

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Ács Bernadett
matematikus hallgató

Síkfedések szétbonthatósága

SZAKDOLGOZAT

Témavezető:

Tóth Géza, tudományos tanácsadó
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Budapest, 2010.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Háromszögek	10
3. Konvex sokszögek	33
4. Több réteg	43
5. Ellenpéldák	53

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Tóth Gézának az érdekes témát és a minden részletre kiterjedő hosszú konzultációkat, melyek során sokat tanultam. Hálás vagyok türelméért és a sok biztatásért, amelyet tőle kaptam.

Köszönöm Kiss Györgynek, hogy mint belső konzulensem, lehetővé tette e dolgozat megvalósítását.

Köszönöm Terpai Tamásnak a formai megvalósítás, valamint a hibák felkutatása és javítása során nyújtott segítségét.

1. fejezet

Bevezetés

Legyen $\mathcal{P} = \{P_i \mid i \in I\}$ síkbeli ponthalmazok egy családja. Azt mondjuk, hogy \mathcal{P} a síknak **m -rétegű fedése**, ha a sík minden pontjához létezik legalább m különböző P_i , mely az adott pontot tartalmazza. Az 1-rétegű fedést egyszerűen **fedésnek** nevezzük. Egy P_i fedi az x pontot, ha tartalmazza azt.

1.1. Definíció. Egy P síkbeli ponthalmazt **fedés-szétbonthatónak** (*cover-decomposable*) nevezünk, ha létezik olyan $m = m(P) \in \mathbb{N}$ szám, hogy a sík P eltoltjaival való tetszőleges m -rétegű fedése szétbontható két fedéssé, azaz két diszjunkt halmazba sorolhatók az eltoltak úgy, hogy a két halmaz a sík egy-egy fedését alkotja.

Pach János fogalmazta meg először a kérdést: milyen feltételeknek kell teljesülniük egy ponthalmazra, hogy a fenti tulajdonságú legyen? Ebben a témában írt első cikkében [1] az alábbi speciális esetet bizonyította, illetve megfogalmazta az utána következő sejtést.

1.2. Tétel. (Pach) [1] *Minden középpontosan szimmetrikus nyílt konvex sokszög fedés-szétbontható.*

1.3. Sejtés. *Minden síkbeli konvex ponthalmaz fedés-szétbontható.*

Később többen is foglalkoztak a problémával, és további eseteket sikerült bizonyítani.

1.4. Tétel. (Pach, Mani) [2] *A nyílt egységkörlap fedés-szétbontható. A sík pontjainak az egységkörlap eltoltjaival való tetszőleges 33-rétegű fedése szétbontható két fedéssé.*

1.5. Tétel. (Tardos, Tóth) [3] *Minden nyílt háromszög-lap fedés-szétbontható. A sík pontjainak adott nyílt háromszög eltoltjaival való tetszőleges 43-rétegű fedése szétbontható két fedéssé.*

1.6. Tétel. (Pálvölgyi, Tóth) [4] *Minden nyílt konvex sokszög-lap fedés-szétbontható.*

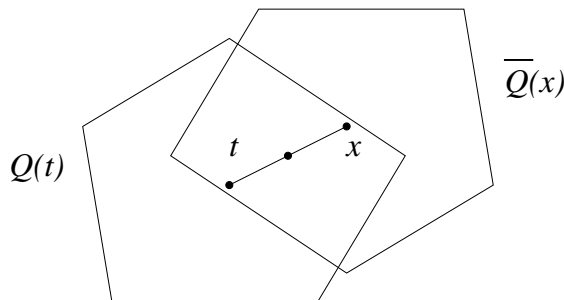
Jelen dolgozatban a sokszögekre vonatkozó eddigi eredményekről adunk áttekintést. Az első fejezetben az eredeti, Pach Jánostól származó, középpontosan szimmetrikus sokszögekre vonatkozó [1] bizonyítást vázoljuk, ez még 1986-ban jelent meg. 1988-ban megszületett az egységkörlapokról szóló [2] bizonyítás is, de máig csak kézirat. Annyira bonyolult, hogy a szerzők állandóan reménykednek, hogy sikerül leegyszerűsíteni. Ez után 18 évig nem foglalkozott senki a problémával. Tardos Gábor és Tóth Géza [3] cikke a háromszögekről már 2007-ben jelent meg. A 2. fejezetben ezt az eredményt ismertetjük és több ötlet felhasználásával megjavítjuk a szerzők által adott konstrukciót, melyből egy további ötlet segítségével jobb korlát kapható. A 3. fejezetben Pálvölgyi Dömötör és Tóth Géza konvex sokszögekre adott, 2010-ben megjelent [4] bizonyítását foglaljuk össze. Ez azért érdekes, mert a szerzők egy új fogalom bevezetésével kicsit másként közelítik meg a problémát és egy erősebb eredményt kapnak, melyből végül következik az 1.6. Tétel. A 4. fejezetben Matt Gibson és Kasturi Varadarajan [5] cikkében leírt eredményeket ismertetjük. A szerzők egy algoritmust adnak meg, mely polinomiális időben megoldja háromszögekre a fedés-szétbontási feladat egy általánosabb, gyakorlatban is alkalmazható változatát. Mi ennek módosításával egy egyszerűbb, fedés-szétbontási feladatot megoldó változatot adunk meg, mely elég vastag (nagy rétegszámú) fedés esetén nem csak kettő, hanem több fedéssé is szét tud bontani. Két fedéssé bontás esetén ebből rosszabb eredmény következik, mint amit a 2. fejezetben leírnunk, de több réteg esetén lineáris korlátot ad, mely jobb, mint bármely eddigi eredmény. Sőt tetszőleges középpontosan szimmetrikus konvex sokszögre is kiterjeszhető ez az algoritmus és ezekre is lineáris korlátot kapunk. Az 5. fejezetben pedig Pálvölgyi Dömötör [7] cikke alapján áttekintjük a fedés-szétbonthatóság speciális változataival, valamint a 2- és 3-dimenziós kivételekkel kapcsolatos eddigi eredményeket.

Minden sokszögekre vonatkozó bizonyítás Pach János ötletén alapul, ezért először tekintsük az eredeti tételt és a bizonyítás egy összefoglalását.

1.7. Tétel. (Pach) *Legyen P egy olyan nyílt halmaz a síkon, melynek határa egy középpontosan szimmetrikus konvex sokszög. Ekkor létezik olyan $k = k(P) \in \mathbb{N}$ szám, hogy a síknak P eltoltjaival való tetszőleges k -rétegű fedése szétbontható két fedéssé.*

Bizonyítás vázlat. Legyen $\mathcal{P} = \{P_i \mid i \in I\}$ a P eltoltjainak, $\mathcal{S} = \{s_i \mid i \in I\}$ az eltoltak középpontjainak a halmaza. Jelölje $P(t)$ a P azon eltoltját, melynek középpontja a t pont.

Pach János ötletének lényege, hogy az eredeti feladat duális átfogalmazását tekinti, ez tetszőleges Q ponthalmazra alkalmazható. Jelölje \overline{Q} a Q súlypontjára vett középpontos tükröképét, és hasonlóan az előzőhöz $\overline{Q}(s)$ annak egy eltoltját. Az x pontot fedi $Q(t)$ pontosan akkor, ha a t pont eleme $\overline{Q}(x)$ -nek. Ez az alábbi 1.1. ábrának a tx szakasz felezőpontjára való középpontos tükrözésével látható be. A mi esetünkben P középpontosan szimmetrikus alakzat, $\overline{P} = P$, ezért az előbbi érvelésnél törölni lehet a felülvonásokat, $x \in P(t)$ pontosan akkor, ha $t \in P(x)$.



1.1. ábra. Az $x \in Q(t)$ pontosan akkor, ha $t \in \overline{Q}(x)$.

A sík minden x pontját legalább k eltolt fedi, az előzőek alapján ez azzal ekvivalens, hogy $P(x)$ legalább k pontot tartalmaz \mathcal{S} -ből. A \mathcal{P} elemeinek két osztályba sorolását úgy fogjuk megadni, hogy a középpontokat kiszínezzük két színnel, pirossal és kékkel. Ekkor egy x pont fedve van mindkét színű fedésnél akkor és csak akkor, ha $P(x)$ tartalmaz mindkét színű \mathcal{S} -beli pontot.

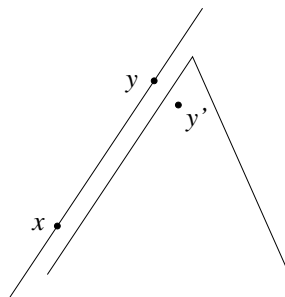
Az módszer másik lényeges ötlete, hogy nem egyszerre színezzük \mathcal{S} összes pontját, hanem kis darabokat tekintünk belőle. Feldaraboljuk a síkot olyan kis diszjunkt korlátos régiókra, melyekbe P egy eltoltjának csak legfeljebb két szomszédos oldala metszhet bele. Az eredeti bizonyításban négyzetrácsot ad meg a szerző, de mást is lehet alkalmazni. Külön tekintjük az egyes cellákat, mert ekkor P egy eltoltjával való metszés helyett vizsgálhatjuk a megfelelő **ékekkel** való metszést.

Két közös kezdőponttal rendelkező félegyenes két darabra vágja a síkot, ezeket nevezzük ékeknek. Az ék csúcsa a félegyenesek közös pontja, szöge az általuk bezárt, az ék belsejében mért szög. Az ék határa a két félegyenes, melyet a zárt ék tartalmaz, a nyílt nem.

Feltehető, hogy \mathcal{S} pontjai általános helyzetűek olyan értelemben, hogy semelyik két pont által meghatározott egyenes sem párhuzamos P egyik oldalával sem. Ha ez mégsem lenne igaz, akkor a pontok kis mértékű elmozdításával elérhető. Minden $y \in \mathcal{S}$ pont esetén tekintsük az összes tőle különböző pontra illeszkedő, P oldalaival

párhuzamos egyenest. Ha ezek között van olyan, amely illeszkedik y -ra, akkor y -t egy kicsit elmozdítjuk. Azon egyenesek, amelyek elkerülik y -t, egy sokszöget határoznak meg körülötte. Úgy választjuk meg az y pont új helyzetét, hogy továbbra is ennek a sokszögnek a belsejében maradjon, de ne illeszkedjen a pontok egyik egyenesére sem, így ha y egy egyenesnek valamelyik oldalán volt, akkor ez továbbra is teljesül. Ha nincs y -ra illeszkedő egyenes, akkor nem változtatunk semmit. A P eltoltjaival továbbra is ki lehet metszeni \mathcal{S} -ből ugyanazokat a ponthalmazokat, mint a változtatás előtt, de keletkezhetnek újabb metszések is. Az 1.2. ábrán látható, hogy ha y pont új helyzete y' lesz, akkor azt egy megfelelő ékkel ki lehet metszeni \mathcal{S} -ből az x pont nélkül. A tételek során az ékekre határozunk meg feltételeket, az áthelyezésekkel csak annyi változás történhet, hogy ezeknek több ékre kell teljesülniük.

Az nem fordulhat elő, hogy egy y pont, amelyet már sorra vettünk, elromoljon egy másik pont miatt, mert éppen úgy határozzuk meg a javításnál az aktuális pont új helyzetét, hogy ne kerüljön rá más pontokra illeszkedő egyenesekre, és ezek között az y pont egyenesei is szerepelnek. Ez a tulajdonság azért hasznos, mert az ékek eltolásakor a pontok egyesével kerülnek be illetve ki az ékből.



1.2. ábra. Az y' pontot ki lehet metszeni az x pont nélkül is, pedig y -t nem lehetett.

A továbbiakban a könnyebb érthetőség kedvéért tegyük fel, hogy P egy középpontosan szimmetrikus négyszög (paralelogramma), a csúcsai legyenek A, B, C és D . Más középpontosan szimmetrikus síkidomokra hasonlóan menne a bizonyítás. Mindegyik csúcshoz tekintsünk egy nyílt éket, melynek szöge egyállású a síkidom megfelelő belső szögével, nevezzük ezeket P -ékeknek. P helyett ilyen ékekkel fogjuk metszeni \mathcal{S} -nek az egyes cellákba eső részalmazait. Minden $X \in \{A, B, C, D\}$ esetén a megfelelő ék eltoltjait nevezzük X -ékeknek, ha egy ilyen ék csúcsa a p pont, jelölje azt $X(p)$.

1.8. Definíció. A $\mathcal{P} = \{P_i \mid i \in I\}$ síkfedést **lokálisan végesnek** nevezzük, ha minden kompakt halmaz véges sok P_i -t metsz.

A P tartomány nyílt, ezért feltehető, hogy az eltoltjaival való fedés lokálisan véges. Nyíltakkal való tetszőleges k -rétegű fedésből ugyanis kiválasztható lokálisan véges k -rétegű fedés. Minden pontot fed legalább k eltolt, tekintsünk ezek közül pontosan k példányt. Mivel P nyílt, nem csak a pontot, hanem annak egy kis kör-lap alakú környezetét is lefedik az eltoltjai. Tetszőleges korlátos halmazt lefednek a pontjaira, mint középpontokra illesztett körlapok, és definíció szerint nyíltakkal való tetszőleges fedéséből kiválasztható véges fedés. Tekintsünk egy körlapokkal való véges fedést, illetve az ezekhez tartozó eltoltjait P -nek. Ezek továbbra is k -rétegű fedését alkotják a kompakt halmaz pontjainak és számuk véges. Emiatt feltehető, hogy minden cella csak véges sok \mathcal{S} -beli pontot tartalmaz.

Feltehető, hogy minden \mathcal{S} -beli pont valamely cella belsejébe esik. Rácsfelbontás esetén ennek belátásához vegyünk egy olyan egyenest, amely nem párhuzamos egyik rácsegyenessel sem. Megszámlálható sok rácsegyenes létezik, de egy tetszőleges ponton keresztül kontinuum sok különböző egyenes húzható, tehát tudunk ilyen egyenest választani. Toljuk el ezen egyenes mentén az egész rácsot. Mivel a rács celláinak száma megszámlálható, és minden cellába véges sok pont esik, \mathcal{S} megszámlálható. Az egyenes mentén tolva azonban kontinuum féle különböző helyzete lehet a rácsnak, így lesz olyan, amikor egyik \mathcal{S} -beli sem esik cellahatárra. (De igazából az sem baj, ha valamelyik pont cellahatárra esik, mert a két (vagy több) határolt cella bármelyikébe sorolhatjuk.)

A P egy eltoltja legfeljebb csak valamilyen korlátos számú cellát metszhet, legyen ez a szám N . Ha az eltolt tartalmaz legalább k pontot, akkor a skatulya elv alapján létezik olyan cella, amelybe ezek közül legalább $m = \frac{k}{N}$ pont esik. Ezt felhasználva átfogalmazható a tétel cellákra.

1.9. Tétel. *A P síkidom fedés-szétbontható, ha tetszőleges \mathcal{S} véges ponthalmaz esetén létezik olyan $m \in \mathbb{N}$ szám és a pontoknak egy színezése két színnel, hogy minden P -ék, mely legalább m \mathcal{S} -beli pontot tartalmaz, mindkét színűt tartalmaz.*

A G cellát fogjuk vizsgálni, a továbbiakban \mathcal{S} jelölje csupán a G belsejébe eső középpontok halmazát.

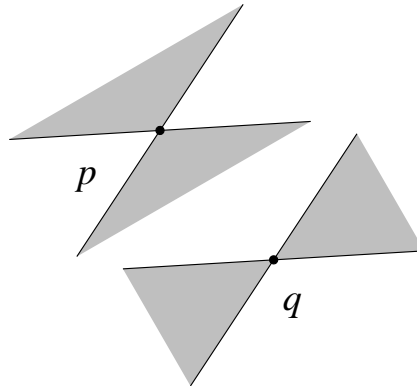
1.10. Definíció. *\mathcal{S} ponthalmaz valamely $X \in \{A, B, C, D\}$ ék szerinti **határa** legyen $Bd^X(\mathcal{S}) = \{s \in \mathcal{P} \mid X(s) \cap \mathcal{S} = \emptyset\}$, az elemeit nevezzük **X -határpontoknak**. Az összes P -ék szerinti határok unióját jelölje $Bd(\mathcal{S})$. Az \mathcal{S} -beli nem határpontokat pedig nevezzük **belső pontoknak**.*

1.11. Definíció. *Két határpontot nevezünk **szomszéd**nak, ha létezik olyan P -ék, amely pontosan ezt a két pontot tartalmazza $Bd(\mathcal{S})$ -ből.*

Ez a szomszédosság definíció a határpontoknak meghatározza egy természetes rendezését, amelynél két pont egymás után következnek, ha szomszédok. A határok rendezéseit egymás után fűzve az egész $Bd(\mathcal{S})$ -en kapunk egy ciklikus sorrendet, körbe tudunk menni a határpontokon. Ez a sorrend azonban speciális olyan szempontból, hogy bizonyos pontok előfordulhatnak benne kétszer is. Nevezzük ezeket a határpontokat **szinguláris pont**nak, a többit **reguláris pont**nak. Egy pont lehet több szomszédos csúcs szerint határpont, de ekkor a sorrendben csak egyszer szerepel.

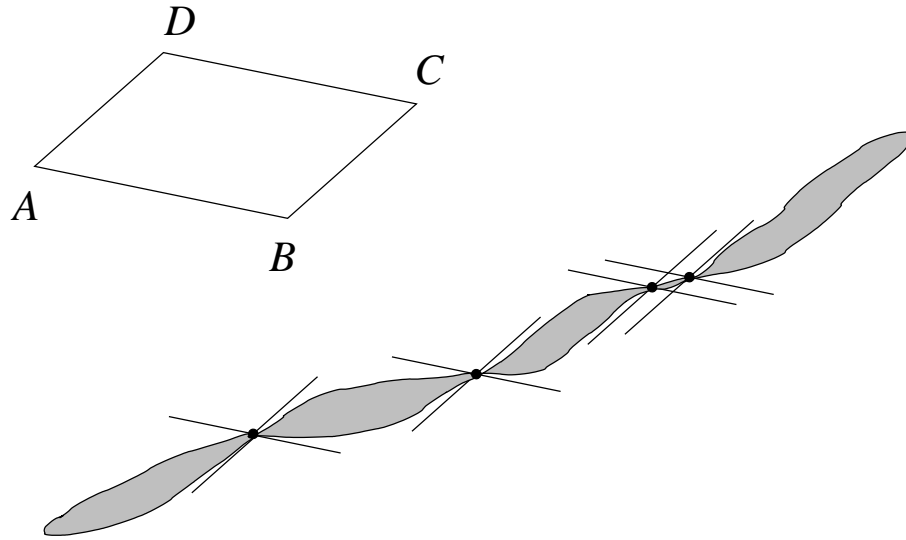
1.12. Lemma. *Ha létezik szinguláris pont, akkor az csak valamelyik csúcs és annak középpontosan szimmetrikus tükörképe szerint lehet határpont. Továbbá ha valamelyik ilyen csúcspárhoz tartozik szinguláris pont, akkor a többihez nem.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy p az A, C és q a B, D csúcspárhoz tartozó szinguláris pont, ekkor a határban megtalálható az 1.3. ábrán látható két részlet. A határpont definíciója szerint csak a szürke részeken lehetnek pontok, emiatt kerül q a p -hez tartozó valamelyik szürke részbe. Ekkor azonban p miatt q nem lehet B -határpont, ez pedig ellentmondás. A p is kerülhetett volna valamelyik q -hoz tartozó szürke részbe, de abból ugyanígy ellentmondásra jutottunk volna. \square



1.3. ábra. Két különböző csúcspárhoz tartozó szinguláris pont.

Ha egy P -ék metszi \mathcal{S} -t, akkor a metszet három diszjunkt részhalmaz uniójaként írható fel: egy intervallum (szomszédos határpontok sorozata), mely tartalmaz legalább egy pontot az adott csúcsához tartozó határból, belső pontok, és egy másik intervallum, amely tartalmaz legalább egy pontot a csúcs középpontos tükörképéhez tartozó határból. Az utóbbi kettő bármelyike lehet üres.



1.4. ábra. $Bd(S)$ középpontosan szimmetrikus konvex sokszög esetén.

Ötletek a határ színezésére:

- Színezzünk minden határpontot kékre és minden belső pontot pirosra. Azonban előfordulhat olyan ék, amely sok pontot tartalmaz a határból, de belső pontot nem, minden pontja kék, tehát ez a színezés nem jó.
- Színezzük a határ pontjait felváltva, a belső pontokat pedig pirosra. (A határpontok számának paritásából illetve a szinguláris pontok miatt ezzel lehetnek gondok, nem mindig lehet szabályosan felváltva színezni.) Ez a színezés akkor lenne jó, ha minden ék, amely elég sok pontot tartalmaz, tartalmazna több határpontot. Előfordulhat azonban, hogy egy ék csak egy határpontot tartalmaz, mely éppen piros, és azon kívül sok belső pontot. Ekkor az nem tartalmaz kék pontot, tehát ez a színezés sem jó.

Az előbbi észrevételek miatt érdemes külön tekinteni azokat a pontokat, amelyeket ki lehet metszeni egyedül a határból úgy, hogy az ék egyébként sok pontot tartalmaz. Több cikkben előfordul az alábbihoz hasonló definíció, de ezek között a síkidom tulajdonságaiból adódóan nagy eltérések lehetnek. Mindig úgy határozzuk meg a definíciót, ahogy az a bizonyítás szempontjából kézenfekvő. Esetünkben az alábbi változatot érdemes tekinteni.

1.13. Definíció. Minden $X \in \{A, B, C, D\}$ esetén egy $r \in Bd^X(S)$ határpontot nevezünk **gazdagnak**, ha van olyan X -ék, amely pontosan 2 pontot tartalmaz, r -et és egy belső pontot.

Először a határpontokon adunk meg egy fekete-fehér színezést, majd ennek alapján határozzuk meg \mathcal{S} pontjainak egy megfelelő színezését pirossal és kékkel. A határpontok színezése, $f: Bd(\mathcal{S}) \rightarrow \{fekete, fehér\}$ legyen olyan, hogy nincs két szomszédos fekete és három szomszédos fehér pont. Az alábbiakban megadunk egy ilyen színezést.

Ha nincs szinguláris pont a határon, akkor egy tetszőleges pontból elindulva körbeme gyünk a határpontokon a ciklikus sorrend szerint és felváltva színezzük azokat fehérrel kezdve. $Bd(\mathcal{S})$ elemszámának paritásától függően vagy végig felváltva lesznek a színek, vagy a kiindulási pontnál lesz két fehér egymás mellett, de két szomszédos fehér megengedett.

Ha vannak szinguláris pontok, akkor az egyik szélső szinguláris ponttól indulunk, és mindig a következő szinguláris pont felé haladva színezzük, egyszerre a két oldalon. Az első szinguláris pont legyen fekete, és először színezzük ki a rá illeszkedő hurokszerű határ darabot felváltva, fehérrel kezdve. Amennyiben a hurok utolsó reguláris pontja fekete lenne, színezzük ezt mégis fehérre, mert ez szomszédja az első szinguláris pontnak, amely fekete, és szomszédos feketék nem megengedettek. Ha a következő szinguláris pont nem szomszédja az utoljára kiszínezettnek egyik oldalon sem, akkor legyen az is fekete, a köztes reguláris határpontokat pedig színezzük felváltva úgy, hogy a két szélső fehér legyen. Ha a következő szinguláris pont szomszédja az utoljára elértnek, akkor színezzük azt fehérre. Ha mindkét oldal szerint szomszédok, akkor továbblépünk, ha az egyik oldalon vannak reguláris pontok közöttük, akkor színezzük ezeket a feketétől haladva a fehér felé, felváltva, fehérrel kezdve, és a végén itt is legfeljebb csak 2 fehér essen egymás mellé. A fehér szinguláris pont után következő szinguláris pont mindenképpen fekete és a közéjük eső reguláris pontok színezését (ha létezik ilyen), feketével kezdjük ügyelve, hogy az utolsó fehér legyen. A végén a hurokszerű határ darabot ugyanúgy színezzük, mint az elején, az egyetlen szinguláris ponttól különböző színnel kezdve és befejezve.

Ennek segítségével adjuk meg \mathcal{S} piros-kék színezését az alábbi g függvény szerint.

$$g(x) := \begin{cases} kék & \text{ha } x \in Bd(\mathcal{S}) \text{ és } x \text{ gazdag, vagy } f(x) = \text{fehér} \\ piros & \text{egyébként} \end{cases}$$

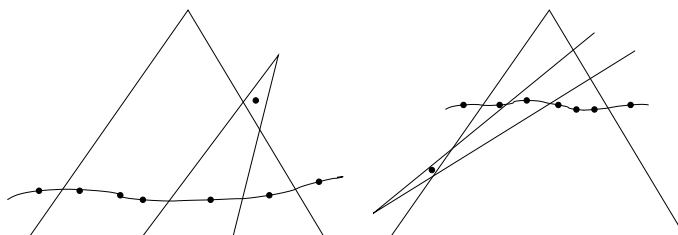
1.14. Megjegyzés. Ennél a színezésnél két szomszédos határpont közül legalább az egyik kék, mert a fekete-fehér színezésnél nincs két szomszédos fekete, így az egyik biztosan fehér lesz és emiatt g -nél kék. A belső pontok pirosak.

