1} oldalon hagyja el, azaz belép R^{j-1}-be ami ellentmond j választásának. Ha viszont $j = 1$ akkor e végpontja $h_0 := v$, és ekkor e-nek és $\bar{e}_k$-nak a v és x közötti darabjai alkotnak egy üres lencsét ($R^1 \cup R^r \cup \ldots, \cup R^{4^l}$ tartomány). Ezzel az állítást beláttuk. (13. ábra)



13. ábra: e-nek van pontja $R^{j-1} - ben$

Most már csak az a dolgunk, hogy összeszámoljuk az éleket $\tilde{G}$-ban.

$$|E(\tilde{G})| = |E| + |\tilde{E}| \leq |E| + |E(\tilde{H})| \leq (24^{4^l}(2k-2)+1)|E(\tilde{H})|$$

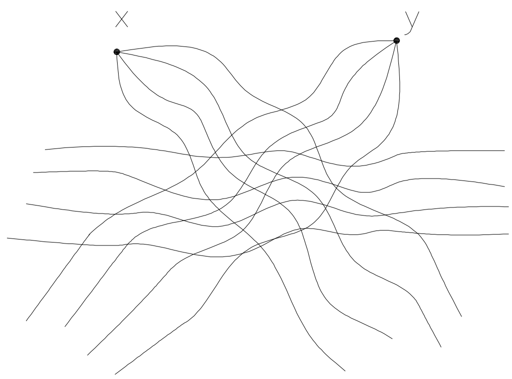
$$\leq (24^{4^l}(2k-2)+1)8n < 16 \cdot 24^{4^l} kn$$

ahogy a tételben szerepel.

□

Az 4.4-es tétel bizonyítása nagyon hasonló az előzőhöz, egy-két apró módosítással könnyen megkapható.

A rácsok problémáját még tovább általánosítva vizsgáljuk meg az úgynevezett k-csillag-rácsokat. Legyen k egy rögzített pozitív egész. Az $A \cup B \cup X$ élekből álló topologikus gráf egy **k-csillag-rács**, ha $|A| = |B| = |X| = k$, és A éleinek x közös végpontja, B éleinek y közös végpontja és A összes éle metszi B összes élét, és X összes éle metszi $A \cup B$ összes élét. Azaz A és B egy kétsugaras (k, k)-rácsot alkot, aminek összes élét metszi X összes éle. (14. ábra) Most a k-csillag-rácsokat szeretnénk kizárni. Ebben az esetben az élek számára vonatkozó Tardos G.-tól és Tóth G.-tól származó tétel a következő. [?]



14. ábra: 4-csillag-rács

4.5. Tétel *Minden k pozitív egészhez létezik egy c_k konstans, hogy egy n csúcsú topologikus gráf, aminek legalább $c_k n$ éle van tartalmaz k-csillag-rácsot.*

A tételben nagyon lényeges, hogy A éleinek (illetve B éleinek) van közös végpontja, a bizonyítás nem megy független élekre.

4.1. Megjegyzés *Ha egy olyan csillagunk van, ahol az A, B, X osztályok elemszáma nem ugyanannyi, akkor a $max\{|A|, |B|, |X|\} := k$-val működik a fenti tétel.*

Bizonyítás. Eltekintünk attól, hogy precíz bizonyítást adjunk arra való tekintettel, hogy a bizonyítás tartalmaz hosszú, kevésbé izgalmas, számolós részeket. Ehelyett vázoljuk a főbb lépéseket, ami remélhetőleg egy átfogó képet fog adni a bizonyítás menetéről. (Megjegyezzük, hogy a bizonyítás menne nem azonos méretű osztályokkal is, csak akkor még bonyolultabb lenne.) Kitérünk arra, is, hogy hol lehet egyszerűsíteni a bizonyításban, hogy ha csak egyszerű topologikus gráfokat vizsgálunk. Tehát itt most egyáltalán nem leszünk precízek.

A bizonyításhoz rögzítsük k-t és vegyünk egy F tetszőleges topologikus gráfot, $|V(F)| = n'$. Legyen $C = |E(F)|/|V(F)|$. A célunk az, hogy belássuk, hogy F tartalmaz k-csillag-rácsot, ha C elég nagy. A C-re vonatkozó korlát csak k-tól függ, n'-től nem így ebből következni fog a tétel.

Legyen F_0 az F legsűrűbb nem üres összefüggő részgráfja, azaz amire $|E(F_0)|/|V(F_0)|$ a lehető legnagyobb. Rajzoljuk át F_0-t úgy, hogy a metszések száma a lehető legkevesebb legyen, de mint absztrakt gráf ugyanaz maradjon. Ezt jelölje G_0. Itt, ha F egyszerű topologikus gráf, akkor nincs szükségünk G_0-ra.

Most ugyanúgy, mint az előző tétel bizonyításánál konstruáljuk meg $\tilde{T}$-ot és $\tilde{H}$-t valamint hozzá G_1 és G_2 topologikus gráfokat, amiket G_0-ból kapunk azoknak az éleknek és csúcsoknak a hozzávételével, amik $\tilde{T}$ illetve $\tilde{H}$ konstruálásához kellettek (új csúcsok bizonyos éleken, illetve élek kettészedése). Megjegyezzük, hogy G_1 illetve G_2 konstruálása közben előfordulhat, hogy keletkezik k-csillag-rács. Ez nem történhet meg, ha egyszerű topologikus gráfokról van szó.

A következő lépés az igazi új ötlet a bizonyításban. Sok csúcshoz találhatunk sok élet, amik az adott csúcsból indulnak, és sokáig „párhuzamosan" haladnak ($\tilde{H}$-ra vonatkozólag), majd szép sorban „elindulnak" külön a többitől. Minden ilyen elindulás, eltávolodás külön-külön cellájában történik $\tilde{H}$-nak. Az ilyen halmazokat nevezzük *köteg*eknek.

Használva azt, hogy C nagy, találhatunk úgynevezett metsző-ösvényeket G_2-ben, azaz találhatunk egy k élű köteget, és hozzá egy másik (nem feltétlenül különböző) k élű köteget úgy, hogy ez a $2k$ él párhuzamosan megy $l-1$ H-beli cellán keresztül, de végül az első k él metszi a második k élt.

Itt most, ha egyszerű topologikus gráfokat vizsgálunk, akkor készen is vagyunk, hiszen $l = k$ választással a $2k$ metsző-ösvény él és a k H-beli él épp egy k-csillag-rácsot ad. Az általános esetben azonban vigyáznunk kell, hiszen előfordulhat, hogy a kiválasztott H-beli élek közül néhány egybeesik vagy része egy metsző-ösvénybeli élnek. A 4.1 állítást használva azonban belátható, hogy ha l elég nagy akkor van közte legalább k, amik a metsző-ösvény élektől különbözőek, ahonnan ebben az általános esetben is készen vagyunk. $\square$

5. Diszjunkt élek

Most vizsgáljunk meg egy más irányú általánosítását a síkbarajzolhatóságnak, amelyben épp az ellenkezőjét vizsgáljuk a metszéseknek, mint eddig. Most ugyanis azt megengedjük, hogy bárhogyan metsszék egymást az élek, viszont azt ki szeretnénk zárni, hogy legyen sok diszjunkt él. Két élt akkor nevezünk diszjunktnak, ha se belül nem metszik egymást, se nem egyezik meg a végpontjuk.

Ebben a fejezetben csak geometriai gráfokat vizsgálunk. (Nincs értelme topologikus gráfokat vizsgálni, hiszen bármilyen absztrakt gráfnak vehetünk olyan lerajzolását, hogy ne legyen benne két diszjunkt él, ha eleget kacskaringóznak ez élek.) Ezen belül is érdekes alosztály lesz a konvex geometriai gráfok. Vezessük be az alábbi két fogalmat:

5.1. Definíció $d_k(n) := k+1$ *páronként diszjunkt él nélküli n csúcsú geometriai gráf maximális élszáma.*

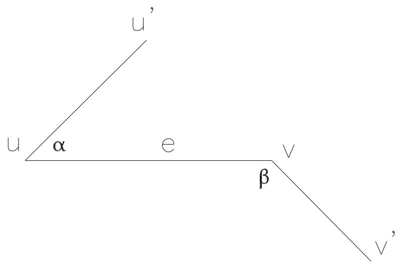
$d_{ck}(n) := k + 1$ *páronként diszjunkt él nélküli n csúcsú konvex geometriai gráf maximális élszáma.*

A fejezet során szeretnénk minél jobb alsó és felső becslést találni $d_k(n)$ illetve $d_{ck}(n)$ értékére. Látni fogjuk, hogy $d_{ck}(n)$-re meg is tudjuk adni a pontos értéket, míg $d_k(n)$-re csak egyre jobb és jobb becsléseket kapunk mind alulról mind felülről, de közöttük még mindig nagy lesz az eltérés.

Bevezetőül megmutatjuk, hogy mit mondhatunk $k = 1$ esetben.

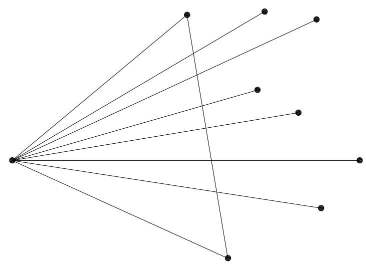
5.1. Tétel *(H. Hopf, E. Pannwitz, Erdős P.)* [?] *Egy geometriai gráfnak, amiben nincs két diszjunkt él legfeljebb n éle lehet, azaz $d_1(n) \leq n$.*

Bizonyítás. Minden csúcshoz rendeljünk hozzá, egy rá illeszkedő élet. Ha a csúcs fokszáma egy akkor nincs választásunk. Minden más csúcshoz rendeljük azt az élt, ami a csúcsnál lévő legnagyobb szöget bezáró élpár jobb (óramutató járása szerinti irányban) éle. Ha marad olyan e él, amit nem rendeltünk hozzá egyik csúcshoz sem, akkor a 15. ábrán látható helyzet áll elő. Az α és a β nem lehetnek a legnagyobb szögek u-nál illetve v-nél. Ezért mindkettő kisebb, mint Π , és az uu', vv' élek diszjunktak hiszen e egyenesének különböző oldalán vannak. Tehát nincs olyan él, amit ne rendeltünk volna hozzá egy csúcshoz sem, azaz $n \leq |E|$. □



15. ábra: e élt nem rendeltük csúcshoz

A 16. ábrán egy n csúcsú, n élű olyan gráf látható, amelyben nem létezik két diszjunkt él, azaz az alsó becslés $d_1(n)$-re szintén n azaz $d_1(n)$ pontos értéke n.



16. ábra: konstrukció n éllel

$d_2(n)$-re először N. Alon és Erdős P. mutatta meg, hogy $\leq 6n-5$ [?], amit kicsit bonyolultabban, de a $d_2(n)$ bizonyításához hasonló módszerrel W. Goddard, M. Katchalaski és D. J. Kleitman megjavított $3n+1$-re [?] majd J. Cerny belátta, hogy $d_2(n) = o(2.5n)$ [?]. A legjobb alsó korlát d_2(n)-re M. Perles-től származik mégpedig $2.5n-4$ [?], tehát J. Cerny becslése éles additív konstanstól eltekintve. Hasonló módszerrel látták be ugyancsak W. Goddard, M. Katchalaski és D. J. Kleitman, hogy d_3(n)$\leq 10n+1$, illetve alsó korlátnak, hogy $d_3(n) \geq 3.5n-10$. [?] $d_3(n)$-re később még jobb becslést adott Tóth G. és P. Valtr. Ők belátták, hogy minden $n \geq 6$-ra $4n-9 \leq d_3(n) \leq 8.5n$ [?].

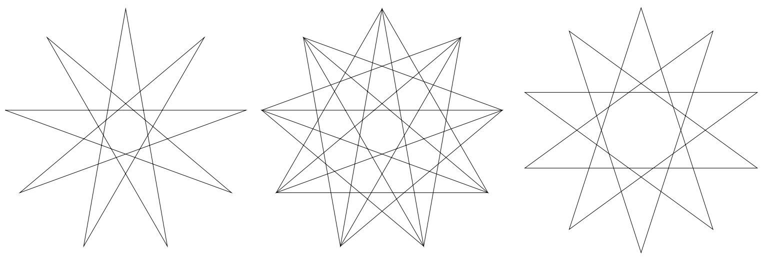
Mielőtt rátérnénk az általános eset vizsgálatára, azaz arra, hogy hány éle lehet legfeljebb egy geometriai gráfnak, amiben nincs $k+1$ diszjunkt él, nézzük meg mi a helyzet a konvex geometriai gráfokkal.

5.2. Tétel *(Y. S. Kupitz 1982)* [?] *Olyan k-ra és n-re ahol $n \geq 2k+1$ $d_{ck}(n) = kn$.*

Bizonyítás. Legyen G egy konvex geometriai gráf, melynek a csúcsait jelölje $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ körben sorba. Feltehető, hogy $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ egy szabályos

n-szöget határoznak meg. Partícionáljuk az $x_i x_j$ éleket n osztályba úgy, hogy két él akkor és csak akkor tartozzon egy osztályba, ha párhuzamosak. Vegyük észre, hogy ha G-ben nincs $k+1$ diszjunkt él, akkor minden osztályban legfeljebb k él lehet. Tehát $|E(G)| \leq kn$.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy ez a korlát éles, azaz nem lehet rajta javítani, mutatnunk kell egy kn élű $k+1$ diszjunkt él nélküli konvex geometriai gráfot. A konstrukció a következő: G csúcsai legyenek, mint az előbb, és húzzuk be az $x_i x_{i+\lfloor n/2 \rfloor + j}$ $(0 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq k)$ éleket ahol az indexeket modulo n vesszük. (lásd 17. ábra) □



17. ábra: konstrukciók ($n = 9$**,** $k = 1$**;** $n = 9$**,** $k = 2$**;** $n = 10$**,** $k = 1$

Most térjünk rá az általános eset vizsgálatára, azaz arra, hogy legfeljebb hány éle lehet egy olyan n csúcsú geometriai gráfnak, amiben nem létezik $k+1$ diszjunkt él. Ehhez azonban először idézzük fel R. P. Dilworth híres tételét, amit a bizonyítás során használni fogunk. [?]

5.3. Tétel *Legyen* $(X, \prec)$ *egy részben rendezett halmaz. Ekkor,*

(1) *ha a maximális hosszú lánc mérete* k *akkor* X *felbomlik* k *darab antiláncra;*

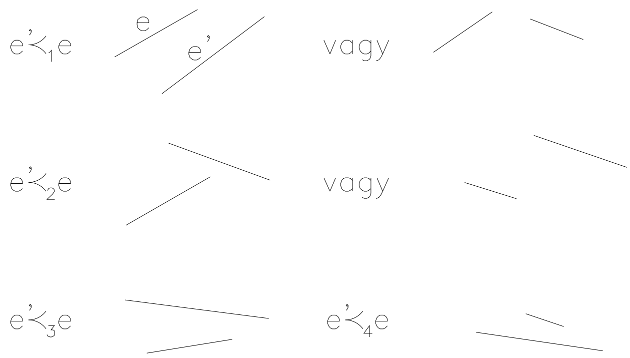
(2) *ha a maximális hosszú antilánc mérete* k *akkor* X *felbomlik* k *darab láncra.*

Ezek után rátérhetünk a kérdés első n-ben lineáris felső becslésére, melyet Pach J. és Törőcsik J. adott 1993-ban. [?]

5.4. Tétel *Minden* n, $k \geq 1$*-re* $d_k(n) \leq k^4 n$.

Bizonyítás. Legyen G egy n csúcsú geometriai gráf, amiben nincs $k+1$ páronként metsző él. Minden v csúcsára jelölje $x(v)$ és $y(v)$ a v x illetve y koordinátáját. Feltehető, hogy nincs két csúcs, aminek ugyanaz az x koordinátája, ugyanis, ha lenne akkor egy hajszálnyit elforgatjuk a síkot úgy, hogy az x koordináták különbözzenek. Egy e élről azt mondjuk, hogy e' él felett van, ha minden függőleges egyenes, ami elmetszi mindkét élt, e-t e' fölött metszi. (Így, ha a vetületeik diszjunktak, akkor mindkettő a másik felett van.) Definiáljunk négy rendezést $\prec_1$, $\prec_2$, $\prec_3$ és $\prec_4$ a diszjunkt élpárokon. Legyen e=v_1w_1 és e'=v_2w_2 két olyan él, hogy e e' felett van és $x(v_1) < x(w_1)$ és $x(v_2) < x(w_2)$. A négy rendezés legyen a következő (18. ábra):

(1) $e \prec_1 e'$ akkor és csak akkor, ha $x(v_1) < x(v_2)$ és $x(w_1) < x(w_2)$;
(2) $e \prec_2 e'$ akkor és csak akkor, ha $x(v_1) > x(v_2)$ és $x(w_1) > x(w_2)$;
(3) $e \prec_3 e'$ akkor és csak akkor, ha $x(v_1) < x(v_2)$ és $x(w_1) > x(w_2)$;
(4) $e \prec_4 e'$ akkor és csak akkor, ha $x(v_1) > x(v_2)$ és $x(w_1) < x(w_2)$.



18. ábra: A négy rendezés

A definíciókból rögtön következik, hogy

(1) $(E(G),\prec_i)$ egy részben rendezett halmaz ($1 \leq i \leq 4$);
(2) Bármely két diszjunkt él össze van hasonlítva legalább az egyik rendezés szerint.

Vegyük észre, hogy $(E(G), \prec_i)$ nem tartalmazhat $k+1$ hosszú láncot, hiszen máskülönben G-ben lenne $k+1$ páronként diszjunkt él ($1 \leq i \leq 4$). Dilworth tételének első pontjából következik, hogy $E(G)$ felbomlik legfeljebb k osztályra úgy, hogy az egy osztályban lévő élek nincsenek összehasonlítva $\prec_i$ rendezés szerint. Ugyanezt végrehajtva mind a négy rendezésre $E(G)$-t felosztjuk E_j ($1 \leq j \leq k^4$) k^4 darab osztályra úgy, hogy egy osztályon belüli élek semelyik rendezés szerint sincsenek összehasonlítva. Ezért a (2) tulajdonságból kapjuk, hogy egyik E_j osztály sem tartalmaz két diszjunkt élet. A $(V(G), E_j)$ gráfra tehát:

$$|E_j| \leq d_1(n) \leq n \qquad (5.1\ \textit{tétel})$$

$$|E(G)| = \sum_{j=1}^{k^4} |E_j| \leq k^4 n$$

$\square$

A becslés első javítása Tóth G.-tól és P. Valtr-tól származik. [?] Az úgynevezett cikk-cakk utakat ők kezdték el vizsgálni, amik később is fontosak lesznek számunkra.

