# Fraktálok érdekes vetítési tulajdonságai

Farkas Ábel
Matematikus szak

Témavezető:
Elekes Márton
Egyetemi adjunktus
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2010

## Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Elekes Mártonnak, hogy betekintést nyújtott a matematika eme érdekes fejezetébe és elősegítette ezen dolgozat létrejöttét.

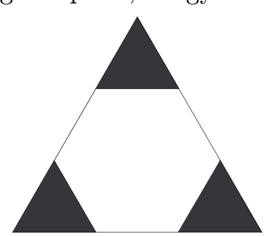
Szeretném továbbá megköszönni Keleti Tamásnak az értékes megjegyzéseket a témával kapcsolatban.

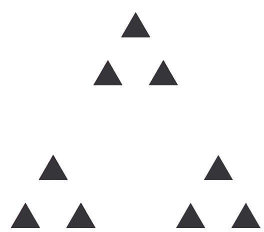
# Tartalomjegyzék

# 1. Bevezetés

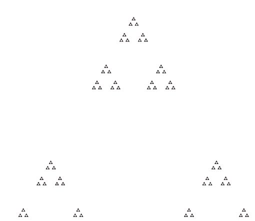
Egy $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt halmazt önhasonlónak nevezünk, ha előáll $K = \bigcup_{i=1}^m S_i(K)$ alakban, ahol mindegyik $S_i$ egy kontraktív hasonlóság. A legklasszikusabb példa önhasonló halmazra a szokásos triadikus Cantor-halmaz. Az önhasonló halmazok a leggyakrabban vizsgált fraktálosztályt alkotják, melynek számtalan alkalmazása van a természettudományokban [1], [6]. Vizsgálatukhoz alapvető eszköz a Hausdorff-mérték (3.1. Definíció). Mivel az 1-dimenziós Hausdorff-mérték az ívhossz egy általánosítása, így a bevezetés további részében egy halmaz 1-dimenziós Hausdorff-mértékét a halmaz hosszának nevezzük. A fraktálok szerkezetének megértéséhez gyakran tanulmányozzuk a fraktál vetületeinek geometriai mértékelméleti tulajdonságait, például, hogy a vetület mikor intervallum, tartalmaz-e intervallumot, vagy milyen hosszú [7], [1]. Az úgynevezett dualitás segítségével a vetületekkel kapcsolatos kérdések lefordíthatóak bizonyos fraktálok függőleges egyenesekkel vett metszeteivel kapcsolatos kérdésekre, tehát egy halmaz vetületeinek vizsgálatával többet tudunk meg a duális halmaz egyenesekkel vett metszeteiről [2]. Többek között a jól ismert Kakeya sejtés vizsgálatánál is gyakran felbukkan ez a módszer.

Az a fraktálok vetületeiről szóló probléma, amely jelen dolgozat tárgyát képezi, a következő példából származik. Tekintsük azt a három $S_i$ kontraktív hasonlóságot ($i = 1, 2, 3$), melyek az egység oldalú szabályos háromszöget harmadára kicsinyítve a háromszög sarkaiba képzik. Az így kapott $\frac{1}{3}$ oldalhosszú háromszögekre ismét alkalmazva a hasonlóságokat 9 darab $\frac{1}{9}$ oldalhosszú háromszöget kapunk, ahogy a következő ábrák mutatják.





Ha folytatjuk ezt az eljárást, akkor az $n$-edik lépésben $3^n$ darab $\frac{1}{3^n}$ oldalhosszú háromszöget kapunk. Ha vesszük az egy adott lépéshez tartozó háromszögek unióját, és az így kapott halmazokat összemetsszük, akkor egy olyan $K^\triangle$ kompakt halmazt kapunk, melyre $K^\triangle = \bigcup_{i=1}^3 S_i(K^\triangle)$. Tehát $K^\triangle$ önhasonló halmaz.



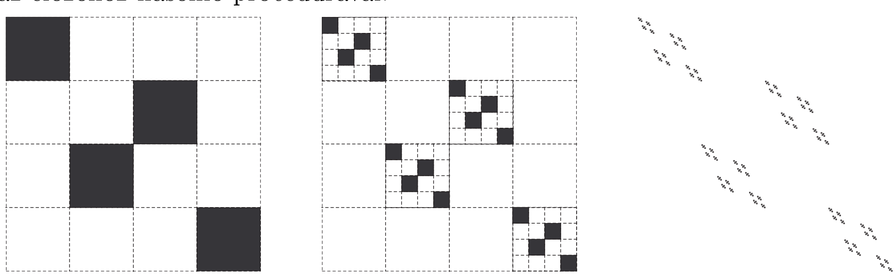
A 6. fejezetben látni fogjuk, hogy $K^\triangle$ egy 1 hosszúságú halmaz, melyet ha merőlegesen vetítünk egy az oldalával párhuzamos egyenesre, akkor egy 1 hosszú intervallumot kapunk. Furcsa jelenség, hogy a $K^{\triangle}$ fraktál három különböző irányba is 1 hosszúságú intervallumra vetül és maga a halmaz is 1 hosszú.