1.15. Állítás. Minden $X \in \{A, B, C, D\}$ esetén, ha egy X -ék legalább 10 pontot tartalmaz \mathcal{S} -ből, akkor tartalmaz kék és piros pontot is.

Bizonyítás. Két esetet különböztetünk meg:

A eset. Ha $X \cap (\mathcal{S} \setminus Bd(\mathcal{S})) \neq \emptyset$, azaz a metszetben belső pontok is vannak, mivel ezek pirosak, csak kék pont létezését kell belátni. Ha $|X \cap Bd(\mathcal{S})| \geq 3$, akkor amiatt, hogy a határral való metszet két intervallum uniója, a 3 pontból legalább 2 szomszédos, és azt láttuk az előbbi megjegyzésben, hogy ezek közül legalább az egyik kék. Ha $|X \cap Bd(\mathcal{S})| \leq 2$ és X nem tartalmaz szomszédos határpontokat, akkor az egyetlen X -határpont gazdag és emiatt kék.

B eset. Ha $X \cap (\mathcal{S} \setminus Bd(\mathcal{S})) = \emptyset$, akkor W tartalmaz egy legalább 5 pontú intervallumot a határból, melyek között kék pont létezése ugyanúgy következik, mint az A esetben. Tegyük fel indirekt, hogy minden pont kék. Mivel a határon nem lehet 3 szomszédos fehér, ezért a legalább 5 hosszú intervallumban kell lennie olyan határpontnak, mely középső és f szerint fekete. Tehát ez a pont csak amiatt lehet kék, mert gazdag. De az ék nem tartalmaz belső pontokat, ezért a gazdagság miatt létező belső pontot is tartalmazó éknek valamerre ki kell nyúlnia a vizsgált ékünkéből, az alábbi 1.5. ábrán láthatók az esetek. Két ilyen ék azonban nem tarthat egy konvex sokszög csúcsaihoz. Tehát ez a pont nem lehet gazdag, vagyis piros. \square



1.5. ábra. Az ék nem tartalmaz belső pontot, emiatt a gazdagságot igazoló ék kilóg a vizsgált ékből.

A sík minden cellájának pontjait ezzel a módszerrel színezve olyan színezését kapjuk \mathcal{S} pontjainak (az eredeti értelemben véve), hogy mindkét színű pontokhoz tartozó eltoltak külön-külön egy fedését alkotják a síknak. \square

2. fejezet

Háromszögek

Tetszőleges nyílt háromszöglapról is belátható, hogy fedés-szétbontható. Mivel azonban a háromszög nem középpontosan szimmetrikus, nem alkalmazható rá az 1. fejezet bizonyítása. Sőt annyira más ez a feladat, hogy az előzőek egyszerű átfogalmazásával sem nyerhető jó bizonyítás. Természetesen ilyenkor is tekinthetjük a feladat duálisát, továbbá valamilyen cellafelbontást és ékekkel való metszést. Egy ékkel való metszet itt is egy intervallumot tartalmaz a hozzá tartozó határból, és tartalmazhat belső pontokat. De sokkal bonyolultabb leírni, hogy a másik két határból milyen pontot tartalmazhat, mert az nem lesz feltétlenül intervallum. Emiatt más eszközöket kell alkalmazni a bizonyítás során, és másként fogjuk definiálni a gazdag pontot, valamint a színezést.

Ebben a fejezetben Tardos Gábor és Tóth Géza [3] cikkével foglalkozunk, melyben a szerzők konstruktív bizonyítást adnak tetszőleges nyílt háromszög fedés-szétbonthatóságára. Megadnak egy olyan színezést, mely szétbont egy legalább 43-rétegű fedést két fedéssé. Az alábbiakban belátjuk, hogy a konstrukció javítható és már 19 réteg is elég a szétbonthatósághoz.

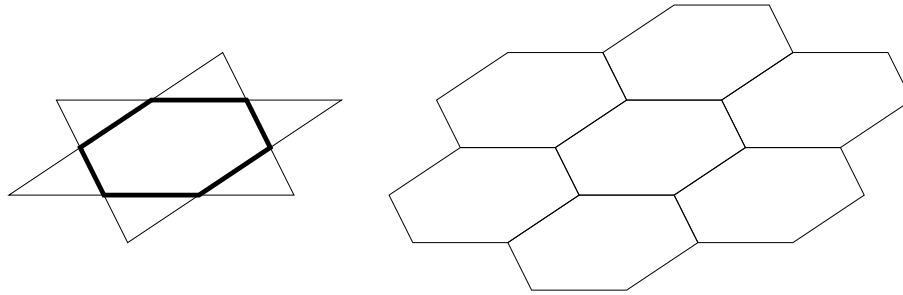
2.1. Tétel. *Adott T nyílt (vagy zárt) háromszög eltoltjainak lokálisan véges rendszere két részhalmazra osztható olyan módon, hogy minden ponthoz, melyet legalább 19 háromszög fedett, mindkét halmazban található a pontot fedő háromszög.*

2.2. Megjegyzés. Nyílt háromszögek esetén ebből következik, hogy tetszőleges 19-rétegű fedés szétbomlik két fedéssé, mert tetszőleges k -rétegű fedésből kiválasztható lokálisan véges k -rétegű fedés, ezt láttuk az 1. fejezetben. Zártakra ez nem igaz, de lokálisan véges fedés esetén ezekre is működik a bizonyítás.

Bizonyítás. Mivel az itt leírt bizonyítás legnagyobb része a fenti cikk ötleteit használja, először tekintsük az eredeti bizonyítást. Ebben az esetben is a szerzők Pach János duális átfogalmazásából indultak ki.

Jelölje $\mathcal{C} = \{T(x_i) \mid i \in I\}$ a T nyílt háromszög-lap eltoltjainak egy rendszerét, $\mathcal{S} = \{x_i \mid i \in I\}$ a súlypontok halmazát. A sík minden p pontjára $p \in T(x_i)$ akkor és csak akkor, ha $x_i \in \overline{T}(p)$. (\overline{T} a T háromszög origóra vonatkozó középpontos tükröképét jelöli.) Tehát a \mathcal{C} rendszer legalább 19-rétegben fedi a p pontot, ha $\overline{T}(p)$ legalább 19 pontot tartalmaz \mathcal{S} -ből.

Legyen $H = T \cap \overline{T}$, mely egy középpontosan szimmetrikus hatszög, ezért lehet vele parkettázni a síkot. Ez a parkettázás jó cellafelbontása lesz a síknak, mert egy hatszög csak úgy metszheti egyszerre a háromszög minden oldalát, ha azok a hatszög 3 páronként nem szomszédos élére esnek. Ebben az esetben a háromszög tartalmazza az egész hatszöget, egyébként pedig legfeljebb két szomszédos oldala metsz bele. Így valamely csúcshoz tartozó ékkel való metszet a hatszögnek ugyanazon pontjait tartalmazza, mint a háromszög egy eltoltja.

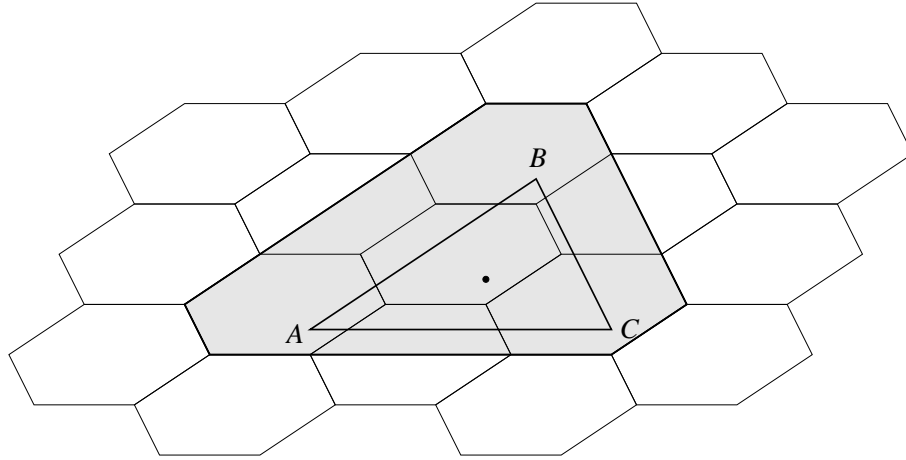


2.1. ábra. Hatszöges cellafelbontás.

A továbbiakban mindig \overline{T} eltoltjaival, illetve a szögeinek megfelelő ékekkel fogjuk metszeni a síkot. Az egyszerűbb jelölés és ábrázolás érdekében azonban tekintsük a sík, illetve a lefedendő ponthalmaz középpontos tükröképét, és vizsgáljuk a T eltoltjaival való metszeteket. Ezekre pontosan akkor igaz, hogy megfelelő színezés esetén tartalmaznak mindkét színű pontot, ha az eredeti feladatban \overline{T} -re igaz. T csúcsai legyenek A, B és C .

A T egy eltoltja legfeljebb 6 hatszögbe metszhet bele. Ennek belátásához tekintsük egy tetszőleges $T(p)$ eltolt esetén azt a hatszöget, amely tartalmazza a p pontot. Ezt biztosan metszi a háromszög, de ki is nyúl belőle. Legfeljebb azonban csak annyira nyúlhat ki, hogy a súlypontja a hatszög határára esik. Az ilyen háromszögek a 2.2. ábrán látható, szürkével jelölt területre eshetnek csak, ezt pedig

fedí a kitüntetett hatszög és a közvetlen körülötte elhelyezkedő 6 hatszög. Mind a hét hatszöget nem metszheti egy háromszög, mert akkor a középsőt teljes egészében tartalmaznia kellene, ez azonban H definíciója miatt nem lehetséges. A T egy elforgatottja tudna metszeni 7 hatszöget, de ennél a feladatnál csak eltoltakat engedünk meg. Hat hatszöget metsző eltolt viszont létezik, ilyen szintén a 2.2. ábrán látható.



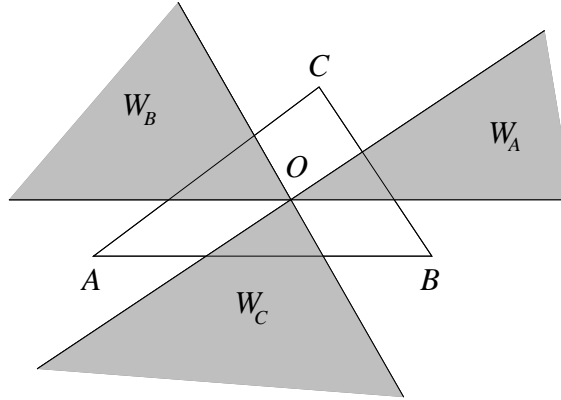
2.2. ábra. Egy háromszög eltolt legfeljebb 6 hatszöget metszhet.

Külön fogjuk tekinteni az egyes hatszögeket, ezért a továbbiakban \mathcal{S} jelölje csupán azon háromszög-súlypontokat, melyek a vizsgált hatszögbe esnek. Mivel a fedés lokálisan véges és a hatszög korlátos, véges sok ilyen pont lesz. Feltehető továbbá, hogy mind a hatszög belsejébe esnek, ezt láttuk az 1. fejezetben.

Bevezetünk egy természetes lineáris rendezést a síkon a háromszög BC oldalával párhuzamos egyeneseken úgy, hogy az A csúcson áthaladó egyenes kisebb legyen, mint a BC oldal egyenese. Ezt kiterjesztjük részbenrendezéssé a pontokon, azaz x legyen kisebb, mint y , ha a BC -vel párhuzamos egyenesek közül az x -re illeszkedő az előző rendezés szerint kisebb, mint az y -ra illeszkedő, jelölésben $x <_A y$. Hasonlóan definiáljuk $<_B$ -t az AC -vel párhuzamos, és $<_C$ -t az AB -vel párhuzamos egyenesek szerint. Feltehető, hogy \mathcal{S} pontjai általános helyzetűek olyan értelemben, hogy semelyik két pont által meghatározott egyenes sem párhuzamos a háromszög egyik oldalával sem, ezt is láttuk az 1. fejezetben. Emiatt nem létezhet két olyan pont, amelyeket valamelyik rendezés szerint nem tudunk összehasonlítani, így $<_A$, $<_B$ és $<_C$ lineáris rendezéseket határoznak meg az \mathcal{S} pontjain.

Jelölje W_A azon p pontok halmazát, melyekre $p <_B O$ és $p <_C O$. Ez egy nyílt ék, szöge egyállású a T háromszög A csúcsánál fekvő szöggel, és csúcspontja az origó. $W_A(p)$ jelölje W_A -nak azt az eltoltját, melynek csúcspontja p , a továbbiakban az

ilyen ékeket A -ékeknek fogjuk nevezni. Látható, hogy $W_A(A)$ a tartalmazásra nézve legszűkebb olyan A -ék, mely tartalmazza a T háromszöget. Hasonlóan definiáljuk a $W_B(q)$ és $W_C(r)$ ékeket a B és C csúcsok szögeivel egyállásúnak, és nevezzük ezeket B - illetve C -ékeknek. A T háromszög helyett ilyen ékekkel fogjuk metszeni az \mathcal{S} ponthalmazt. (Ha a T háromszög zárt, akkor zárt ékeket tekintünk.)



2.3. ábra. A háromszög csúcsaihoz tartozó ékek.

A következő definíciók lényegében megegyeznek az 1. fejezetben leírtakkal, de háromszög esetén a határ a korábbtól lényegesen eltérő tulajdonságokkal rendelkezik, emiatt tekintjük ezeket újból. A tulajdonságok belátásánál az előbbi rendezésnek fontos szerepe van.

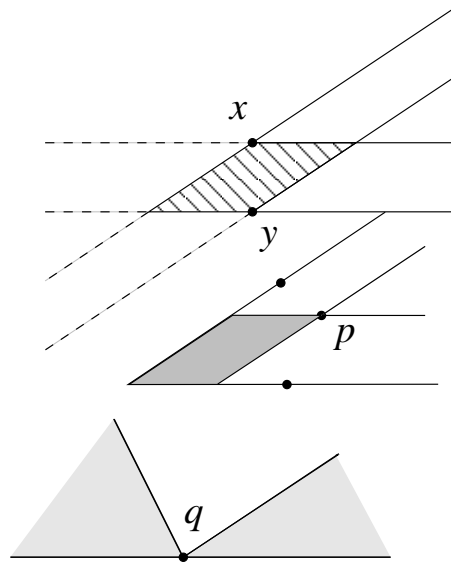
2.3. Definíció. $X = A, B, C$ esetén a $p \in \mathcal{S}$ pontot nevezzük X -**határpont**nak, ha $W_X(p) \cap \mathcal{S} = \emptyset$. A p pontot nevezzük **határpont**nak, ha X -határpont valamely X esetén. Ha p nem határpont, akkor nevezzük **belső pont**nak.

2.4. Definíció. $X = A, B, C$ esetén nevezzünk két X -határpontot X -**szomszéd**nak, ha létezik olyan X -ék, amely csak ezt a két pontot tartalmazza az X -határból. Nevezzünk két pontot **szomszéd**nak, ha X -szomszédok valamely X esetén.

A szomszédos határpontok láncait egymás után fűzve ilyenkor is kapunk egy ciklikus sorrendet a határpontok halmazán, és lehetnek olyan pontok, amelyek a sorrendben többször is előfordulnak. Az egyszerűbb szóhasználat érdekében egy p X -határpont esetén nevezzük az $W_X(p)$ éket p **érintő ék**jének. Ha p több határnak is eleme, akkor vegyük értelemszerűen azt az érintő éket, amelyik csúcs szerinti határpontként tekintjük a p pontot.

1. Két szomszédos X -határpont esetén az érintő X -ékek szárainak meghosszabbításával kapott négy egyenes által közbezárt paralelogramma, a 2.4. ábrán az

x és y pontokra illeszkedő ék sávozott része nem tartalmaz \mathcal{S} -beli pontot. Ha mégis lenne itt pont, akkor határpont is lenne, amely rendezés szerint a két meglévő pont közé esik, így azok nem lennének szomszédok.



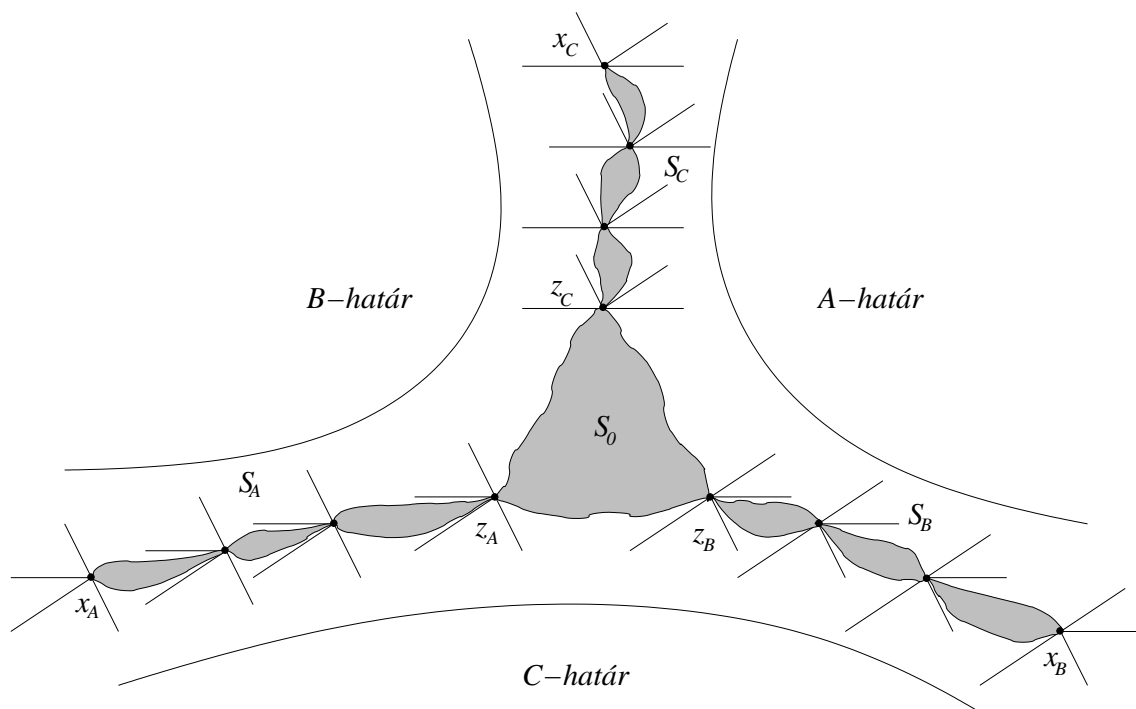
2.4. ábra. Határpontok tulajdonságai.

2. Ha p X -határpont, akkor tekintsük a tartalmazásra nézve maximális olyan X -éket, amely csak a p pontot tartalmazza az X -határból. A maximalitás miatt p szomszédjai az ék két szárán vannak. Nevezzük ezt p **gazdagság-bizonyító ékjének**. Ez az ék csak abban a paralelogrammában tartalmazhat pontokat, amelyet p -n keresztül az ék szárjaival párhuzamosan húzott egyenesek és az ék szárjai közbezárnak. A 2.4. ábrán p gazdagságbizonyító-ékje látható, csak a szürkével jelölt részen tartalmazhat pontokat. Ha máshol is lennének pontok, akkor tartalmazna további pontot a saját határból, de feltettük, hogy p az egyetlen.
3. Minden X -ék, amely tartalmaz \mathcal{S} -beli pontot, tartalmaz legalább egy X -határpontot. Az ék pontjai közül $<_X$ -minimálisnak az érintő ékje a rendezés definíciója miatt nem tartalmazhat \mathcal{S} -beli pontot, tehát ez egy X -határpont.
4. Ha az ék több X -határpontot is tartalmaz, akkor azok a ciklikus sorrendben egy intervallumot alkotnak. Ha az x és y határpontok elemei az éknek, akkor az ezek közé eső határpontok is, mert ezek csak az 1. pontban vizsgált, a két pont közé eső paralelogrammában lehetnek, 2.4. ábrán a sávozott terület, mely része az éknek.

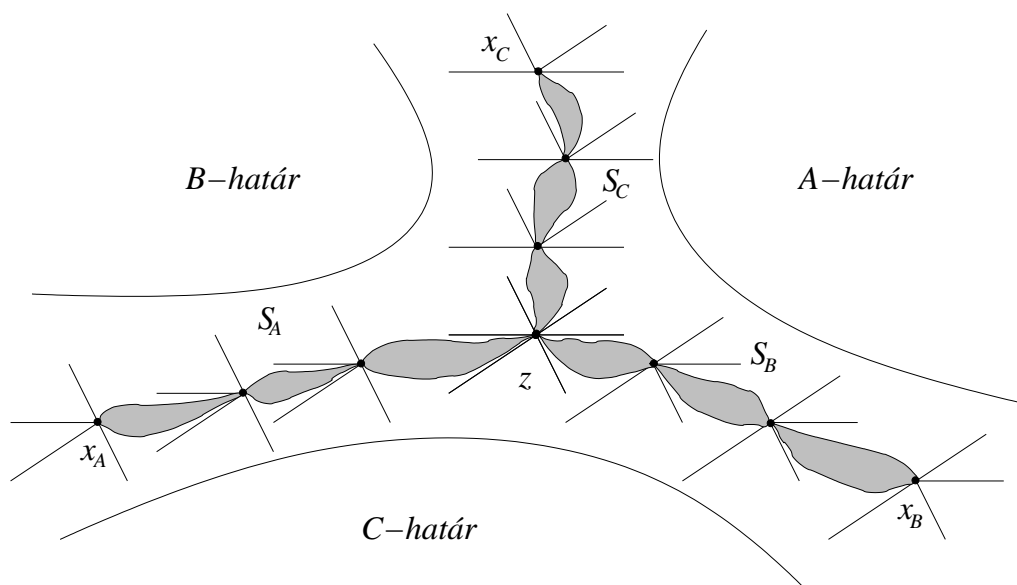
5. A 4. tulajdonság alapján következik, hogy mindhárom csúcshoz tartozó határ egy-egy intervallumot alkot. A $<_B$ szerint legkisebb A -határpont B -határpont is, és a $<_C$ szerint legkisebb A -határpont C -határpont is. Hasonló állítás igaz a B - és C -határra is.
6. Az A -határpontokon a $<_B$ és a $<_C$ rendezések egymáshoz képest fordított sorrendet határoznak meg. A 2.4. ábrán látható x és y A -határpontok rendezésénél az A -ékek szárai éppen a rendezésnél használt egyenesekkel párhuzamosak (vízszintes $\parallel AB$, ferde $\parallel AC$). Így az ábráról leolvasható, hogy $x <_C y$ és $y <_B x$. Ugyanígy belátható, hogy a B - illetve C -határpontok a másik két rendezésnél egymáshoz képest fordított sorrendben helyezkednek el. Emiatt a szomszédos határpont definíciójával ekvivalens definíciót kapnánk, ha azt követelnénk meg két X -határponttól, hogy a másik két rendezés szerint ne legyen közöttük X -határpont.
7. Létezik \mathcal{S} -ben olyan q pont, amely több csúcs szerint is határpont. Ez látható a 2.4. ábrán, ilyenkor a két szürke ék érintő ék, így nem tartalmaznak pontot \mathcal{S} -ből. Kétszeres határpontból több is lehet, de mindhárom ék által megérinthető határpont legfeljebb egy lehet, ez látható a 2.6. ábrán. Tegyük fel, hogy mégis van 2 ilyen pont, s és t . Mivel ezek elemei a C -határnak, feltehető, hogy $s <_A t$ és $t <_B s$. De elemei a B -határnak is, amiből következik, hogy $t <_C s$, mert feltettük, hogy a $<_A$ rendezésnél fordított a sorrendjük. És elemei a C -határnak is, de a $<_A$ és $<_B$ rendezések szerint azonos a sorrendjük, ez pedig ellentmond a 6. tulajdonságnak.