5.5. Tétel *Minden n, $k \geq 1$-re $d_k(n) \leq k^3(n+1)$.*

Bizonyítás. Ez a bizonyítás is az előzőekben bevezetett négy rendezésen alapszik. Legyen $G = (V, E)$ egy geometriai gráf, amiben nincs $k+1$ diszjunkt él. Jelölje $x(v)$ a v csúcs x koordinátáját, és tegyük fel, hogy nincs két csúcs, aminek ugyanaz az x koordinátája. (Kicsit rotálva a csúcsokat ez könnyen elérhető.) Dilworth tételből tudjuk, hogy az élek lefedhetők k antilánccal $\prec_1$ rendezés szerint. Legyen E_1 a leghosszabb antilánc, amiről most tudjuk, hogy $|E_1| \geq |E|/k$. Használva újra Dilworth tételét E_1-en az $\prec_2$ rendezésre itt a legnagyobb antilánc E_2 mérete $\geq |E_1|/k \geq |E|/k^2$. Próbáljuk megbecsülni $|E_2|$ méretét felülről, aminek a segítségével majd kapunk egy felső becslést az élek számára.

Jelölje $\Pi(e)$ ez e élnek az x tengelyre való merőleges vetítésével kapott szakaszt. Mivel $|E_2|$ egy antilánc $\prec_1$ és $\prec_2$ szerint is, ezért minden $e, e' \in E_2$-re $\Pi(e) \cap \Pi(e') \neq \emptyset$. Így $\bigcap_{e \in E_2} \Pi(e) \neq \emptyset$, azaz létezik egy l függőleges egyenes, ami metszi E_2 minden élét.

Legyen $\vec{G_2} = (V, \vec{E_2})$ az az irányított geometriai gráf, amit (V, E_2)-ből kapunk úgy, hogy minden $e = v_1 v_2$ E_2-beli élet mindkét irányba megirányítva két éllé bontunk, azaz $v_1 \vec{v_2}$ és $v_2 \vec{v_1}$ élekkel helyettesítjük.

Azt mondjuk, hogy $e_2 = v_0 \vec{v_1} \in G_2$ egy cakkja $e_1 = v_1 \vec{v_2} \in G_2$-nek, ha:

(1) $\Pi(e_1) \cap \Pi(e_2)$ hossza pozitív;

(2) minden $z \in (\Pi(e_1) \cap \Pi(e_2)) \setminus \{\Pi(v_1)\}$-re a függőleges egyenes z-n át e_2-t e_1 alatt metszi, és e_1 és e_2 között nem metsz v_1-ből kiinduló élt.

Vegyük észre, hogy G_2 minden éléhez legfeljebb egy cakk van. Egy $e_1 e_2 \ldots e_r$ irányított út G_2-ben cikk-cakk út, ha e_{i+1} egy cakkja e_i-nek minden $i = 1, 2, \ldots, r-1$-re.

Azt állítjuk, hogy egy cikk-cakk útnak $\vec{G_2}$-ben legfeljebb $2k$ éle van, illetve, hogy $\vec{G_2}$-nek legfeljebb $n+1$ maximális (nem növelhető) cikk-cakk útja van.

Ha ezeket belátnánk, akkor a tétel bizonyításával is kész lennénk, hiszen ebből

$$|\vec{E}_2| \leq 2k(n+1)$$

ahonnan

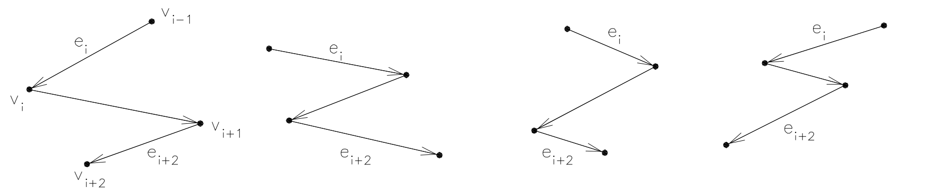
$$|E| \leq k^2|E_2| = k^2|\vec{E}_2|/2 \leq k^3(n+1).$$

Tehát már csak az van hátra, hogy a fenti két állítást belássuk.

5.1. Állítás *Egy cikk-cakk útnak $\vec{G}_2$-ben legfeljebb $2k$ éle van.*

Legyen $P = e_1e_2\dots e_r$ egy cikk-cakk út $\vec{G}_2$-ben, és legyen $e_i = \overrightarrow{v_{i-1}v_i}$ minden $i = 1, 2, \dots, r$-re.

Vegyük észre, hogy az $x(v_0), x(v_2), \dots$ és az $x(v_1), x(v_3), \dots$ sorozat közül az egyik növekvő a másik csökkenő. Ha ugyanis lenne olyan i, amire $x(v_{i-1}) < x(v_{i+1})$ és $x(v_i) < x(v_{i+2})$ vagy $x(v_{i-1}) > x(v_{i+1})$ és $x(v_i) > x(v_{i+2})$ akkor az e_i és az e_{i+2} össze lenne hasonlítva $\prec_1$ vagy $\prec_2$ szerint, ami nem lehet, hiszen E_2 antilánc rájuk nézve. (19. ábra)



19. ábra: $e_{i+2} \prec_1 e_i$ **vagy** $e_{i+2} \prec_2 e_i$

Ezért P hossza legfeljebb $2k$ hiszen ha több, akkor $e_1, e_3, \dots, e_{2k+1}$ $k+1$ diszjunkt él lenne.

5.2. Állítás *$\vec{G}_2$-nek legfeljebb $n+1$ maximális (nem növelhető) cikk-cakk útja van.*

Belátjuk, hogy egy csúcsban legfeljebb egy maximális cikk-cakk út végződik, leszámítva legfeljebb egyet, amiben előfordulhat, hogy kettő végződik.

Legyen $v \in V$ egy olyan csúcs, ami l egyenes jobb oldalán fekszik. Tegyük fel, hogy van két maximális cikk-cakk út P_1 és P_2 melyek v-ben végződnek. Ekkor azonban az egyiket mégis lehetne tovább folytatni. Tegyük fel ugyanis, hogy P_1 utolsó élének meredeksége kisebb, mint P_2 utolsó élének meredeksége, akkor P_2 utolsó éléhez van cakk, azaz P_2 nem maximális. Ez nyilván minden nem l-en fekvő pontra elmondható. Egy l-re eső pontban hasonlóan az előzőhöz legfeljebb két maximális cikk-cakk út végződhet. (Egy "jobbról" és egy "balról".) Mivel feltettük, hogy minden pont x koordinátája különböző, ezért l-re eső pontból legfeljebb egy van, amivel az állítást beláttuk. $\square$

Most nézzük meg a becslés egy továbbfejlesztését, amit mi is tovább fogunk még javítani. k^2n nagyságrendű becslést először Tóth G. adott. [?] Lényegében az ő bizonyítását írta le S. Felsner könyvében. [?]

5.6. Tétel *Minden n, $k \geq 1$-re $d_k(n) \leq 256k^2n$.*

Bizonyítás. Legyen G egy n csúcsú gráf, amiben nincs $k+1$ diszjunkt él. Jelölje $x(v)$ és $y(v)$ a v csúcs x illetve y koordinátáját. Tegyük fel, hogy nincs két csúcs, aminek azonos az x koordinátája. Most is tekintsük a négy rendezést az éleken.

Minden v_i csúcsra osszuk a v_i-re illeszkedő éleket két osztályba. v_i *bal él*ei legyenek azok a v_iv_j élek melyekre $x(v_j) < x(v_i)$, a *jobb élek* meg, amikre $x(v_i) < x(v_j)$. A *bal fok* l_i a v_i-re illeszkedő bal élek száma, a *jobb fok* r_i meg a v_i-re illeszkedő jobb élek száma.

Minden v csúcs jobb élein definiáljunk két rendezést. $R_s(v)$ legyen a meredekség csökkenése szerinti rendezés, $R_x(v)$ pedig az x koordináta növekedése szerinti rendezés. Ekkor $R_s(v) \cap R_x(v)$ egy részben rendezés.

A következő lemma a Greene-Kleitman-Fomin tétel egy következménye. [?] A későbbiekben részletesebben kitérünk erre a tételre, mert a további javításokhoz szükségünk lesz rá, hogy pontosabban megértsük. Egyelőre azonban csak kimondjuk, és használni fogjuk.

5.1. Lemma *Legyen $P = (X, <)$ egy részben rendezés m elemen. Ekkor létezik C legfeljebb $\sqrt{m}$ darab lánc osztálya és A legfeljebb $\sqrt{m}$ darab antilánc osztálya, hogy $C \cup A$ lefedi P összes elemét.*

A tételből tehát azt kapjuk, hogy egy v csúcs jobb élei lefedhetők legfeljebb $\sqrt{r_v}$ lánccal és $\sqrt{r_v}$ antilánccal. Legyen $C^r(v)$ azon élek halmaza, amik lánccal fedettek és $A^r(v)$, amik antilánccal. Az $\bigcup_v C^r(v)$ és $\bigcup_v A^r(v)$ közül az egyik tartalmazza az élek felét. Legyen G' az a gráf ami G megszorítása a nagyobbik osztálybeli élekre, tehát $|E(G')| \geq |E(G)|/2$. Egy G'-beli él *jobb blokk*ja legyen azon élek halmaza, melyek azt a láncot (vagy antiláncot) alkotják, amelyikbe tartozi. Egy jobb blokkban a rendezés legyen a meredekség csökkenése szerint.

Ezzel a rendezéssel egy él jobb blokkja x koordináta szerint növekvő (ha a láncok vannak G'-ben) vagy x koordináta szerint csökkenő (ha az antiláncok vannak G'-ben) sorozatot alkotnak.

Most lényegében ugyanezt hajtsuk végre G'-ben a bal élekre. Jelölje l'_v v csúcs bal fokát G'-ben. Nyilván $l'_v \leq l_v$. A jobb élekhez hasonlóan minden v csúcs G'-beli bal élein definiáljunk két rendezést. $L_s(v)$ legyen a meredekség növekedése szerinti rendezés, $L_x(v)$ pedig az x koordináta növekedése szerinti rendezés. Az előzőekhez hasonlóan véve az $L_s(v) \cap L_x(v)$ részben rendezést egy v csúcs G'-beli bal élei lefedhetők legfeljebb $\sqrt{l'_v}$ lánccal és $\sqrt{l'_v}$ antilánccal. Legyen $C^l(v)$ azon élek halmaza, amik lánccal fedettek és $A^l(v)$, amik antilánccal. Legyen G'' a $\bigcup_v C^l(v)$ és $\bigcup_v A^l(v)$ közül a nagyobbik osztály éleire való megszorítással kapott gráf. Ekkor $|E(G'')| \geq |E(G)|/4$. Egy G''-beli él *bal blokk*ja legyen azon élek halmaza, melyek azt a láncot (vagy antiláncot) alkotják, amelyikbe tartozik. Egy bal blokkban a rendezés legyen a meredekség növekvése szerint. Ezzel a rendezéssel egy él bal blokkja x koordináta szerint növekvő (ha a láncok vannak G''-ben) vagy x koordináta szerint csökkenő (ha az antiláncok vannak G''-ben) sorozatot alkotnak. Egy G'-beli jobb blokk megszorítása G''-re egy jobb blokk G''-ben.

Most itt is definiáljuk a cakkokat, csak most megkülönböztetünk jobb és bal cakkot. Két közös végpontú él $e = uv$ és $e' = vw$ *jobb-cakk*ot alkot, ha e' rögtön e után jön v jobb blokkjában. Hasonlóan $e = uv$ és $e' = vw$ élek *bal-cakk*ot alkotnak, ha e' rögtön e után jön v bal blokkjában. Egy $e_1, e_2, \ldots, e_m$ út G''-ben egy *cikk-cakk* út, ha az egymást követő élek felváltva egy jobb- és bal-cakkot alkotnak.

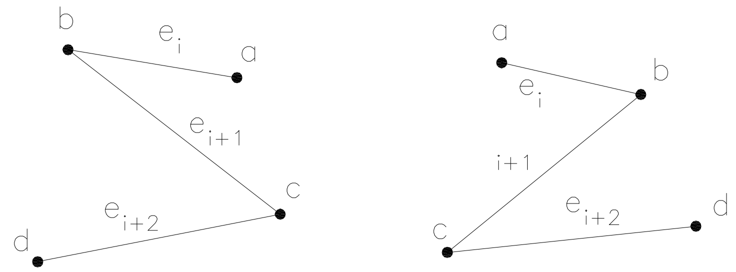
Hasonlóan az előző bizonyításhoz megpróbálunk felső becslést adni a cikk-cakk utak hosszára illetve a maximális cikk-cakk utak számára.

5.3. Állítás *Minden cikk-cakk út G''-ben legfeljebb $2k$ élű.*

Négy eset van aszerint, hogy a jobb/bal blokkok x koordináta szerint növekvők vagy csökkenők. A négy eset a négy rendezésnek felel meg, és mi most csak egy esetet nézünk meg, a többit eset hasonlóan kezelhető.

Tegyük fel, hogy G' (és így G'') jobb blokkjai x koordináta szerint növekvők (azaz a jobb élekre láncok fedtek többet), és G'' bal blokkjai x koordináta szerint csökkenőek (azaz a bal élekre az antiláncok fedtek többet). Legyen $e_1, e_2, \ldots, e_{2k+1}$ egy $2k+1$ hosszú cikk-cakk út. Azt állítjuk, hogy ekkor $e_{i+2} \prec_3$

e_i minden $1 \leq i \leq 2k-1$-re. Nézzük e_i, e_{i+1}, e_{i+2} éleket, amik egy cikk-cakk-ot alkotnak, és legyenek a cikk-cakk csúcsai a, b, c, d. e_i és e_{i+1} egy jobb- vagy egy bal-cakk b csúcsból. (20. ábra)



20. ábra: cikk-cakkok

(1) Ha e_i és e_{i+1} egy jobb-cakk, akkor $x(a) < x(c)$, és mivel e_{i+1} és e_{i+2} egy bal-cakk c csúcsnál ezért $x(b) > x(d)$. Ebből következik, hogy e_{i+2} e_i alatt van, amiből $e_{i+2} \prec_3 e_i$.

(2) e_i és e_{i+1} egy bal-cakk, akkor $x(a) > x(c)$, és mivel e_{i+1} és e_{i+2} egy jobb-cakk c csúcsnál ezért $x(b) < x(d)$. Ebből következik, hogy e_{i+2} e_i alatt van, amiből $e_{i+2} \prec_3 e_i$.

Tehát azt kaptuk, hogy egy $2k+1$ hosszú cikk-cakk út tartalmaz egy $\prec_3$ szerinti $k+1$ hosszú láncot, ami ellentmondás, hiszen a lánc élei páronként diszjunktak.

5.4. Állítás *Jelölje Z a maximális (nem bővíthető) G''-beli cikk-cakk utak számát. Ekkor $Z \leq 2\sqrt{|E(G)|n}$.*

Legyen $e_1, e_2, \ldots, e_m$ egy maximális cikk-cakk út. Az első eleme v az a csúcs, ami illeszkedik e_1-re, de nem illeszkedik e_2-re. Nézzük meg, hány maximális cikk-cakk útnak lehet ez első eleme v. Nyilván legfeljebb annyi lehet, ahány blokk illeszkedik v-re, ami pedig legfeljebb $\sqrt{r_v}$ jobb blokk és $\sqrt{l'_v} \leq \sqrt{l_v}$ bal blokk. Innen már csak számolnunk kell. A számoláshoz egyrészt használni fogjuk a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget miszerint $(\sum_{i=1}^n a_i)^2 \leq n(\sum_{i=1}^n a_i^2)$, és azt, hogy $\sum_{i=1}^n (r_i + l_i) = 2|E(G)|$.

$$Z \leq \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{r_1}+\sqrt{l_i}) \leq \sqrt{n \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{r_i} + \sqrt{l_i})^2} \leq \sqrt{n \sum_{i=1}^{n} 2(r_i + l_i)} = \sqrt{4n|E(G)|}$$

Most már csak össze kell raknunk eddigi eredményeinket.

G'' minden éle benne van legalább egy maximális cikk-cakk útban és minden maximális cikk-cakk út hossza legfeljebb $2k$ amiből $|E(G'')| \leq 2kZ$. Másrészt

$|E(G'')| \geq |E(G)|/4$. Ezekből és a Z felső becsléséből kapjuk, hogy $|E(G)| \leq 256k^2n$. $\square$

Ezt a becslést javítjuk tovább több lépésben, több különböző ötletet bevetve. A cél, hogy a 256 helyett tudjunk valami jobbat mondani.

1. Áttérés szeparált páros gráfokra

Az első ötlet, hogy vizsgáljuk meg, mit mondhatunk szeparált páros gráfokra, majd valahogy vezessük vissza általános gráfokra az eredményt. Szeparált páros gráfnak nevezünk egy lerajzolt páros gráfot, ahol a két osztály elemei egyenessel elválaszthatók egymástól. Ebben az esetben lesz egy baloldali és egy jobboldali osztályunk.

Nézzük meg, mit tudunk mondani szeparált páros gráfokra. Ekkor minden csúcsnak vagy csak jobb élei vagy csak bal élei vannak. Legyen n_1 darab csúcs a páros gráf baloldali osztályában (ezeknek a pontoknak csak jobb élei vannak), és n_2 darab csúcs a jobboldali osztályban (nekik meg csak bal élei vannak), ahol $n_1 + n_2 = n$. Ekkor G''-ben a maximális cikk-cakk utak száma:

$$Z \leq \sum_{i=1}^{n_1} \sqrt{r_i} + \sum_{i=1}^{n_2} \sqrt{l_i} \leq \sqrt{n_1 \sum_{i=1}^{n_1} r_i} + \sqrt{n_2 \sum_{i=1}^{n_2} l_i} = \sqrt{n_1 E(G)} + \sqrt{n_2 E(G)}$$
$$\leq \sqrt{2nE(G)}$$

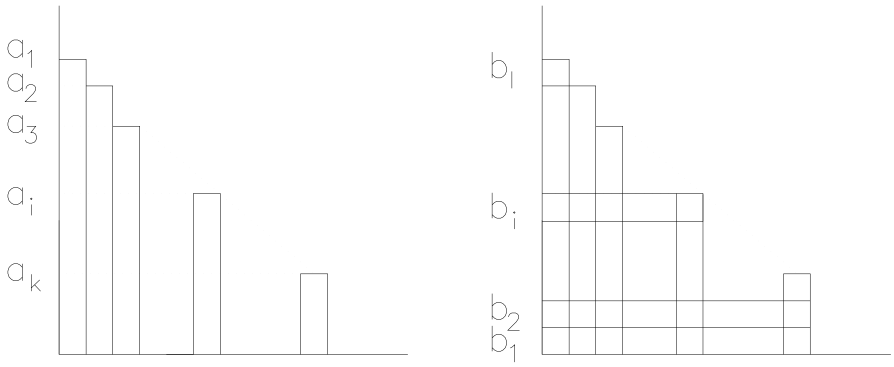
ahol a második egyenlőtlenségnél a Chauchy-Schwarz egyenlőtlenséget használtuk. Ezt és az előző tétel bizonyítását használva kapjuk a következőt.