Ha adva van egy $K$ önhasonló halmaz, amely $a$ hosszú ($0 < a < \infty$), akkor nevezzük egy egyenesre való merőleges vetítést a $K$ feszítő projekciójának, ha a $K$ vetülete egy $a$ hosszú intervallum. Felmerül a kérdés, hogy a feszítő projekciók milyen nagy halmazt alkothatnak. A 4.22. Tételből kiderül, hogy a feszítő projekciók halmaza egy kompakt nullmértékű sehol sem sűrű halmaz. Továbbra is kérdéses, hogy lehet-e ez egy Cantor-halmaz, vagy megszámlálható, vagy csak véges. Ezekre a kérdésekre adunk választ egy viszonylag általános, sokat vizsgált fraktálosztály esetében.

Az önhasonló halmazok vizsgálatánál szokásos technikai feltétel a Nyílt Halmaz Feltétel (3.21. Definíció). A 5.33. Következmény eredményeképpen adódik fő eredményünk:

**Tétel.** *Ha $K = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(K)$, ahol minden $S_i$ egy kontraktív homotécia, és az $S_i$ hasonlóságok teljesítik a Nyílt Halmaz Feltételt, akkor a feszítő projekciók halmaza véges.*

A 6. fejezetben mutatunk a $K^{\triangle}$ halmazon kívül egy másik példát is olyan önhasonló halmazra, melynek van két feszítő projekciója. Ezt a halmazt 4 darab $\frac{1}{4}$ arányú hasonlósággal állítjuk elő a következő ábrákon látható módon, az előzőhöz hasonló procedúrával.



Ennek a halmaznak a hossza első ránézésre $\sqrt{2}$-nek tűnik, de ki fog derülni, hogy valójában 1. Ennek következtében az oldalakkal párhuzamos egyenesekre való merőleges vetítések feszítő projekciói lesznek a halmaznak.

A dolgozat a következő fejezetekre tagolódik. A második fejezetben jelöléseket és alapfogalmakat vezetünk be. A harmadik fejezetben megismerkedünk az önhasonló halmazok elméletével. Egy halmazt feszülő halmaznak hívunk, ha van legalább két feszítő projekciója. A negyedik fejezetben a feszülő halmazok alapvető tulajdonságait ismertetjük. Az ötödik fejezetben ötvözzük a második és a harmadik fejezet eszköztárát, és a feszülő önhasonló halmazokat vizsgáljuk. A hatodik fejezetben példákat mutatunk feszülő önhasonló halmazokra. A hetedik fejezetben megemlítünk néhány, a témával kapcsolatos nyitott problémát.

## 2. Jelölések és alapfogalmak

Ebben a fejezetben matematikai alapfogalmakat sorolunk fel, melyeket a dolgozat során használni kívánunk, illetve rájuk vonatkozó jelöléseket vezetünk be.

$\mathbb{R}^d$ jelöli a $d$-dimenziós euklideszi teret. Ha $H \subseteq \mathbb{R}^d$ akkor $H^c := \mathbb{R}^d \setminus H$, $diam(H)$ jelöli a $H$ átmérőjét, $conv(H)$ jelöli a $H$ konvex burkát. A következő topológiai jelölések az euklideszi topológiára vonatkoznak. $\overline{H}$ jelöli $H$ lezártját, $intH$ jelöli $H$ belsejét és $\partial H$ jelöli $H$ határát.

Jelölje $B(x,r)$ az $x$ középpontú $r$ sugarú nyílt gömböt és $\overline{B}(x,r)$ az $x$ középpontú $r$ sugarú zárt gömböt.

Egy topologikus tér részhalmazainak egy rendszerén értelmezett mértéket Borel mértéknek nevezünk ha értelmezve van a topologikus tér Borel részhalmazain.