Legyen z_A a közös C - és B -határpontok közül a $<_A$ -maximális, és hasonlóan definiáljuk a z_B és z_C pontokat is. Az $\mathcal{S} \setminus \{z_A, z_B, z_C\}$ pontoknak megadjunk egy partícióját. Legyen $\mathcal{S}_A = \{x \in \mathcal{S} \mid x <_A z_A\}$, és ugyanígy $\mathcal{S}_B = \{x \in \mathcal{S} \mid x <_B z_B\}$ és $\mathcal{S}_C = \{x \in \mathcal{S} \mid x <_C z_C\}$. A fennmaradó pontok halmazát jelölje \mathcal{S}_0 , azaz $\mathcal{S}_0 = [\mathcal{S} \setminus \{z_A, z_B, z_C\}] \setminus \{\mathcal{S}_A \cup \mathcal{S}_B \cup \mathcal{S}_C\}$. $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_A, \mathcal{S}_B$ és \mathcal{S}_C a 2.5. ábrán láthatóan egy partícióját alkotják az $\mathcal{S} \setminus \{z_A, z_B, z_C\}$ halmaznak, és \mathcal{S} -től függően ezek bármelyike lehet üres. Az x_A, x_B és x_C pontoknak majd később lesz szerepe.

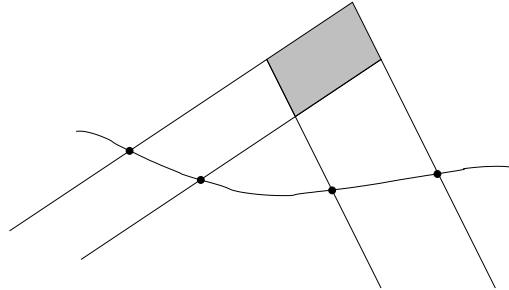
Ennél a bizonyításnál is lesznek gazdag pontok, olyan határpontok, melyeknek gazdagság-bizonyító ékje elég sok pontot tartalmaz. Az eddigiek alapján azonban még nem tudjuk, hogy mit érdemes gazdag pontnak nevezni, ehhez tudni kell, milyen alakú lehet a határ.



2.5. ábra. Lehetséges határ háromszög esetén.

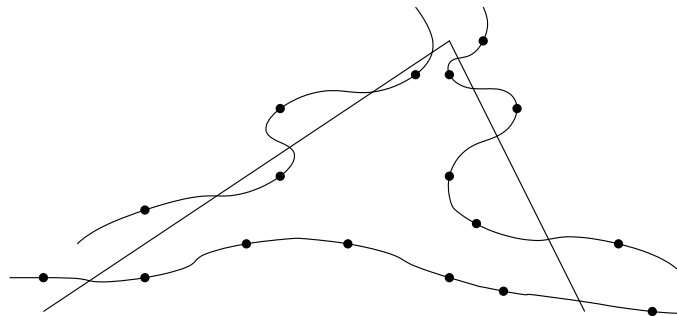
2.6. ábra. Ha $S_0 = \emptyset$, akkor létezik z háromszoros határpont.

Az \mathcal{S} színezésénél ismét legyenek a belső pontok pirosak és a gazdagok kékek, továbbá színezzük a lehető legtöbb pontot pirosra azzal a feltétellel, hogy nincs két szomszédos piros határpont. Erre azért van szükség, mert előfordulhat olyan ék, amely sok belső pontot tartalmaz és a határból 2 pirosat. Ezt az esetet nem zárja ki az, hogy a gazdagokat kékre színeztük. Ha a két kimetszett határpont nem gazdag, akkor gazdagság-bizonyító ékjeik kevés pontot tartalmaznak. Ezek uniója azonban nem fedi le a teljes eredeti éket és lehetséges, hogy a kimaradó részen sok pont van.



2.7. ábra. Ha két határpontot tartalmaz egy ék, akkor azt nem fedik le a pontok gazdagság-bizonyító ékjei.

2.5. Megjegyzés. A gazdag X -határpont definíciója abban fog különbözni a korábbitól, hogy a megfelelő ék több pontot fog tartalmazni \mathcal{S} -ből és ezek között előfordulhatnak a másik két határhoz tartozó pontok is. Erre azért van szükség, mert nem tudjuk, milyen ponthalmazt tartalmaz abból az ék, és lehet, hogy mindegyik pont piros. Ezt illusztrálja a 2.8. ábra.



2.8. ábra. Nem tudjuk, mit tartalmazhat egy ék a nem hozzá tartozó határokból.

\mathcal{S} pontjainak színezése mohó módszerrel.

Először színezzük ki a belső pontokat pirosra és a gazdagokat kékre. Minden $X \in \{A, B, C\}$ esetén haladjunk végig az X -határpontokon a $<_X$ rendezés szerint növekvő

sorrendben. Ha találunk egy még ki nem színezett pontot, akkor legyen ez piros, a két szomszédja pedig kék. Egy ilyen szomszédot vagy még nem értük el, ezért nincs kiszínezve, vagy gazdag, és akkor továbbra is kék marad. Így az X -határnak egy $<_X$ szerinti mohó színezését kapjuk, mely megtartja a szükséges tulajdonságokat.

Látszólag probléma van azokon a részeken, ahol közös határpontok vannak, mert mindkét határon figyelembe kell venni a kisebb szomszédokat. Próbáljuk először ezt a színezési módszert alkalmazni az A - és a B -határpontokon. Szerencsére a közös határpontok a $<_A$ és $<_B$ rendezés szerint azonos sorrendben vannak, ezért a két rendezést össze lehet fésülni. Csak az egyes közös határpontok előtt illetve után való elérés a lényeges, az egyszerű A - és B -határpontok sorrendje nem számít. Ha egy közös határpont az egyik csúcs szerint gazdag, akkor legyen kék, illetve ha egyik határon van egy ilyen pontnak egy piros szomszédja, akkor megint csak legyen kék, hogy semelyik határon ne lehessen két egymás melletti piros. Hasonlóan szinkronizálható a mohó színezés az A - és C -, valamint a B - és C -határokon.

Mindhárom határnak a színezését azonban nem feltétlen tudjuk összehangolni, mert előfordulhat, hogy vannak olyan pontok, amelyek „körbeverik” egymást. Tegyük fel, hogy p közös A - és B -határpont, q közös B - és C -határpont, r közös A - és C -határpont, és egyik sem gazdag. Ha $r <_A p$, $p <_B q$ és $q <_C r$, akkor ezt a három pontot nem tudjuk a szabály szerint színezni. Mivel $r <_A p$, és ezek A -határpontok, akkor r -et előbb ki kell színezni, mint p -t. Hasonló indoklással kapjuk a rendezések miatt, hogy p -t előbb ki kell színezni, mint q -t, q -t előbb ki kell színezni, mint r -et, és ezzel körbeérve egy lehetetlen feltételt kapunk.

Az eredeti bizonyításban a szerzők ezt a problémát úgy küszöbölték ki, hogy a partíciónál kitüntetett szerepet kapó z_A , z_B és z_C pontokat rossz pontnak nevezték és kékre színezték a szabálytól függetlenül. Ez után külön színezték az S_A , S_B , S_C és S_0 ponthalmazokat, ezeknél már nem jelentkezhethet az előző probléma. A színezésre vonatkozó feltételek így továbbra is teljesülnek, mivel csak szomszédos piros pontok nem megengedettek.

Gazdagnak csak azokat a pontokat definiálták, amelyek gazdagság-bizonyító ékje legalább 8 pontot tartalmaz. Ekkor belátható, hogy minden ék, amely tartalmaz legalább 8 pontot, tartalmaz mindkét színűt.

Kék pontot azért tartalmaz, mert ha a saját határából kimetsz legalább két pontot, akkor azok szomszédok és nem lehet mindkettő piros, ezt feltettük. Ha csak egy pontot tartalmaz, akkor viszont az gazdag és ezért kék.

Piros pont tartalmazását indirekt bizonyították, feltették, hogy minden pont kék.

Ha egy pont nem rossz pont és kék, akkor vagy gazdag, vagy van olyan szomszédja, mely a megfelelő rendezés szerint kisebb nála és piros, így csak az éken kívülre eshet. Ezen feltételek valamelyikének csak 4 pont felelhet meg, a saját határ intervallumban a két szélső, valamint a másik két határnak az ékhez tartozó rendezés szerinti minimális pontjai.

A bizonyítás szerint a rossz pontokkal együtt, melyek szintén indokoltan kékek, egy ékben összesen legfeljebb $4 + 3 = 7$ pont lehet kék. Tehát ha 8 pontot tartalmaz egy ék, akkor előfordul benne piros is.

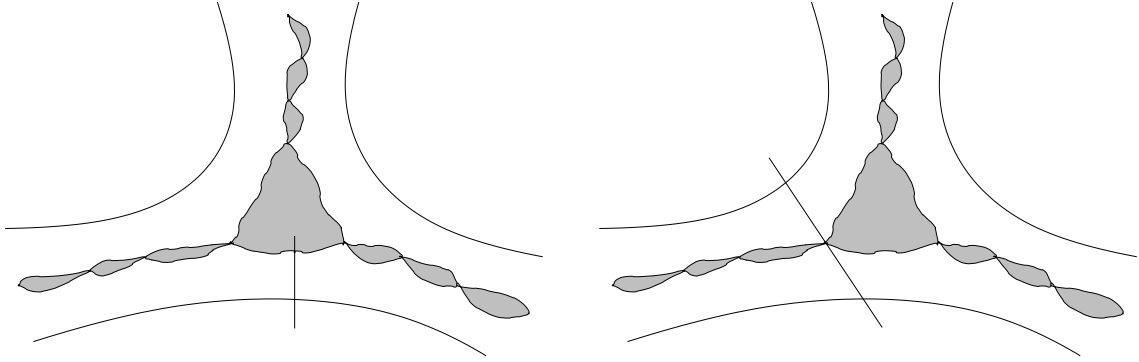
A háromszög egy eltoltja legfeljebb 6 hatszöget metszhet. Ha 43 pontot tartalmaz \mathcal{S} -ből, akkor van olyan hatszög ezek között, amelybe legalább 8 pont esik, így az előzőek miatt a háromszög tartalmaz mindkét színű pontot.

Az alábbiakban belátjuk, hogy 3 helyett elegendő 1 rossz pontot bevezetni, így az előző gondolatmenetet alkalmazva és a gazdag pont definíciójában 8 helyett 6-ot tekintve kapjuk, hogy minden ék, amely tartalmaz legalább 6 pontot, mindkét színűt tartalmaz. Ebből pedig következik, hogy már $6 \cdot 5 + 1 = 31$ -rétegű fedés is szétbomlik két fedéssé.

Ha $\mathcal{S}_0 = \emptyset$, akkor minden $X \in \{A, B, C\}$ esetén az X -határ $<_X$ rendezés szerint legkisebb pontja az egyetlen háromszoros határpont lesz. Ha ez a pont gazdag, legyen kék, egyébként pedig piros, hiszen nincs $<_X$ rendezés szerint kisebb szomszédja, ezek éppen az érintő ékekbe esnének, itt azonban nem lehet \mathcal{S} -beli pont. Emiatt minden határon ezt a pontot kell először kiszínezni.

Ha $\mathcal{S}_0 \neq \emptyset$ és létezik a határán egy gazdag pont, akkor mivel az mindenképpen kék a szomszédjai színétől függetlenül, vágjuk szét ennél a pontnál \mathcal{S} határát. Tekintsük úgy a szétvágott X -határt, hogy a gazdag pont mindkét darabjának eleme. Az így kapott négy határ részbenrendezéseit már össze lehet fésülni egy rendezéssé, és ezzel szabály szerinti színezést kapunk, mert a valójában rendezés szerint színezett pontoknál csak a szomszédok színe számít, és azok minden pontnál megmaradnak.

Ha $\mathcal{S}_0 \neq \emptyset$ és nincs gazdag pont a határán, akkor tekintsük minden X -határon a $<_X$ szerint legkisebb pontot, ezek az \mathcal{S}_0 határán lehetnek csak. Vizsgáljuk most csak az A -határ pontjait. A $W_A(z_B)$ és $W_C(z_B)$ érintő ékek miatt minden $x \in \mathcal{S}_B$ pont esetén $z_B <_A x$ és $z_B <_C x$. És hasonlóan a $W_A(z_C)$ és $W_B(z_C)$ érintő ékek miatt minden $x \in \mathcal{S}_C$ pont esetén $z_C <_A x$ és $z_C <_B x$. Ha van egy z_X -ektől különböző ilyen pont, vagy két határ esetén ugyanaz a z_X a minimális, akkor ennél a pontnál szét tudjuk vágni a határt úgy, mint egy gazdag pontnál. Ez a pont mindenképpen piros, hiszen nem gazdag és nincs a saját rendezése szerint kisebb szomszédja.



2.9. ábra. Szétvágjuk a határt, ha van gazdag vagy megfelelő minimális határpont.

Ha mindhárom határ esetén a legkisebb határpont valamelyik z_X és mindegyik tartozik valamelyik határhoz, akkor sajnos ezek a pontok körbeverik egymást a rendezések szerint és nem tudunk sehol sem szétvágni, ezt láttuk korábban.

Emiatt kell lennie egy olyan pontnak, amelyet nem tudunk a szabály szerint színezni, attól függetlenül kék. Elvágjuk ennél a határt és összefésüljük a kapott határdarabokat. Legyen z_C ez a pont minden hatszögben.

2.6. Definíció. Nevezzük a z_C pontot **rossz pontnak**, a többit pedig, amelyeket lehet a szabály szerint színezni, **jó pontoknak**.

Most már meg lehet határozni, hogy pontosan hogy fog kinézni a színezés és mit fogunk, illetve mit érdemes gazdag pontnak nevezni.

2.7. Definíció. Nevezzünk egy X -határpontot **gazdagnak**, ha a gazdagság-bizonyító ékje legalább 4 jó pontot tartalmaz.

Ez alapján már fel lehet írni, hogy mennyi pontot kell tartalmaznia egy éknek az egyes színek tartalmazásához.

2.8. Állítás. Ha egy $W_X(p)$ ék tartalmaz legalább 4 \mathcal{S} -beli pontot, akkor ezek között van kék.

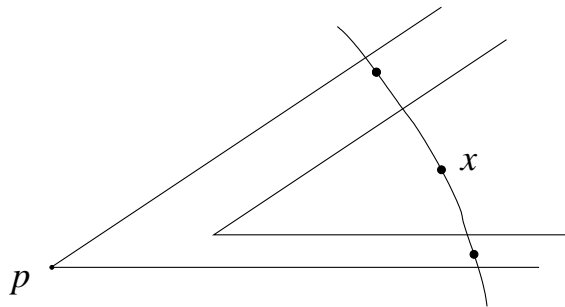
Bizonyítás. Mindenképpen tartalmaz az ék X -határpontot. Ha legalább kettőt tartalmaz, akkor azok között van kék, mert nem lehet két szomszédos határpont piros. Ha csak egy X -határpontot tartalmaz az ék, akkor két eset van. Vagy tartalmazza a rossz pontot, és akkor az kék, vagy nem tartalmazza, de akkor az egyetlen határpont gazdag, ezért kék. \square

A piros pontokra vonatkozó bizonyítás majdnem minden lépésében megegyezik a [3] cikkben szereplő eredetivel, ezért először nézzük meg, hogy azzal az érveléssel mi jön ki.

2.9. Állítás. *Ha egy $W_A(p)$ ék tartalmaz legalább 5 \mathcal{S} -beli jó pontot, akkor ezek között van piros. (Mert ha tartalmazza is a rossz pontot, az mindenképpen kék.)*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $W_A(p)$ tartalmazásra nézve minimális megfelelő ék, azaz pontosan 5 jó pontot tartalmaz és esetleg még a rossz pontot. Tetszőleges több pontot tartalmazó ék magába foglal egy ilyen éket, mert a pontok általános helyzetéből adódóan eltolásokkal elérhető, hogy csak az előírt számú pont maradjon az ékben. Tegyük fel indirekt, hogy az ékben minden pont kék, ekkor persze mind határpont, mert a belső pontok pirosak. Legyen x egy jó pont, belátjuk róla, hogy összesen 4-féle lehet, a $<_B$ szerint minimális vagy maximális A -határpont, illetve a B - és C -határpontok közül a $<_A$ szerint minimális. Pontosabban azt fogjuk belátni, hogy x másmilyen pont nem lehet.

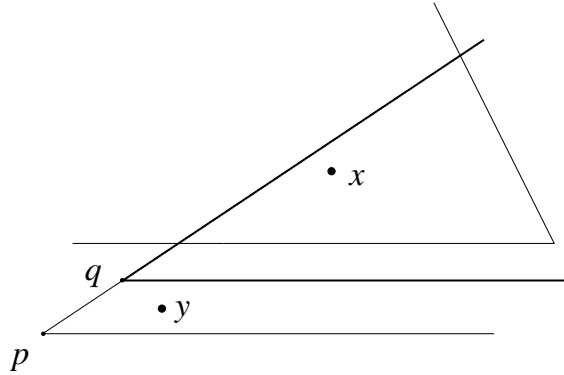
Az x pont nem lehet középső, azaz nem $<_B$ -minimális vagy -maximális A -határpont. Ha az lenne, akkor tekintsük a gazdagság-bizonyító ékjét. Ez része a $W_A(p)$ éknek, de nem tartalmazza annak legalább 2 pontját, x két szomszédját. A $W_A(p)$ ék pontosan annyi pontot tartalmaz, amennyi minimálisan szükséges egy gazdag pont gazdagság-bizonyító ékjében, így x nem lehet gazdag. Tehát csak azért lehet kék, mert valamelyik szomszédja piros, ezeket azonban tartalmazza a $W_A(p)$ ék, így csak kékek lehetnek és ezzel ellentmondásra jutottunk.



2.10. ábra. Az x nem lehet középső A -határpont.

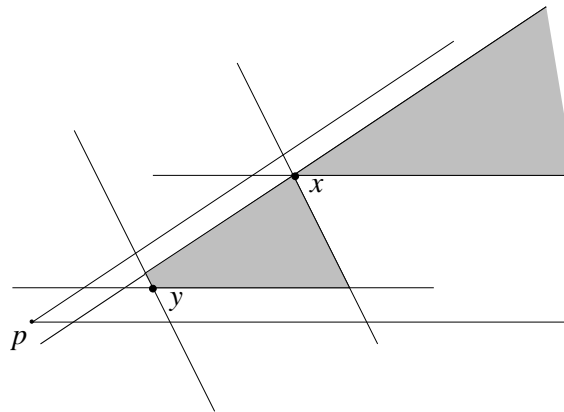
Az x pont nem lehet nem $<_A$ -minimális B - és C -határpont. A két eset szimmetrikus, azért elég az egyiket bizonyítani. Tegyük fel, hogy x egy nem $<_A$ -minimális B -határpont $W_A(p)$ -ben, és y a minimális. Tekintsük x B -határ szerinti gazdagság-bizonyító ékjét. Ez nem tartalmazza a $W_A(p)$ ék minden pontját, mivel y nem esik

bele. Emiatt x csak úgy lehetne gazdag, ha y a rossz pont és x gazdagság-bizonyító ékje a $W_A(p)$ ék minden jó pontját tartalmazza. Ekkor viszont a bizonyítás elején tekinthettük volna a $W_A(q)$ éket, mely része a $W_A(p)$ éknek és pontosan 5 jó pontot tartalmaz, ellentmondásban $W_A(p)$ minimális választásával.



2.11. ábra. Az x nem lehet nem $<_A$ -minimális B -határpont.

Mivel x két jó pont és nem gazdag, kell lennie egy olyan szomszédjának, mely $<_B$ szerint kisebb nála és piros. Az ilyen pontok a szomszédos határpontok tulajdonságai alapján csak a 2.12. ábra szürke részén lehetnek, tehát a $W_A(p)$ éknek elemei. Itt azonban csak kék pontok vannak, ezért ismét ellentmondásra jutottunk.



2.12. ábra. Az x -nek nem lehet $<_B$ szerint kisebb piros szomszédja.

Tehát két jó pont az ékben legfeljebb 4-féle lehet, de $W_A(p)$ 5 jó pontot tartalmaz, ezért kell közöttük lennie pirosnak is. \square

Eddig azt láttuk be, hogy ha egy ék legalább 6 pontot tartalmaz \mathcal{S} -ből, akkor azok között előfordul mindkét szín. Emiatt ha T egy eltoltja legalább $6 \cdot 5 + 1 = 31$ pontot tartalmaz, akkor tartalmaz pirosat és kéket is.

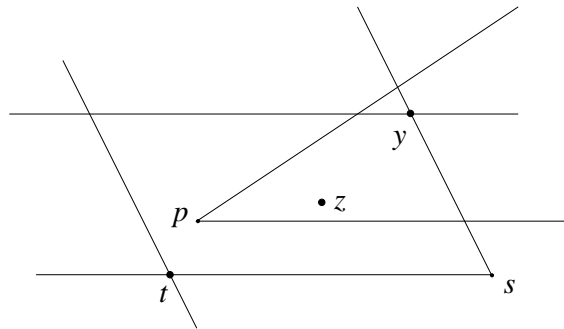
Az következő állításban egy további ötlet segítségével a 2.9. állításhoz képest még egy $W_A(p)$ -beli pontról belátjuk, hogy nem lehet kék jó pont.

2.10. Állítás. *Ha egy $W_A(p)$ ék tartalmaz legalább 4 \mathcal{S} -beli jó pontot, akkor ezek között van piros.*

Bizonyítás. Tegyük fel az előző bizonyításhoz hasonlóan, hogy a $W_A(p)$ ék 4 jó pontot tartalmaz és az ilyenek között tartalmazásra nézve minimális (4 jó pontot tartalmaz és esetleg még a rossz pontot), továbbá minden pontja kék.

Az előzőekben belátott két esetet ugyanúgy kezelhetjük, azaz ha x kék jó pont, akkor nem lehet középső A -határpont és nem $<_A$ -minimális B - illetve C -határpont. Most azt fogjuk bizonyítani, hogy x nem lehet a $<_A$ -minimális B - és C -határpontok közül a $<_A$ szerint nagyobb.

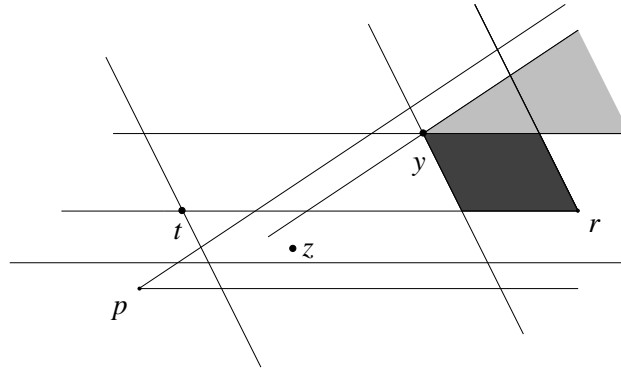
Jelölje y a $<_A$ -minimális B -határpontot és z a $<_A$ -minimális C -határpontot, feltehető, hogy $z <_A y$. Ha y és z egybeesnek, akkor rögtön következik, hogy kék jó pont csak háromféle lehet. Ha nem esnek egybe, legyen t az y azon szomszédja a B -határon, amelyre $t <_A y$ és így $t \notin W_A(p)$. Ilyen t pont létezik, különben $y <_A$ -minimális az egész B -határon, de akkor C -határpont is egyben, és $z <_A$ -minimalitása miatt y és z egybeesnek. Mivel y és t szomszédok, a 2.13. ábrán látható $W_B(s)$ ék nem tartalmaz \mathcal{S} -beli pontot. A t pontnak tehát úgy kell elhelyezkednie a $W_A(p)$ éken kívül, hogy z ne essen bele a $W_B(s)$ ékbe. Ez pontosan akkor teljesül, ha $t <_C z$.



2.13. ábra. A $z \notin W_B(s)$, ha $t <_C z$.

Ha $t <_C z$, legyen $W_B(r)$ az y pont B -határ szerinti gazdagság-bizonyító ékje, ennek egyik szára illeszkedik a t pontra. A 2.14. ábrán látható a $W_B(r)$ ék, ennek minden pontja a sötét színű paralelogrammában lehet csak, amely része a $W_A(p)$ éknek. Az y azért lehet kék, mert gazdag vagy van egy nála $<_B$ szerint kisebb piros szomszédja. Ha y gazdag lenne, az csak úgy lehet, ha z a rossz pont, de ekkor $W_A(p)$

helyett választhattunk volna kisebb éket, és ez ellentmond a minimális választásának. Ha y -nak létezik nála $<_B$ -kisebb szomszédja, az nem lehet t , mert $t \notin W_A(p)$ ék és $t <_C z$ alapján következik, hogy $y <_B t$. Tehát csak y másik szomszédja lehet piros. Ez azonban, ha $<_B$ szerint kisebb y -nál, csak a szürkével jelölt ékben lehet, mely része a $W_A(p)$ éknek. Emiatt ez a szomszéd kék, és megint ellentmondáshoz jutottunk.