5.5. Állítás *Szeparált páros n csúcsú topologikus gráfnak, amiben nincs $k+1$ diszjunkt él legfeljebb $128k^2n$ éle van.*

Azt, hogy hogyan tudjuk visszavezetni a szeparált páros gráfok becslését az összes gráfra a 4. pontban vizsgáljuk, amikor már megkaptuk az általunk elért legjobb felső becslést szeparált páros gráfokra. Mostantól tehát csak szeparált páros gráfokkal foglalkozunk.

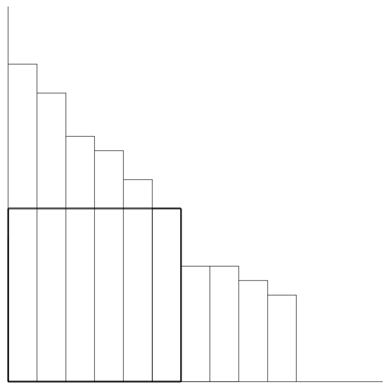
2. Hány lánccal hány élet fedünk

A bizonyítás során említett Greene-Kleitman-Fomin tétel segítségével javítjuk most tovább a becslésünket. [?] A tétel a következőt mondja. Legyen P egy m elemű részben rendezett halmaz. Jelölje a_1 a leghosszabb lánc méretét. Legyen a_2 az a legnagyobb szám amire P-ben létezik két lánc, amelyek együtt lefedik $a_1 + a_2$ darab elemét P-nek. Hasonlóan minden $i \geq 2$-re legyen a_i az a legnagyobb szám amire P-ben van i lánc, amelyek lefednek $a_1 + a_2 + \ldots + a_i$ elemet, amíg a_i pozitív. Ekkor $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k$ ahol a_k az utolsó a_i ami definiálva volt. Rajzoljuk ezeket egy diagramba az 21. ábrán látható módon. Legyen b_i az i. sor „oszlopa". (21. ábra) Ekkor minden $j \leq k$-ra $b_1 + b_2 + \ldots + b_j$ pont annyi amennyit P-ben j antilánc legfeljebb le tud fedni.



21. ábra: a_i oszlopok és b_i sorok elhelyezkedése

Ebből könnyen következik a bizonyítás során használt lemma. Nézzük ugyanis a maximális oldalú diagramba írható négyzetet, azaz egy olyan négyzetet, aminek bal alsó csúcsa épp a diagram bal alsó csúcsában van, és az egész benne van a diagramban. (22. ábra)



22. ábra: maximális négyzet

Legyen v a négyzet oldala. v biztos, hogy $\leq \sqrt{m}$ hiszen összesen m elemű P. Így $a_1, a_2, \ldots, a_v$-hoz tartozó v lánc és $b_1, b_2, \ldots, b_v$-hez tartózó v antilánc lefedi P összes elemét, hiszen minden antilánc legfeljebb v darab olyan elemet fed, amit kiválasztott lánc is fed.

Most a részben rendezett halmazok elemei egy csúcs jobb vagy bal szomszédjai, tehát a gráf élei. Az előzőekben láttuk, hogy $\sqrt{r_i}$ ($\sqrt{l_i}$) lánc és $\sqrt{r_i}$ ($\sqrt{l_i}$) antilánc lefedi az összes élét egy csúcs jobb (bal) éleinek, ahonnan $\sqrt{r_i}$ ($\sqrt{l_i}$) lánc vagy $\sqrt{r_i}$ ($\sqrt{l_i}$) antilánc lefedte biztosan az összes él felét. Érezzük, hogy ez egy kicsit pazarlás egyrészt azért, mert nekünk nem kell, hogy az összes élet lefedje valami (lánc vagy antilánc), csak azt szeretnénk, hogy minél kevesebb lánc vagy antilánc „aránylag" minél több élet fedjen le. Kérdés, hogy itt az aránylag mit jelent. Másrészt vannak olyan élek, amiket lánc is és antilánc is fedhet, tehát ezek biztosan bekerülnek a leszűkített gráfba, úgyhogy amikor azt számoljuk, hogy valahány lánc és antilánc hány élt fed le, az éleket számoljuk „multiplicitással", azaz, ha lánc is és antilánc is fedte, akkor kétszer.

Vizsgáljuk először, hogy mit is jelent az „arányaiban" precízen. Tegyük fel, hogy pr_i (pl_i) él fedhető le $q\sqrt{r_i}$ ($q\sqrt{l_i}$)lánccal és $q\sqrt{r_i}$ ($q\sqrt{l_i}$) antilánccal. Ekkor ezzel számolva azt kapjuk, hogy

$$Z \leq \sum_{i=1}^{n/2} q(\sqrt{r_i} + \sqrt{l_i}) = q \sum_{i=1}^{n/2} (\sqrt{r_i} + \sqrt{l_i}) \leq q\sqrt{2n|G(E)|},$$

másrészt

$$|E(G'')| \geq p|E(G')|/2 \geq p^2|E(G)|/4$$

Ebből azt kapjuk, hogy $|E(G)| \leq \frac{q^2}{p^4} 128k^2 n$. Tehát az a célunk, hogy a $\frac{q}{p^2}$ legyen a lehető legkisebb.

Szeretnénk egy adott q-ra meghatározni egy olyan maximális p-t amelyre igaz, hogy tetszőleges m elemű részben rendezett halmazban $q\sqrt{m}$ lánccal és $q\sqrt{m}$ antilánccal összesen legalább pm elemet le tudunk fedni (az elemeket multiplicitással számolva). Csak $p \leq 1$-et érdemes vizsgálnunk, hiszen például előfordulhat, hogy egy részben rendezett halmaz egy láncból vagy antiláncból áll. (A mi esetünkben ez azt jelenti, hogy egy csúcs jobb vagy bal élei egyetlen láncból állnak.) Ekkor egy lánc és egy antilánc lefedi az összes elemet, de ahhoz, hogy valamely $p > 1$-re fedjünk pm elemet $q\sqrt{m}$ lánccal és $q\sqrt{m}$ antilánccal q-t $(1-p)$-szeresére kell növelnünk.

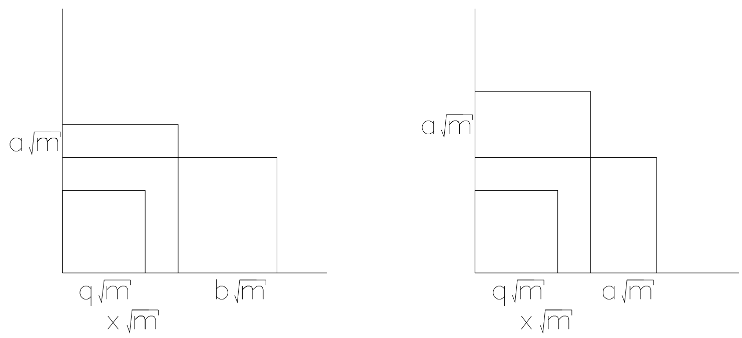
Nekünk mindig a lehető legrosszabb esetet kell vizsgálnunk, vagyis azt, hogy $q\sqrt{m}$ lánc és $q\sqrt{m}$ antilánc a lehető legkevesebb élet fedjen le.

1.eset: A diagramban a maximális négyzet oldala $x\sqrt{m} \leq q\sqrt{m}$.

Ekkor szerencsénk van, hiszen így a $q\sqrt{m}$ lánc és $q\sqrt{m}$ antilánc lefed legalább m elemet.

2.eset: A diagramban a maximális négyzet oldala $x\sqrt{m} \geq q\sqrt{m}$.

Könnyen látszik, hogy mivel a diagramban az oszlopok magassága csökken, akkor fed le a $q\sqrt{m}$ lánc és $q\sqrt{m}$ antilánc legkevesebb elemet, ha az első $x\sqrt{m}$ oszlop azonos méretű $((x+a)\sqrt{m})$, és az első $x\sqrt{m}$ sor is azonos méretű $((x+b)\sqrt{m})$ (23.a ábra) Vegyük észre, hogy feltehetjük, hogy $a = b$, hiszen ez nem változtat a lefedett elemek számán. (23.b ábra)



23.a ábra: nem szimmetrikus diagram, 23.b ábra: szimmetrikus diagram

A diagramból könnyen leolvashatjuk, hogy ekkor $(\sqrt{m}(x+a))^2 - (a\sqrt{m})^2 = m$ azaz $a = \frac{1-x^2}{2x}$. Másrészt $q\sqrt{m}(2(x\sqrt{m} + a\sqrt{m})) \geq pm$. Ezt átrendezve, és behelyettesítve az előbb megkapott a értéket $qx^2 - px + q \geq 0$ kell, hogy teljesüljön. Ez nyilván igaz, ha $2q = p$ hiszen ekkor azt kapjuk, hogy $q(x-1)^2 \geq 0$ ami minden $q \geq 0$-ra teljesül.

A célunk az volt, hogy minimaizáljuk q/p^2-et.

$$\min_{p \leq 1, q} q/p^2 = \min_{q \leq 1/2} q/4q^2 = 1/2$$

Az előzőekben láttuk, hogy tetszőleges m elemű részben rendezett halmazban $\sqrt{m}/2$ lánccal és $\sqrt{m}/2$ antilánccal le tudunk fedni m elemet multiplicitással számolva. Ebből és az előző becslésekből kapjuk a következőt:

5.6. Állítás *Szeparált páros n csúcsú topologikus gráfnak, amiben nincs $k+1$ diszjunkt él legfeljebb $32k^2n$ éle van.*

3. Pontosan hány élet fedünk

Az előzőekben láttuk, hogy $\sqrt{r_i}/2$ ($\sqrt{l_i}/2$) lánccal és $\sqrt{r_i}/2$ ($\sqrt{l_i}/2$) antilánccal lefedtük egy csúcs jobb (bal) szomszédjuk r_i (l_i) élét multiplicitással számolva, azaz vagy a láncokban szereplő éleket vagy az antiláncokban szereplőket választva G éleinek legalább felét bevettük G'-be (illetve G' éleinek legalább a felét G''-be). Előfordulhat azonban, hogy olyan szerencsénk van, hogy ennél jóval több éle van G'-nek. Ha viszont az az eset áll fenn, hogy csak az élek felét, vagy kicsit több mint az élek felét vettük be G'-be akkor viszont ott tudunk javítani, hogy a bal élek száma G'-ben kevés, azaz $\sum_{i=1}^{n/2} l'_i$ $|E(G)|$-nél jóval kisebb. (l'_i a G'-ben az i csúcsra illeszkedő balélek száma)

Vizsgáljuk meg, hogy ha $|E(G')| = x|E(G)|$ akkor hogyan változik a becslésünk. Vegyük észre, hogy az eddigi becslésekben mindegy volt, hogy előbb a jobb éleket vizsgáljuk és utána a bal éleket vagy fordítva, most azonban attól függően válasszuk, hogy melyiket vizsgáljuk először, hogy a szeparált páros gráf jobb- vagy baloldali osztályában van több csúcs. Vizsgáljuk először a jobb (bal) éleket, ha a jobboldali (baloldali) osztályban van több csúcs. Tegyük most fel, hogy a jobboldali osztályban van több csúcs.

Egyrészt $\sum_{i=1}^{n_2} l'_i = x|E(G)|$ ahol $n_2 \geq 1/2$ így

$$Z \leq \sum_{i=1}^{n_1} \sqrt{r_i} + \sum_{i=1}^{n_2} \sqrt{l'_i} \leq \sqrt{n_1 \sum_{i=1}^{n_1} r_i} + \sqrt{n_2 \sum_{i=1}^{n_2} l'_i}$$

$$\leq \sqrt{n_1|G(E)|} + \sqrt{n_2 x|G(E)|} \leq \sqrt{(1+x)n|G(E)|}$$

Ahol az utolsó egyenlőtlenséget az alábbiakból kapjuk.

Osszunk le $\sqrt{|E(G)|}$-vel és emeljünk négyzetre. Ekkor a jobboldalt az alábbi módon becsülhetjük felülről:

$$n_1 + xn_2 + 2\sqrt{xn_1n_2} \leq n/2 + n/2 \cdot x + n\sqrt{x}$$

Azt kell tehát belátnunk, hogy

$$n/2 + n/2 \cdot x + n\sqrt{x} \leq n + nx$$

Ezt továbbszámolva azt kapjuk, hogy $0 \leq (1-x)^2$ ami teljesül minden x-re.

Ezért a végső képletben 2-vel szorzás helyett $(1+x)$-vel való szorzás lesz.

Másrészt $|E(G')| = |E(G)|x/2$ és így $|E(G'')| \geq |E(G)|x \cdot 1/2$. Ezért a végső képletben 16-tal való szorzás helyett $4/x^2$-tel való szorzás lesz.

Összerakva $|E(G)| \leq 32k^2n(\frac{4/x^2}{16})(\frac{1+x}{2}) = 32k^2n\frac{1+x}{8x^2}$. Mivel mi nem tudjuk x értékét ezért a legrosszabb esetet kell megvizsgálni ahol $1/2 \leq x \leq 1$. Deriválva az $(1+x)/8x^2$ függvényt azt kapjuk, hogy maximuma legfeljebb az 1/2-ben és az 1-ben lehet. $x = 1/2$-re $|E(X)| \leq 32k^2n{\cdot}0.75$ $x = 1$-re $|E(G)| \leq 32k^2n{\cdot}0.25$. Tehát a legrosszabb eset $x = 1/2$-nél van. A most kapott eredmény és az eddigiek a következőt adják:

5.7. Tétel *Szeparált páros n csúcsú topologikus gráfnak, amiben nincs $k+1$ diszjunkt él legfeljebb $24k^2n$ éle van.*

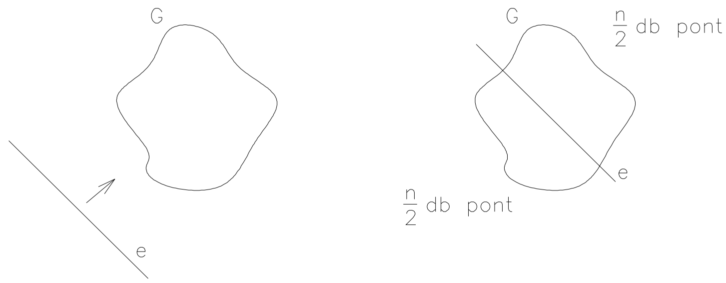
4. Becslés visszavezetése általános gráfokra

Jelöljük $f(k,n)$-nel az élekre vonatkozó felső becslés értékét, ahol k jelöli azt, hogy nincs a gráfban $k+1$ diszjunk él, n pedig a gráf csúcsainak száma. Legyen $\tilde{f}(k,n)$ a szeparált páros gráfokra vonatkozó értéke $f(k,n)$-nek (az általunk elért érték $24k^2n$). Osszuk a gráf csúcsait két osztályba úgy, hogy az egyikben $\leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ diszjunkt él legyen a másikban $\leq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ diszjunkt él legyen. Ez elérhető, hiszen nincs a gráfban $k+1$ diszjunkt él. A két osztály csúcsszáma legyen n_1 illetve n_2. Ekkor, ha

$$f(k,n) \geq \tilde{f}(k,n) + f\left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, n_1\right) + f\left(\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil, n_2\right)$$

akkor $f(k,n)$ egy jó felső becslés lesz az élek számára. $f(1,n)$-et tudjuk minden n-re és és $f(k,1)$-et is minden k-ra, ezért minden k-ra és n-re meg fogjuk tudni határozni.

Azt állítjuk, hogy ráadásul meg tudjuk úgy választania kettéosztást, hogy az egyik oldalon $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ a másikon $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ csúcs legyen. (Itt azt már nem tudjuk önkényesen megválasztani, hogy melyik oldalhoz melyik csúcsszám kerüljön.) Ha n páratlan, akkor vegyünk még egy csúcsot a gráfhoz, amit ne kössünk össze egyik csúccsal sem. Minden irányból „toljunk be” egy egyenest úgy, hogy az egyenes mindkét oldalán $n/2$ pont legyen. (24. ábra)



24. ábra: egyenes betolása a csúcshalmazba adott irányból

Ekkor mindkét oldalon van valahány diszjunkt él, amik a Π-vel elforgatott iránynál pont fordítva lesznek. (Ha eredetileg, azon az oldalt ahonnan toltuk az egyenest volt a darab diszjunkt él, a másik oldalt b, akkor a Π-vel elforgatott iránynál ahonnan toltuk azon az oldalt lesz b darab diszjunkt és, a másik oldalt a.) Ha veszünk egy irányt, és egy kicsit forgatjuk, akkor egy ideig a csúcshalmaz kettéosztása nem változik, majd valamikor bejön egy új pont és kimegy egy régi mindkét halmazból. Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik ekkor a diszjunkt élek száma a két oldalt. Ha bejön egy új pont akkor ez vagy nem változtat vagy eggyel növeli a diszjunkt élek számát, ha kimegy egy pont a halmazból, akkor ez vagy nem változtat vagy csökkenti a diszjunkt élek számát. Azaz, ha az irányt változtatva változik a pontok kettéosztása, akkor mindkét oldalon a diszjunkt élek maximális száma legfeljebb eggyel változik. Az előzőekből következik, hogy lesz olyan irány, ahol az egyik oldalt $\leq \lceil \frac{k}{2} \rceil$ a másikon $\leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ darab diszjunkt él lesz. Ha n páratlan volt, akkor az ennél az irányú kettéosztásnál hagyjuk ki a bevett új pontot, amivel a diszjunkt élek száma nem változik a két oldalt. (csak a csúcsok száma lesz $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ illetve $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ a két oldalt.)

Válasszunk tehát olyan kettéosztást ahol n_1 és n_2 közül az egyik $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ a másik $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Az $f(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor, n_1) + f(\lceil \frac{k}{2} \rceil, n_2)$ akkor lesz a legnagyobb, ha $n_1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ és $n_2 = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Tehát összességében, ha

$$f(k,n) \geq \tilde{f}(k,n) + f\left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + f\left(\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$$

és a kezdeti feltételek teljesülnek $f(k,n)$-re akkor $f(k,n)$ biztosan felső becslés az élek számára.