Legyen $(X,d)$ metrikus tér, $K, H \subseteq X$ és $x \in X$. Ekkor legyen

$$dist(K,H) = \inf_{y \in K,\, z \in H} d(y,z)$$

és

$$dist(x,K) = dist(K,x) = \inf_{y \in K} d(x,y).$$

Egy $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ leképezést kontrakciónak nevezünk, ha $f$ egy Lipschitz-leképezés 1-nél szigorúan kisebb Lipschitz-konstanssal.

Egy $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ leképezést affinitásnak hívunk, ha előáll $f(x) = A(x) + b$ alakban, ahol $A$ invertálható lineáris leképezés és $b \in \mathbb{R}^d$.

Egy $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ leképezést homotéciának hívunk, ha előáll $f(x) = a \cdot x + b$ alakban, ahol $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ és $b \in \mathbb{R}^d$, vagy ha $f(x) = x$. Ha $f$ egyszerre kontrakció és homotécia, akkor kontraktív homotéciának nevezzük.

## 3. Önhasonló halmazok

Ebben a fejezetben megismerkedünk az önhasonló halmaz fogalmával és bemutatunk néhány eszközt, melyek vizsgálatuk során számtalanszor felbukkannak. Mielőtt rátérnénk az önhasonló halmazok tárgyalására, bevezetjük a Hausdorff mértéket, amely a geometriai mértékelmélet egyik legalapvetőbb fogalma.

**3.1. Definíció.** Legyen $(X,d)$ metrikus tér, $H \subseteq X$, $s \in [0,\infty)$, $\delta > 0$. Ekkor legyen

$$\mathcal{H}^s_\delta(H) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} diam(H_n)^s \mid H \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n,\, diam(H_n) < \delta \right\}.$$

Ha $0 < \delta < \varepsilon$, akkor $\mathcal{H}^s_\delta(H) \geq \mathcal{H}^s_\varepsilon(H)$, tehát létezik a $\lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(H)$. Legyen

$$\mathcal{H}^s(H) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(H),$$

és ezt a $\mathcal{H}^s(H)$ értéket a $H$ halmaz $s$-dimenziós Hausdorff külső mértékének hívjuk.

**3.2. Definíció.** Az $M \subseteq X$ halmazt $\mathcal{H}^s$-mérhető halmaznak nevezzük, ha minden $H \subseteq X$ halmazra $\mathcal{H}^s(H) = \mathcal{H}^s(H \cap M) + \mathcal{H}^s(H \setminus M)$.

**3.3. Jelölés.** Jelölje a $\mathcal{H}^s$-mérhető halmazok halmazát $\mathcal{M}(\mathcal{H}^s)$.
Jelölje $\mathcal{B}(X)$ az $X$ Borel részhalmazainak halmazát.
Jelölje $\mathcal{P}(X)$ az $X$ részhalmazainak halmazát.

**3.4. Tétel.** *$\mathcal{M}(\mathcal{H}^s)$ $\sigma$-algebra és $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{H}^s) \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{H}^s$ külső mérték $\mathcal{P}(X)$-en. $\mathcal{H}^s$ mérték $\mathcal{M}(\mathcal{H}^s)$-en.*

A 3.4. Tétel bizonyításának részleteit lásd [7, 4.2.Tétel].

**3.5. Tétel.** *Legyen $H \in \mathcal{M}(\mathcal{H}^s)$, melyre $\mathcal{H}^s(H) < \infty$. Ekkor létezik kompakt halmazok egy felszálló $K_n \subseteq H$ sorozata ($n \in \mathbb{N}$), melyre $\lim_{n\to\in\infty} \mathcal{H}^s(K_n) = \mathcal{H}^s(H)$.*

A 3.5. Tétel bizonyításának részleteit lásd [7, 4.5.Következmény] utáni megjegyzés.

**3.6. Tétel.** *Ha $X = \mathbb{R}^d$ és $s = d$, akkor létezik $0 < c_d < \infty$, hogy $\mathcal{H}^d = c_d \cdot \lambda^d$, ahol $\lambda^d$ a d-dimenziós Lebesgue külső mértéket jelöli.*

A 3.6. Tétel bizonyításának részleteit lásd [7, 56. oldal (1) egyenlet].

**3.7. Lemma.** *Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Ekkor létezik egy egyértelmű $s \in [0, d]$ szám, melyre:*
*i)* $t < s \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = \infty$
*ii)* $s < t \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$

A 3.7. Lemma bizonyításának részleteit lásd [7, 4.7.Tétel].