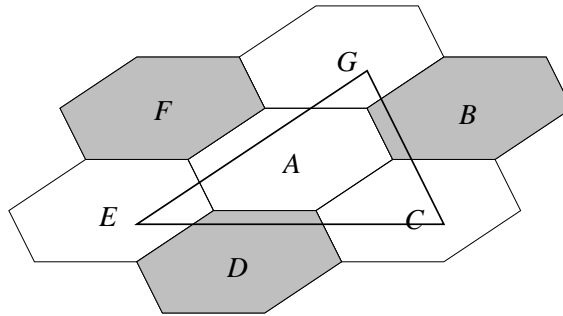
2.14. ábra. Az y nem gazdag és nincs $<_B$ szerint kisebb piros szomszédja.

Beláttuk tehát, hogy kék jó pont legfeljebb 3-féle lehet. De az ék 4 jó pontot tartalmaz, így legalább az egyiknek pirosnak kell lennie. \square

2.11. Megjegyzés. Láttuk, a 2.8. Állításban, hogy ha egy ék legalább 4 pontot tartalmaz \mathcal{S} -ből, akkor van azok között kék, és a 2.10. Állításban, hogy ha legalább 5 pontot tartalmaz abból, akkor van piros. Az eredeti bizonyításhoz képest itt aszimmetriát tapasztalunk, ezért megpróbáljuk ezt is kihasználni a szükséges rétegvastagság csökkentéséhez. Mivel a hatszögekben egymástól függetlenül határozzuk meg a színezést, a konstrukciót úgy módosíthatjuk, hogy bizonyos cellákban megcseréljük a két szín szerepét, és így színezünk a korábban leírt szabályok szerint. Nevezzünk egy színezést **kék típusúnak**, ha ennél a gazdag pontok kékek, és **piros típusúnak**, ha a gazdagok pirosak.

Egy hatszöget és a körülötte elhelyezkedő 6 hatszöget nevezzük **egységnek**, és jelöljük a hatszögeket nagy betűkkel a 2.15. ábra szerint. Láttuk korábban, hogy tetszőleges $T(p)$ eltolt esetén van olyan egység, amely a háromszöget magába foglalja. Ha egy háromszög 6 hatszöget metsz ebből az egységből, azt három különböző módon teheti: nem metszi B -t, D -t vagy F -et. Úgy szeretnénk meghatározni a hatszögek színezéseit, hogy az egyenletes legyen a síkon, vagyis ha egy eltolt 6 hatszöget

metsz, akkor azok között 3 kék típusú és 3 piros típusú legyen. Sajnos azonban így nem tudjuk megválasztani a hatszögek színezéseit, az alábbiakban ezt látjuk be.



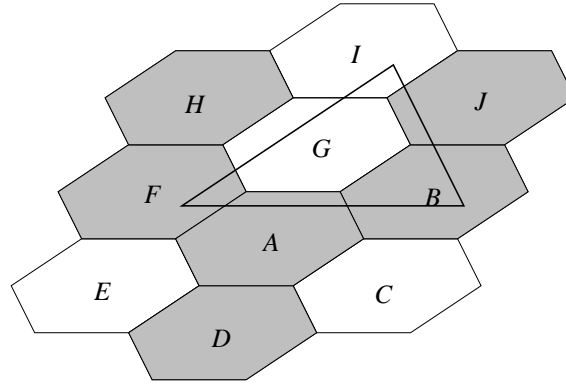
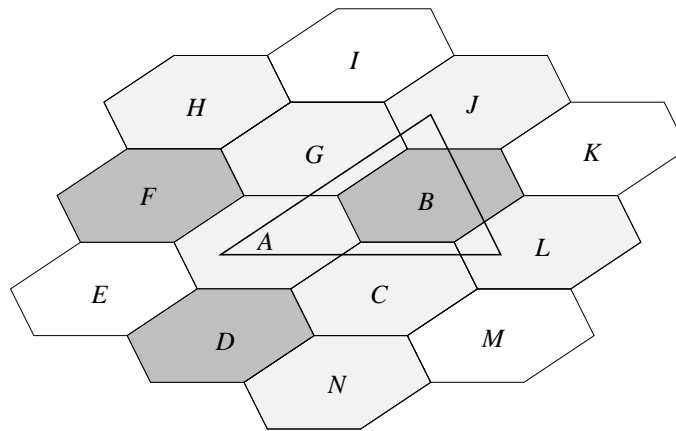
2.15. ábra. A háromszög nem metszi B -t, D -t vagy F -et.

2.12. Állítás. *Nem létezik a hatszögrács celláin olyan színválasztás, hogy minden $T(p)$ eltolt, amely 6 hatszöget metsz, mindkét típusú hatszögből hármat messen.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy mégis létezik ilyen színezés. Először tekintsünk egy egységet az előző jelölésekkel. Mivel 3-féle módon metszhet ebből egy háromszög 6 hatszöget, szükséges, hogy az egyes esetekben kihagyott három hatszög, B , D és F színezése azonos legyen. Tegyük fel, hogy ezek kék típusú hatszögek. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy az A hatszög piros vagy kék típusú, és mindkettőről belátjuk, hogy nem terjeszthető ki a síkra egyenletesen.

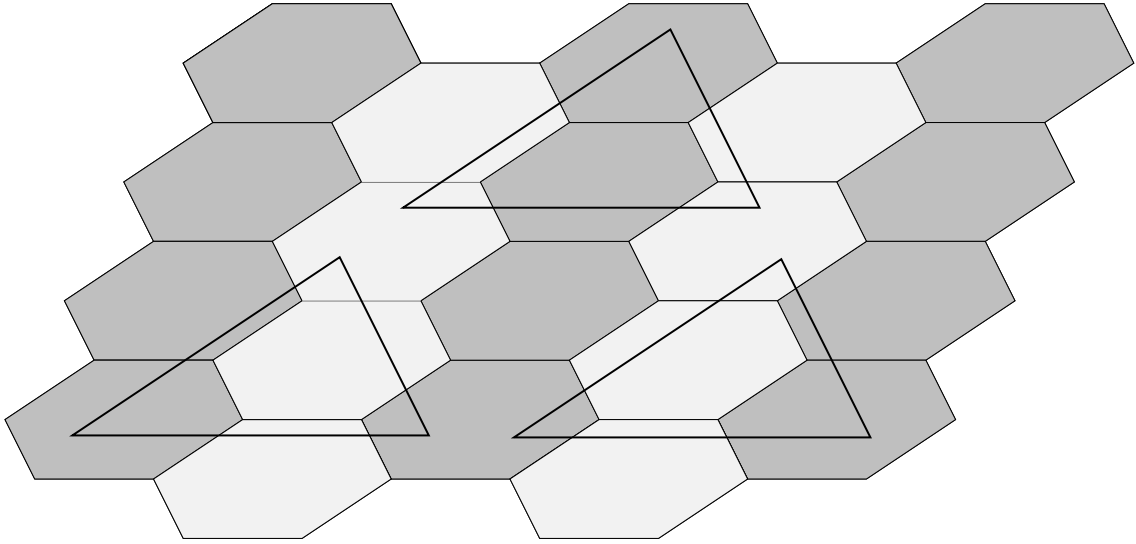
Ha A kék típusú, akkor az A, B, F, G, H, I, J hatszögekből álló egységre alkalmazva az előző gondolatmenetet következik, hogy H és J hatszögek kék típusúak, ez a 2.16. ábrán látható. A sötétszürke hatszögek kék típusúak, a világosszürkek piros típusúak, a nem jelöltek bármilyenek lehetnek, lényegtelen a bizonyítás szempontjából. Ha ebből az egységből T egy eltoltja például H kivételével metszi az összeset, akkor úgy metsz 6 hatszöget, hogy azok közül legalább négy kék típusú, ez viszont ellentmond a színezés egyenletességére tett feltevésünknek.

Ha A piros típusú, akkor a C, E és G hatszögek közül legfeljebb egy lehet kék típusú. Különben az A, B, C, D, E, F, G egységben csak 2 piros típusú hatszög lenne, és létezne olyan T eltolt, mely 4 kék típusú és csak 2 piros típusú hatszöget metsz. Tegyük fel hogy a G és C hatszögek piros típusúak. Az A, B, F, G, H, I, J és az A, B, C, D, L, M, N egységeket tekintve a bizonyítás első megfigyelése alapján adódik, hogy H, J, L és N hatszögek típusa is piros. Ebben az esetben viszont egy A, B, C, G, J, K, L egységbe eső háromszög eltolt metszhet 5 piros és 1 kék típusú hatszöget, ha nem metszi K -t, ez látható a 2.17. ábrán, és ez ismét ellentmondás. \square

2.16. ábra. A T egy eltoltja metszhet 4 kék és 2 piros típusú hatszöget.2.17. ábra. A T egy eltoltja metszhet 5 piros és 1 kék típusú hatszöget.

Teljesen egyenletes színezésre tehát nincs lehetőség, de könnyen adható olyan, amely majdnem egyenletes, tekintsük például a 2.18. ábra szerinti csíkosat, ez nyilván kiterjeszthető a síkra. Választhattuk volna a másik két csíkozást is, de akkor is ugyanezeket az eredményeket kaptuk volna. Látható, hogy T minden 6 hatszöget metsző eltoltja esetén a metszett hatszögek típusainak előfordulása 3-3 vagy 4-2 lehet. Legyen a továbbiakban ez a színezés a cellákon és azok pontjain.

A fentiek alapján már belátható, hogy 23 pontot tartalmazó háromszög esetén előfordul a pontok között mindkét szín. Ehhez kiszámoljuk, hogy egy háromszög legfeljebb hány kék pontot tartalmazhat. Mivel a színek szerepe azonos a csíkozás miatt, a tisztán piros háromszögek keresése esetén is ugyanezt az értéket kapnánk. Kék színezésnél legfeljebb 4 pontot tartalmazhat egy csupa kékekből álló metszet, piros színezésnél pedig 3-at. Mivel maximális sok kék pontot szeretnénk találni, tekintsünk egy olyan T eltoltat, amely 4 kék és 2 piros típusú hatszöget metsz. Így



2.18. ábra. A metszett piros és kék típusú hatszögek száma: 3-3, 4-2, 3-3

összesen $4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 22$ kék pontot tudunk elhelyezni a háromszögben. Tehát ha 23 \mathcal{S} -beli pontot tartalmaz egy eltolt, akkor ezek között előfordul mindkét szín. Azokban az esetekben, amikor legfeljebb 5 hatszöget metsz T egy eltoltja, figyelmen kívül lehet hagyni a metszett hatszögek típusait, mert mindenképpen lesz olyan hatszög, amelyből legalább 5 pontot tartalmaz az eltolt, és ez mindkét típus esetén elegendő mindkét színű pont tartalmazásához.

2.13. Megjegyzés. Egy háromszögnek csak 3 csúcsa van, és ha 6 hatszöget metsz, akkor ezek közül csak 3 lesz ténylegesen ék-metszés. A másik három olyan nyílt félsíkkal való metszés, melynek határegyenesre párhuzamos a T háromszög valamelyik oldalával. Az ilyen metszések speciálisak, mivel kétféle ék szerinti metszésként is tekinthetünk rájuk, és már kevesebb pont tartalmazása esetén is belátható, hogy előfordul azok között mindkét szín.

Ha a háromszög csak 5 hatszöget metsz, az csak úgy lehetséges, hogy közülük 4 ék-metszés és csak 1 félsík-metszés alakú. Elég azonban kiszámolni, hogy 6 hatszöget metsző eltoltak esetén mennyi pont szükséges mindkét szín tartalmazásához. Később, a 2.21. ábrán fogjuk látni, hogy annyi pont elég ebben az esetben is.

A korábbi elnevezésekhez hasonlóan $H_A(p)$ jelölje azt a nyílt félsíkot, amelynek határegyenesre a T háromszög BC oldalával párhuzamos és a p pontra illeszkedik. Továbbá a BC szakaszra illeszkedve fedi az A pontot. Mivel \mathcal{S} pontjai általános helyzetűek, minden párhuzamos egyenesre legfeljebb egy pontja eshet, így félsíkokra

is igaz, hogy eltoláskor egyesével kerülnek abba be és ki a pontok. Hasonlóan jelölje $H_B(q)$ az AC -vel párhuzamos határú, és $H_C(r)$ az AB -vel párhuzamos határú megfelelő irányú félsíkokat.

Először azt vizsgáljuk, hogy milyen ponthalmazt metszhet ki \mathcal{S} -ből egy ilyen nyílt félsík. Ha a $H_A(p)$ félsík tartalmaz pontot \mathcal{S} -ből, akkor a $<_A$ -minimális közös B - és C -határpontot tartalmazza, mivel ez $<_A$ szerint minimális az egész \mathcal{S} -ben. A rendezést éppen a sík határegyenesével párhuzamos egyenesek adják. Nevezzük ezt az extrém pontot x_A -nak, a $<_B$ és $<_C$ -minimális határpontot hasonlóan jelölje x_B és x_C . Ezek a 2.5. és 2.6. ábrákon láthatók. Ha valamely $X \in \{A, B, C\}$ esetén $\mathcal{S}_X = \emptyset$, akkor természetesen a z_X és x_X pontok egybeesnek.

A $H_A(p)$ félsíkkal való metszet tekinthető valamely W_B és W_C ékkel való metszetként is, mert mindkettőnek van a határegyenessel párhuzamos szára. Ezekről korábban láttuk, hogy a saját határukból egy intervallumot tartalmaznak, így ez a félsíkra is teljesül. Mivel a félsík tartalmazza az x_A extrém pontot, vagyis azt a pontot, ahol a B - és C -határ összeér, a kimetszett B - és C -határpontok egyetlen intervallumot alkotnak, amelyben esetleg lehetnek közös pontok. Továbbá lehetnek az ékben belső pontok és A -határpontok, de ez utóbbiról nem tudjuk, milyen alakzatot határoznak meg.

Az alábbi két állításban belátjuk, hogy érdemes vizsgálni a félsík metszeteket, mert valóban kevesebb pont szükséges ilyenek esetén.

2.14. Állítás. *Ha egy $H_A(p)$ félsík legalább 2 pontot tartalmaz \mathcal{S} -ből, akkor tartalmaz két pontot.*

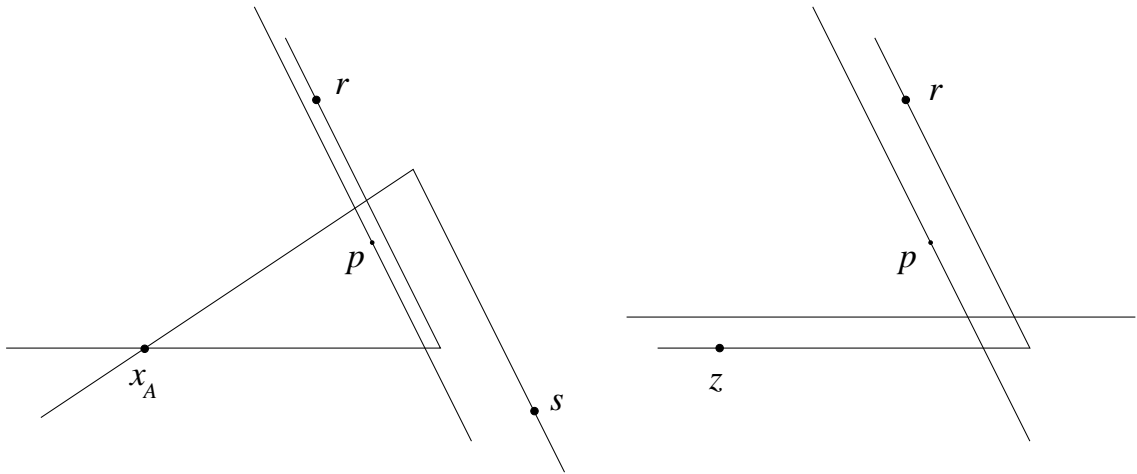
Bizonyítás. Legyen $H_A(p)$ olyan félsík, amely pontosan két \mathcal{S} -beli pontot tartalmaz. Ha mindkettő a B - vagy a C -határ pontja, akkor az imént látottak alapján ezek szomszédok. A színezési szabály miatt nem lehet mindkettő piros, tehát a félsík tartalmaz két pontot.

Ha a BC -határnak csak egy pontja esik a félsíkba, akkor ez szükségképpen az x_A extrém pont. Ennek egyik szomszédja, r B -határpont, másik szomszédja, s pedig C -határpont. Esetleg ez a két pont egybeeshet, de akkor is működik a bizonyítás. Tekintsük azt a B -éket, melynek szárai az x_A és r pontokra illeszkednek. A szomszédos határpontok tulajdonságainál láttuk, hogy ez az ék nem tartalmazhat \mathcal{S} -beli pontot. Hasonlóan következik, hogy az a C -ék, melynek szárai az x_A és s pontokra illeszkednek, üres. A 2.19. ábrán látható, hogy ezen két ék uniója lefedi az egész $H_A(p)$ félsíkot, így abban x_A -n kívül nem lehet más pont, de feltettük, hogy 2 van,

így ez ellentmondás.

Azt az esetet még meg kell vizsgálni, amikor a B - vagy a C -határ csak egy pontból áll. A szimmetria miatt feltehető, hogy a C -határ egy pontú, ezért az előző gondolatmenetnél szereplő s pont nem létezik. Ilyenkor $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_B = \emptyset$ és a z_A, z_B, z_C, x_A, x_B és x_C pontok egybeesnek, jelölje ezt a pontot z , ez az egyetlen C -határpont.

Ha a $H_A(p)$ félsík 2 pontot tartalmaz, akkor a z pont mindenképpen eleme, mivel ez a \langle_A -maximális B -határpont. Tekintsük a z pont B szerinti szomszédját, jelölje ezt most is r . Azon B -ék, melynek szárai az r és z pontokra illeszkednek, mint az előbb, nem tartalmaz \mathcal{S} -beli pontot. Az \mathcal{S} -ben z a \langle_C szerint legnagyobb pont, ezért a $H_C(z)$ nyílt félsík sem tartalmaz \mathcal{S} -beli pontot. Ezen B -ék és a $H_C(z)$ félsík uniója azonban fedi az egész $H_A(p)$ félsíkot, így annak z -n kívül nem lehet más pontja, és ez ismét ellentmondás. \square



2.19. ábra. A megfelelő ékek, illetve a félsík és ék lefedik $H_A(p)$ -t.

2.15. Állítás. *Ha egy $H_A(p)$ félsík tartalmaz legalább 3 \mathcal{S} -beli jó pontot, akkor ezek között van piros.*

Bizonyítás. A bizonyítás menete nagyon hasonlít az eredeti [3] cikbeli „piros” bizonyításéhoz. Tegyük fel, hogy a $H_A(p)$ félsík pontosan 3 jó pontot tartalmaz, és esetleg még a rossz pontot. Ha egy félsík több pontot tartalmaz, akkor magába foglal egy ilyen. Tegyük fel indirekt, hogy minden pont kék és legyen közülük x egy jó pont. Ekkor x csak határpont lehet, mert a belső pontok pirosak. Belátjuk, hogy x összesen kétféle pont lehet, a B - és C - közös határból tartalmazott intervallum két

szélső pontja, pontosabban a kimetszett C -határpontok közül a $<_A$ -minimális illetve a B -határpontok közül a $<_A$ -minimális.

Ha x középső B - vagy C -határpont, akkor két okból lehet kék. Vagy gazdag B - illetve C -határpont, de mindkét esetben az x gazdagság-bizonyító ékjét teljes egészében tartalmazza a félsík. Nem tartalmaz viszont annyi pontot, amennyi egy gazdag pont gazdagság-bizonyító ékjében szükséges, ezért x nem lehet gazdag. Vagy x -nek van egy kisebb piros szomszédja, de ezek mindenképpen az ékbe esnek, mert feltettük, hogy x középső, emiatt azonban csak kékek lehetnek.

Ha x kék A -határpont, akkor megint két esetet kell megvizsgálni. Vagy x gazdag, de gazdagság-bizonyító ékjének minden pontja a félsíkba esik, ahol nincs annyi pont, amennyi egy gazdag pont esetében szükséges, emiatt ez az eset nem lehetséges. Vagy létezik x -nek önmagánál $<_A$ szerint kisebb piros szomszédja. Az ilyen pontok a rendezés definíciója szerint a $H_A(p)$ félsíkba esnek, mert éppen a félsík határával párhuzamos egyenesek határozzák meg a $<_A$ rendezést. Feltettük azonban, hogy a félsíkban minden pont kék, így ismét ellentmondásra jutottunk.

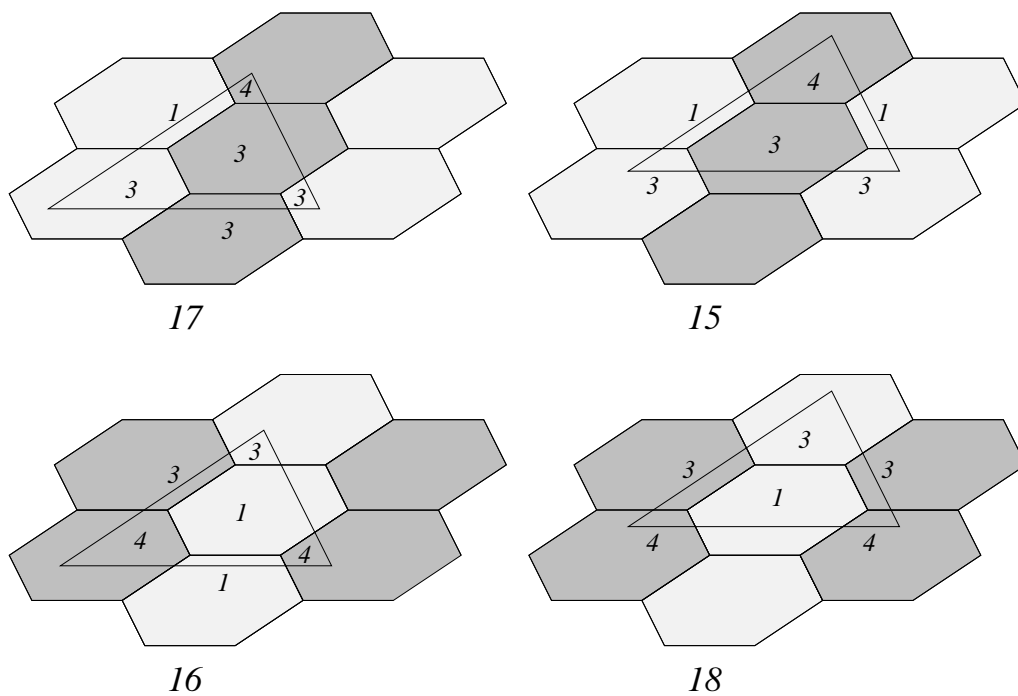
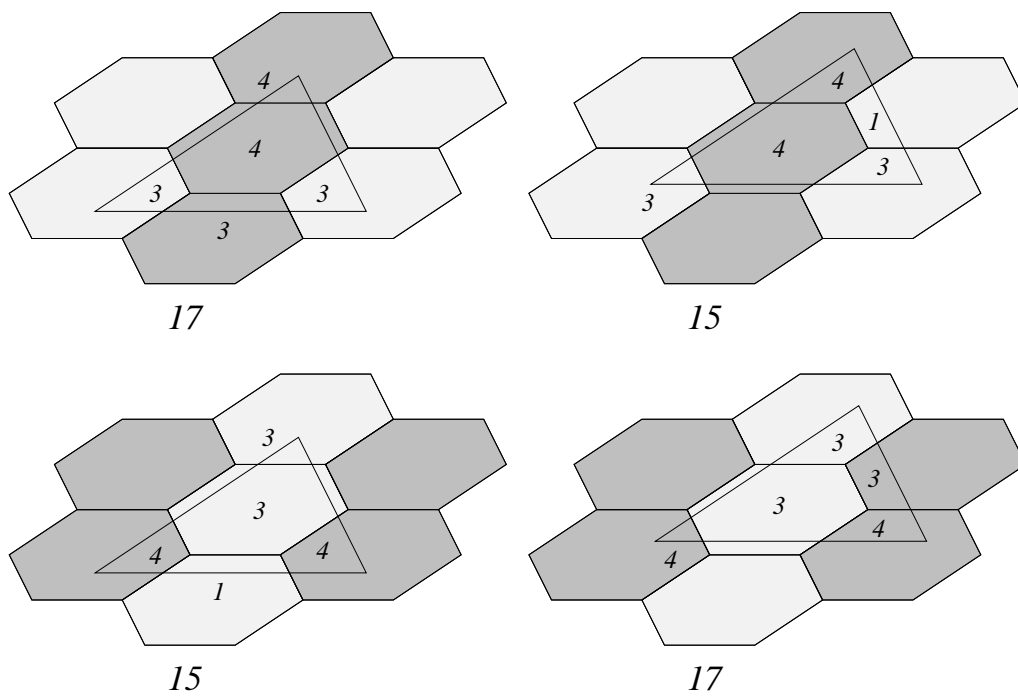
Jó kék pont tehát legfeljebb 2 lehet, a félsík azonban 3 jó pontot tartalmaz, így ezek között kell lennie pirosnak. \square

Most már belátható az eddig megkonstruált színezésről, hogy minden legalább 19 pontot tartalmazó T eltolt tartalmaz mindkét színű pontot. A színek szerepe azonos a sík fedésében, így elég azt megszámlálni, hogy legfeljebb hány kék pontot tartalmazhat egy háromszög. Az alábbi táblázat értékei azt mutatják, hogy maximálisan hány pontot tartalmazhat egy metszés az egyes színezési típusok esetén, ha minden pont kék.