Érdemes megnézni, mit tudunk mondani, ha k is és n is páros. $f(k,n)$ legyen ck^2n, és próbáljuk meghatározni c-t.

$$ck^2n \geq 24k^2n + 2\left[c(k/2)^2(n/2)\right]$$

kell, hogy teljesüljön, amit $c = 32$ kielégít.

Ha k vagy n páratlan, akkor egy kis plusz hibataggal elérhető, hogy k^2n együtthatója ne változzon.

5.8. Tétel *Egy n csúcsú topologikus gráfnak, amiben nincs $k+1$ diszjunkt él legfeljebb $32k^2n + 8kn$ éle van.*

Ebben az esetben a következő egyenlőtlenég kell, hogy teljesüljön:

$$32k^2n + 8kn \geq 24k^2n + 32\left(\frac{k+1}{2}\right)^2\frac{n+1}{2} + 8\frac{k+1}{2}\cdot\frac{n+1}{2} +$$

$$32\left(\frac{k-1}{2}\right)^2\frac{n-1}{2} + 8\frac{k-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2},$$

ami kis számolással belátható, hogy igaz, ha $k \geq 4$ (ekkor $n \geq 10$ feltehető). $k = 1, 2, 3$-ra korábban írtunk jobb becslést.

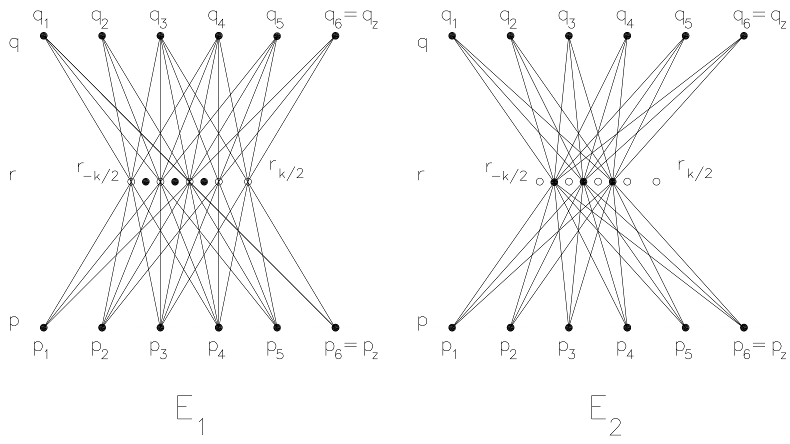
Élszámra vonatkozó alsó becslésre a legjobb konstrukció Tóth G.-tól és P. Valtr-tól származik. [?] Az egyszerűség kedvéért tegyük most fel, hogy k páros és n páratlan. Legyen $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_z\}$ pontok egyenlő távolságra egy p vízszintes egyenesen ahol $z = (n-k+1)/2$. Legyen $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_z\}$ a P tükörképe úgy, hogy q_i-nek p_i felel meg és $p_1p_zq_zq_1$ egy négyzet, és q a Q-t tartalmazó egyenes. Jelölje r azt a p-vel és q-val párhuzamos egyenest, ami egyenlő távolságra van p-től és q-tól.

Kössük össze p_i-t q_j-vel, ha $-k/2 \leq i + j - (z+1) \leq k/2$, és ezeket az éleket jelölje E_1. (25. ábra)E_1 élei elmetszik r-et $k+1$ pontban, ezek $r_{-k/2}, r_{-k/2+1}, \ldots, r_{k/2}$ ahol r_t azon p_iq_j élen van amire $i + j - (z+1) = t$. Legyen R az r_tr_{t+1} $t = -k/2, -k/2+1, \ldots, k/2-2$ felezőpontjainak halmaza, és kössünk össze minden R-beli pontot minden P-belivel és Q-belivel, és jelölje ezt E_2. (25. ábra)

Megmutatjuk, hogy $G = (P \cup Q \cup R, E - 1 \cup E_2)$-ben nincs $k+1$ diszjunkt él, azaz megad egy alsó korlátot.

A csúcsok száma $z + z + (k-1) = n$, az élek száma pedig

$$|E_1| + |E_2| = \frac{(n-k+1)(k+1) - 4(1+2+\ldots+k/2)}{2} + (n-k+1)(k-1) =$$



25. ábra: E_1 és E_2 ahol $k = 4$, $n = 15$, $z = 6$

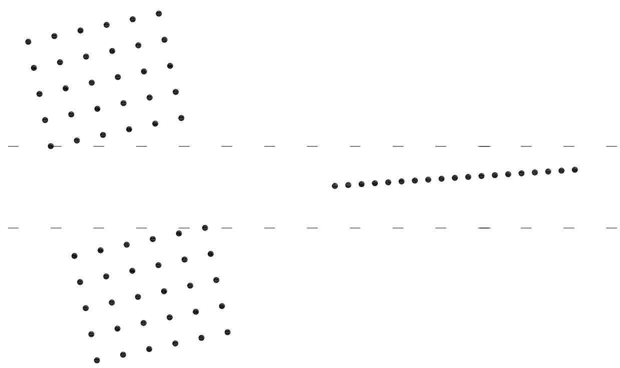
$$(n-k+1)(\frac{3k}{2}-\frac{1}{2})-\frac{k(k+2)}{4} > \frac{3}{2}(k-1)n-2k^2.$$

Így az alsó korlát, amit ebből kapunk $\frac{3}{2}(k-1)n-2k^2$.

Most vizsgáljuk meg, hogy miért igaz, hogy nincs $k+1$ diszjunkt él G-ben. Legyen D diszjunkt élek halmaza G-ben, azt kéne belátni, hogy $|D| \leq k$. Ha $|D \cap E_1| \leq 1$, akkor $|D| \leq |R|+1 = k$. Különben legyen e_1 $D \cap E_1$ legbaloldalibb éle, ami metssze r egyenest r_s-ben, és e_2 a legjobboldali éle, ami metssze r egyenset r_t-ben. Mivel $s+k/2$ csúcsa van R-nek e_1 baloldalán ezért D-nek legfeljebb $s+k/2$ éle van e_1 baloldalán. Ugyanígy D-nek legfeljebb $k/2-t$ éle van e_2 jobboldalán. Mivel e_1 és e_2 között $P \cup Q$-nak $t-s-2$ csúcsa van ezért D-nek legfeljebb $t-s-2$ éle van e_1 és e_2 között. Összességében D-nek legfeljebb $(s+k/2)+(k/2-t)+(t-s-2)+2 = k$ éle van.

Érdemes megvizsgálni a felső becslésben használt módszereink határát, azaz mutatni egy minél több élű olyan gráfot, amiben nincs $k+1$ olyan él, amik a valamelyik relációnkkal páronként össze vannak hasonlítva. Ekkor persze elképzelhető, hogy a gráfban van $k+1$ diszjunkt él. Illetve azt is vizsgáljuk, ha ennél még enyhébb feltételt nézünk, és csak azt szeretnénk kizárni, hogy ne legyen benne $2k$ hosszú cikk-cakk út, ahol az első, harmadik $\ldots$ $2k-1$. él valamelyik reláció szerint páronként össze van hasonlítva.

Az első kérdésre a konstrukció a következő. Vegyünk két $(k-1) \times k$-as egységrácsot, ahol a rácspontokba helyezzünk csúcsokat, majd egy kicsit forgassuk el az óramutató járásával ellentétes irányba, hogy ne legyen két pont egy függőleges egyenesen. Két ilyen egységrácsot helyezzük egymás fölé úgy, hogy köztük kimaradjon egy vízszintes sáv. A többi $n-2k^2+2k$ pontot helyezzük a két négyzetrácstól jobbra jó messze egy olyan szakaszra, ami a vízszintessel egy nagyon kicsi pozitív szöget zár be, és a kezdőpontján és a végpontján átmenő vízszintes egyenes a két egységrács közé esik. Kössük össze a egységrácsok csúcsait a többi csúccsal. (26. ábra)



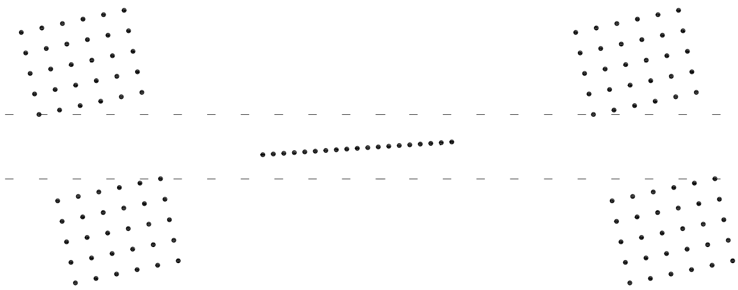
26. ábra: pontok elhelyezkedése

Azt állítjuk, hogy ebben a gráfban nincs $k+1$ olyan él amik páronként össze vannak hasonlítva az egyik reláció szerint. Nézzük végig a relációkat, hogy hány élet tudok venni, amik páronként össze vannak hasonlítva általa.

- $\prec_1$: A felső téglalapból nem megy két él, amik $\prec_1$ szerint vannak összehasonlítva, az alsó téglalapból meg egy sorból legfeljebb egy él indulhat, azaz összesen legfeljebb $k-1$, így az alsó téglalapból és felsőből együtt legfeljebb k mehet.
- $\prec_2$: Mivel a baloldali végei a szakaszoknak egyre balrább kell, hogy elhelyezkedjenek, egy oszlopból legfeljebb egy él indulhat, azaz összesen legfeljebb k $\prec_2$ szerint összehasonlított élünk lehet.
- $\prec_3$: A felső téglalapból egy sorból legfeljebb egy indulhat, az alsó téglalapból nincs két él, amik $\prec_3$ szerint vannak összehasonlítva, így összesen alsóból és felsőből legfeljebb k páronként $\prec_3$ szerint összehasonlított élet vehetek.
- $\prec_4$: Hasonlóan, mint $\prec_2$-nél nem lehet több mint k.

A megadott gráfnak n csúcsa és $2k^2n-2nk-4k^4+8k^3-4k^2$ éle van.

Abban az esetben, ha a hosszú cikk-cakk utakat szeretnénk kizárni, jobb alsó becslést is adhatunk. Ekkor a távoli szakasz másik oldalára is távol rakhatunk két ugyanolyan egységrácsot, mint a baloldalára. (27. ábra)



27. ábra: pontok elhelyezkedése

Egy ilyen n csúcsú gráfnak $4k^2n - 4kn - 16k^4 + 32k^3 - 16k^2$ éle van.

A legjobb felső becslés még nagyon távol van az alsó becsléstől. A becslés javításának további irányai lehetnek a következők. Egyrész figyeljük meg, hogy egy csúcs jobb vagy bal szomszédjain a részben rendezés olyan speciális, hogy a komplementere is egy részben rendezés. Másrészt érdemes lenne arra is figyelni, hogy láncok összefűzése is bajt okoz, azaz nem csak az a baj, ha egy lánc önmagában hosszú.

Sajnos azonban láttuk, hogy a módszerünk alsó becslése is távol van egyelőre a probléma alsó becslésétől, az előbbi k-ban másodfokú az utóbbi k-ban elsőfokú. Azt is láttuk, hogy a cikk-cakk módszerrel nem érhetünk el nagyságrendileg jobb korlátot. Tehát a további javításhoz alapvetően új megközelítésre van szükségünk. Mindez azt jelenti, hogy nem elég ilyen speciális cikk-cakk utakra „illeszkedő” diszjunkt élekkel foglalkozni, hanem valahogy az „össze-vissza” elhelyezkedő diszjunkt éleket is figyelembe kell venni. Ez érzékelteti a feladat nehézségét.

6. Súlyátrendező módszer

A súlyátrendező módszer (SM), eredeti néven discharging method, egy olyan technika, amit gyakran használnak állítások bizonyítására gráfelméletben, és ezen belül gyakran használt a síkgráfokkal kapcsolatos problémákban. Leginkább a négyszín-tétel bizonyításából ismert, ahol központi szerepet játszik. H. Heesch az SM-mel látta be, hogy bizonyos konfigurációk elkerülhetetlenek egy maximális síkgráfban. [?] Kezdetben minden i fokú csúcsnak adott $6 - i$ súlyt egy maximális síkgráfban. Az Euler-formulából könnyen látható, hogy ekkor a súlyok összege a gráfban 12. A súlyátrendező fázis során a pozitív súlyú csúcsok átadják a súlyukat más csúcsoknak bizonyos előre megadott súlyátrendező szabályok szerint. A gráf összsúlya nem változik. Ha feltesszük, hogy bizonyos konfigurációk nem fordulnak elő a gráfban, akkor belátható, hogy minden csúcsnak a végén ≤ 0 a súlya, ami ellentmondás, hiszen az összsúlyról tudtuk, hogy 12.

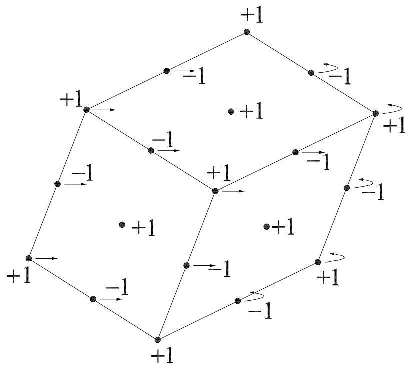
Az SM sikeres működéséhez nagy kreativitásra van szükség. Először is ahhoz, hogy megadjuk a kezdő súlyokat, majd hogy meghatározzuk a súlyátrendező szabályokat.

Az alábbiakban R. Radoičić és Tóth G. összefoglalójára alapozva egy rövid áttekintést nyújtunk az SM különböző gráfelméleti alkalmazásairól. [?] Ezek után konkrét bizonyításokat adunk SM módszerrel olyan tételekre, amiket az előbbiekben tárgyaltunk.

1. Euler formula SM-mel

Ennek a jól ismert klasszikus tételnek is van SM típusú bizonyítása. Az ötlet W. P. Thurston-tól ered és a következő. [?] Vegyünk egy 3-összefüggő síkgráfot, és gondoljunk úgy rá, mint egy egyszerű poliéderre, és helyezzük el úgy a térben, hogy ne legyen vízszintes éle. Ekkor van egy u csúcsa, ami a legmagasabban van, és egy v, ami legalacsonyabban. A kezdő súlyok legyenek a következők: minden csúcsnak legyen a súlya $+1$, minden él közepére rakjunk -1 súlyt, és minden lap közepére $+1$-et.

A súlyátrendezés legyen a következő: a csúcsok és az élek súlyait a szomszédos oldalnak adjuk át. Minden súly mozogjon vízszintesen az óramutató járásával ellenkező irányba az ábrán látható módon. (28. ábra)



28. ábra: súlyok vándorlása

Minden oldal a határának egy nyílt intervallumától kapja a súlyokat, ahol az első és az utolsó is egy oldal súlya, különben meg felváltva oldal és csúcs súlyok. Ha ezeket összeadjuk, azt kapjuk, hogy minden oldal -1 súlyt kap. Tehát a lapok súlya 0 lesz. A súlyátrendezés után egyedül u és v csúcs súlya nem nulla így a súlyok összege 2. Ezzel be is láttuk a tételt.

Az Euler-formula nagyon lényeges szerepet tölt be az alapvető SM bizonyítások során, annak belátására, hogy a kezdetben megadott összsúly egy kicsi (pozitív vagy negatív) konstans, ahogy ezt a következőkben is látni fogjuk.

2. Ritka részgráfok létezése

Az SM első alkalmazása P. Wernicke-hez nyúlik vissza, aki 1904-ben belátta, hogy ha egy háromszögelt síkgráfban a minimális fokszám öt akkor tartalmaz két olyan szomszédos csúcsot, ahol vagy mindkét csúcs foka öt vagy az egyiké öt a másiké hat. [?] (Az a tény, hogy minden síkgráf tartalmaz ≤ 5 fokú csúcsot egy jól ismert következménye az Euler-formulának.)

A bizonyítás a következő képpen megy. Jelölje C, E, és L a síkba lerajzolt háromszögelt síkgráf csúcsainak, éleinek illetve lapjainak halmazát. Kezdetben minden csúcs súlya legyen $6 - d(c)$ és minden lap súlya $6 - 2|l|$ ahol $d(c)$ jelölje a c csúcs fokát, és $|l|$ az l lap méretét, ahol méreten a határoló élek számát értjük. Megjegyezzük, hogy az egyetlen pozitív súlyú csúcsok az ötödfokúak, illetve mivel háromszögelt gráfról van szó ezért kezdetben minden lap súlya 0.

Számoljuk össze a gráfban kiosztott súlyokat.

Ehhez először figyeljük meg, hogy $\sum_{c \in C} d(c) = 2|E|$ és $\sum_{l \in L} |l| = 2|E|$. Ezeket és az Euler-formulát használva kapjuk, hogy:

$$\sum_{l \in L}(6-2|l|)+\sum_{c \in C}(6-d(c)) = 6|L|-4|E|+6|C|-2|E| = 6(|C|-|E|+|L|) = 12.$$

A súlyok átrendezése a következő: minden ötödfokú csúcs adjon 1/5 súlyt minden szomszédjának.

Nyilvánvaló, hogy az összsúly értéke ugyanaz marad, ami pozitív, azaz létezik olyan csúcs c aminek a súlyátrendezések után is pozitív a súlya. Egy csúcsnak csak akkor lehet a végén a súlya pozitív, ha a foka ≤ 7 (Ahhoz, hogy egy csúcs súlya pozitív legyen, szükséges, hogy $6 - d(c) + d(c)/5 > 0$ legyen, de persze ez nem elegendő.) Ha c egy pozitív súlyú csúcs, vizsgáljuk meg $d(c)$ szerint külön az esteket.

- Ha $d(c) = 5$ akkor kezdetben 1 volt a súlya, amit később szétosztott a szomszédjai között, így ahhoz, hogy a végén pozitív súlya legyen, kellett, hogy kapjon valakitől súlyt, ami azt jelenti, hogy van egy ötödfokú szomszédja, és ezzel készen vagyunk.
- Ha $d(c) = 6$ akkor kezdetben 0 volt a súlya, így kellett, hogy kapjon valakitől súlyt, azaz van egy ötödfokú szomszédja, és ezzel ismét készen vagyunk.
- Ha $d(c) = 7$ akkor kezdetben -1 volt a súlya, tehát legalább hat szomszédos csúcsától kellett, hogy kapjon súlyt, azaz van hat ötödfokú szomszédja. Mivel a gráf háromszögelt ezért kell lennie köztük szomszédosnak, tehát ezzel az esettel is készen vagyunk.

P. Wernicke eredménye volt a kezdőpontja a ritka részgráfok vizsgálatának. Egy síkgráf részgráfját akkor nevezzük ritkának, ha kicsi a súlya, azaz csúcsai fokszámainak összege kicsi. A fentiekben tehát azt láttuk be, hogy létezik ritka él.