**3.8. Jelölés.** Ezt az $s$ számot az $A$ halmaz Hausdorff-dimenziójának hívjuk, és $dim_H(A)$-val jelöljük.

**3.9. Definíció.** Egy $A \subseteq \mathbb{R}^d$ halmazt $s$-halmaznak hívunk, ha $\mathcal{H}^s$-mérhető és $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$

**3.10. Megjegyzés.** Ekkor persze $dim_H(A) = s$

**3.11. Lemma.** *Ha $H \subseteq \mathbb{R}^d$, $S : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ egy $q$ arányú hasonlóság, akkor $\mathcal{H}^s(S(H)) = q^s \cdot \mathcal{H}^s(H)$.*

A 3.11. Lemma a $\mathcal{H}^s$ definíciójából könnyen levezethető. A bizonyítás részleteit az olvasóra bízzuk.

**3.12. Tétel.** *Ha az $S_i : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ leképezések ($1 \leq i \leq m$) kontrakciók $0 < q_i < 1$ Lipschitz-konstanssal, akkor létezik pontosan egy $K \subseteq \mathbb{R}^d$ nem-üres kompakt halmaz, melyre $K = \bigcup_{i=1}^m S_i(K)$.*

A 3.12. Tétel bizonyításának részleteit lásd [4, 3.1.szakasz (3) Tétel].

**3.13. Definíció.** Legyenek az $S_i : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ leképezések $(1 \leq i \leq m)$ kontrakciók. Az $\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ multi-halmazt (multi-halmaznak nevezzük azokat a halmazokat, melyekben az elemek multiplicitással fordulhatnak elő) Iterált Függvényrendszernek (Iterated Function System) hívjuk. A 3.12. Tétel szerint a $H \longmapsto \bigcup_{i=1}^m S_i(H)$ operációnak létezik egy egyértelmű $K$ kompakt fixpontja. Ezt a $K$ kompakt halmazt az $\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ Iterált Függvényrendszer attraktorának hívjuk.

**3.14. Jelölés.** Az Iterált Függvényrendszert IFS-nek rövidítjük.

**3.15. Definíció.** Egy $K \subseteq \mathbb{R}^d$ halmazt önhasonló halmaznak hívunk, ha létezik véges sok $S_i\,(1 \leq i \leq m)$ hasonlóság, melyekre mindegyik $S_i$ egy $q_i$ arányú kontrakció (azaz $0 < q_i < 1$) minden $i$-re $(1 \leq i \leq m)$, és $K$ a $\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ IFS attraktora. Megköveteljük továbbá, hogy az $S_i$-k között legyen legalább két különböző hasonlóság. Ekkor az $\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ halmazt önhasonló IFS-nek hívjuk.

Ekkor létezik pontosan egy $s \in (0, \infty)$, hogy $\sum_{i=1}^m q_i^s = 1$. Ezt az $s$ számot az $\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ IFS hasonlósági dimenziójának hívjuk.

**3.16. Jelölés.** Egy $\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ IFS hasonlósági dimenzióját $s = dim_S\left(\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}\right)$-el jelöljük.

Ha egy $K$ halmaz hasonlósági dimenziójáról beszélünk, akkor azt úgy értjük, hogy $K$ az attraktora egy adott IFS-nek és ennek az IFS-nek a hasonlósági dimenziójára gondolunk. Ilyenkor $dim_S(K)$-t írunk.

**3.17. Megjegyzés.** Ha a $K = \bigcup_{i=1}^m S_i(K)$ egyenlet jobb oldalán $K$ helyére beírjuk a $K = \bigcup_{j=1}^m S_j(K)$ előállítást, a következőt kapjuk:

$$K = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(K) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{m} S_i \circ S_j(K).$$

Ezt a gondolatmenetet iterálva kapjuk a következőt:

$$K = \bigcup_{i_1=1}^{m} \ldots \bigcup_{i_n=1}^{m} S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_n}(K).$$

**3.18. Jelölés.** A $S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_n}$ hasonlóságot röviden $S_{i_1 \ldots i_n}$-nel jelöljük, vagy ha $\vec{i} \in \{1, \ldots, m\}^n$ és $\vec{i} = (i_1, \ldots, i_n)$, akkor $S_{\vec{i}}$-vel jelöljük.

**3.19. Definíció.** Az $S_{i_1 \ldots i_n}(K)$ halmazokat a $K$ önhasonló halmaz $n$-edik generációs elemi részeinek hívjuk.