	ék-metszés	félsík-metszés
kék típus	4	3
piros típus	3	1

Négy lényegesen különböző módon metszhet egy háromszög 6 hatszöget, a 2.20. ábrán láthatók az esetek. A sötétszürke hatszögek kék típusúak, a világosszürkék piros típusúak. A metszetekbe írt számok a tartalmazott csupa kék pontok maximális számát, az ábrák alá írtak ezek összegét jelölik.

Ha 5 hatszöget metsz egy eltolt, az csak úgy lehetséges, hogy a metszések közül 4 ék-metszés és 1 félsík-metszés alakú. A 2.21. ábra szerint ekkor is négy lényegesen

2.20. ábra. Egy 6 hatszöget metsző T eltoltba eső kék pontok maximális száma.2.21. ábra. Egy 5 hatszöget metsző T eltoltba eső kék pontok maximális száma.

különböző eset létezik, a jelölések ugyanazok, mint a 2.20. ábrán. Látható, hogy 19 pont tartalmazása esetén ezekben is szerepel mindkét szín.

Ha 4 vagy 3 hatszöget metsz csak egy eltolt (kevesebbet nem metszhet), és legalább 19 pontot tartalmaz, akkor van olyan hatszög, amelybe legalább 5 pont esik, és ez bármely típusú színezés és bármelyik metszés esetén elegendő ahhoz, hogy mindkét szín szerepeljen a pontok között. \square

Ezzel beláttuk, hogy tetszőleges nyílt háromszög-lap fedés-szétbontható és a síknak egy T nyílt vagy zárt háromszög eltoltjaival való tetszőleges legalább 19-rétegű, lokálisan véges fedése szétbontható két fedéssé.

3. fejezet

Konvex sokszögek

Általános konvex sokszögek esetén még kevesebbet tudunk mondani arról, hogy milyen lehet egy ékkel való metszet, illetve a határ, ezért máshogy érdemes megközelíteni a problémát.

Pálvölgyi Dömötör és Tóth Géza dolgozta fel ezt az esetet [4] cikkében. A szerzők itt is a feladat duális átfogalmazását tekintették és a síkot cellákra osztva, ékekkel metszették az eltoltak középpontjainak halmazát, de az ékeket először külön vizsgálták. Az így kapott eredményekből pedig következik az alábbi tétel.

1.6. Tétel (Pálvölgyi, Tóth) [4] *Minden nyílt konvex sokszög-lap fedés-szétbontható.*

Bizonyítás vázlat. Mivel a sokszög nyílt, lehet alkalmazni a szokásos feltevéseket, azaz a fedés lokálisan véges, a súlypontok halmaza véges, általános helyzetű és minden pont valamelyik cella belsejébe esik.

Ha W tetszőleges nyílt ék és p egy adott pont, jelölje $W(p)$ a W -nek azon eltoltját, melynek csúcsa p . Ha általánosan beszélünk W egy eltoltjáról és nem adjuk meg a csúcspontját, akkor nevezzük azt egyszerűen W -éknek. A W ék origóra vonatkozó tükörcképét jelölje \overline{W} .

3.1. Definíció. *Legyen $\mathcal{W} = \{W_i \mid i \in I\}$ nyílt ékek egy halmaza. Nevezzük \mathcal{W} -t **konfliktus mentesnek** (non-conflicting), ha létezik olyan $k \in \mathbb{N}$ szám, hogy tetszőleges \mathcal{S} véges ponthalmaz színezhető úgy két színnel, hogy ha egy \mathcal{W} -beli ék egy eltoltja legalább k pontot kimetsz belőle, akkor tartalmaz mindkét színű pontot. A továbbiakban nevezzük röviden **NC**-nek az ilyen tulajdonságú ékhalmazokat.*

A cikk több részállítás felhasználásával az ékhalmazok egy jelentős részéről belátja, hogy azok konfliktus mentesek. Kiderül az is, hogy egy konvex sokszög csúcsainak

megfelelő ékhalmoz mindig NC, ebből pedig következik az 1.6. Tétel. A részállítások közül kettőnek írjuk le részletesen a bizonyítását, mivel ezek tartalmazzák az alapvető ötleteket.

3.2. Lemma. *Tetszőleges W nyílt ék önmagában mindig NC.*

Bizonyítás. Legyen \mathcal{S} egy véges ponthalmaz. Tegyük fel, hogy az ék szöge legalább π , ekkor előáll két félsík uniójaként. Vegyünk egy-egy ilyen irányú félsíkot, melyek 2-2 pontot tartalmaznak \mathcal{S} -ből, legyenek ezek A_1, A_2 és B_1, B_2 . Bár az $\{A_1, A_2\}$ és $\{B_1, B_2\}$ halmazok nem feltétlen diszjunktak, könnyen látható, hogy ki tudjuk színezni a pontokat pirossal és késsel úgy, hogy A_1 és A_2 valamint B_1 és B_2 különböző színűek legyenek. Így ha egy W -ék tartalmaz legalább 3 pontot, akkor vagy tartalmazza A_1 -et és A_2 -t, vagy tartalmazza B_1 -et és B_2 -t, és mindkét esetben készen vagyunk.

Tegyük fel most, hogy W szöge kisebb mint π . Erre az esetre két bizonyítást is adnak a szerzők, mert mindkettő olyan ötletet tartalmaz, amelyet később is használnak.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy W magába foglalja az x -tengely pozitív ágát, csúcsa az origó, és minden \mathcal{S} -beli pontnak különböző az y -koordinátája. Forgatással elérhető, hogy így helyezkedjenek el a pontok, mert \mathcal{S} véges. Ezt kihasználva definiálunk egy rendezést \mathcal{S} pontjain.

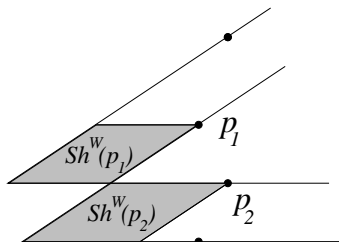
3.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a p pont az **y -rendezés** szerint kisebb a q pontnál, jelölésben $p <_y q$, ha p y -koordinátája kisebb, mint q y -koordinátája. \mathcal{S} egy \mathcal{I} részhalmazát intervallumnak mondjuk, ha $p, q \in \mathcal{I}$, $r \in \mathcal{S}$ és $p <_y r <_y q$ esetén következik, hogy $r \in \mathcal{I}$.*

Az \mathcal{S} halmaz W ék szerinti határát jelölje $Bd^W(\mathcal{S}) = \{p \in \mathcal{S} \mid W(p) \cap \mathcal{S} = \emptyset\}$, ez a határ szokásos definíciója. Minden W -ék $Bd^W(\mathcal{S})$ -ből egy intervallumot tartalmaz a határra leszűkített y -rendezés szerint.

3.4. Megjegyzés. Ha két $Bd^W(\mathcal{S})$ -beli pont az y -rendezés szerint egymást követi, azaz nincs közöttük más határpont, az korábbi definíció szerint megfelel annak, hogy szomszédok a W szerinti határon.

3.5. Definíció. *Tetszőleges $p \in Bd^W(\mathcal{S})$ pont esetén p **árnyékának** nevezzük az $Sh^W(p) = \{q \in \mathcal{S} \mid W(q) \cap Bd^W(\mathcal{S}) = p\}$ halmazt.*

Ha $p_1, p_2 \in Bd^W(\mathcal{S})$, akkor $Sh^W(p_1) \cap Sh^W(p_2) = \emptyset$, mert mindegyik ék csak egy pontot tartalmaz a W szerinti határból, és ez vagy p_1 vagy p_2 . A 2. fejezet jelöléseit használva ez a halmaz megfelel az adott határpont gazdagság-bizonyító éke által tartalmazott \mathcal{S} -beli pontoknak. A 3.1. ábrán a szürkével jelölt területre eső \mathcal{S} -beli pontok alkotják a megfelelő árnyékokat.



3.1. ábra. $Sh^W(p_1) \cap Sh^W(p_2) = \emptyset$.

Az első bizonyításhoz színezzük a határpontokat az y -rendezés szerinti sorrendben, felváltva a két színnel, és minden határpontra az árnyékában lévőket a határponttól különböző színűre. Ha W két pontot tartalmaz \mathcal{S} -ből, akkor az vagy két határpont, melyek az y -rendezés szerint egymást követik, vagy egy határpont, és az árnyékából még egy pont. A konstrukció szerint mindkét esetben különböző a két pont színe.

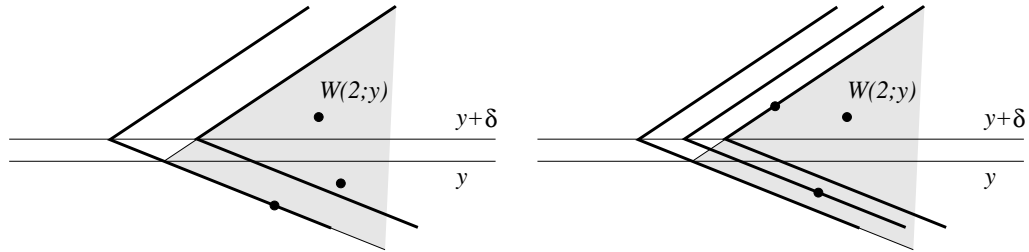
A második bizonyításban egy *útfelbontást* adunk meg.

3.6. Definíció. Jelölje $W(2; y)$ azt a W -éket, mely legfeljebb 2 \mathcal{S} -beli pontot tartalmaz, csúcsának y -koordinátája y , és x -koordinátája minimális.

Ez a definíció értelmes, úgy kapjuk a megfelelő éket, hogy az adott y értékű, x tengellyel párhuzamos egyenes mentén negatív irányba toljuk az ék csúspontját, amíg az ék belsejében pontosan 2 pont és a határán legalább 1 másik pont nem lesz. (Ha tovább toljuk, akkor a határra illeszkedő pont az ék belsejébe kerül.)

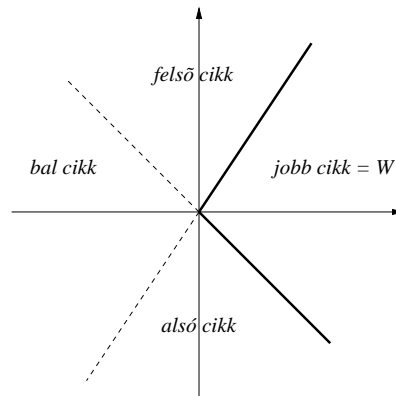
Tekintsük a $W(2; y)$ ékeket, mint y függvényét, a negatív értékek felől a pozitívok felé haladva. Könnyen látható, hogy $W(2; y)$ folytonos függvénye y -nak. Ehhez tekintsük egy fix y esetén a $W(2; y)$ éket és vizsgáljuk meg, hogy valamilyen kis $\delta > 0$ esetén hol lehet a $W(2; y + \delta)$ ék. A 3.2. ábra szerint két eset lehetséges aszerint, hogy a pont, amelynél elakadunk, az ék alsó vagy felső szárára illeszkedik. Az első esetben az ábrán a kisebbik ék része $W(2; y)$ -nak, így legfeljebb 2 belső pontja van, tehát ez része kell legyen a $W(2; y + \delta)$ éknek. A nagyobbik ék viszont tartalmazza $W(2; y)$ -t, tehát van legalább 2 belső pontja. Továbbá a pont, amelyben $W(2; y)$

esetén elakadtunk, a határán van, tehát ha tovább tolnánk a csúcspontját, akkor már legalább 3 belső pontja lenne. Emiatt a nagyobb ék tartalmazza $W(2; y + \delta)$ -t, így annak csúcspontja csak a nagy és kis ék csúcspontjainak összekötő szakaszán lehet. Látható, hogy csak kicsit változhat a csúcspont helyzete, ha δ kicsi. A második esetre hasonló bizonyítás mondható, sőt ott a nagyobb ék helyett vehetnénk kicsit kisebbet, mert ez tartalmazza azt a pontot is, amelyben $W(2; y)$ esetén elakadtunk, tehát legalább 3 belső pontja van. Az ábrákon szürke kitöltés jelöli az eredeti $W(2; y)$ éket és vastag vonalak a nagyobb és kisebb éket.



3.2. ábra. $W(2, y)$ az y -nak folytonos függvénye.

Mivel \mathcal{S} véges, véges sok olyan y érték létezik, amikor egy pont kilép az ékből és belép helyette egy másik. Ha két pontra ez fennáll, akkor kössük össze azokat, gráfot építve \mathcal{S} pontjain, mint csúcson. Ezzel a módszerrel két pontdiszjunkt utat kapunk, $W(2; y)$ tetszőleges y érték esetén mindkettőből 1 pontot tartalmaz. Színezzük az egyik út pontjait kékre, a másikat pirosra. Ha egy ék legalább 2 pontot tartalmaz, akkor része egy valamilyen $W(2; y)$ ék, emiatt mindkét színű pontot tartalmaz. \square



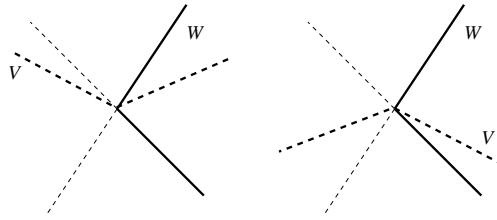
3.3. ábra. W szárainak egyenesei 4 cikkre vágják a síkot.

A továbbiakban $\{W, V\}$ ékpárokat vizsgálunk az NC tulajdonság szempontjából. A szerzők 5 típust különítenek el az egymáshoz való relatív elhelyezkedés szerint.

1. típus (Big) Az egyik ék szöge legalább π .

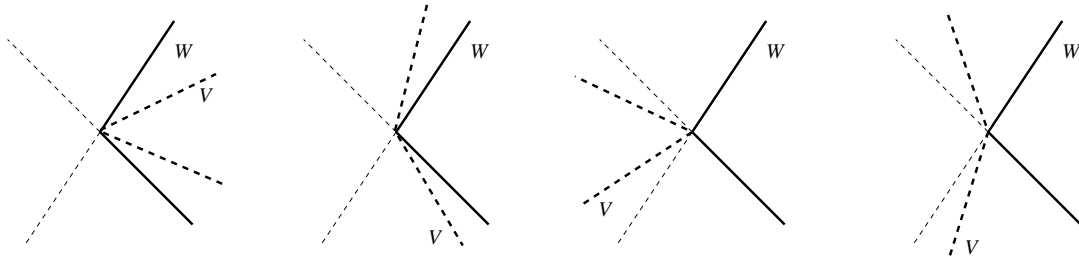
A többi esetben feltehető, hogy a W ék magába foglalja az x tengely pozitív ágát és csúcsa az origó. A szárai által meghatározott egyenesek négy cikkre vágják a síkot, alsó, felső, bal és jobb cikkre, ez utóbbi maga W .

2. típus (Halfplane) A két ék uniója tartalmaz egy félsíkot. Ekkor V egyik szára a jobb, a másik szára a bal cikkbe esik.



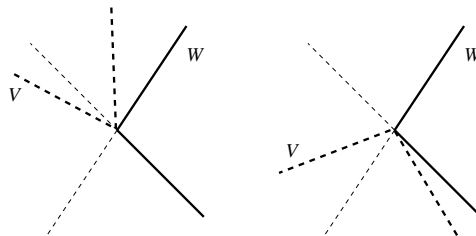
3.4. ábra. 2. típusú (Halfplane) ékek.

3. típus (Contain) Az egyik ék tartalmazza a másikat vagy annak origóra vett tükörképét. Vagy V egyik szára a felső, másik az alsó cikkbe esik, vagy mindkettő a jobb, vagy mindkettő a bal cikkbe.



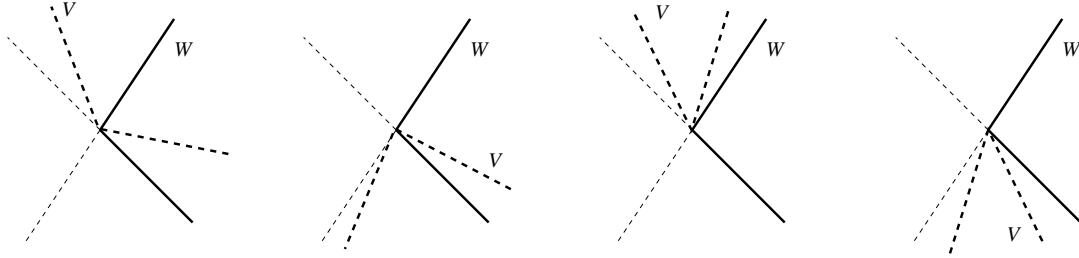
3.5. ábra. 3. típusú (Contain) ékek.

4. típus (Hard) Ekkor V egyik szára a bal cikkbe, a másik a felső vagy az alsó cikkbe esik.



3.6. ábra. 4. típusú (Hard) ékek.

5. típus (Special) A két ék uniója benne van egy félsíkban, de egyik sem tartalmazza a másikat. Ekkor V egyik szára a jobb, másik a felső- vagy az alsó cikkbe esik, vagy mindkét szára az alsó, vagy mindkettő a felső cikkbe esik.



3.7. ábra. 5. típusú (Special) ékek.

Az 5. típus kivételével mindegyikről belátják a szerzők, hogy ha két ék egymáshoz képest így helyezkedik el, akkor az általuk alkotott ékhalmaz NC. A felhasznált ötletek összefoglalása céljából a 3. típusú (Contain) ékek esetét bizonyítjuk.

Pálvölgyi Dömötör [7] cikkében egy gyönyörű konstrukció segítségével belátja, hogy ha egy ékpár 5. típusú (Special), akkor az általuk alkotott ékhalmaz NEM NC. Ezt a bizonyítást később, az 5. fejezetben fogjuk ismertetni. A két cikk eredményeiből pedig a konfliktusmentes ékhalmazok egy jó karakterizációját fogjuk kapni.

3.7. Lemma. *Ha W és V egy 3. típusú (Contain) ékpár, akkor a $\mathcal{W} = \{W, V\}$ ékhalmaz NC.*

A bizonyításhoz további fogalmak bevezetése szükséges.

3.8. Definíció. *Jelölje $Tr_k^W(\mathcal{S})$ a W ék azon eltoltjait, melyek pontosan k pontot tartalmaznak \mathcal{S} -ből.*

3.9. Definíció. *Adott $k \in \mathbb{N}$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén jelölje $W(k; y)$ azt az éket, mely legfeljebb k pontot tartalmaz \mathcal{S} -ből, y -koordinátája y és x -koordinátája minimális. (Ez a $W(2; y)$ fogalom általánosítása.)*

Az y érték növelésével a $k = 2$ esethez hasonlóan k pontdiszjunkt utat kapunk \mathcal{S} pontjain, legyenek ezek $P_1^W, P_2^W, \dots, P_k^W$. Az általuk alkotott rendezett k -ast az \mathcal{S} ponthalmaz W szerinti k -rendű útfelbontásának nevezzük.

Bizonyítás vázlat. Feltehető, hogy W tartalmazza az x -tengely pozitív ágát, csúcsa az origó, és vagy $V \subset W$ vagy $\bar{V} \subset W$. Olyan színezést adunk meg \mathcal{S} pontjain

pirossal és kékkel, hogy minden W -ék, amely legalább 4 pontot, és minden V -ék, amely legalább 14 pontot tartalmaz \mathcal{S} -ből, tartalmazzon mindkét színűt.

Tekintsük \mathcal{S} -nek W szerinti 4-rendű útfelbontását, P_1^W , P_2^W , P_3^W és P_4^W jelölje az utakat. P_1^W és P_2^W színezését úgy határozzuk meg, hogy minden $W' \in Tr_4^W(\mathcal{S})$ tartalmazzon piros pontot, és minden $V' \in Tr_7^V(P_1^W \cup P_2^W)$ tartalmazzon mindkét színű pontot. P_3^W és P_4^W színezését pedig úgy adjuk meg, hogy minden $W' \in Tr_4^W(\mathcal{S})$ tartalmazzon kék pontot és minden $V' \in Tr_7^V(P_3^W \cup P_4^W)$ tartalmazzon mindkét színű pontot. Az \mathcal{S} -ből az utak elhagyásával megmaradt pontok halmazát jelölje \mathcal{R} . Ezeket a pontokat színezzük úgy, hogy ha $V' \in Tr_2^V(\mathcal{R})$, akkor az tartalmazzon mindkét színű pontot.

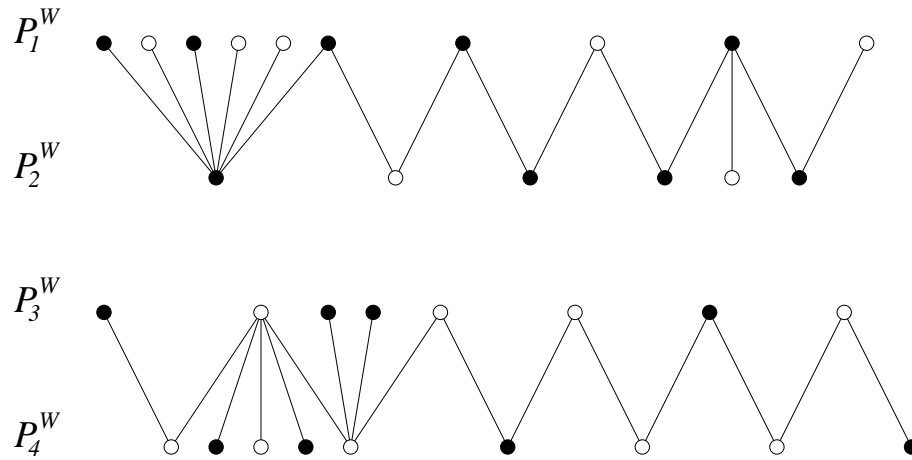
Ez jó színezése lesz \mathcal{S} pontjainak, mert minden W -ék, amely tartalmaz legalább 4 pontot, az egyik útpárból tartalmaz piros pontot, a másik útpárból kéket. És minden V -ék, amely tartalmaz \mathcal{S} -ből 14 pontot, vagy tartalmaz legalább 7 pontot az egyik útpárból, ekkor van benne mindkét színű pont. Vagy ha mindkettőből legfeljebb csak 6 pontot tartalmaz, akkor legalább 2 pontja \mathcal{R} -beli, és ezeket éppen úgy színezzük, hogy tetszőleges V -ék által kimetszett 2 pont között szerepeljen mindkét szín.

3.10. Definíció. *Legyen $p \in P_1^W$ és $q \in P_2^W$. Ha létezik olyan 4 csúcsot kimetsző W -ék, mely a két útból éppen ezeket a pontokat tartalmazza, akkor nevezzük ezeket **barátoknak** (friends). Az olyan pontokat, amelyeknek csak 1 barátja van, nevezzük az adott barát **rajongójának** (fan), és az olyan pontokat, amelyeknek van rajongójuk, nevezzük **sztároknak** (star). A nem sztár és nem rajongó pontokat nevezzük **reguláris pontoknak**.*

Tegyük fel, hogy P_1^W és P_2^W minden pontja reguláris, ilyenkor minden csúcsnak 2 barátja van. Színezzük P_1^W minden harmadik csúcsát pirosra, a többit kékre. P_2^W csúcsait ugyanígy, de toljuk el a színezést úgy, hogy azok a pontok legyenek pirosak, melyeknek 2 kék barátja van. Így bármely két barát közül legalább az egyik kék.