3. Szomszédsági struktúrák síkgráfokban

Egy csúcs szomszédságának meghatározásához is sikeresen használták az SM-et. A szomszédsági struktúra meghatározása a négyszín-tétel miatt vált sokak számára érdekessé. Ehhez az Euler-formula egy ekvivalens változatát használjuk, ami H. Lebesgue-tól származik [?]:

$$\sum_{c\in C}\left(1-\frac{d(c)}{2}+\sum_{l\ni c}\frac{1}{|l|}\right)=2.$$

Ebből az következik, hogy létezik egy c csúcs amire $1-\frac{d(c)}{2}+\sum_{l\ni c}\frac{1}{|l|}>0$. Mivel $\sum_{l\ni c}\frac{1}{|l|}$ legfeljebb $d(c)/3$ ezért $d(c)/3>d(c)/2-1$ amiből $d(c)<6$. Az egyenlőtlenséget megoldva $d(c)\in\{3,4,5\}$-re kapjuk, hogy minden síkgráfban létezik :

- vagy egy 3 fokú csúcs, amire a rá illeszkedő három lap mérete a következő lehet: $(3,6,bármi)$, $(3,7,\leq 41)$, $(3,8,\leq 23)$, $(3,9,\leq 17)$, $(3,10,\leq 14)$, $(3,11,\leq 13)$, $(4,5,\leq 19)$, $(4,6,\leq 11)$, $(4,7,\leq 9)$, $(5,5,\leq 9)$, $(5,6,\leq 7)$
- vagy egy 4 fokú csúcs, amire a rá illeszkedő négy lap mérete a következő lehet: $(3,3,bármi)$, $(3,3,4,\leq 11)$, $(3,3,5,\leq 7)$, $(3,4,4,\leq 5)$
- vagy egy 5 fokú csúcs, amire négy háromszöglap és egy legfeljebb ötszöglap illeszkedik.

Jelölje $w(k)$ a minimális súlyát egy legkisebb fokú olyan csúcsnak, amire illeszkedő lapok mérete legfeljebb k, egy csúcs súlya pedig a ráilleszkedő lapok méretének összege. H. Lebesgue eredményéből kapjuk, hogy $w(k)\leq max\{51,k+9\}$. Erre adott egzakt képletet O. V. Borodin és D. R. Woodal SM-et használva [?].

4. Tiltott körök nélküli síkgráfok csúcsszínezése

Az a probléma, hogy egy gráf mikor 3-színezhető, azaz mikor létezik a csúcsainak olyan három színnel való kiszínezése, hogy szomszédos csúcsok színei ne legyenek azonosak, NP-teljes, sőt még a síkgráfokra is az. Ezért természetes az a kérdésfelvetés, hogy mit tudunk mondani speciális síkgráfokról, ez esetben olyanokról, ahol bizonyos hosszúságú körök létezését kizárjuk. H. Grötzch belátta, hogy minden síkgráf, amiben nem létezik három hosszú kör 3-színezhető. R. Steinberg nevéhez fűződő 1976-os sejtés azt mondja ki, hogy minden olyan síkgráf, amiben nincs se négy se öt hosszú kör 3-színezhető. A sejtés a mai napig nincs belátva néhány speciális esettől eltekintve. Erdős P.-tól származik a probléma következő relaxációja: létezik-e olyan c egész, hogy minden olyan síkgráf, amiben nincs négy és c közti hosszú kör 3-színezhető. A kérdésre először L. Abbott és B. Zhoun adott válszt, ők megmutatták $c = 11$-re [?]. Ezt az eredményt javította tovább D. P. Sanders és Y. Zhaou $c = 9$-re [?], majd O. V. Borodin, A. N. Glebov, A. Raspaud és M. R. Salavatipour $c = 7$-re [?]. A ma ismert legjobb eredmény X. Luo-tól, M. Chent-től és W. Wang-tól, hogy ha egy G síkgráfban nincs 4, 5, 6 hosszú kör, továbbá nincs k hosszú kör valamely rögzített $k \in \{7, 8, 9\}$-ra akkor G 3-színnel színezhető [?]. Ezeknek a speciális eseteknek a bizonyításában nagy szerepet játszott az SM, és lényegében azonos módon használják. Indirekt vesznek egy minimális ellenpéldát. Utána találnak benne bizonyos konfigurációkat, majd SM-mel megmutatják, hogy ezek nem lehetnek a gráfban. Az Euler-formula alábbi változata gyakran használt

$$\sum_{l \in L} (|l| - 4) + \sum c \in C(d(c) - 4) = -8.$$

Ilyenkor a kezdő súly $d(c) - 4$ minden $c \in C$-re és $|l| - 4$ minden $l \in L$-re kivéve a külső lapot, ahol a súly $|l| + 4$. (Így az összsúly 0 lesz.)

5. Síkgráfok csúcsainak körszínezése

Az SM talán leggyümölcsözőbb alkalmazásai a síkgráfok csúcsainak különböző fajtájú színezései. Most ezekből mutatunk kettőt.

Az egyik érdekes színezés az úgynevezett *körszínezés*, amikor azt szeretnénk, hogy egy oldalnak ne legyen két azonos színű csúcsa. Jelöljük $\chi_k(\Delta^*)$-gal azt a legkisebb számot ahány színnel az előbbi feltételnek megfelelően ki tudjuk színezni a G síkgráf csúcsait. Nyilván $\chi_k(\Delta^*) \leq \Delta^*(G)$ ahol $\Delta^*(G)$ a legnagyobb oldal mérete. T. J. Jensen és Tóth B. azt sejti, hogy a most tudott legjobb alsó korlát $\lfloor 3/2\Delta^* \rfloor$ egyben az igazság is, azaz éles. A legjobb felső korlát D. P. Sanders-től és Y. Zhao-tól $5/3\Delta^*$ [?]. Vizsgálták a problémát kizárólag 3-összefüggő gráfokra is, amire H. Enomoto, M. Horňak és S. Jendrol nagyon ötletes SM-mel belátták, hogy $\chi_k(\Delta^*) \leq \Delta^* + 1$, ha $\Delta^* \geq 60$ [?].

Egy másik színezési mód, amikor azt szeretnénk, hogy minden körben legfeljebb három szín szerepeljen. Ez az úgynevezett *kör-három* színezés. Ezt a fajta színezést B. Grünbaum kezdte vizsgálni, aki be is látta, hogy minden síkgráf kör-három 9-színezhető. [?] Ez az eredmény szép fokozatosan lépésről-lépésre fejlődött addig, amíg O. V. Borodin SM-et használva be nem látta, hogy minden síkgráf kör-három 5-színezhető, ami a lehető legjobb korlát. [?] Vizsgálták még a kör-három színezési problémát olyan esetekben is, amikor kikötötték, hogy mekkora legyen legalább a gráf szélessége, vagyis azt, hogy milyen hosszú legyen legalább a gráfban a legrövidebb kör. Ezekben az esetekben is nagyon gyakran találkozhatunk SM-et használó bizonyításokkal. Másrészt általánosították a problémát a listás színezés irányába. Ez azt jelenti, hogy minden csúcshoz adott egy szín lista, és a csúcs színe a listán szereplő színek közül kell, hogy kikerüljön, egyébként meg ugyanaz a feladat mint eddig. O. V. Borodin, D. G. Fon-Der Flaas, A. V. Kostochka, A. Raspaud és E. Sopena belátták, hogy minden síkgráf listásan kör-három 7-színezhető, ha minden csúcs listája legalább hét elemű [?]. Ez a bizonyítás is SM alapokon nyugszik.

6. Egyidejű színezés

Az egyidejű színezése egy síkgráfnak azt jelenti, hogy bizonyos elemeit (csúcsait, éleit, lapjait) vagy akár az összeset színezzük egy gráfnak. Ezt úgy értjük, hogy ha beválasztottuk mondjuk a csúcsokat, hogy színezzük, akkor az összes csúcsát ki kell színezni a gráfnak. Színezésen olyan színezést értünk, ahol nincs két különböző szomszédos elem, amiknek azonos a színük, ahol most szomszédosnak tekintjük azt is, ha az egyik tartalmazza a másikat. (Például egy lap és az egyik határoló éle vagy egy él és annak egyik végpontja.) Ebben a témában is sok érdekes alkalmazása van az SM-nek. A kérdés általában az, hogy hány színre van szükségünk, ha a maximális fokszám Δ. Becslést szeretnénk $\chi_c(\Delta)$-ra (csúcsokat színezzük) $\chi_e(\Delta)$-ra (éleket színezzük) $\chi_l(\Delta)$-ra (lapokat színezzük) $\chi_{cl}(\Delta)$-ra (csúcsokat és lapokat színezzük) $\chi_{el}(\Delta)$-ra (éleket és lapokat színezzük) $\chi_{ce}(\Delta)$-ra (csúcsokat és éleket színezzük) $\chi_{cel}(\Delta)$-ra (csúcsokat, éleket és lapokat is színezzük).

- $\chi_c(\Delta)$: a négyszín-tétel pont azt adja meg, hogy $\chi_c(\Delta) \leq 4$. Persze ebből $\chi_l(\Delta) \leq 4$ is következik.
- $\chi_e(\Delta)$: V. G. Vizing tétele (nem csak síkgráfokra) azt mondja, hogy $\chi_e(\Delta) \leq \Delta + 1$. Ez a korlát nem javítható minden Δ-ra. ($\Delta \in \{2, 3, 4, 5\}$-re nem javítható.) V. G. Vizing belátta, hogy $\chi_e(\Delta) = \Delta$, ha $\Delta \geq 8$ és azt sejtette, hogy $\Delta \in \{6, 7\}$-re is egyenlőség áll [?]. Ezt L. Zhang SM-et használva belátta $\Delta = 7$-re [?], de $\Delta = 6$-ra máig nyitott probléma.

- $\chi_{cl}(\Delta)$: O. V. Borodin által bizonyított G. Ringel sejtés kimondja, hogy egy olyan gráfnak, amely legnagyobb lapjának a mérete négy, a körszínezési száma öt [?]. Ebből következik, hogy $\chi_{cl}(\Delta) \leq 6$.
- $\chi_{el}(\Delta)$: Ugyancsak SM-et használva D. P. Sanders és Y. Zhao belátta L. S. Melnikov sejtését, miszerint $\chi_{el}(\Delta) \leq \Delta+3$ [?]. A ma tudott legjobb eredmények a következők: $\chi_{el}(2) = 5$, $\chi_{el}(3) \leq 5$, $\chi_{el}\Delta \leq \Delta + 3$, ha $\Delta \in \{4, 5, 6\}$, $\chi_{el}\Delta \leq \Delta + 2$, ha $\Delta \in \{7, 8, 9\}$, és $\chi_{el}\Delta = \Delta + 1$, ha $\Delta \geq 10$ [?] [?].
- $\chi_{ce}(\Delta)$ és $\chi_{cel}(\Delta)$: ezek a problémák általánosan mai napig megoldatlanok, de a legtöbb esetre vannak becslések, amik bizonyításaihoz szintén ügyes SM-eket használtak. V. G. Vizing sejtése, hogy $\chi_{ce}(\Delta) \leq \Delta + 2$ már csak $\Delta = 6$-ra nyitott, illetve Kronk és Mitchem sejtése, hogy $\chi_{cel}(\Delta) \leq \Delta + 4$ is csak $\Delta \in \{4, 5\}$-re nyitott.

7. Élkritikus kromatikus gráfok

V. G. Vizing tételéből tudjuk, hogy $\chi_e(\Delta)$ minden gráfban (nem csak síkbarajzolhatóban) Δ vagy $\Delta + 1$ (ahol Δ a maximális fokszám). Egy G, ami összefüggő és $\chi_e(\Delta) = (\Delta + 1)$ **Δ-kritkus**, ha bármely élét elhagyva az élkromatikus száma csökken, azaz $\chi_e(G \setminus e) < \chi_e(G)$ minden $e \in E(G)$-re. V. G. Vizing azt sejtette, hogy a Δ-kritikus gráfok élszáma legalább $1/2(n(\Delta - 1) + 3)$. $\Delta \leq 5$-re a sejtés igazolt. A legjobb alsó korlát $f(\Delta)|C|/2$, ahol $f(\Delta) = 1/2(\Delta - \sqrt{2\Delta - 1})$, és ezt szintén SM-et használva látta be D. P. Sanders és Y. Zhao [?]. Mivel itt nem síkgráfokról van szó, ezért az Euler-formula semmilyen formában nem alkalmazható. A bizonyításban a következő képpen használták az SM-et. Először indirekt feltették, hogy létezik Δ-kritikus G gráf, aminek az élszáma kisebb, mint $1/2f(\Delta)c$. A lényeges eszköz a bizonyítás során V. G. Vizing szomszédsági lemmája, ami azt mondja ki, hogy egy Δ-kritikus gráf minden olyan csúcsának, aminek van i fokú szomszédja van legalább $max\{2, \Delta - i + 1\}$ Δ fokú szomszédja. A kezdő súly minden c csúcsra legyen $f(\Delta) - d(c)$. Ekkor az összsúly $f(\Delta)|C| - 2|E| > 0$ (hiszen $2|E| \leq |C|\Delta$). A súlyátrendezés pedig legyen a következő: ha c egy kisebb, mint $f(\Delta)$ fokú csúcs, akkor ő adjon minden u szomszédjának $(d(u) - f(\Delta))/(d(u) + d(c) - \Delta - 1)$ súlyt. Persze a súlyátrendezés során az összsúly nem változott, viszont azt be lehet látni, hogy ekkor minden csúcs súlya ≤ 0 lesz, ami ellentmondás.

A különböző alkalmazási területek egyáltalán nem teljes inkább ízelítő jellegű összefoglalása utána nézzük meg az SM azon alkalmazásait, amik a témánkhoz szorosan kapcsolódnak.

Az első, amit már korábban is említettünk E. Ackerman és Tardos G. kvázi-síkgráfok élszámára vonatkozó tétele. [?]

6.1. Tétel *Egy* ≥ 3 *csúcsú kvázi-síkgráf élszáma kisebb, mint* $8|C|-20$.

Bizonyítás. Legyen G egy n csúcsú kvázi-síkgráf, és tegyük fel, hogy úgy van lerajzolva, hogy a lehető legkevesebb metszés van benne összesen. Azt is feltehetjük, hogy G összefüggő, hiszen különben indukcióval készen lennénk. Azon pontok halmazát, ahol G élei metszik egymást, jelölje $X(G)$, és legyen G' az a gráf, amit G-ből $X(G)$ hozzávételével és a megfelelő élek kettébontásával kapunk. Ekkor G' metszésmentes, azaz egy gráf síkbarajzolása. G csúcsait nevezzük *eredeti* csúcsoknak, $X(G)$-belieket meg *új*aknak. Minden új csúcs foka négy, hiszen nincs három éle G-nek, amik egy pontban metszik egymást. Jelölje $L(G')$ a G' oldalainak halmazát, és $|l|$ $l \in L(G')$ oldal méretét, azaz az l-et határoló élek számát G'-ben. (Előfordulhat, hogy egy él kétszer is előfordul egy lap határán, ekkor kétszer számoljuk bele a lap méretébe.) Egy l lap határán lévő eredeti csúcsok számát jelölje $v(l)$. (Egy csúcs is előfordulhat többször egy lap határán, és ezt is számoljuk multiplicitással.) A háromszög, négyszög, ötszög kifejezéseket fogjuk használni a 3, 4 illetve 5 méretű lapokra. A lap neve elé tett szám, pedig azt fogja jelölni, hogy mennyi a $v(l)$. Például egy 3-négyszög egy 4 méretű lap, aminek 3 eredeti csúcsa van.

Kezdetben G' minden l lapjának súlya legyen $|l|+v(l)-4$. Számoljuk össze az így kiosztott súlyok összegét:

$$\sum_{l\in L(G')}(|l|+v(l)-4)=2|E(G')|+(\sum_{l\in L(G')}v(l))-4|L(G')|=4|C|-8$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség az Euler-formulából és az alábbiból következik:

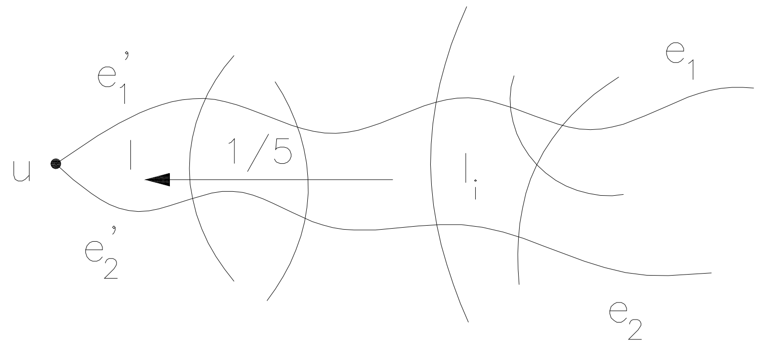
$$\sum_{l\in L(G')}v(l)=\sum_{u\in C(G)}d(u)=\sum_{u\in C(G')}d(u)-\sum_{u\in X(G)}d(u)=2|E(G')|-4(|V(G')|-|V(G|),$$

ahol $d(u)$ jelöli az u csúcs fokát.

Vegyük észre, hogy G'-ben minden lap súlya nem negatív. Egyedül az 1 és 2 méretű oldalakkal és a 0-háromszögekkel lehetne baj. Ezek közül az első kettő G választása miatt nem fordulhat elő, hiszen feltettük, hogy G-ben a lehető legkevesebb metszés van. 0-háromszög meg azért nincs, mert az 3 páronként metsző élt adna.

A súlyátrendezéssel azt szeretnénk elérni, hogy anélkül, hogy az összsúly változna minden $l \in L(G')$ lap súlya legyen $\geq v(l)/5$.

Egyedül az 1-háromszögek azok a lapok, amik ezt az eredeti súlyukkal nem teljesítik. Legyen l egy 1-háromszög, u az eredeti csúcsa, e_1' és e_2' az l u-ra illeszkedő két oldala és e_1 és e_2 G azon két oldala, aminek e_1' és e_2' része. Vizsgáljuk meg azokat a G'-beli lapokat, amik e_1-et ugyanazon oldalról érintik mint l. e_1 mentén így követi egy vagy több lap l-et, ezek legyenek $l_1, l_2, \ldots$. Legyen l_i az első közülük, ami nem egy 0-négyszög. (29.Ábra)



29. ábra: súlyátadás

Ilyen létezik, hiszen az utolsó l_j-nek van legalább egy eredeti csúcsa. Természetesen, ha e_1 helyett ugyanezt e_2-re mondjuk el, akkor ugyanezt az l_i-t kapjuk. Megjegyezzük, hogy l_i nem lehet háromszög mert három oldal nem metszheti egymást egy pontban, és e_1 és e_2-nek nem lehet ugyanaz mindkét végpontja (hiszen a gráf egyszerű). Adjon át l_i $1/5$ súlyt l-nek, amit úgy fogunk mondani, hogy l_i az l_{i-1}-gyel való közös élén keresztül súlyt veszt. Ezt minden 1-háromszögre hajtsuk végre, és az így kapott súlyok lesznek a súlyátrendezés utáni új értékek.

Nézzük meg, miért igaz, hogy ekkor minden lap súlya $\geq v(l)/5$ lesz.

(1) Egy l 1-háromszög súlya $1/5 = v(l)/5$;

(2) Egy l 0-négyszög súlya $0 = v(l)/5$;

(3) Egy az előbbiektől különböző l lap súlya $= |l| + v(l) - 4 - x_l$ ahol x_l az összes súly amennyit l átadott más lapoknak. l minden alkalommal, amikor vesztett a súlyából $1/5$ súlyt adott át, és egy oldalán keresztül

legfeljebb egyszer. Másrészt egy oldalon keresztül csak akkor adhatott át súlyt, ha annak mindkét végpontja új csúcs volt, tehát $x_l \leq (|l| - v(l))/5$. Összességében l új súlya $\geq |l| + v(l) - 4 - |l|/5 + v(l)/5 = 2v(l)/5 + 4/5(|l| + v(l) - 4 - 1) \geq 2v(l)/5$ ahol az utolsó egyenlőtlenség abból következik, hogy most olyan lapokat vizsgáltunk, amiknek a súlya ≥ 1.

Ebből már megkapnánk azt, hogy $|E(G)| \leq 10|C| - 20$ abból, hogy $4|C| - 8 \geq \sum_{l \in L'} v(l)/5 = 2|E(G)|/5$.

Rendezzük át újra a súlyokat a még jobb becslés érdekében. A lapok extra súlyát, azaz amennyivel nagyobb a $v(l)/5$-nél, szétosztjuk G csúcsain. Így G' minden lapjának és minden eredeti csúcsának is lesz valamekkora súlya.

A következő képpen adjanak súlyt a lapok csúcsoknak: ha l egy olyan lap, amire $v(l) > 0$ és van extra súlya, azaz a súlya $> v(l)/5$ akkor ezt az extra súlyt ossza ki a határán lévő eredeti csúcsai közt egyenletesen. Így persze igaz marad, hogy minden lap súlya $\geq v(l)/5$ és a lapok súlyainak az összege plusz a csúcsok súlyainak összege épp $4|C| - 8$.

Tehát most az a feladatunk, hogy az eredeti csúcsok súlyára is adjunk egy alsó becslést.

Azt állítjuk, hogy minden eredeti csúcs súlya $\geq 4/5$

A bizonyításhoz tekintsük a G_u gráfot, amit G-ből kapunk elhagyva az u csúcsot és a rá illeszkedő éleket. Legyen G'_u az a gráf, amit G_u-ból az élek metszéspontjainak hozzávételével és a megfelelő élek kettébontásával kapunk. Jelölje l_u G'_u azon lapját, amelyik tartalmazza u-t. Tegyük fel, hogy G_u nem üres. (Különben a gráf csillag lenne, amire nyilván teljesül a tétel.) Legyen w egy csúcs l_u-n. Ekkor létezik legalább egy l lapja G'-nek, aminek a határán u is és w is rajta van.

1.eset: $|l| \geq 5$

Ekkor ez az egy oldal ad elég súlyt u-nak. Ehhez az kell, hogy

$$|l| + v(l) - 4 - (|l| - v(l))/5 \geq v(l)/5 + v(l)4/5$$

teljesüljön, ami $|l| \geq 5$-re igaz.

2.eset: l egy 4-négyszög vagy egy 3-négyszög vagy egy 2-négyszög, ahol a két eredeti csúcs átellenesen helyezkedik el.

Ezekben az esetekben szintén ez az egy oldal elég súlyt ad magában u-nak, ugyanis sorban az alábbi igaz egyenlőtlenségeknek kell teljesülniük:

$$4 + 4 - 4 - 0 \geq 4/5 + 4 \cdot 4/5$$

$$4 + 3 - 4 - 0 \geq 3/5 + 3 \cdot 4/5$$

$$4 + 2 - 4 - 0 \geq 2/5 + 2 \cdot 4/5$$

3.eset: l egy 2-háromszög, egy 3-háromszög, egy 1-négyszög vagy egy olyan 2-négyszög, ahol a két eredeti csúcs szomszédosak. Ezek sorba legalább a következő súlyokat adják u-nak:

2-háromszög legalább 3/10-et hiszen $3 + 2 - 4 - 0 \geq 2/5 + 2 \cdot 3/10$

3-háromszög legalább 7/15-öt hiszen $3 + 3 - 4 - 0 \geq 3/5 + 3 \cdot 7/15$

1-négyszög legalább 2/5-öt hiszen $4 + 1 - 4 - 2/5 \geq 1/5 + 2/5$

2-négyszög, amiben a két eredeti csúcs szomszédos legalább 7/10-et hiszen $4 + 2 - 4 - 1/5 \geq 2/5 + 2 \cdot 7/10$.

Vegyük észre, hogy az 1-négyszög esetét kivéve találunk egy G-beli u-ra illeszkedő olyan élet, amit nem metsz él, így ennek az élnek mindkét oldala ad súlyt u-nak ezért az előzőek alapján készen vagyunk.

Másrészt van legalább még egy w' csúcsa l_u-nak, így a legkisebb értéket akkor kapjuk u súlyára, ha f_u két 1-négyszögre esett szét és még esetleg néhány 1-háromszögre, de ekkor is u súlya 4/5. Végül becsüljük az összsúlyt az előzőek alapján:

$$4|C| - 8 \geq \sum_{l \in L(G')} v(l)/5 + \sum_{u \in C(G)} 4/5 \geq 2|E(G)|/5 + 4|C(G)|/5$$

Tehát $|E(G)| \leq 8|C| - 20$.

□

Ahogy láttuk ez egy két lépcsős SM volt, azaz egymást követően kétszer hajtottunk végre súlyátrendezéseket végig ügyelve egyrészt arra, hogy az összsúly ne változzon másrészt, hogy bizonyos speciális feltételek megmaradjanak (nevezetesen itt, hogy minden l lap súlya $\geq v(l)/5$). A súlyokat a két fázis után számoltuk össze újra.

Egy másik ehhez hasonló alkalmazása az SM-nek a témában E. Ackerman tétele. [?]

6.2. Tétel *Minden olyan* ≥ 2 *csúcsú topologikus gráfnak, amiben nincs* 4 *páronként metsző él legfeljebb* $36(n-2)$ *éle van.*

A tétel bizonyítása nagyon hasonló az előzőhöz. Kezdetben szintén csak a lapoknak adunk súlyt méghozzá ugyanannyit, azaz $|l| + v(l) - 4$-et. Az első lépésben az a cél, hogy minden lap súlya nem negatív legyen. (Ekkor a 0-háromszögeknek kell valakiktől legalább 1 súlyt kapniuk.) A második lépésben most nem az eredeti csúcsoknak szeretnénk még szétosztani súlyokat, hanem úgynevezett ékeknek. Egy *ék* w egy hármas $w = (v, l, r)$ ahol v egy eredeti csúcs, l és r két v-ből kilépő él úgy, hogy l rögtön r után jön v-ből nézve az óramutató járásával megegyező irányba. Ilyen ékek fogják megkapni lapok „fölösleges" súlyait úgy, hogy minden ék legalább $1/18$ súlyt kap, de a lapokra továbbra is igaz lesz, hogy súlyuk nem negatív. Ebből készen is vagyunk, hiszen, ha összeszámoljuk most a súlyokat az legalább $2|E(G)|/18$ és kezdetben tudjuk, hogy $4|C| - 8$ volt az összsúly, amiből $|E(G| \leq 36(n-2)$.

7. Síkgráfok középiskolában

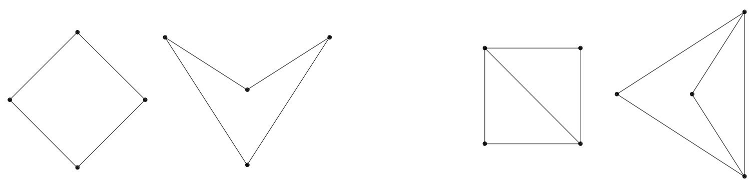
A gráfelmélet véleményem szerint olyan, mint Mozart a zenében. Nem kell hozzá nagy előismeret, sokak számára érthető lehet, de mindeközben hihetetlen mélységeket rejt, ha komolyabban elkezd vele az ember foglalkozni. A gráfelméletben lehetőségük van a középiskolásoknak is eljutni igen komoly feladatokig, gyönyörű gondolatmenetekig, illetve megoldatlan problémákig. Betekintést nyerhetnek a matematikusok világába, abba, hogy egy matematikus hogyan jut el kérdésekig és utána, hogyan találja meg a helyes utat és jut el a megoldásig. Ez azért lehetséges, mert ellentétben a matematika más területeivel, nem szükségesek elvont fogalmak, tételek feldolgozása, és az egész nagyon szemléletes. A síkbarajzolhatóság fogalmát könnyű megérteni, de annál érdekesebb és szebb a síkgráfok tényleges „megértése", karakterizációja.

Célom az volt, hogy tapasztalatot szerezzek arról, hogyan gondolkodnak a középiskolás diákok, mennyire képesek elengedni fantáziájukat és szabadon gondolkodni.

Előzetesen írnék arról, hogy milyen csoportban próbáltam ki az előre megtervezett órákat, hiszen ez lényeges. A csoport egy nyolcadikos matematika tagozatos osztály fele volt, matematika iránt érdeklődő gyerekekkel. Tanáruk elmondása szerint mostanában nagyon „fel volt dobva" az egész osztály attól, hogy szép eredményeket értek el versenyeken, amik nem egy-egy gyerekhez fűződnek, hanem 10-12-en vannak, aki közül néha az egyikük néha a másikuk szerepel jól egy-egy versenyen. Ezt én is észrevettem rajtuk. Amellett, hogy semmi rendetlenkedés nem zavarta az órát, azt éreztem, hogy szívják magukba a matematikát, nem csak csendben végigülték, hanem folyamatosan gondolkodtak, koncentráltak. Habár korukhoz képest egyáltalán nem könnyű tananyaggal készültem, azt hiszem annak nagy részét mindenkinek sikerült átadnom. Mielőtt beszámolnék a megtartott órákról, és azok tapasztalatairól először bemutatnám az órák tervezett menetét. Úgy becsültem, hogy legfeljebb öt óra elegendő kell, hogy legyen.

1. A gráfokról eddig tanult ismeretek felidézése

Mivel nem tudtam pontosan, mit tanultak, illetve mire emlékeznek (gráfelméletet hetedikes korukban tanultak) ezért elengedhetetlen volt egy rövid ismétlés, hogy lássam, honnan indulnak. A fogalmak, amikre nekem szükségem volt az a fa, fa élszáma, kör, egyszerű gráf, páros gráf (itt fontos az is, hogy minden kör hossza páros, mert annak belátásakor, hogy $K_{3,3}$ nem síkgráf szükség lesz rá), illetve a gráf izomorfia, amire persze csak szemléletes formában volt szükségem. Ezt az 30. ábrán látható két példán szemléltettem.



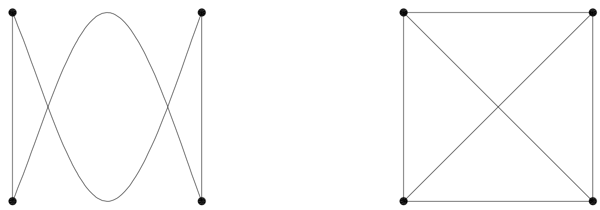
30. ábra: gráfizomorfia szemléltetése

2. Miért jók a gráfok, és hol találkozunk az életben gráfokkal

Fontosnak tartom ezeknek a dolgoknak a tisztázását, hogy érezzék a gyerekek, hogy miért is kezdünk egyáltalán foglalkozni ilyesmikkel. Könnyebb bizonyos dolgokat gráfként kezelni, jobban átlátjuk a problémákat, azonban ehhez meg kell tanulnunk egy új nyelvet, hogy könnyen tudjunk benne mozogni. A példákat tőlük vártam én az alábbiakat gyűjtöttem össze: iwiw-en kapcsolatok, szociogram, útvonal tervező, postások levélkihordása, ház építés és mindenféle projektek, internet és végül a nyomtatott áramkörök számítógép alaplapon, ami elvezet minket a síkgráfok problémájához, hiszen nyomtatott áramkörök gyártásánál fontos költségtényező, a vezetők metszésének minimalizálása, illetve a metszések kiküszöbölése.

3. Síkgráfok definiálása, nem síkgráfok keresése

Természetesen itt nem akartam pontosan definiálni, hogy mi az, hogy egy gráf lerajzolása, de példákon keresztül reméltem, hogy hamar megértik, hogy mi az, hogy síkgráf. A 31. ábrán látható két gráf volt az első két példám.



31. ábra: Melyik síkgráf?

Utána az ő feladatuk, hogy keressenek nem síkgráfot, majd ha találtak, és az nem a K_5 vagy $K_{3,3}$ akkor az lesz a feladat, hogy minél kisebb nem síkgráfot keressenek. (A K_5-öt és $K_{3,3}$-at elkészítettem szívószálakból, hogy felrakjam a táblára, és végig fent legyen emlékeztetőül.) Ha megtalálták a K_5-öt és $K_{3,3}$-at akkor én felrajzolok nekik felosztott K_5 és $K_{3,3}$ gráfokat, és megnézzük, ezekkel mi a helyzet. Mindeközben nyomatékosan felhívom a figyelmüket rá, hogy csak azért mert nem sikerült úgy lerajzolni őket, hogy az élek ne keresztezzék egymást nem láttuk be, hogy tényleg nem lehet. Megbeszéljük, hogy lehet a síkgráfokra úgy gondolni mint konvex testekre, és megpróbáljuk felrajzolni a szabályos testeket mint síkgráf. (Ehhez készítettem színes ábrákat, illetve bevittem szabályos testeket.) Velük nem foglalkozom azzal, hogy csak 3-összefüggő síkgráfok felelnek meg testeknek.

4. Euler tétel

Bár tapasztalt tanároktól hallottam, hogy a tételt példákon keresztül ki szokták találni a diákok, én úgy terveztem, hogy elmondom nekik, és a bizonyításra koncentrálok. Előtte azonban megpróbálom rávezetni őket, hogy a baj akkor van, ha sok az él „valamihez” képest, sőt igazából már az is baj, ha lokálisan valahol sok. Egy kis apró trükk, hogy a tételt $c - é + l = 2$ formában mondom ki, hiszen így csak azt kell megjegyezni, hogy cél=2, és hogy középen van negatív. Tapasztalatom, hogy az egyetemi hallgatóknak is sokszor végig kell menniük a bizonyításon gyorsan fejben, hogy fel tudják írni a tételt. Kétféle bizonyítást terveztem, amiket párosával kell kitalálniuk segítségekkel. Minden pár választhat, hogy melyiket szeretné, majd utána közösen is megbeszéljük mindkettőt. Mielőtt rátérnék, hogy mik is ezek a segítségek leírom, hogy mit szántam bevezetőül a bizonyításokhoz, ami alapján ki tudják választani, hogy melyiket szeretnék.

1. bizonyítás: Ez az Elekes György Véges matematika című könyvéből ismert gátas bizonyítás. [?] Van egy sziget országokkal, és az országok gátakkal vannak körbevéve. Egyszer nagy szárazság támad, így szeretnék beengedni a vizet minden országba, amihez a lehető legkevesebb gátat szeretnék megnyitni. Ha a lapok az országok és a tenger, az élek a gátak, akkor $l - 1$ gátat kell megnyitni ehhez, hiszen mindig tudok úgy gátat megnyitni, hogy elárasszon egy olyan országot a víz, amit eddig nem. A nem megnyitott gátak pedig

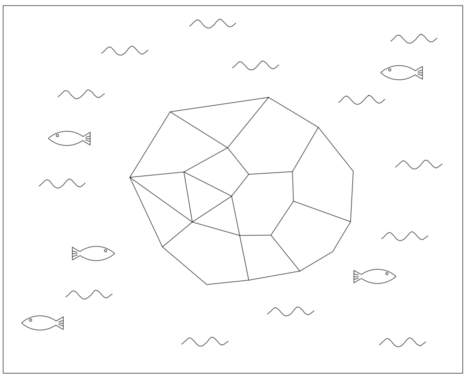
nyilván egy összefüggő gráfot alkotnak, amiről azt is tudjuk, hogy fa, tehát az élszáma $c-1$. Így összesen az élek száma $e = l - 1 + c - 1$. Bevezetőül elmesélem nekik, hogy egy varázslatos kis szigetre kalauzol minket a bizonyítás, ahol szárazsággal küzdenek, és ezt a problémát kell megoldaniuk.

2. bizonyítás: SM-mel bizonyítunk, a 7. fejezetben leírtak szerint. Bevezetőül mesélek nekik a módszerről, hogy körülbelül mi a lényege, és elmondom, hogy ez egy új huszadik századi módszer, és többek között a négyszín tétel bizonyításánál is használták. Nyomatékosítom, hogy ezek nehéz dolgok, és ha megértik már nagy szó.

Mindkét bizonyításhoz készítettem segítő cetliket. Az elején mindenki megkapja az elsőt, és aztán tőlem lehet kérni az többit, ha elakadnak, miközben persze velem is konzultálnak. A segítségek a következők voltak.

Segítségek az első bizonyításhoz:

(1) Valahol az Óperenciás tengeren túl, ahol a kurta farkú malac túr volt egy nagy sziget sok-sok országgal. Minden országot gátakkal vették körül. Történt egyszer, hogy nagy-nagy szárazság támadt a szigeten. Nagy szerencséjükre a víz, ami körbevette szigetet nem tengervíz volt, hanem édesvíz, így csak azt kellett valahogy megoldaniuk, hogy minden országba be tudják vezetni a vizet. Ehhez gátakat kellett megnyitniuk. Legalább hány gátat kellett megnyitniuk? (Ehhez illusztráció volt a 32. ábra.)