Tegyük fel most, hogy P_1^W és P_2^W pontjai között vannak nem regulárisak is. Ekkor a sztárok barátai közül az y -rendezés szerinti két szélső reguláris vagy sztár lehet (itt vált a másik út pontot ezért ezeknek más barátja is van), a középsők rajongók. Színezzük a sztárokat kékre, a barátaikat felváltva, de a két szélső legyen kék, hogy ha valamelyik szintén sztár, akkor se legyen probléma a színezés folytatásával. Páros sok rajongó esetén az egyik végén előfordulhat két piros egymás után. A még ki nem színezett reguláris pontok intervallum-párokat alkotnak. Színezzük az ilyeneket az előző esetnek megfelelően. Az első pont, amely nem barátja egy sztárnak sem, legyen

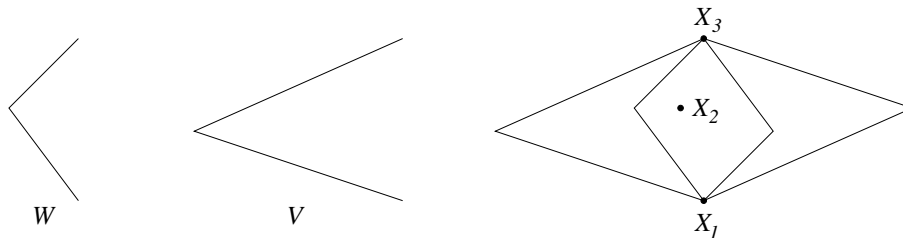
piros. Erre a színezésre is teljesül, hogy két barát közül legalább az egyik kék. A 3.8. ábrán fehérrel jelöltük a piros pontokat, feketével a kékeket.



3.8. ábra. \mathcal{S} W szerinti 4-rendű útfelbontásának színezése.

Egy \mathcal{S} -ből legalább 4 pontot kimetsző W -ék olyan pontokat tartalmazhat csak a két útból, melyek barátok, ezekről pedig láttuk, hogy legalább az egyik kék, tehát az ék tartalmaz kék pontot. Esetszétválasztással belátható, hogy minden V -ék, mely legalább 7 pontot tartalmaz a két útból, tartalmaz mindkét színű pontot.

Ehhez egy fontos észrevétel, hogy ha egy V -ék metsz egy P_i^W utat, akkor egy intervallumot tartalmaz belőle. Mivel a W éknek része a V vagy a \overline{V} ék, minden V -metszethez tartozik egy olyan eltoltja W -nek, mely ugyanazokat a pontokat tartalmazza az utakból, amelyeket V . Egy W -ékkal való metszés esetén pedig tudjuk, hogy ezek mindig intervallumok.



3.9. ábra. A V -ékek is egy intervallumot tartalmaznak a P_i^W utakból.

P_3^W és P_4^W színezésénél ugyanezeket a szabályokat alkalmazzuk, csak felcseréljük a két szín szerepét, így teljesülnek a feltételek.

Már csak \mathcal{R} színezését kell meghatározni, ezt az egy ékre vonatkozó lemma szerint végezzük. Mivel V szöge kisebb mint π , az első bizonyításban adott konstrukció

éppen egy megfelelő színezést ad, legalább 2 kimetszett pont között vannak különböző színűek. \square

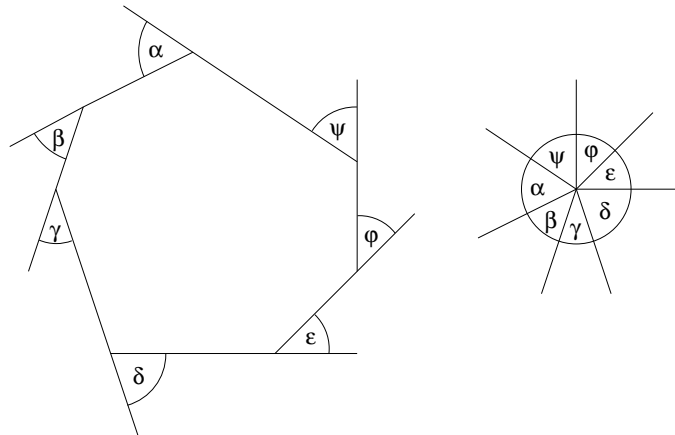
Az alábbi technikai lemma ahhoz szükséges, hogy tetszőleges ékhalmazról is el tudjuk dönteni, mikor NC. Ennek bizonyítását itt nem írjuk le.

3.11. Lemma. *Minden $s, t > 0$ egész számra létezik egy $f(s, t) \in \mathbb{N}$ szám, hogy teljesül az alábbi tulajdonság. Legyen \mathcal{S} véges halmaz és $\mathcal{W} = \{W_i \mid i = 1 \dots t\}$ olyan ékhalmaz, melyből bármely 2 ék alkotta ékhalmaz NC. Ekkor \mathcal{S} -nek létezik olyan $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_t\}$ t -osztályú partíciója, hogy ha egy W_i ék legalább $f(s, t)$ pontot tartalmaz \mathcal{S} -ből, akkor ezek közül legalább s az \mathcal{S}_i osztálynak eleme.*

3.12. Lemma. *Egy $\mathcal{W} = \{W_1, W_2, \dots, W_t\}$ ékhalmaz pontosan akkor NC, ha tetszőleges $\{W_i, W_j\}$ kételemű részhalmaza NC.*

Bizonyítás. Ha két ék együtt nem NC, akkor a definíció alapján egyértelmű, hogy az egész halmaz sem lehet NC.

A másik irány bizonyításához vegyünk egy partíciót $f(3, t)$ szerint. Ekkor ha egy W_i -ék legalább $f(3, t)$ pontot tartalmaz \mathcal{S} -ből, akkor legalább 3-at tartalmaz \mathcal{S}_i -ből. Színezzünk minden \mathcal{S}_i -t W_i -nek megfelelően az egy ékre vonatkozó lemma szerint, ennél éppen három pont szükséges mindkét szín tartalmazásához. Így egy jó színezést kapjuk \mathcal{S} pontjainak, mivel ha egy tetszőleges W_i -ék legalább $f(3, t)$ pontot tartalmaz, akkor legalább 3 pontot tartalmaz \mathcal{S}_i -ből, így szerepel benne mindkét szín. \square



3.10. ábra. Tetszőleges konvex sokszög bal oldali külső szögei diszjunktak.

Egy konvex sokszög ékeinek halmaza nem tartalmazhat speciális típusú ékpárt. Ugyanis tetszőleges konvex sokszögre igaz, hogy a csúcsainál fekvő bal oldali külső

szögek diszjunktak, és egy csúcsba tolva az ezeknek megfelelő ékeket éppen egy teljes szöget kapunk. Ez látható a 3.10. ábrán. Egy speciális ékpár külső szögei azonban nem diszjunktak, tehát ilyen szögek nem fordulhatnak elő egyszerre egy konvex sokszögben.

Tegyük fel, hogy a P sokszög csúcsainak száma n és olyan a sík cellafelbontása, hogy \overline{P} egy eltoltja legfeljebb k cellát metsz. Ekkor ha egy eltolt legalább $m = k \cdot (f(3; n) - 1) + 1$ pontot tartalmaz, akkor azok között előfordul mindkét szín. A duális megfogalmazásból visszafordítva az eredetire ez azt jelenti, hogy tetszőleges m -rétegű fedés szétbontható két fedéssé, és ezzel a tételt beláttuk. \square

4. fejezet

Több réteg

Az eddig tárgyalt szép matematikai problémának gyakorlati alkalmazása is létezik, ehhez azonban általánosabban kell megfogalmazni a feladatot. Buchsbaum tette ezt meg először [6] cikkében és érzékelő fedési problémának (sensor cover problem) nevezte.

Legyenek adva a síkon pontok, ezek felelnek meg az érzékelőknek, szenzoroknak, mindegyiknek a hatásköre egy síkidom, melynek súlypontja egybeesik a szenzorral. De tekinthetünk másik pontot is, csak az lényeges, hogy minden síkidomban ugyanaz a belső pont legyen a középpont, vagyis a szenzor helye. Ha s a szenzor, jelölje $R(s)$ a hatáskörét. Minden szenzort egy elem működtet, melynek van valamekkora élettartama (lehetnek különbözőek). A cél az, hogy meghatározzunk minden szenzorhoz egy olyan bekapcsolási időpontot, amelyek esetén az egész szenzormező a lehető legtovább működik. A feladatnak két változata létezik aszerint, hogy ki lehet-e kapcsolni a szenzorokat, majd újra vissza, vagy bekapcsolás után mindegyik addig működik, amíg le nem merül az eleme. Ez utóbbival fogunk foglalkozni abban a speciális esetben, amikor a szenzorok által érzékelt terület egy adott nyílt háromszög egy eltöltje.

Ezt a problémát általánosan Matt Gibson és Kasturi Varadarajan dolgozta fel az [5] cikkben, és egyúttal megadtak egy algoritmust is a bekapcsolási idők kiszámítására.

Legyen \mathcal{U} egy tetszőleges ponthalmaz, az univerzum, melyet fedni szeretnénk, \mathcal{S} a szenzorok halmaza. Minden $s \in \mathcal{S}$ szenzor esetén jelölje $d(s) \in \mathbb{N}$ a szenzort működtető elem élettartamát, $t(s) \in \mathbb{N}$ a bekapcsolási idejét. Feltehető, hogy minden élettartam egész, és könnyen látható, hogy ilyenkor a bekapcsolási idők is egészek lesznek, mert nem érdemes egy időszak közepén bekapcsolni egy szenzort sem. Ha a

bekapcsolási idők racionálisak lennének, akkor az időegység alkalmas megválasztásával tekinthetők egészeknek, ha pedig irracionálisak, akkor közelíthetők racionálisakkal. Emiatt a szenzormező működési idejét feloszthatjuk időegység hosszú időintervallumokra. Ha $t(s) = t$ és $d(s) = d$, akkor ez azt jelenti, hogy az s szenzort a t -edik időintervallum kezdő pillanatában kapcsoljuk be, és a $t + d - 1$ -edik időintervallum végéig folyamatosan működik, végig be van kapcsolva.

4.1. Definíció. *Az univerzum egy p pontja **fedve van** a t' -edik időintervallumban, ha létezik olyan $s \in \mathcal{S}$ szenzor, hogy $p \in R(s)$ és s ebben az időintervallumban be van kapcsolva, azaz $t(s) \leq t' \leq t(s) + d(s) - 1$. Azt mondjuk, hogy a szenzormező t'' **ideig működik**, ha a szenzorokhoz léteznek olyan bekapcsolási idők, amellyel valamely t'' időegységig tartó időszakban az univerzum minden pontja folyamatosan fedve van.*

A felírt algoritmusról a cikkben az alábbi tételt látják be a szerzők.

4.2. Tétel. (Gibson, Varadarajan) [5] *Létezik olyan polinomiális idejű algoritmus, mely adott síkbeli szenzorfedési feladatra, ahol a szenzorok hatásköre egy nyílt háromszög egy eltoltja, és minden pont esetén az azt fedő szenzorok élettartamainak összege legalább L , megad egy olyan bekapcsolási idő függvényt, melynek alkalmazásával legalább αL ideig működik a szenzormező, ahol $\alpha > 0$.*

Ez az eredmény azért jelentős, mert nem csak háromszögekre, hanem tetszőleges konvex poligonokra is kiterjeszthető az algoritmus és ezekre is lineáris korlátot kapunk. Ilyen korábban csak középpontosan szimmetrikus sokszögekre volt ismert. A következőkben csak megemlítjük a kérdéssel kapcsolatos eddigi eredményeket, nem írjuk le azok bizonyítását.

Pach János eredeti, középpontosan szimmetrikus sokszögekre adott bizonyításából exponenciális korlát adódik.

4.3. Tétel. (Pach) [1] *Minden P középpontosan szimmetrikus nyílt konvex sokszög esetén létezik egy olyan $c(P) > 1$ konstans, hogy a sík pontjainak P eltoltjaival való tetszőleges $c(P)^k$ -rétegű fedése szétbontható k fedéssé.*

Később Tóth Gézával együtt ezt a korlátot négyzetesre javították.

4.4. Tétel. (Pach, Tóth) [9] *Minden R középpontosan szimmetrikus nyílt konvex sokszög esetén létezik egy olyan $c(R) > 0$ konstans, hogy a síknak R eltoltjaival való tetszőleges $c(R)k^2$ -rétegű fedése szétbontható k fedéssé. És van olyan fedés, melynek rétegszáma $\lfloor \frac{4k}{3} \rfloor - 1$, és nem bontható szét k fedéssé.*

Középpontosan szimmetrikus sokszögekre a lineáris korlátot is sikerült bizonyítani, de más sokszögekre nem.

4.5. Tétel. (Aloupis, Cardinal, Collette, Langerman, Orden, Ramos) [10] *Minden Q középpontosan szimmetrikus nyílt konvex sokszöghöz létezik egy olyan $c(Q) > 0$ konstans, hogy a síknak Q eltoltjaival való tetszőleges $c(Q)k$ -rétegű fedése szétbontható k fedéssé.*

Tardos Gábor és Tóth Géza 2. fejezetben vizsgált cikkéből háromszögekre az alábbi eredmény következik.

4.6. Tétel. (Tardos, Tóth) [3] *Tetszőleges $m > 0$ esetén a síknak egy nyílt háromszög eltoltjaival való tetszőleges $\frac{21}{2}5^m - \frac{19}{2}$ -rétegű fedése szétbontható m fedéssé.*

Általános konvex sokszögekre eddig csak az alábbi magas fokú polinom korlát volt ismert.

4.7. Tétel. (Pálvölgyi, Tóth) [4] *Tetszőleges P nyílt konvex n -szög és $m > 0$ esetén létezik olyan K_P konstans és $k = k(P, m) < K_P(8m)^{2^{n-1}}$ szám, hogy a síknak P eltoltjaival való tetszőleges k -rétegű fedése szétbontható m fedéssé.*

Gibson és Varadarajan 4.2. Tételének bizonyítása során a korábbi esetekhez hasonlóan a feladat duális átfogalmazását érdemes tekinteni és az univerzum egy cellafelbontását, így egy háromszög helyett a csúcsainak megfelelő A, B és C ékekkel lehet metszeni \mathcal{S} -t. Azt szeretnénk kiszámolni, hogy hány szenzornak kell fednie a pontokat, illetve hánynak kell a pontokra illeszkedő középpontos tükörképekbe esnie, hogy a megfelelő ideig működjön a szenzormező, és a megfelelő számú rétegre szétessen a fedés.

Tegyük fel, hogy a háromszög egy eltoltja legfeljebb β cellát metsz, ebből legyen $r = \frac{L}{\beta}$. Az eredeti [5] bizonyításban a szerzők belátják, hogy az egyes cellák szenzorain megadható olyan bekapcsolási idő függvény, hogy ha egy ék r pontot, szenzort tartalmaz a cellából, akkor egy $\frac{r}{125}$ időegységig tartó időszak minden időintervallumában tartalmaz bekapcsolt szenzort. Az egész szenzormezőre kiterjesztve ezt a bekapcsolási idő függvényt, azt kapjuk, hogy ha az univerzum minden pontjára teljesül, hogy az azt fedő szenzorok élettartamainak összege legalább L , akkor $\alpha L = \frac{r}{125} = \frac{L}{\beta \cdot 125}$ időegységig tud működni a szenzormező.

A 2. fejezetben láttuk, hogy háromszög esetén célszerű hatszögrácsot tekinteni, ekkor egy háromszög 6 hatszögbe metszhet bele. (Négyzetrács esetén ennél rosszabb

eredményt kapnánk.) Tehát ha $\beta = 6$, akkor az előbbi gondolatmenet végeredményeként azt kapjuk, hogy $\frac{L}{6 \cdot 125} = \frac{L}{750}$ időegységig működhet legalább a szenzormező.

Ezt az általános eredményt mi átdolgozzuk arra a speciális esetre, amikor minden szenzor élettartama 1 időegység és nem lehet azokat kikapcsolni. Ha megengedjük, hogy egybeessenek szenzorok, akkor ez ekvivalens azzal változattal, amikor hosszabb ideig tudnak működni, de ki lehet kapcsolni azokat, majd újra vissza. A szenzorok élettartama minden esetben egy d egész szám, egy ilyen szenzor helyett tekinthetünk d egybeeső szenzort, melyeknek 1 az élettartamuk.

Ebben az esetben egy maximális ideig működő szenzormező működési idejének kérdése ekvivalens azzal a problémával, hogy legfeljebb hány 1-rétegű fedéssé lehet szétbontani egy adott fedést. Minden időintervallum, amíg működik a szenzormező, megfelel egy fedésnek, mert egy szenzor csak 1 időintervallumig képes működni. Emiatt a 4.8. Tétel (i) és (ii) pontjában megfogalmazott állítások ekvivalensek. Az alábbiakban belátjuk, hogy erre a speciális esetre jobb eredmény kapható.

4.8. Tétel. *Létezik olyan polinomiális idejű algoritmus, mely*

(i) *adott síkbeli szenzorfedési feladatra, ahol a szenzorok hatásköre egy nyílt háromszög eltoltja, élettartalma 1 időegység, és minden pontot legalább L szenzor fed, megad egy olyan bekapcsolási idő függvényt, melynek alkalmazásával a szenzormező legalább $\frac{L}{84}$ ideig működik.*

(ii) *egy nyílt háromszög-lap eltoltjaival való tetszőleges L -rétegű fedést szétbont $\frac{L}{84}$ fedéssé.*

Bizonyítás. Az alkalmazott gondolatmenet megegyezik az eredeti cikkben szereplővel, csak a számolások különböznek.

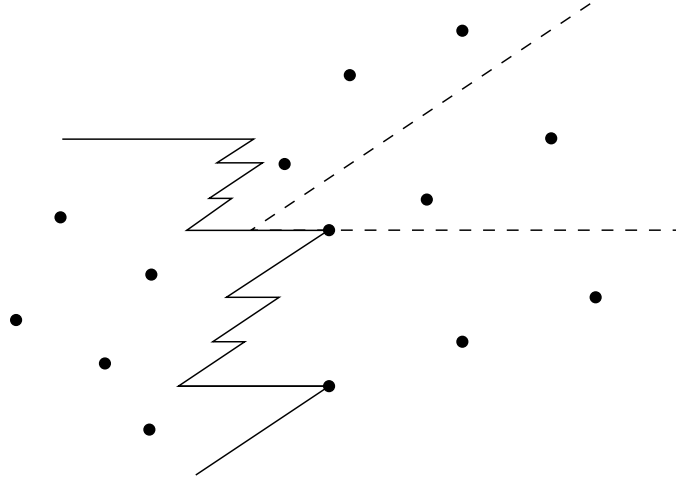
A korábbi esetekhez hasonlóan a feladat duális átfogalmazását tekintjük, és ugyanazokat a jelöléseket használjuk, mint a 2. fejezetben. Legyen T a nyílt háromszög, \mathcal{S} az eltoltak súlypontjainak halmaza, most ezek reprezentálják a szenzorokat. Egy fedés szétbontható k fedéssé, ha ki lehet színezni \mathcal{S} pontjait k színnel úgy, hogy az univerzum minden p pontjára $\overline{T}(p)$ tartalmaz minden színű pontot.

Tekintsük az univerzum egy cellafelbontását, így a háromszög helyett a csúcseinak megfelelő A, B és C ékekkel metszhetünk. Mivel a háromszög nyílt, feltehető, hogy a fedés lokálisan véges, így minden cella csak véges sok \mathcal{S} -beli pontot tartalmaz. Továbbá a súlypontok általános helyzetűek, és mindegyik pont valamelyik cella belsejébe esik. Ezeket a tulajdonságokat láttuk az 1. fejezetben.

Legyen G a cella, melyet vizsgálunk, Y a belsejébe eső szenzorok véges halmaza.

4.9. Definíció. Minden $X \in \{A, B, C\}$ és $r \in \mathbb{N}$ esetén az r pontot tartalmazó X -ékek uniójának határát jelölje $C_X(r)$.

Ez egy olyan töröttvonal, melynek minden szakasza az X ék valamelyik szárával párhuzamos. Továbbá látható, hogy ha egy $X(p)$ ék r pontot tartalmaz, akkor $p \in C_X(r)$, és ha több mint r pontot tartalmaz, akkor magába foglal egy olyan éket, melynek csúcspontja $C_X(r)$ -re illeszkedik.



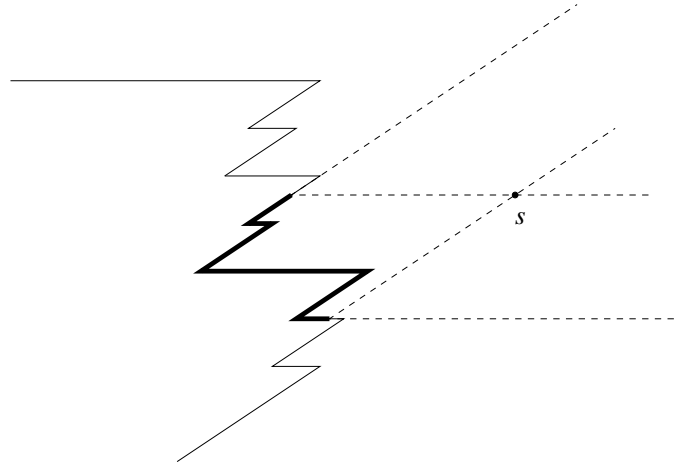
4.1. ábra. A $C_X(2)$ töröttvonal.

Minden ékhez egyértelműen hozzárendelhető a csúcspontja, és minden szenzorhoz az azt tartalmazó ékek csúcspontjainak halmaza, mely egy részintervalluma $C_X(r)$ -nek. Vetítsük le $C_X(r)$ -et és a részintervallumokat egy a háromszög harmadik oldalával párhuzamos egyenesre. Így az egyenes $C_X(r)$ pontjainak megfelelő korlátos részének intervallumokkal való fedését kapjuk. Minden ék tartalmaz legalább r pontot, és csúcspontjának képét tartalmazzák a pontokhoz tartozó intervallumok, tehát ez egy r -rétegű intervallumfedés.

Intervallumokra átfogalmazva a feladat egy minél nagyobb k szám találása, amelyre az intervallumoknak létezik k színnel való olyan színezése, amelynél minden pontot fed minden színű intervallum. Ezzel a legalább r pontot tartalmazó ékek pontjainak kapjuk egy k színnel való színezését úgy, hogy minden ék tartalmaz minden színű pontot.

Az intervallum, amelyet fedni szeretnénk, kontinuum sok pontot tartalmaz. Mivel azonban egy cellába véges sok szenzor esik, csak véges sok lényegesen különböző (más szenzorhalmazt tartalmazó) r -pontú ék létezhet. Ha két ék ugyanazokat a pontokat tartalmazza, akkor mindkét csúcspontot fedik a hozzájuk tartozó intervallumok.

lumok, tehát nem eshet ezek közé szakaszvégpont. Emiatt elég minden kimetszhető részhalmaz esetén egy csúcspontot tekinteni.



4.2. ábra. Minden $s \in \mathcal{S}$ pontnak megfelel egy rész-töröttvonal.

Az algoritmus menete nagy vonalakban a következő: minden $X \in \{A, B, C\}$ csúcs esetén kiválasztunk egy $Y_X \subseteq Y$ részhalmazt, kijelöljük a bekapcsolandó szenzorokat, megadva rögtön a bekapsolási időket is, amelyekkel az intervallumfedés egy bizonyos vastagságú lesz. A maradékot pedig visszatesszük Y -ba, hogy a következő iterációnál még használni tudjuk ezeket. A kiválasztást Matt Gibson és Kasturi Varadarajan RSC-feladat (Restricted Strip Covering problem) megoldására alkotott algoritmusának egy egyszerűbb változatával tesszük.

Az RSC algoritmus egyszerűsített változata.

Legyen adva egy $I = (a, b)$ nyílt intervallum és annak egy nyílt intervallumokkal való r -rétegű véges fedése. Az intervallumon tekintsük a valós számok szokásos rendezést, eszerint fogunk haladni a legkisebb ponttól kezdve a legnagyobb felé. Az algoritmus általános lépésében amikor találunk egy p nem fedett pontot, kiválasztjuk a még nem használt intervallumok közül azt, amelyik tartalmazza a p pontot és jobb végpontja a legnagyobb. Addig folytatjuk ezt, amíg elérünk a b pontig, és mivel a fedés véges, ez be fog következni. Ez után elkezdjük építeni a következő réteget, ismét a -tól kezdve. Ezt valamilyen meghatározott fedésszámig csináljuk, vagy amíg el nem akadunk, azaz valamelyik ponthoz már nem találunk azt tartalmazó, még nem használt intervallumot.

Az algoritmus tartalmazásra nézve minimális fedést ad minden időszakra, mert ha lenne egy olyan intervallum, amely tartalmaz egy másikat, akkor a kisebbik kiválasztásakor nem azt kellett volna tekintetnünk, hanem a nagyobbbat, és ez ellent-

mondás. Ha pedig két intervallum uniója tartalmazna egy másikat, akkor ez csak amiatt lehet, hogy egy olyan pont esetén is választottunk intervallumot, amely már fedve volt, és ez szintén ellentmond az algoritmus választási szabályának.

Az eredeti változat a több ideig működő szenzorok miatt 5-approximatív, vagyis ha az intervallum minden pontjára az azt fedő szakaszokhoz tartozó élettartamok összege L , akkor $\frac{L}{5}$ ideig működő intervallumfedést ad eredményül. Ez az egyszerűbb algoritmus azonban 2-approximatíván működik, ezt bizonyítja az alábbi lemma.

4.10. Lemma. *Egy egydimenziós pontthalmaz nyílt intervallumokkal való tartalmazásra nézve minimális 1-rétegű fedése esetén minden pont legfeljebb 2-szeresen van fedve.*

Bizonyítás. Tekintsük a valós számokat a szokásos rendezéssel és a valós nyílt intervallumokat. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy olyan p pont, melyet három intervallum is fed, jelölje ezeket (a_1, b_1) , (a_2, b_2) és (a_3, b_3) . Feltehető, hogy a_1 minimális a bal végpontok között. De ekkor b_1 is minimális a jobb végpontok között, különben (a_1, b_1) -nek része lenne legalább az egyik intervallum, ez viszont ellentmond a minimalitásnak. Feltehető továbbá, hogy b_2 maximális a jobb végpontok között. Mindhárom intervallum fedi a p pontot, azaz összeérnek, így a feltevésekből következik, hogy $(a_3, b_3) \subseteq (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2)$, vagyis (a_3, b_3) felesleges, és ezzel ellentmondásra jutottunk. \square

4.11. Következmény. *Egy egyenes pontjainak nyílt intervallumokkal való tetszőleges $2n$ -rétegű fedése szétbontható n fedéssé. Mert ha a fedésből elhagyunk egy tartalmazásra nézve minimális 1-rétegű fedést, akkor a maradék fedés vastagsága legfeljebb 2-vel csökken, ebből pedig indukcióval következik, hogy az egyszerűsített algoritmus valóban 2-approximatív.*

Esetünkre átfogalmazva Gibson algoritmus az alábbi. Minden lépése megegyezik az eredetiével, de mivel ez csak a speciális esetre működik, és az egyszerűsített RSC-algoritmust használjuk, más számok szerepelnek benne. Két paraméterünk lesz, a és c , melyeknek értékét később optimalizáljuk.

Az algoritmus sorban veszi a háromszög csúcsait, mindegyik esetén kiválaszt az r csúcsot tartalmazó ékek pontjai közül annyit, hogy minden ékbe essen legalább $2ar$. A $<_X$ szerint nagyobb pontoktól kezdi a beválasztást, mert ezek több ékben lehetnek benne, így nagyobb intervallumot határoznak meg a fedési feladatnál. Azért tesszük ezt, mert minél kevesebb pontot szeretnénk elhasználni, hogy az iteráció következő

Algorithm 1 Gibson algoritmus speciális változata

```

1:  $Y' \leftarrow Y$ 
2:  $Y_A \leftarrow Y_B \leftarrow Y_C \leftarrow \emptyset$ 
3: for  $\forall X \in \{A, B, C\}$  do
4:   for  $\forall p \in C_X(r)$  do
5:      $\{y_1, y_2, y_3, \dots\}$  jelölje  $W_X(p) \cap Y'$  pontjait a  $<_X$  rendezés szerint csök-
6:       kenő sorrendben.
7:      $i \leftarrow 1$ 
8:     while  $|W_X(p) \cap Y_X| \leq 2ar$  do
9:        $Y_X \leftarrow Y_X \cup \{y_i\}$ 
10:       $i \leftarrow i + 1$ 
11:     end while
12:   end for
13:   Futtassuk az egyszerűsített RSC-algoritmust  $C_X(r)$  pontjaira és az  $Y_X$ -hez
14:     tartozó intervallumokra, amíg a fedések száma eléri  $ar$ -et.
15:    $Y'$  legyen a nem használt szenzorok halmaza.
16: end for

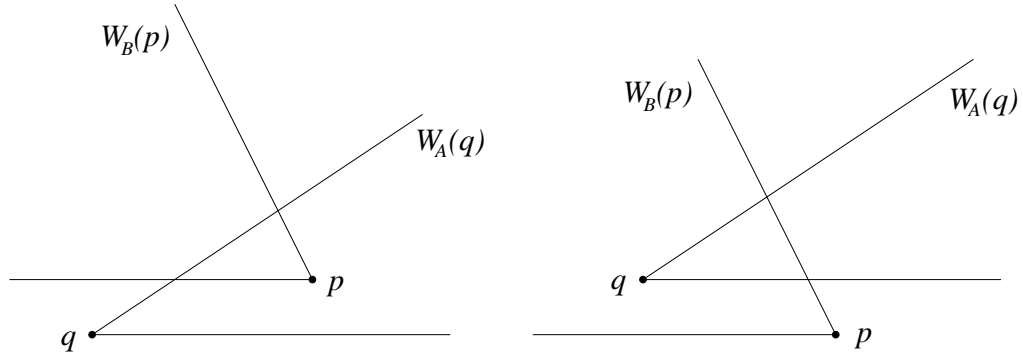
```

lépéseinél a többi csúcshoz is maradjon elég pont. Az eredeti esetben az RSC algoritmus 5-approximativitása miatt adott r esetén $\frac{r}{125}$ élettartamú színezést tudunk ezzel előállítani. A mi esetünkben azonban az egyszerűsített RSC 2-approximativitása miatt, és mert a szenzorok élettartama 1 időegység, jobb eredmény várható.

Ennek kiszámolásánál az eredeti cikk módszereit alkalmazzuk. Feltesszük, hogy az algoritmus először az A -ékeket tekinti, majd a B - és végül a C -ékeket. Az a probléma, hogy mikor kiválasztunk szenzorokat, az iteráció következő lépésénél felhasználhatók száma csökken. Két paraméterünk lesz, a és c , belátjuk, hogy az első iteráció után minden B - és C -ékben marad legalább cr pont és a második iteráció után minden C -ékben marad még $2ar$ pont.

Az első iteráció után a B - és C -ékek helyzete szimmetrikus, ezért elég csak a B -ékeket vizsgálni, tekintsük közülük $W_B(p)$ -t. Ha ezt nem metszi semmilyen A -ék, akkor továbbra is r pontja marad. Ha van egy olyan $W_A(q)$ ék, amely metszi, akkor két eset lehetséges, melyek a 4.3. ábrán láthatók. Nevezzük 1. típusúnak a metszést, ha $p \in W_A(q)$, és 2. típusúnak, ha $q \in W_B(p)$.

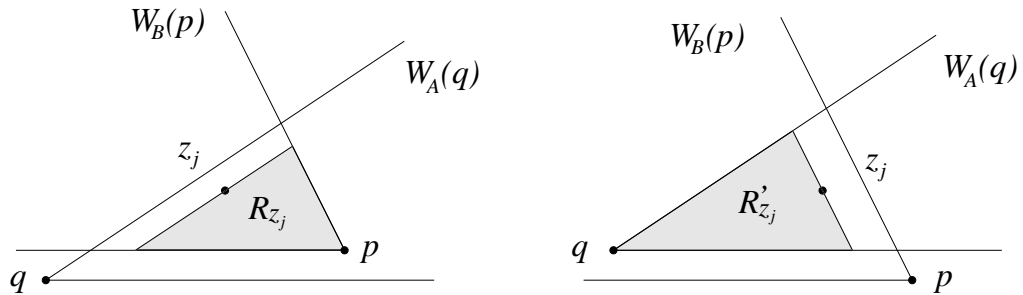
Jelölje $W_B(p)$ pontjait $<_B$ szerint növekvő sorrendben $\{z_1, z_2, z_3, \dots\}$. Legyen $j = \max\{i \mid z_i \in Y_A\}$, ekkor a $<_B$ rendezés definíciója alapján csak a $\{z_1, z_2, \dots, z_j\}$



4.3. ábra. 1. típusú és 2. típusú metszés.

pontok eshetnek a $W_A(q)$ ékbe, vagyis az első iterációnál csak ezeket használhattuk fel. Ha $j \leq (1-c)r$, akkor a $W_B(p)$ ékben marad legalább cr pont, és ilyenkor készen vagyunk. Tegyük fel ezért, hogy $j > (1-c)r$.

Ha a metszés 1. típusú, jelölje R_{z_j} a $W_B(p)$ ék és a $z' \leq_B z_j$ pontok félsíkjának metszetét, ez része a $W_A(q)$ éknek. Amikor az egyszerűsített RSC-algoritmust futtatjuk ar -ig, legfeljebb $2ar$ pontot használunk el minden ékből. A $W_B(p)$ ékbe eső nem használt pontok száma legalább annyi, mint az R_{z_j} -ben lévőké, tehát $(1-c)r - 2ar$. Úgy fogjuk meghatározni az a és c paramétereket, hogy ennek értéke legalább cr legyen.

4.4. ábra. R_{z_j} és R'_{z_j} halmazok.

Ha a metszés 2. típusú, jelölje R'_{z_j} a $W_A(q)$ ék és a $z' \leq_A z_j$ pontok félsíkjának metszetét, ez része a $W_B(p)$ éknek. Tegyük fel, hogy $W_A(q)$ az az A -ék, amelynél a z_j pontot beválasztottuk Y_A -ba. Mivel a $<_A$ szerint nagyobb pontok felől haladva választunk, a $W_A(q)$ ék R'_{z_j} -n kívül eső részében kevesebb mint $2ar$ pont lehet csak. Emiatt R'_{z_j} legalább $r - 2ar$ pontot tartalmaz, melyek közül az RSC-algoritmus futása során legfeljebb $2ar$ -et választunk ki. Így R'_{z_j} -ben legalább $r - 2ar - 2ar$ nem használt pont marad, ennek az értéknek is cr -nél kell nagyobbnak lennie.

A harmadik iterációnál ugyanezeket a lépéseket kell végrehajtani, de most az A -ékek helyett B -ékek és a B -ékek helyett C -ékek szerepelnek. Az R_{z_j} és R'_{z_j} jelöléseket ugyanúgy fogjuk használni, mint az előbb. Felhasználjuk továbbá, hogy a C -ékek eredetileg legalább cr pontot tartalmaztak.

Ha a metszés 1. típusú, akkor feltehetjük, hogy R_{z_j} -ben legalább $(c - 2a)r$ pont van, ezek közül legfeljebb $2ar$ -et használunk el. Itt már csak annyit kell feltenni, hogy a C -ékekben marad még legalább $2ar$ nem használt pont.

Ha a metszés 2. típusú, akkor legalább $(c - 2a)r$ pontja van R'_{z_j} -nek, ezek közül legfeljebb $2ar$ -et használunk el, így ugyanazt az egyenlőtlenséget kapjuk, mint az 1. típusú metszés esetén. Az eddigiek alapján kapott egyenlőtlenség-rendszer átrendezve és leosztva r -rel a következő:

$$\begin{cases} 1 - 2a \geq 2c \\ 1 - 4a \geq c \\ c \geq 6a \end{cases}$$

Az a lehető legnagyobb értékét keressük, mert a fedések számát szeretnénk maximalizálni, és ez az algoritmus ar réteget, azaz ennyi fedést ad meg. Tekintsük ezért c értékét $6a$ -nak, ennek behelyettesítésével az egyenlőtlenségekből $a \leq \frac{1}{14}$ és $a \leq \frac{1}{10}$ következik. Tehát azt kapjuk, hogy $a = \frac{1}{14}$ és $c = \frac{6}{14}$.

Ezzel beláttuk, hogy megadhatók a szenzorokhoz olyan bekapcsolási idők, hogy ha egy ék r pontot tartalmaz, akkor létezik $\frac{r}{14}$ egymást követő időintervallum, hogy mindegyikre tartalmaz az alatt bekapcsolt szenzort. Azt láttuk, hogy egy háromszög legfeljebb 6 cellát metsz, és ebből az előzőekhez hasonlóan következik, hogy az egész szenzormező működési ideje $\frac{r}{14} = \frac{L}{6 \cdot 14} = \frac{L}{84}$, ahol L az egy pontot fedő szenzorok minimális száma. \square

5. fejezet

Ellenpéldák

Ebben a fejezetben Pálvölgyi Dömötör [7] cikkének eredményeit ismertetjük, amely a Tóth Gézával közösen írt [4] cikkük befejezése. A 3. fejezetben már foglalkoztunk ez utóbbi írással, melyben a szerzők bebizonyították az 1.6. Tételt.

1.6. Tétel. (Pálvölgyi, Tóth) [4] *Minden nyílt konvex sokszög fedés-szétbontható.*

Valójában azonban az erősebb 5.1. Tételt látták be, melyből egy egyszerű indoklással következik a fenti tétel. Ehhez először vissza kell tekintenünk a [4] cikk jelöléseihez. Ennek szerzői az ékpárokat a két ék egymáshoz viszonyított elhelyezkedése alapján 5 típusba sorolták, melyek közül az 5. típusúak (Special) voltak érdekesek. Ha egy ilyen ékpár két elemét egy csúcsba toljuk, azok unióját tartalmazza egy fél-sík, de egyik ék sem része a másiknak. A továbbiakban két ilyen éket nevezünk speciális ékpárnak. Ezen jelölés alkalmazásával Pálvölgyi Dömötör és Tóth Géza tétele a következő.

5.1. Tétel. (Pálvölgyi, Tóth) [4] *Minden nyílt sokszög, amely nem tartalmaz speciális ékpárt, fedés-szétbontható.*

Egy konvex sokszöghöz nem tartozhat speciális ékpár, ezt láttuk a 3. fejezetben, és emiatt az 5.1. Tételből következik az 1.6. Tétel.

Eddig igazán senki sem figyelt arra, hogy milyen ponthalmazt is szeretnénk lefedni, leginkább az egész sík fedése volt a cél. Pedig a bizonyítások sokkal általánosabban, tetszőleges ponthalmaz, univerzum esetén is működnek, egyik sem használja ki, hogy a szükséges tulajdonságoknak a sík minden pontjára teljesülniük kell. Az alábbi definíciót Pálvölgyi Dömötör vezette be elsőként, erre az ellenpéldák megértéséhez lesz szükség.

5.2. Definíció. *Egy P síkbeli ponthalmazt **teljesen-fedés-szétbonthatónak** (totally-cover-decomposable) nevezünk, ha létezik olyan $k \in \mathbb{N}$ szám, hogy tetszőleges síkbeli ponthalmaznak P eltoltjaival való k -rétegű fedése szétbontható két fedéssé.*

Ez a definíció erősebb a korábbi fedés-szétbonthatóság definíciónál, mivel ott csak a teljes síknak tekintettük tetszőleges fedését, a részhalmazainak nem. Az előbbi gondolatmenet alapján következik azonban, hogy az eddigi eredmények átfogalmazhatók, tehát az egységkörlap és minden konvex sokszög teljesen-fedés-szétbontható. A megkülönböztetés céljából a szerző az eddig fedés-szétbonthatónak mondott halmazokat **sík-fedés-szétbonthatónak** nevezi, mi is ezt az elnevezést fogjuk alkalmazni ebben a fejezetben.

A definícióból következik, hogy ha egy halmaz teljesen-fedés-szétbontható, akkor sík-fedés-szétbontható is. Később látni fogjuk, hogy ez visszafelé nem igaz, létezik olyan halmaz, amely sík-fedés-szétbontható, de nem teljesen-fedés-szétbontható.

5.3. Tétel. (Pach, Tardos, Tóth) [8] *Tetszőleges konkáv négyszög nem sík-fedés-szétbontható. (Ebből következik, hogy nem is teljesen-fedés-szétbontható.)*

Pálvölgyi Dömötör az 5.4. Tételben ennek egy általánosítását bizonyítja, melyből a Tóth Gézával közös 5.1. Tétel alapján egy jó karakterizációját kapjuk a teljesen-fedés-szétbontható sokszögeknek.

5.4. Tétel. *Ha egy P nyílt sokszöghöz tartozó ékpárok között van speciális, akkor P nem teljesen-fedés-szétbontható.*

5.5. Következmény. *Egy nyílt sokszög akkor és csak akkor teljesen-fedés-szétbontható, ha nem tartozik hozzá speciális ékpár.*

Továbbá belátja, hogy minden konkáv sokszöghöz, amelynek nincs párhuzamos oldalpárja, tartozik speciális ékpár, ebből pedig következik az alábbi tétel.

5.6. Tétel. *Ha egy konkáv sokszögnek nincs két párhuzamos oldala, akkor nem teljesen-fedés-szétbontható.*

Az 5.4. Tétel bizonyításának lényege, hogy tetszőleges C sokszögre, melynek van speciális ékpárja, és minden k számra meg tudunk adni egy véges ponthalmazt valamint egy szétbonthatatlan k -rétegű fedést.

Itt is a feladat duális átfogalmazását tekintette a szerző. $\mathcal{C} = \{C(p_i) \mid i \in I\}$ jelölje a C eltoltjainak halmazát, $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in I\}$ a középpontok halmazát. Legyen

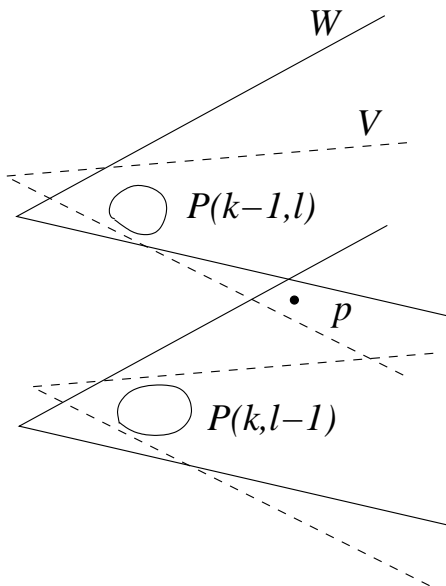
X a ponthalmaz, amelyet fedni szeretnénk. Ekkor az $x \in X$ pontot k -rétegben fedi a \mathcal{C} halmazrendszer akkor és csak akkor, ha $\overline{\mathcal{C}}(x)$ legalább k pontot tartalmaz \mathcal{P} -ből. ($\overline{\mathcal{C}}(x)$ a C halmaz origóra vonatkozó középpontos tükrképének azon eltoltját jelöli, melynek középpontja x .) Akkor létezik a fedésnek megfelelő szétbontása, ha \mathcal{P} pontjait ki tudjuk színezni két színnel, pirossal és kékkel úgy, hogy minden $x \in X$ esetén $\overline{\mathcal{C}}(x)$ tartalmaz mindkét színű pontot. A konstrukció megalkotásánál tehát az a cél, hogy tetszőleges színezés esetén legyen olyan pont X -ben, amelyhez tartozó eltolt csak egyik színű pontokat tartalmaz.

Mivel C -nek pontosan akkor van speciális ékpárja, ha \overline{C} -nek van, ezért a duális átfogalmazás és egy megfelelő cellafelbontás alkalmazásával az alábbi tételből következik az 5.4. Tétel.

5.7. Tétel. *Minden $\{V, W\}$ speciális ékpár és $k, l \in \mathbb{N}$ számok esetén létezik olyan $\binom{k+l}{k} - 1$ elemszámú $P(k, l)$ halmaz, hogy annak tetszőleges piros-kék színezése esetén vagy létezik V -nek egy eltoltja, amely tartalmaz k piros pontot és kéket nem, vagy létezik W -nek egy eltoltja, amely tartalmaz l kék pontot és pirosat nem.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy az ékek a jobb félsíkba esnek, ez forgatással elérhető. A $k = 1$ eset triviális. Jelöljük ki l pontot a síkon úgy, hogy mindegyikhez létezen olyan V -ék, amely egyedül azt a pontot tartalmazza. Tekinthetjük például egy megfelelő meredekségű egyenes l pontját. (A V és W ékek eltoltjait V -éknek illetve W -éknek nevezzük.) Ekkor \mathcal{P} pontjainak tetszőleges színezése esetén, amelyben létezik piros pont is, van olyan V -ék, amely tartalmaz $k = 1$ piros pontot és kéket nem. Ha viszont minden pont kék, akkor van olyan W -ék, amely l kék pontot tartalmaz, nevezetesen \mathcal{P} összes pontját, és pirosat nem. Az $l = 1$ esetben hasonlóan járunk el.

Tegyük fel, hogy már van ellenpéldánk minden $k' + l' < k + l$ esetén, jelölje a megfelelő ponthalmazokat $P(k', l')$. Ezeknek segítségével fogjuk megkonstruálni a $P(k, l)$ halmazt. Helyezzünk el egy pontot a síkon és tőle balra egy megfelelően lekicsinyített mását a $P(k - 1, l)$ ponthalmaznak úgy, hogy minden V -ék, amelynek csúcsa a $P(k - 1, l)$ szomszédságában van, tartalmazza a p pontot is, de minden W -ék, amelynek csúcspontja a $P(k - 1, l)$ szomszédságában van, nem tartalmazza p -t. És hasonlóan elhelyezzük p -től balra $P(k, l - 1)$ -nek egy kicsinyített mását úgy, hogy minden W -ék, amelynek csúcspontja a $P(k, l - 1)$ szomszédságában van, tartalmazza a p pontot és minden V -ék, amelynek csúcspontja a $P(k, l - 1)$ szomszédságában van, nem tartalmazza a p pontot. Az alábbi 5.1. ábrán látható, hogy létezik ilyen elhelyezés.



5.1. ábra. $P(k, l)$ konstrukciója $P(k-1, l)$ és $P(k, l-1)$ segítségével.

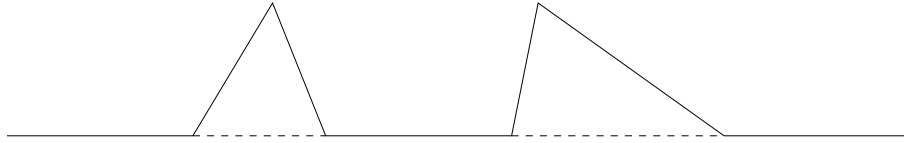
Ha a p pont piros, akkor $P(k-1, l)$ -et tekintjük, két eset lehetséges. Vagy létezik olyan V -ék, amely tartalmaz $P(k-1, l)$ -ből $k-1$ piros pontot és kéket nem, de az összes ilyen ék tartalmazza a p pontot is, mely piros, tehát tartalmaz k piros pontot, és kéket továbbra sem. Vagy pedig létezik olyan W -ék, amely $P(k-1, l)$ -ből tartalmaz l kék pontot és pirosat nem, de ez nem tartalmazza a p pontot, tehát nem esik bele piros pont. Ha a p pont kék, akkor hasonlóan érvelünk a $P(k, l-1)$ halmaz tulajdonságainak felhasználásával.

Már csak a $P(k, l)$ számosságára vonatkozó állítást kell belátni. Tudjuk, hogy $|P(k, 1)| = k$ és $|P(1, l)| = l$. A konstrukció általános lépése szerint $|P(k, l)| = |P(k-1, l)| + |P(k, l-1)| + 1$, ebből pedig indukcióval következik, hogy $|P(k, l)| = \binom{k+l}{k} - 1$. \square

A $P(k, k)$ halmaz és a megfelelő ékek éppen az ígért konstrukciót adják. A pont-halmaz tetszőleges színezése esetén ezen ékek k pontot tartalmazó eltoltjai között létezik olyan, amely csak egyszínű pontokat tartalmaz.

Az 5.4. Tétel alapján meg lehet adni olyan síkbeli ponthalmazt, amely sík-fedés-szétbontható, de nem teljesen-fedés-szétbontható. Egy speciális ékpárral rendelkező sokszög és egy attól távol lévő sík uniója például megfelel, de választhatunk összefüggő halmazt is. Legyen H egy félsík, melyre ráragasztottuk egy speciális ékpár két ékét, ez szintén jó példa (elfajult poligon). Ilyen tulajdonságú korlátos halmaz azonban egyelőre nem ismert. Vegyük a sík egy tetszőleges fedését H eltoltjaival.

Feltehető, hogy a félsík határegyenesé vízszintes, ekkor minden eltolt jellemezhető egy valós számmal, mely az egyeneshez tartozó y -koordinátának felel meg. Ezen valós számok halmaza nem korlátos, mivel az egész sík le van fedve, válasszunk belőle egy végtelenhez tartó sorozatot, és azokat színezzük felváltva. Ekkor mindkét szín egy fedését adja a síknak, tehát az eredeti fedés is szétbontható.

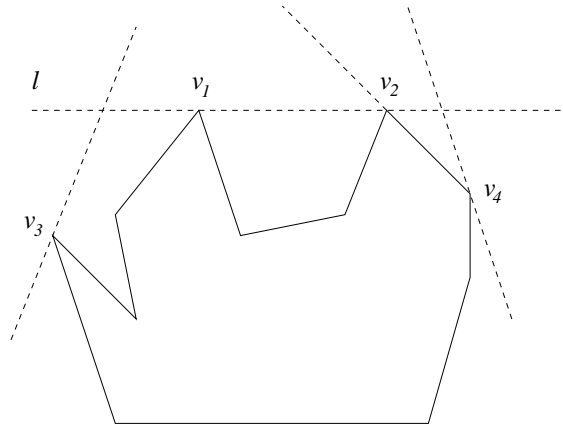


5.2. ábra. Félsík, melyre ráragasztottuk egy speciális ékpár ékeit.