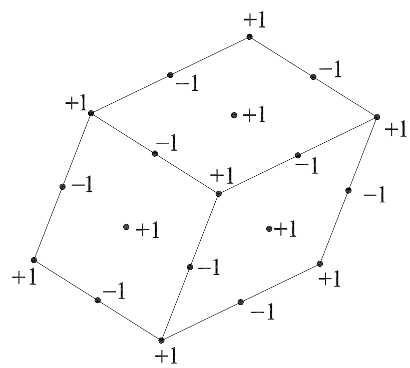
32. ábra: sziget országokkal

(2) Ha még nincs minden országban víz, akkor tudok úgy gátat megnyitni, hogy egy olyan országba jusson víz, ahol eddig nem volt.

(3) Lapok az országoknak felelnek meg, kivéve a külső lapot, ami a tenger. Az élek a gátak, amik útját állják a víznek.
(4) Ha a lehető legkevesebb gátat nyitottam meg, akkor a zárva maradt gátak egy összefüggő gráfot alkotnak.
(5) Ebben a gráfban nincs kör.
(6) Ez a gráf fa.
(7) n csúcsú fa élszáma $n-1$.
(8) Összesen hány élű a gráf?

Segítségek a második bizonyításhoz:

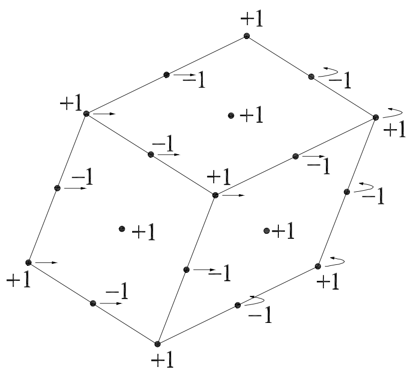
(1) Tekintsünk most a síkgráfra úgy, mint egy konvex testre, és ráadásul helyezzük el úgy, hogy legyen legmagasabban és legalacsonyabban lévő csúcsa (ez később fontos lesz). Hogyan osztanád ki a súlyokat az elején, hogy tudván az összegüket megkapjuk a kívánt állítást, hogy $c-e+l=2$?
(2) A csúcsokra írjunk $+1$-et.
(3) Az élek súlya legyen -1, és ezt írjuk a felezőpontjukba.
(4) A lapok súlya legyen $+1$, és ezt írjuk is a lap belsejébe. (Ehhez illusztráció volt a 33. ábra.)



33. ábra: súlyok szétosztása

(5) Próbáljuk átrendezni a súlyokat úgy, hogy össze tudjuk könnyen számolni. Azaz adjunk valami szabályt, hogy ki kinek mennyi súlyt adjon a sajátjából.
(6) A csúcsok és az élek adják át az összes súlyukat valamelyik lapnak. Kérdés, hogy melyik csúcs/él melyiknek.

(7) Minden él illetve csúcs súlya az ábrán látható módon a nyíl irányába eső szomszédos lapnak adja a súlyát. (A súlyok vízszintesen jobbra mennek.) (Ehhez illusztráció volt a 34. ábra.)



34. ábra: súlyok vándorlása

(8) Egy lap kiktől kap súlyt? Mennyit összesen?

(9) Fölülről az első súly, amit egy lap kap, egy éltől vagy egy csúcstól származik?

(10) És alulról az első?

(11) Mennyi most a lapok súlya?

(12) Mennyi az élek súlya?

(13) Mennyi a csúcsok súlya?

5. Euler tétel alkalmazása

Visszatérünk az eredeti problémára, hogy a K_5 és a $K_{3,3}$ miért nem síkgráf. Egyelőre az Euler tétellel nem tudunk semmit kezdeni, mert a lapok számát nem tudjuk, ezért ezt szeretnénk a képletből valamilyen módon kiejteni. Megfigyeljük, hogy ekkor nem fogunk tudni pontos képletet, azaz valami olyasmit, hogy valahány csúcs+valahány él=valamennyi, azért „fizetni” fogunk, hogy a lapokat kiejtsük.

Az alábbi feladatokat kapják:

1. Milyen összefüggést mondhatunk egy olyan síkgráf élszáma és csúcsszáma között, aminek minden lapja háromszög?

Minden lapot 3 él határol, és minden él két lapban szerepel, tehát $e = 3l/2$. Ebbőlés az Euler tételből kapjuk, hogy $e = 3c - 6$.

2. Milyen összefüggést mondhatunk egy olyan síkgráf élszáma és csúcsszáma között, aminek minden lapja négyszög, ötszög, n-szög?

Hasonló gondolatmenettel, mint az előbb $e = 4l/2$, illetve $e = 5l/2$ és $e = nl/2$, ahonnan $e = 2c - 4$, $e = 5/3(c - 2)$ illetve $e = n/(n - 2) \cdot (c - 2)$

Utána megkérdezem, hogy mit tudnak mondani egy olyan gráfról, amiben különböző méretű lapok vannak, és felhívom a figyelmüket arra, hogy már korábban megbeszéltük, hogy fizetni fogunk majd valamikor azért, hogy a lapok számával nem foglalkozunk. Háromszögeljük a gráfot, megegyezünk, hogy bizonyítás nélkül elhisszük, hogy lehet. Az így kapott gráfban az élek száma $\geq$ mint az eredetiben, és az előző feladatokból tudjuk, hogy $e = 3c - 6$, tehát $e \leq 3c - 6$. Mindezek után, megkérdezem, hogy most be tudnák-e látni, hogy K_5 nem síkgráf. (K_5-ben a csúcsok száma 5 az éleké 10 és mivel $10 > 3 \cdot 5 - 6$ ezért nem lehet sík) És azt, hogy $K_{3,3}$ nem sík? Észrevesszük, hogy itt nem kaptunk bizonyítást az előző képletünkből, de ez nem jelenti azt, hogy a gráf sík. Visszagondolunk, hogy mit tudtunk a páros gráfokról, felidézzük, hogy minden kör páros, azaz a legkisebb kör benne négy hosszú. Szintén az előző feladatokból kaphatjuk, hogy páros síkgráfban $e \leq 2c - 4$, amit kiszámolva $K_{3,3}$-ra $9 \leq 8$ kéne, hogy teljesüljön.

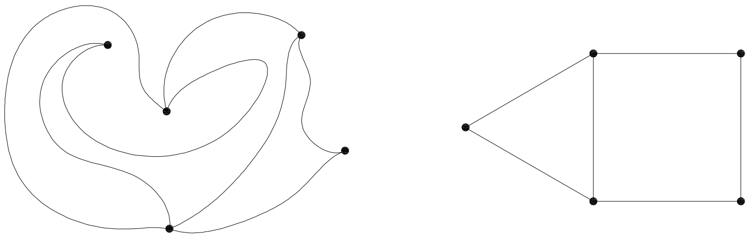
6. Kuratowski tétel

Beláttuk, hogy K_5 és $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható. Ezek után felrajzolok nekik egy olyan felosztott K_5-öt vagy $K_{3,3}$-at, amire az előző képletekből nem kapjuk meg, hogy nem sík, tehát levonjuk azt a tanulságot, hogy attól, hogy egy gráf teljesíti az előző képletet nem feltétlenül sík. Tisztázom velük, hogy most ott tartunk, hogy bizonyos gráfokról el tudjuk dönteni, hogy síkgráfok-e, de sok gráfról nem. Definiálom nekik, hogy mi az a felosztott K_5 és $K_{3,3}$, amikkel eddig is találkoztunk már, csak még nem definiáltuk, majd kimondom a Kuratowski tételt. (Ezt nem bizonyítjuk.) (Egy gráf akkor és csak akkor síkgráf, ha nincs benne se felosztott K_5 se felosztott $K_{3,3}$.) Így pontosan megmondjuk, hogy mely gráfok síkok és melyek nem.

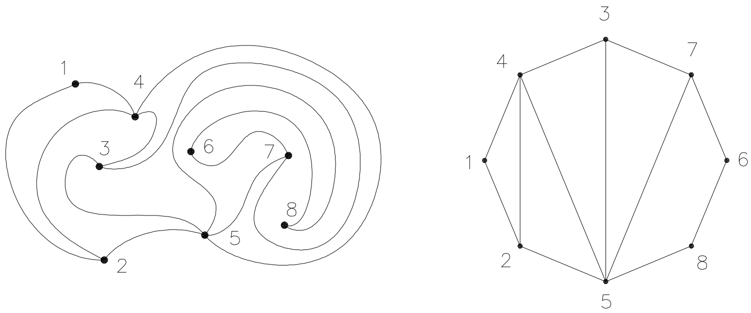
7. Fáry tétel

Feladat: a 35. és a 36. ábrán látható gráfokat rajzolják le úgy, hogy szintén ne legyenek benne metsző élek, de minden él egy egyenes szakasz legyen.

Adjanak fel ők is ilyen rejtvényeket a padtársuknak.



35. ábra: Feladat a Fáry tételhez



36. ábra: Feladat a Fáry tételhez

Kérdés: melyek azok a síkgráfok, amiket egyenes szakaszokkal is le tudjuk úgy rajzolni, hogy nem metszik egymást az élek? Szavaztatom őket, hogy vajon minden síkgráf ilyen vagy csak bizonyos gráfok.

Miután eleget rajzoltak, és remélem már sokan úgy érzik, hogy minden síkgráf átrajzolható így, kimondom Fary tételét, azaz hogy minden síkgráf lerajzolható úgy is, hogy szintén nem metszik egymást élek, és minden éle egyenes szakasz. (nem bizonyítjuk)

8. Merre tovább?

Milyen más feltételt lehetne adni, ahelyett, hogy ne legyen egyetlen metsző élpár sem. Itt tényleg az ő ötleteiket várom.

Az óratervek után összefoglalom az előző pontoknak megfelelően, hogyan is valósult meg mindez. Összesen három órát tartottam, amibe nem fért bele minden, az 5. pontig jutottunk.

1. Elég jól emlékeztek az alapfogalmakra, egyedül azt kellett megszavaztatnom velük, hogy hány éle van a fának, jöttek $n+3$, $n+2$, $n+1$ és $n-1$ tippek, de végül az $n-1$-et szavazták meg. Gyorsan átismételtem velük a bizonyítást vázlatosan, hamar előjött nekik. Azt is tudták, hogy két gráf mikor „ugyanaz”, rögtön mondták a mindenféle gumiszalagokat.

2. Arra, hogy miért jók a gráfok azt válaszolták, hogy könnyen fel lehet vele rajzolni az ismeretségeket. Ennek kapcsán felidéztük a Ramsy tételt. Példákat nem nagyon tudtak mondani gráfokra. Két példát hoztak ők, az egyik az volt, hogy ha különböző boltokban vásárolok, akkor hogy járjam az utcákat, ez azután volt, hogy elmondtam a postás feladatot. A másik példa az internet volt. A tanuló nem tudta pontosan elmondani, hogy is lesz gráf az internetből, de gondolom valahol hallott már róla. A számítógép alaplap integrált áramköreinek problémája nagyon feldobta a csoport fiú tagjait.

3. Az általam felrajzolt első példára rögtön rávágták, hogy az nem sík, majd pár másodperc múlva majdnem mindenki rávágta, hogy, ja de mégis. Ekkor azt hiszem tisztázódott bennük a síkgráf fogalma, a második példámra már mindenki mondta, hogy sík. Aztán elkezdtek keresgélni nem síkgráfokat. Hatalmas gráfokat rajzoltak az elején, úgyhogy számomra nagy kihívás volt megmutatni egy-egy ilyen hatalmas gráfról, ha sík volt hogy az miért az, hogyan kell átrendezni az éleket, pontokat. Aztán miután mondtam, hogy próbáljanak minél kisebbet, kicsit könnyebb lett a helyzetem. A három ház három kút feladatot az egyik fiú rögtön mondta, valahonnan ismerte, de meg lehetett kérni rá, hogy ne mondja el a többieknek, és keresgéljen másikat, hátha van még. Aztán valaki megtalálta a K_6-ot, és miután javasoltam, hogy nézze meg nem tud-e kisebbet, hamar meglett a K_5. Közben mások is megtalálták a K_5-öt és a $K_{3,3}$-at is. Azt könnyen megértették, hogy azzal, hogy mi nem tudtuk felrajzolni nem láttuk be, hogy nem síkgráf, csak érezzük. A felosztott K_5-re és $K_{3,3}$-ra, amiket felrajzoltam nekik rögtön rávágták, hogy ez sem megy, nem kellett magyarázkodnom hozzá. A szabályos testek hálójának síkbarajzolásánál meghökkentően gyorsak voltak. Felrajzoltam a tetraédert, utána a kockára mindenki rögtön jelentkezett, hogy az megy, és az oktaéder és a dodekaéder is hamar megvolt, bár azt már azt hiszem nem mindenki látta. Az ikozaéderről ott nem beszéltünk, de mondtam nekik, hogy ha van kedvük otthon nézzék meg.

4. Szerencsémre fele-fele arányban tetszett a csoportnak az egyik illetve a másik bizonyítás, így három pár az egyiket, három a másikat választotta.

Az első bizonyítást választók, nagyon hamar végeztek a bizonyítással, gyakorlatilag csak az első segítség kellet nekik. Az elején mindegyik csoport a konkrét ábrán kezdte el számolgatni, hogy hány gátat kell megnyitni, de aztán megértették, hogy most általánosan egy akármilyen szigetre kéne, hogy megmondják, hány gátat kell megnyitni. Máskor is nagyon fontos volt számukra, hogy konkrét példákon vizsgálják a dolgokat, néha nagyon nehezen tudtak ettől elszakadni. Két csoport egyből azt vette észre, hogy a ki nem nyitott gráfok a végén fát alkotnak, mert nem lehet benne kör. Megkérdeztem tőlük, hogy egy gráf amiben nincs kör az biztosan fa-e, és az egyik gyereknek eszébe jutott, hogy erdő is lehet, de hamar elmagyarázták, hogy az miért nem lehet. A két csoport közül az egyiknek az volt a válasza az első segítség kérdésére, hogy $e - (c - 1)$, erre nem számítottam, nagyon tanulságos volt. Végül a két csoport, aki rögtön azt vette észre, hogy fát kap a végén, hamar összerakta belőle az Euler tételt. A harmadik csoport aki ezt a bizonyítást választotta abba az irányba indult, amit én terveztem, hogy mindig tud úgy gátat megnyitni, hogy egy újabb országot árasszon el a víz. Nekik még kellet az a segítő kérdés, hogy mit alkotnak a nem kinyitott gátak, ebből ők is hamar kész voltak. Előre sejtettem, hogy ez a bizonyítás sokkal könnyebb lesz számukra, mint a másik, és ez így is volt. Ezért, és azért is mert az idő vészesen telt úgy döntöttem, hogy megbeszéljük ezt a bizonyítást mindenkivel, elmondják a másik csoportok, hogy ők hol tartanak a bizonyításukkal, és onnan együtt gondolkodunk, próbálkozunk a bizonyítás kitalálásában.

Azalatt amíg a három csoport végzett a gátas bizonyítással az SM-est választók a következőkre jutottak. Az elején kellet még külön-külön magyaráznom nekik a módszer lényegét, éreztem rajtuk, hogy nehezen értik meg, de nagyon küzdenek. Az első ötlet a súlyok kiosztására az összes csoportban az volt, hogy mindennek, éleknek, csúcsoknak, lapoknak legyen a súlya 1. Utána, ha rákérdeztem, hogy akkor a súlyok összege mit fog megadni szép lassan rájöttek, hogy az éleknek -1 súlyt kell adni. Amikor ezzel megvoltak, akkor odaadtam nekik a 4. segítséget, hogy legyen róla ábrájuk, hogy hol tartanak. Aztán elkezdtek gondolkodni, hogy hogyan adják át egymásnak csúcsok, lapok, élek a súlyokat, és ekkor kapcsolódott be a három másik csoport is.

Megbeszéltük közösen, hogy azt kell belátnunk, hogy az összsúly 2, tehát valahogy szeretnénk, hogy a +1-ek és a −1-ek kiejtsék egymást. Azt a segítséget is elmondtam nekik, hogy az élek és a csúcsok adják át a súlyaikat lapoknak. Nagy öröm volt látni, hogy mennyi ötletük van. Egyáltalán nem féltek tippelgetni, ami épp eszükbe jutott azt mondták. A következő ötletek hangoztak el:

(1) Élek és a csúcsok körbe adják egymásnak a súlyokat a lapok mentén. Észrevettük, hogy ez azért nem lesz jó, mert egy él két laphoz egy csúcs meg több laphoz is tartozik.
(2) Minden él adjon $-1/2$ súlyt az egyik szomszédos lapjának, $-1/2$ súlyt a másiknak. Igen ám de akkor most a lapok súlyai nagyon különbözőek lesznek, és a csúcsokon még mindig ott a sok egyes, tehát nem nagyon látjuk mi lesz.
(3) Mindenki adja a súlyát vagy a legfelső vagy a legalsó csúcsnak. Itt eszükbe jutott, hogy én valamiért azt írtam az első segítségben, hogy legyen legalsó és legfelső csúcs.
(4) Minden csúcs és él adja a lefelé lévő lapnak a súlyát.

Ez utána az ötlet után mondtam el én, hogy hogyan is vándoroljanak a súlyok (ekkor már csak öt perc volt hátra az órából). Utána gyorsan megnéztük, hogy az összes él súlya persze 0 lesz, az alsó és a felső csúcs súlya 1 lesz a többié 0. A lapok súlyának kiszámolásához a 9. segítségre volt csak szükségük és onnan ment.

5. Megérezték, hogy a lapok számával nem nagyon tudunk mit kezdeni, és valahogy jó lenne megszabadulni tőlük, és azt is megértették, hogy ekkor nem fogunk tudni pontos képletet adni, csak valami becslést. A két feladatot gyorsan megoldották, de a továbblépés nehezen ment. Magyarázás, rávezetés után végül egy okos fiú mondta ki, hogy húzzunk be új éleket, hogy minden lap három oldalú legyen. Itt mondtam, hogy fogadják el, hogy ezt meg lehet csinálni, ám egy fiú nagyon tiltakozott, hogy de a külső lapot nem feltétlenül lehet. Erre a problémára egy nagyon érdekes megoldás született. Az egyik fiú először azt mondta, hogy rajzoljuk úgy, hogy a külső lap pont egy három oldalú lap legyen, és akkor belül már meg tudom csinálni. Erre én visszakérdeztem, hogy ez jó ötlet, csak mi van, ha egyáltalán nincs három oldalú lap a gráfban.