Az 5.6. Tétel pedig az alábbi lemmából következik.

5.8. Lemma. *Ha egy konkáv sokszögnek semelyik két oldala sem párhuzamos, akkor tartozik hozzá speciális ékpár.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy a C konkáv sokszögnek nem létezik párhuzamos oldalpárja és mégsem tartozik hozzá speciális ékpár. Mivel C konkáv, létezik olyan l érintő egyenes, amely két csúcsát érinti, és ezek között nem metszi más részét. Jelölje az érintett csúcsokat v_1 és v_2 , a nekik megfelelő ékeket W_1 és W_2 . Az ékek részei az érintő által határolt félsíknak, de mivel nem alkotnak speciális ékpárt, az egyiknek tartalmaznia kell a másikat, feltehető hogy $W_2 \subset W_1$.



5.3. ábra. Konkáv sokszög, melynek semelyik két oldala sem párhuzamos.

Tekintsük C -nek azt a két érintő egyenesét, amelyek párhuzamosak a W_2 ék száraival. Az nem lehet, hogy mindkettő érinti a v_2 csúcsot, különben az l érintő is csak azt érinthette volna. Legyen v_3 egy olyan csúcsa C -nek, amely vagy egy

harmadik érintési pontja l -nek, vagy az utóbbi két érintő közül egy olyannak az érintési pontja, amelyre v_2 nem illeszkedik. A v_3 csúcshoz tartozó éket nevezzük W_3 -nak. Ekkor W_2 és W_3 ékek részei egy félsíknak az érintő egyenesek miatt, az 5.3. ábrán látható. Azonban C -hez nem tartozik speciális ékpár, ezért az egyik éknek tartalmaznia kell a másikat, ez csak úgy lehet, hogy $W_3 \subset W_2$. Most tekintsük a W_3 ék száraival párhuzamos érintőket. Ha mindkettő érintené v_3 -at, akkor az l érintő csak v_3 -at érintené, tehát kell lennie egy v_4 érintési pontnak. Így folytatva az érvelést C csúcsainak egy végtelen sorozatát kapnánk, ellentmondásban azzal, hogy a C -nek csak véges sok csúcsa lehet. \square

A szerző további érdekes változatait is definiálja a fedés-szétbonthatóságnak.

5.9. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy P ponthalmaz **véges/megszámlálható-fedés-szétbontható** (finite/countable-cover-decomposable), ha létezik olyan k , hogy tetszőleges síkbeli ponthalmaznak P véges, illetve megszámlálható sok eltoltjával való tetszőleges k -rétegű fedése szétbontható két fedéssé.*

5.10. Megjegyzés. A definíciókból következik, hogy ha egy ponthalmaz teljesen fedés-szétbontható, akkor megszámlálható-fedés-szétbontható és emiatt véges-fedés-szétbontható is.

Az érdekes kérdés az, hogy mit tudunk a visszafelé irányokról. Minden bizonyításnál valamilyen cellafelbontást alkalmaztunk, és azt láttuk az 1. fejezetben, hogy egy kompakt halmaznak adott nyílt halmaz eltoltjaival való tetszőleges k -rétegű fedéséből kiválasztható megszámlálható k -rétegű fedés. Ebből könnyen láthatóan következik az alábbi állítás.

5.11. Állítás. *Egy nyílt halmaz akkor és csak akkor teljesen-fedés-szétbontható, ha megszámlálható-fedés-szétbontható.*

A zárt halmazok esetén nehezebb a teljesen-szétbonthatóság karakterizációja. Szükségünk van hozzá az alábbi definícióra.

5.12. Definíció. *A C zárt halmazt nevezzük **szépnek**, ha létezik egy $t \in \mathbb{N}$ szám és zárt félkörlapoknak egy megszámlálható \mathcal{D} halmaza, hogy ha egy p pontot fed C -nek t különböző eltoltja, akkor azok fednek egy p középpontú félkörlapot \mathcal{D} -ből (p a félkörlap határoló szakaszának felezőpontja), és a belsejeik uniója fedi a félkörlap belsejét.*

Sokszögek esetén például t -nek megfelel a csúcsok száma plusz 1, \mathcal{D} -nek pedig válasszuk az olyan félkörlapokat, amelyeknek határoló szakasza párhuzamos a sokszög valamely oldalával, és sugara racionális. Körlap esetén t lehet 2, \mathcal{D} -nek pedig megfelelnek azon félkörlapok, melyek határoló szakaszának meredeksége és hossza racionális. Mivel szép halmazokra is belátható a teljesen- és a megszámlálható-fedés-szétbonthatóság ekvivalenciája, az előbbi észrevételek és az 5.13. Állítás szerint következik, hogy zárt konvex halmazokra is igaz az 5.11. Állítás.

5.13. Állítás. *Minden zárt konvex halmaz szép.*

5.14. Következmény. *Egy zárt konvex halmaz akkor és csak akkor teljesen-fedés-szétbontható, ha megszámlálhatóan-fedés-szétbontható.*

A szerző a [7] cikkben belátja az alábbi lemmát is, melynek bizonyítását itt nem közöljük.

5.15. Lemma. *Egy szép halmaz teljesen-fedés-szétbontható akkor és csak akkor, ha végtelen-fedés-szétbontható.*

Végtelen-fedés-szétbonthatónak nevezünk egy P halmazt, ha létezik olyan k szám, hogy tetszőleges síkbeli ponthalmaznak P végtelen sok eltolásával való tetszőleges k -rétegű fedése szétbontható két fedéssé.

Sajnos a véges- és a megszámlálható-fedés-szétbonthatóság között eddig nem sikerült kapcsolatot teremteni, erre vonatkozóan csak sejtése van a szerzőnek.

5.16. Sejtés. *Egy szép halmaz akkor és csak akkor véges-fedés-szétbontható, ha megszámlálható-fedés-szétbontható.*

Ha ezt sikerülne bizonyítani, az jelentős előrelépés lenne a fedés szétbontható halmazok karakterizációjában, mivel ekkor mindegy lenne, hogy egy halmaz nyílt vagy zárt, ha szép. Egyelőre azonban még azt sem tudjuk, hogy tetszőleges zárt háromszög-lap teljesen-fedés-szétbontható-e, csak azt, hogy megszámlálható-fedés-szétbontható. Ezt belátta Tardos Gábor és Tóth Géza [3] cikkében.

Vizsgáljunk meg egy speciális esetet, mely azért érdekes, mert következik belőle, hogy konkáv ötszögek esetén a teljesen- és a sík-fedés-szétbonthatóság ekvivalens.

5.17. Tétel. *Ha a C konkáv sokszögnek van két speciális éke, azokhoz tartozik egy közös lokális érintő egyenes, és a C két ilyen irányú érintője közül legalább az egyik csak valamilyen véges ponthalmazban metszi a sokszöget (nem tartalmazza egyik oldalát sem), akkor C nem sík-fedés-szétbontható.*

Lokális érintőnek egy olyan egyenest nevezünk, amely úgy érint egy síkidomot, hogy az érintési pontok egy környezetében a síkidom az egyenes egyik oldalára esik, de messzebb lehet, hogy ez nem igaz, ott átnyúlhat a síkidom a másik oldalra.

Bizonyítás. A bizonyítás lényege, hogy ilyenkor ki tudjuk egészíteni az 5.7. Tételben megadott konstrukciót a sík egy fedésévé, illetve duális megfogalmazásban hozzá tudunk venni pontokat a $P(k, k)$ halmazhoz úgy, hogy C minden eltoltja legalább k pontot tartalmazzon. A konstrukciónál felhasznált eltoltak halmazát jelölje \mathcal{S} . Ezekhez persze nem adhatunk pontokat, különben elromlik a konstrukció, ezért egyszerűen adjuk hozzá a $P(k, k)$ ponthalmazhoz az összes olyan pontot, amely nem eleme egyik \mathcal{S} -beli eltoltnak sem.

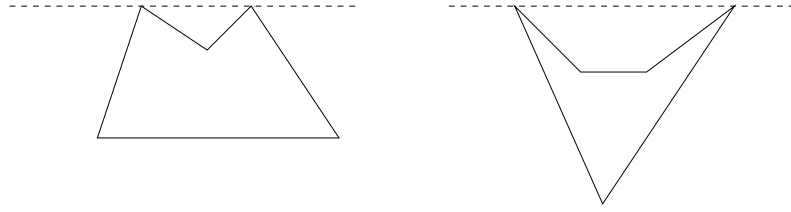
Feltehető, hogy a lokális érintő egyenes függőleges. A konstrukció során megadhatjuk a pontokat úgy, hogy a speciális ékek csúcsai egy függőleges egyenesre illeszkedjenek, ezért \mathcal{S} elemei megkaphatók egymásból egy függőleges eltolással.

Ahhoz, hogy a sík fedése k -rétegű legyen, C tetszőleges eltoltjának legalább k pontot kell tartalmaznia. Az \mathcal{S} -beliekben a konstrukció alapján van ennyi pont, de minden más eltoltról is be kell ezt látni. Egy ilyenl csak akkor lehet baj, ha az \mathcal{S} -beliek uniója tartalmazza azt, és ekkor megkapható egy \mathcal{S} -beliből egy függőleges eltolással.

A \mathcal{S} elemeinek megadásánál van egy kis szabadságunk, egy kicsit mozgathatjuk az eltoltat a függőleges érintő mentén. Az \mathcal{S} elemszáma véges és a függőleges egyenesre minden elemének csak véges sok pontja illeszkedik, emiatt megválaszthatjuk ezek helyzetét úgy, hogy az ezektől különböző függőlegesen eltolt példányok egyenesre illeszkedő pontjai között legyen olyan, amelyet nem tartalmaz az \mathcal{S} -beliek uniója. A kilógó részen pedig tartalmaz az eltolt elég pontot. \square

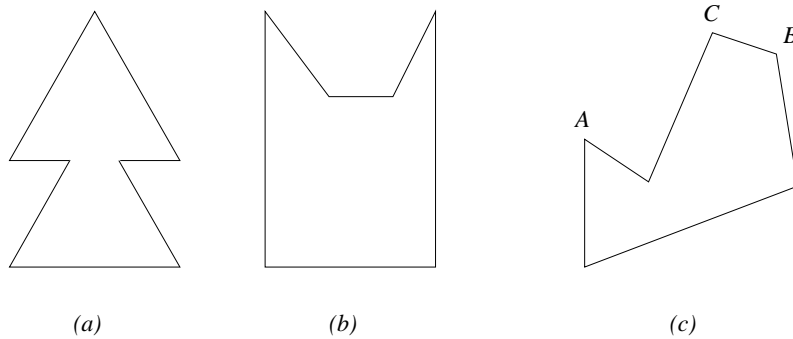
5.18. Következmény. *Egy ötszög teljesen-fedés-szétbontható akkor és csak akkor, ha sík-fedés-szétbontható.*

Bizonyítás. Csak azt kell belátnunk, hogy a sík-fedés-szétbonthatóságból következik a teljesen-fedés-szétbonthatóság, a másik irány nyilvánvaló tetszőleges ponthalmaz esetén. Tegyük fel indirekt, hogy az ötszög nem teljesen-fedés-szétbontható, ekkor az 5.5. Következmény szerint van speciális ékpárja. A megfelelő két csúcsnak kell legyen egy közös érintője, a többi csúcs nem lehet közöttük, mivel egy konkáv ötszög csak az 5.4. ábrán látható kétféle alakú lehet. Ekkor pedig alkalmazható az 5.17. Tétel, vagyis az ötszög nem sík-fedés-szétbontható. \square



5.4. ábra. Konkáv ötszögnek mindig létezik speciális ékpárja.

Hatszögekre, illetve több csúcú sokszögekre nem alkalmazható a tétel, mivel ezeknél nem biztos, hogy létezik a megfelelő érintő, amely az 5.17. Tételben feltételként szerepel. Az 5.5. ábrán látható néhány példa. Az (a) hatszögnek vannak párhuzamos oldalai és nincs speciális ékpárja, ezért teljesen-fedés-szétbontható. A (b) hatszög tartalmaz speciális ékpárt és a csúcsokhoz létezik érintő, ezért nem sík-fedés-szétbontható. A (c) hatszögnek van speciális ékpárja, az A és B csúcsnál fekvő szögek, de ezekhez nincs megfelelő lokális érintő. (Az A és C csúcsokhoz tartozó ékek 3. típusú (Contain) ékpárt alkotnak.) Tehát a hatszög nem teljesen-fedés-szétbontható, és nem tudjuk, hogy sík-fedés-szétbontható-e.



5.5. ábra. Konkáv hatszögek között többféle eset is előfordul.

Végül vizsgáljuk meg, mit mondhatunk a 3-dimenziós testek fedés-szétbontóságáról. Ehhez szükségünk van néhány további definícióra.

5.19. Definíció. *Adott két sokszög és mindkettőnek egy-egy éle, amelyek párhuzamosak. Azt mondjuk, hogy ez a két él **irányítottan párhuzamos**, ha mindkét esetben a sokszög az élnek „ugyanazon oldalán van”. Azaz létezik olyan félsík, amely tartalmazza az egyik sokszöget, annak kitüntetett oldala a félsík határára illeszkedik, és el lehet tolni a félsíkot úgy, hogy ezek a feltételek a másik sokszögre teljesülnek.*

Ezt a kifejezést úgy is fogjuk használni, hogy egy sokszög egy éle irányítottan

párhuzamos, ha a másik sokszög valamely élével irányítottan párhuzamos. Politópok esetén hasonló a definíció.

5.20. Definíció. *Egy politóp két lapja irányítottan párhuzamos, ha párhuzamosak egymással és a politóp mindkét lapnak „ugyanazon oldalán van”. (Egy politóp minden lapja irányítottan párhuzamos önmagával, és ha a politóp konvex, akkor nincs két irányítottan párhuzamos lapja.)*

5.21. Lemma. *Adott két konvex sokszög, mindkettőnek legfeljebb két olyan oldala van, melyek irányítottan párhuzamosak (a másik sokszög egy élével). Ekkor az ékjeik között van kettő, amelyek speciális ékpárt alkotnak.*

5.22. Megjegyzés. Ennek a lemmának a bizonyítása az eredeti cikkben sajnos hibásan szerepel. Az alábbi bizonyítás lényegében Tóth Gézától származik.

Bizonyítás. Vegyük a sokszögeknek egy tartalmazásra nézve minimális ékét. Ha ennek van olyan szára, amely nem irányítottan párhuzamos, akkor vegyük a másik sokszögnek az ezzel irányítottan párhuzamos érintőjét, vagyis amelynek ugyanezen oldalán van a sokszög. Mivel a kiválasztott oldal nem irányítottan párhuzamos, az érintő csak egy csúcsnál érintheti a sokszöget. Ezen csúcshoz tartozó ék az érintő miatt egy félsíkban van az eredeti minimális ékkel, de nem lehet annak része a minimális választás miatt. Így csak az lehetséges, hogy a két ék speciális ékpárt alkot.

Ha a tartalmazásra nézve minimális ék mindkét szára irányítottan párhuzamos, akkor vegyük az egyik szárat és annak másik szomszédját, valamint a másik sokszögben a kiválasztottal irányítottan párhuzamos oldalt és annak ugyanezen szomszédját. Így két olyan éket kapunk a két sokszögből, hogy egyik száraik irányítottan párhuzamosak egymással, a másik kettő viszont nem párhuzamos. Vegyük a kisebbik ék nem irányítottan párhuzamos szárával irányítottan párhuzamos érintőjét a másik sokszögnek. Az előbbihez hasonlóan kapjuk, hogy ez csak egy csúcsban érintheti a sokszöget. Ezen csúcshoz tartozó ék a kisebbik ékkel egy síkba esik. Mivel a sokszögek konvexek, nem lehetséges, hogy az érintési pontnál fekvő éket tartalmazza a másik, emiatt ezek egy speciális ékpárt alkotnak. \square

5.23. Tétel. *Minden C politóp, és minden $k \in \mathbb{N}$ szám esetén létezik a térnek C eltoltjaival való olyan k -rétegű fedése, mely nem bontható szét két fedéssé.*

Bizonyítás. A duális feladatot fogjuk tekinteni és először belátjuk, hogy a C politóp nem teljesen-fedés-szétbontható. Minden k esetén megadunk egy olyan síkbeli

ponthalmazt, amelyet nem lehet úgy kiszínezni pirossal és kézzel, hogy C minden eltoltja, amely legalább k pontot tartalmaz, tartalmazzon mindkét színű pontot. Ennél a korábban konkáv síkidomokra megadott konstrukciót fogjuk alkalmazni.

Legyen π egy olyan sík, amely nem párhuzamos a C politóp néhány csúcsa által meghatározott egyik síkkal sem. A C -t a π -vel párhuzamos érintősíkjai két csúcsban metszik, legyenek ezek A és B . Vegyük azt a két síkot, melyek párhuzamosak π -vel, közel vannak az A illetve a B csúcshoz és metszik a politópot. (A síkok csak a két csúcsba befutó éleket metszhetik.) Jelölje π_A és π_B a síkokat, a megfelelő metszeteket pedig $C_A = C \cap \pi_A$ és $C_B = C \cap \pi_B$. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset. C_A vagy C_B konkáv.

Feltehető, hogy C_A konkáv. Azt szeretnénk belátni, hogy a π sík kis mozgásával elérhető, hogy a kimetszett konkáv sokszögnek ne legyenek párhuzamos oldalai. Tekintsük az A csúcsban egymást metsző lapok síkjait. Ha két síkot metszünk egy harmadikkal, akkor a harmadik által kimetszett egyenesek pontosan akkor lesznek párhuzamosak, ha a metsző sík párhuzamos a másik két sík közös egyenesével. Az A csúcsban egymást metsző síkokból alkotott párok csak véges sok ilyen közös egyenest határoznak meg. Ezért a π_A sík választható úgy, hogy egyikkel se legyen párhuzamos, így a metszetnek nem lesznek párhuzamos oldalai. Ekkor az 5.8. Lemma szerint a metszetnek van speciális ékpárja, és az 5.7. Tételben megadott konstrukció megfelelő ponthalmazt és fedést ad. A C eltoltjait úgy helyezzük el a térben, az előbb meghatározott síkidomokat kapjuk metszetként.

2. eset. C_A és C_B konvex.

Ilyenkor a félsíkok elmozgatásával nem feltétlen érhető el, hogy a C_A és C_B sokszögeknek ne legyenek párhuzamos oldalai, mert a metsző síkoknak párhuzamosnak kell lenniük. Ahhoz, hogy az 5.21 lemmát alkalmazhassuk, elég azt elérnünk hogy legfeljebb két *irányítottan* párhuzamos élpár legyen. Alkalmazható ismét az 1. esetben látott érvelés, ezzel csak akkor van baj, ha a két csúcsonál irányítottan párhuzamos lapokat metszünk, ilyen azonban összesen kettő pár lehet, mert ezeket a csúcsokat alulról és felülről érintik a π eltoltjai is. Az 5.21. Lemma alapján az így kapott metszetekhez tartozik egy speciális ékpár, így a két konvex sokszög eltoltjaiból az 5.7. Tételben megadott konstrukció segítségével ismét meg lehet határozni egy ponthalmazt és annak egy szétbonthatatlan fedését. A C eltoltjait a térben ennek megfelelően helyezzük el.

A C nem tér-fedés-szétbonthatósága az 5.17. Tétel bizonyításához hasonlóan látható be, a ponthalmazhoz hozzávesszük a konstrukció során használt eltoltak

egyike által sem tartalmazott pontokat. Jelölje az eredeti eltoltakat \mathcal{S} . A C egy eltoltjával csak akkor lehet baj, ha része az \mathcal{S} -beliek uniójának, mivel ezekhez nem adtunk újabb pontokat és lehet, hogy a vizsgált eltolt az \mathcal{S} -beli eltoltak pontjai közül nem tartalmaz eleget. Az előbbi két esetben különböző ponthalmazokat kapunk, ezért ismét külön kezeljük ezeket.

Az 1. esetben csak egyféle metszetet használunk, emiatt az \mathcal{S} -beli eltoltak megkaphatók egymásból egy π -vel párhuzamos eltolással, és a problémás eltoltak is csak ilyenek lehetnek. Tekintsük az A csúcsait érintő közös érintősíkot. Mivel a konstrukció során csak véges sok eltoltat használunk, ezek összesen véges sok pontot határoznak meg az érintősíkon. Ha egy eltolt nem egyezik meg egyik \mathcal{S} -belivel sem, akkor az érintési pontját nem fedi az \mathcal{S} -beliek uniója, így ezen a részen tartalmaz elég sok pontot.

A 2. esetben kétféle eltoltat használunk, de ilyenkor is belátható, hogy a politóp eltoltjai megkaphatók egymásból egy eltolással. Indukcióval adódik, hogy a síkbeli konstrukció megalkotásakor választhatjuk úgy az eltoltakat, hogy a speciális ékek csúcspontjai egy egyenesbe essenek. Ekkor C megfelelő eltoltjainak középpontjai is egy egyenesbe esnek, mely párhuzamos a csúcsok közös érintő egyenesével. A két így kapott egyenes meghatároz egy síkot, mellyel párhuzamos eltolással megkaphatók egymásból az \mathcal{S} -beli eltoltak. A síkbeli sokszögek megadhatók úgy, hogy a politópokhoz létezzon egy mindegyiket egy pontban érintő sík, mint az első esetben. A nem \mathcal{S} -beliekét nem fedi az unió, így ezek is tartalmaznak elég pontot. A ponthalmaz tehát kiegészíthető úgy, hogy *minden* eltolt legalább k pontot tartalmaz, ezért C nem tér-fedés-szétbontható. \square

Nyitott kérdések

A zárt háromszögek fedés-szétbonthatók, vagy esetükben valóban szükség van a lokális végesség feltételre?

Négyszögek esetén létezik általános konstans, mint háromszögekre? (Az olyan négyszögekkel van probléma, amelyeknek egyik oldala nagyon rövid a többihez képest, mert nagy a területük és kis cellákra van szükség.)

Létezik olyan korlátos ponthalmaz, amely sík-fedés-szétbontható, de nem teljesen fedés-szétbontható?

Mit lehet mondani az olyan ponthalmazokról, melyek nem poligonok?

Mi mondható, ha nem csak eltoltakat, hanem elforgatottakat is megengedünk? Ezzel kapcsolatban vannak eredmények, de keveset tudunk.

Irodalomjegyzék

- [1] J. Pach, Covering the Plane with Convex Polygons. *Discrete & Computational Geometry*, **1** (1986) 73-81.
- [2] J. Pach, P. Mani, Decomposition problems for multiple coverings with unit balls, kézirat. (1988).
- [3] G. Tardos, G. Tóth, Multiple coverings of the plane with triangles. *Discrete & Computational Geometry*, **38** (2007) 443-450.
- [4] D. Pálvölgyi, G. Tóth, Convex polygons are cover-decomposable. *Discrete & Computational Geometry*, **43** (2010) 483-496.
- [5] M. Gibson, K. Varadarajan, Decomposing coverings and the Planar Sensor Cover Problem, FOCS (2009), megjelenés alatt.
- [6] A. L. Buchsbaum, A. Efrat, S. Jain, S. Venkatasubramanian, K. Yi, Restricted strip covering and the sensor cover problem. *SODA '07: Proceedings of the eighteenth annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics (2007), 1056-1063.
- [7] D. Pálvölgyi, Indecomposable Coverings with Concave Polygons, *Discrete & Computational Geometry*, megjelenés alatt.
- [8] J. Pach, G. Tardos, G. Tóth, Indecomposable coverings, *Discrete Geometry, Combinatorics and Graph Theory, The China-Japan Joint Conference (CJCDGCGT 2005) Lecture Notes in Computer Science* **4381**, Springer Verlag (2007), 135-148.

- [9] J. Pach, G. Tóth, Decomposition of multiple coverings into many parts, *Discrete & Computational Geometry* **42** (2009) 127-133.

Proceeding of the 23rd Annual Symposium of Computer Sciences, Gyeongju, South-Korea (2007), 133-137, ACM Press, New York.

- [10] G, Aloupis, J. Cardinal, S, Collette, S. Langerman, D. Orden, P. Ramos, Decomposition of multiple coverings into more parts, *Discrete & Computational Geometry*, megjelenés alatt.

SODA '09: Proceedings of the Nineteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics (2009), 302-310.