Erre azt mondta, hogy akkor először ahogy épp le van rajzolva a gráf háromszögeljük a belsejét, majd rajzoljuk át úgy, hogy egy háromoldalú lap kerüljön kívülre, majd húzzunk be még éleket belül, hogy minden lap három oldalú legyen. Ez nagyon tetszett, de azért megmutattam nekik, hogy egyszerűen kívül is húzhatok új éleket. Ez valószínűleg azért nem jutott eszükbe, mert egyenes szakaszokkal akarták megoldani a problémát. A K_5 nem síkbarajzolhatósága innen könnyen ment. Annak a kérdésnek, hogy mit tudunk mondani a $K_{3,3}$-ról voltak gyerekek, akik bedőltek, és kiszámolva, hogy $9 \leq 10$ teljesül mondták, hogy akkor az mégis síkgráf. A többiek azonban meggyőzték őket, hogy ez egyáltalán nem biztos. Abból, hogy milyen speciális gráf a $K_{3,3}$ és abból, hogy mit is tudunk egy páros gráf köreiről megérezték, hogy itt valami jobbat fogunk tudni mondani az élek számára, hiszen a legkisebb kör négy hosszú. Sajnos itt csöngettek ki, de azért még, hogy lássam mit reagálnak feltettem nekik azt a kérdést, hogy mit gondolnak arról, hogy át lehetne-e rajzolni a síkgráfokat úgy, hogy minden él egyenes szakasz legyen. Egybehangzóan a nem választ adták. Mondtam nekik, hogy otthon rajzolgassanak, próbálgassák.

Az órákat fél osztályban tartottam. Eközben egy matematika tanár az osztály másik felében elővette a gráfelméletet, felelevenítették a régen tanultakat. Az általam tartott három óra után volt egy órájuk együtt a két félosztálynak, ahol az a csoport, aki velem dolgozott elmesélte a másiknak az Euler tétel két bizonyítását. Ezen én is bent ültem, de mintha ott se lettem volna, nem segítettem, nekik kellett összerakni mindent nélkülem. A bizonyításokat úgy adták elő, ahogy ők is kapták, a kapott segítségeket elmondták, majd várták rá a válaszokat. Még ekkor is konkrét szigeten számoltak, azaz a bizonyítás közben is egy felrajzolt ábra szerint nézegették, hogy ennek 5 lapja van és akkor 4 élet elég elvenni stb. Viszont a végén c-vel, e-vel és l-lel írták fel a dolgokat. Azt hiszem ezt a másik csoport is jól megértette. A második bizonyítás nehezebben ment. Aki a táblánál elmondta, ugyanúgy kérdezgette a másik csoportot, és én biztos vagyok benne, hogy értette is a bizonyítást, de nem tudta igazán átadni, nem tudta összefoglalni, mi a lényeg, és mért azt csináljuk itt éppen, amit csinálunk. Azt hiszem ebből a hallgatóság nem sokat értett meg. Igazából ezen nem is csodálkoztam, tisztában voltam vele, hogy ez egy sokkal nehezebb, elvontabb bizonyítás, örültem, hogy azért volt, aki megértette, ha nem is mindenki.

Összességében, nagyon nagy élmény volt tanítani őket, értelmes, érdeklődő csoport volt, akik mint a szivacs szívták magukba a matematikát, és élvezték a gondolkodást. Nagyjából úgy alakultak a dolgok, ahogy terveztem. Jól működött a csoportmunka és a frontális oktatás is. Ha éppen egy csoporttal foglalkoztam közben a többiek ugyanolyan aktívan dolgoztak, és ahogy körbe-körbejártam újra visszatérve egy csoporthoz azt tapasztaltam, hogy előrébb járnak jóval, mint előzőleg amikor náluk voltam. A frontális részeknél, amikor közösen beszéltünk meg valamit akkor is mindenki figyelt, mertek közbeszólni, kérdezni. Néha megkértem őket, hogy tegye fel az a kezét, aki nagyjából érti, amiről beszélünk, és egy-egy kivétellel mindenkinek fent volt a keze. Harmadik órára, amikor bementem láttam, hogy tele van firkálva a tábla mindenféle gráfokkal, amit épp törölt le a hetes, azt gondolom, tényleg foglalkoztatta őket a dolog.

Ami különösen nagy öröm volt az az, hogy láttam, hogy ezek a gyerekek mernek gondolkodni. Ezt a képességüket sokan elveszítik az iskolai tanulmányaik során, amiről szerintem elsődlegesen a tanárok tehetnek. A gondolkodáshoz bátorság kell, és ha egy gyerek nem kap elég pozitív visszajelzést, akkor elbátortalanodik, és inkább nem gondolkodik. A másik tanulság, az volt, hogy nyolcadikos gyerekeknek nagyon nagy szükségük van konkrét példákra. Persze ezt elméletben tudja az ember, de ha gyakorlatban szembesül vele, akkor érti meg igazán. Ők gyakran konkrét példákon számolnak, de végül általános eredményként mondják ki a tapasztalataikat, ami egyáltalán nem baj. Szép fokozatosan kell őket szoktatni ahhoz, hogy ne csak konkrét példák segítségével, hanem általánosítva azokat gondolkodjanak.

8. Összefoglalás

A síkbarajzolhatóságról nagyon sok mindent tudunk, megvan a karakterizációja a síkbarajzolható gráfoknak. Különböző irányú általánosításokat vizsgálva azonban már nem tudunk olyan erős tételeket, mint a síkbarajzolhatóságnál, ekkor az a célunk, hogy egy felső becslést adjunk bizonyos tulajdonságú gráfok élszámára, illetve egy minél több élű konstrukciót. Végig olyan topologikus gráfokkal foglalkoztunk, amik mint absztrakt gráfok egyszerűek.

Első irányú általánosítás az volt, amikor három páronként metsző él létezését tiltottuk meg egy gráfban. Egy ilyen úgynevezett kvázi-síkgráf élszáma $O(n)$ volt, ahol n a gráf csúcsainak száma. Külön vizsgáltuk a problémát egyszerű (minden két él legfeljebb egyszer metszi egymást) és nem egyszerű topologikus síkgráfokra. Egyszerű kvázi-síkgráfok élszámára $6.5n - O(1)$ éles becslés volt, ha nem tettük fel, hogy a topologikus gráf egyszerű akkor felső becslés $8n - 20$ volt, az alsó $7n - O(1)$. Kiderült, hogy lényeges különbség van köztük, tehát ez egy jó példa arra, hogy érdemes külön vizsgálni a felmerülő problémákat egyszerű és nem egyszerű topologikus gráfokra. Vizsgáltuk a kvázi-síkgráfok valamilyen értelemben vett általánosítását, aminek az élszámára a $8n - O(1)$ már éles becslés.

A kvázi-síkgráfokat tovább általánosítva a k-kvázi-síkgráfokkal foglalkoztunk, azaz olyan gráfokkal, amiknek van olyan lerajzolásuk, amiben nincs k páronként metsző él. Először megvizsgáltuk, mit tudunk mondani a konvex geometriai k-kvázi-síkgráfokról. Ebben az esetben éles becslést tudtuk adni. n csúcsú gráfra és $k+1$-re a becslés $2kn - \binom{2k+1}{2}$. Aztán egyszerű topologikus gráfokat vizsgáltunk, amire a felső becslés $cn(\log n)^{2k-8}$ volt, illetve nem egyszerűekre $cn(\log n)^{4k-16}$. A ma tudott legjobb felső becslés k-kvázi-síkgráfok élszámára $n(\log n)^{c \log k}$. A sejtés azonban az, hogy minden k-ra létezik c_k konstans, hogy az élszám $\leq c_k n$. Látjuk, hogy ettől a kapott becslés nagyon távol van.

Tovább általánosítva a rácsok problémájánál is azt láttuk, hogy keveset tudunk az élszámról. Természetes (k,l)-rácsokra az a sejtés, hogy rögzített $k, l \geq 1$ egészhez létezik $c_{k,l}$ konstans, hogy a természetes (k,l)-rács mentes n csúcsú topologikus gráfok élszáma legfeljebb $c_{k,l}n$. $k \leq 2$, $l = 1$-re a sejtés igaz, de közel sem triviális. Ezen kívül természetes (k,k)-rács mentes geometriai gráfokról tudjuk, hogy legfeljebb $O(k^2n(\log n)^2)$ élük van, illetve egyszerű topologikus gráfokra a becslés $O(n(\log n)^{4k-6})$. Próbáltuk a problémát szűkíteni, ezért kezdtünk el speciális rácsokkal foglalkozni. Az olyan n csúcsú toplogikus gráfok élszáma, amiben nincs $k+2$ él, hogy az első kettő metszi egymást és a többi élet is c_kn, ahol c_k k-tól függő konstans. Az a sejtés, hogy ha a $k+2$ élről feltesszük, hogy függetlenek, akkor is ez a becslés érvényes. Vizsgáltuk a sugaras és az egyszerű kétsugaras (k,l)-rácsokat, illetve a k-csillag-rácsokat. Sugaras (k,l)-rács mentes topologikus gráfok élszáma $\leq 16\cdot 24^{4^l}kn$, az egyszerű kétsugaras (k,l)-rács nélküljeké pedig $8\cdot 24^l kn$. A k-csillag-rács mentes topologikus gráfok élszáma c_kn, ahol c_k k-tól függő konstans.

Egy másik iránya a síkgráfok általánosításainak az, amikor azt szeretnénk kizárni, hogy sok diszjunkt él legyen a gráfban, azaz a gráfunk legyen minél gubancosabb. Az olyan n csúcsú konvex geometriai gráfok élszáma, amiben nincs $k+1$ diszjunkt él legfeljebb kn, és ez a becslés éles. Topologikus gráfokra láttuk, hogyan javult szép fokozatosan a felső becslés, majd az általunk adott új becslés $32k^2n+8kn$ volt. Több lépésben értük el, különböző ötleteket bevetve. Az alsó becslés $3/2(k-1)n-2k^2$, ami messze van a felsőtől. Megvizsgáltuk a módszerünk adta alsó becslést, ami nagyságrendileg különbözött a probléma alsó becslésétől.

A különböző irányú általánosítások után bemutattunk egy módszert, amit gyakran használnak állítások bizonyítására gráfelméletben, és ezen belül gyakran használt a síkráfokkal kapcsolatos problémákban. Az úgynevezett súlyátrendező módszer lényege a következő. Kezdetben kiosztunk a gráf csúcsainak, éleinek, lapjainak súlyokat, ezeket összeszámoljuk, majd átrendezzük úgy, hogy az összegük ne változzon. Ebből kiderülhet, hogy bizonyos konfigurációk nem fordulhatnak elő a gráfban. Van olyan eset is, hogy azért rendezzük át a súlyokat, mert kezdetben nem tudtuk összeszámolni, de ügyesen átpakolva őket már könnyen meg tudjuk mondani az összegüket. Adtunk egy rövid összefoglalót néhány területről, ahol eredményesen használták ezt a módszert, majd megmutattuk SM-et használva, hogy egy n csúcsú kvázi-síkgráf élszáma legfeljebb $8n-20$, illetve vázlatosan, hogy egy 4-kvázi-síkgráf élszáma legfeljebb $36(n-2)$.

Végül kitértünk arra, hogy mi az, amit középiskolában is lehet és érdemes a gráfelmélet ezen részéből tanítani. Bemutattunk egy tervet arra, hogy hogyan lehet megvalósítani, és a megtartott órák után beszámoltunk a tapasztalatainkról. Azt tapasztaltuk, hogy érdemes gyerekekkel néha számukra átlagosnál nehezebb, kihívást jelentő témákkal foglalkozni. Nagyon motiválja őket, és bátorítja az ötleteik megfogalmazására, kibontakoztatására, és nagy mértékben fejleszti a gondolkodás képességét.

Irodalomjegyzék

[A06] E. Ackerman, On the maximum number of edges in topological graphs with no four pairwise crosing edges, *Annual Symposium on Computational Geometry* (2006) 259-263

[AAPPS95] P. K. Agarwal, B. Aronov, Pach J., R. Pollack, M. Sharir, Quasi-Planar Graphs Have a Linear Number of Edges, *Combinatorica* **17** (1997), 1-9

[AE89] N. Alon, Erdős P., Disjoint edges in geometric graphs, *Discrete and Computational Geometry* **4** (1989), 287-290

[AFPS09] A. Ackerman, J. Fox, Pach J, A. Suk, On Grids in Topological Graphs, *25th ACM Symposium on Computational Geometry* (2009)

[AT07] E. Ackerman, Tardos G., On the maximum number of edges in quasi-planar graphs, *Journal of Combinatorial Theory* **A 114** (2007) 563-571

[AZ91] H. L. Abbott, B. Zhou, On small faces in 4-critical graphs, *Ars Combinatoria* **32** (1991), 203-207

[B79] O. V. Borodin, On acyclic colorings of planar graphs, *Discrete Mathematics* **25** (1979), 211-236

[B94] O. V. Borodin, Simoltaneous coloring of edges and faces of plane graphs, *Discrete Mathematics* **128** (1994), 21-33

[B95] O. V. Borodin, A new proof of the 6 color theorem, *Journal of Graph Theory* **19** (1995), 507-521

[BFKRS02] O. V. Borodin, D. G. Fon-Der Flaass, A. V. Kostochka, A. Raspaud, E. Sopena, Acyclic list 7-coloring of planar graphs, *Journal of Graph Theory* **40** (2002), 83-90

[BGRS05] O. V. Borodin, A. N. Glebov, A. Raspaud, M. R. Salavatipour, Planar graphs without cycles of lenght from 4 to 7 are 3-colorable, *Journal of Combinatorial Theory* **B 93** (2005) 303-311

[BW98] O. V. Borodin, D. R. Woodall, Weight of faces in plane maps, *Mat. Zametki* **64** (1998), 648-657

[C05] J. Cerny, Geometric graphs with no three disjoint edges, *Discrete and Computational Geometry* **34** (2005), 679-695

[CP92] V. Capoyleas, Pach J., A turan-type theorem on chords of a convex polygon, *Journal of Combinatorial Theory* **B 56(1)** (1992) 9-15

[D50] R. P. Dilworth, Adecomposition theorem for partially ordered sets, *Annals of Mathematics* **51** (1950), 161-166

[E02] Elekes Gy., Véges matematika, *Egyetemi jegyzet ELTE (2002)*

[EHJ01] H. Enomoto, M. Horňak, S Jendrol, Cyclic chromatic number of 3-connected plane graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **14** (2001), 121-137

[F] S. Felsner, Geometric Graphs and Arrangements (2004)

[F48] Fáry I., On straight-line representation of planar graphs, *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **11**: 229-233

[FP08] J. Fox, Pach J., Coloring K_k-free intersection graphs of geometric objects in the plane, *24th ACM Symposium on Computer Geometry* (2008) 346-354

[G73] B. Grünbaum, Acyclic coloring of planar graphs, *Israel Journal of Mathematics* **14** (1973) 390-408

[GK76] C. Greene, D. J. Kleitman, The structure of Sperner k-families, *Journal of Combinatorial Theory* **A 20** (1976), 41-68

[GKK96] W. Goddard, M. Katchalski, D. J. Kleitman, Forcing disjoint segments in the plane, *European Journal of Combinatorics* **17** (1996), 391-395

[H69] H. Heesch, Untersuchungen zum Vierfarbenproblem, *Hochschulskriptum 810ab, Bibliographisches Institut, Mannheim* (1969)

[HP3] H. Hopf, E. Pannwitz, Aufgabe No. 167, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* **43** (1934), 114

[K30] K. Kuratowski, Sur le probleme des courbes gauches en topologie, *Fundamental Mathematicae* **15** (1930), 225-241

[K84] Y. S. Kupitz, On pairs of disjoint segments in convex position in the plane, *Annals of Discrete Mathematics* **20** (1984) 203-208

[L40] H. Lebesgue, Quelques conséquences simples de la formule d'Euler, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **19** (1940), 19-43

[LCW07] X. Luo, M. Chen, W. Wang, On 3-colorable planar graphs without cycles of four lengths, *Discrete Mathematics* **103** (2007) 150-156

[LT79] R. J. Lipton, R. E. Tarjan, A separator theorem of planar graphs, *SIAM Journal on Applied Mathematics* **36** (1997) 117-189

[PA95] Pach J., P. K. Agarwal, Combinatorial Geomtry, *John Wiley, New York* (1995)

[PPST05] Pach J., R. Pinchasi, M. Sharir, Tóth G., Topological graphs with no large grids, *Graphs and Combinatorics* **21** (2005) 355-364

[PRT03] Pach J., R. Radoičić, Tóth G., Relaxing planarity of topological graphs, *Lecture Notes in Computer science* (2003) 221-232

[PRT04] Pach J., R.Radoičić, Tóth G., A generalization of quasi-planarity, *Contamporary Mathematics* **342** AMS (2004) 177-183

[PSS94] Pach J., F. Shahrokhi, Szegedy M., Applications of the Crossing Number, *Symposium on Computational Geometry* (1994) 198-202

[PT93] Pach J., Törőcsik J., Some Geometric Applications of Dilworth's Theorem. *Symposium on Computational Geometry* (1993) 264-269

[PT97] Pach J., Tóth G., Graphs Drawn with few crossings per edge, *Combinatorica* **17** (1997), 427-439

[RT08] R. Radoičić, Tóth G., The discharging method in combinatorial geometry and the Pach-Sharir conjecture, *Contemporary Mathematics* **453** (2008) 319-342

[SS01] M. Schaefer, D. Stefankovič, Decidability of string graphs, *Proceedings of the 33rd Annual Symposium on the Theory of Computing* (STOC 2001) 241-246

[SZ01] D. P. Sanders, Y. Zhao, On improving the edge-face coloring theorem, *Graphs and Combinatorics* **17** (2001), 201-212

[SZ02] D. P. Sanders, Y. Zhao, Coloring the faces of convex polyhedra so that like colors are far apart, *Journal of Combinatorial Theory* **B 85** (2002), 348-360

[SZ02b] D. P. Sanders, Y. Zhao, On the size of edge chromatic critical graphs, *Journal of Combinatorial Theory* **B 86** (2002), 408-412

[SZ95] D. P. Sanders, Y. Zhao, A note on the three coloring problem, *Graphs and Combinatorics* **11** (1995), 92-94

[T00] Tóth G., Note on geometric graphs, *Journal of Combinatorial Theory* **A 89** (2000) 126-132

[T80] W. P. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, *lecture nots, Princeton University* (1980)

[TT] Tardos G., Tóth G., Crossing stars in topological graphs, *Lecture Notes in Computer Science* **3742** Springer-Verlag, Berlin 184-197

[TV99] Tóth G., P. Valtr, Geometric graphs with few disjoint edges, *Discrete and Computation Geometry* **22** (1999) 633-642

[V68] V. G. Vizing, Some unsolved problems in graph theory, *Russian Mathematical Surveys 23 (1968), 125-141*

[W04] P Wernicke, Über den kartographischen Vierfarbensatz, *Annals of Mathemaics* **58** (1904), 413-426

[Z00] L. Zhang, Every planar graph with maximum degree 7 is of class 1, *Graphs and Combinatorics* **16** (2000), 467-495