**3.20. Tétel.** *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^d$ önhasonló halmaz, mely az $\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ önhasonló IFS attraktora. Ekkor $dim_H(K) \leq dim_S\left(\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}\right)$, sőt, ha $s = dim_S\left(\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}\right)$, akkor $\mathcal{H}^s(K) < \infty$.*

A $\sum_{i=1}^m q_i^s = 1$ egyenlet segítségével könnyen megmutatható, hogy $\mathcal{H}^s(K) \leq diam(K)^s$. A bizonyítás részleteit az olvasóra bízzuk.

**3.21. Definíció.** Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^d$ önhasonló halmaz, mely az $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ önhasonló IFS attraktora. Azt mondjuk, hogy $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ IFS teljesíti a Nyílt Halmaz Feltételt (Open Set Condition), ha $\exists G \subseteq \mathbb{R}^d$ nem-üres nyílt halmaz, melyre $S_i(G) \subseteq G\, \forall 1 \le i \le m$ és $S_i(G) \cap S_j(G) = \emptyset$ ha $i \neq j$. Egy ilyen $G$ halmazt a Nyílt Halmaz Feltétel egy tanújának hívunk.

**3.22. Jelölés.** Ha egy $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ önhasonló IFS teljesíti a Nyílt Halmaz Feltételt, akkor röviden azt mondjuk, hogy $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ OSC.

Ha egy $K$ önhasonló halmazra azt mondjuk, hogy $K$ OSC, azt úgy értjük, $K$ az attraktora egy adott önhasonló IFS-nek, mely OSC.

**3.23. Lemma.** *Ha egy önhasonló IFS OSC, akkor létezik az OSC-nek korlátos tanúja.*

*Bizonyítás.* Legyen $G$ az OSC egy tanúja. Mivel az $S_i$ hasonlóságok kontrakciók, így ha $R$ elég nagy, akkor az $S_i\,(B(0,R)) \subseteq B(0,R)$ minden $i$-re. Másfelől, ha $R$ elég nagy, akkor $B(0,R) \cap G \neq \emptyset$. Tehát ha $R$ kellően nagy, akkor $U = G \cap B(0,R) \neq \emptyset$ és mivel $S_i\,(B(0,R)) \subseteq B(0,R)$ és $S_i(G) \subseteq G$, ezért $S_i(U) \subseteq U$. Tehát az $U$ halmaz szintén az OSC egy tanúja, mivel $U$ nem üres nyílt halmaz, $S_i(U) \subseteq U$ és $S_i(U) \cap S_j(U) = \emptyset$ ha $i \neq j$, mivel $U \subseteq G$ és $S_i(G) \cap S_j(G) = \emptyset$ ha $i \neq j$. □

**3.24. Definíció.** Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^d$ önhasonló halmaz, mely az $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ önhasonló IFS attraktora. Azt mondjuk, hogy $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ IFS teljesíti az Erős Nyílt Halmaz Feltételt (Strong Open Set Condition), ha $\exists G \subseteq \mathbb{R}^d$ nem-üres nyílt halmaz, melyre $G \cap K \neq \emptyset$, $S_i(G) \subseteq G\, \forall 1 \le i \le m$ és $S_i(G) \cap S_j(G) = \emptyset$ ha $i \neq j$.

**3.25. Tétel.** *(Schief) Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^d$ egy önhasonló halmaz, mely az $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ önhasonló IFS attraktora, $s = dim_S\,(\{S_i \mid 1 \le i \le m\})$. Ekkor a következőek ekvivalensek:*

*i) $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ teljesíti az Erős Nyílt Halmaz Feltételt*
*ii) $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ teljesíti a Nyílt Halmaz Feltételt*
*iii) $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$*

A 3.25. Tétel bizonyításának részleteit lásd [10].

**3.26. Következmény.** *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^d$ egy önhasonló halmaz, mely az $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ önhasonló IFS attraktora, és $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ OSC. Ekkor $dim_S\,(\{S_i \mid 1 \le i \le m\}) = dim_H K$.*

*Bizonyítás.* Legyen $s = dim_S\,(\{S_i \mid 1 \le i \le m\})$. Ekkor a 3.25. Tétel szerint $K$ egy $s$-halmaz, így $dim_H(K) = s$. □

**3.27. Tétel.** *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^d$ önhasonló halmaz, mely az $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ önhasonló IFS attraktora, $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ OSC, és $dim_H K = d$. Legyen $G$ korlátos nyílt halmaz az OSC egy tanúja. Ekkor*

*i) $K = \overline{G}$,*
*ii) $\mathcal{H}^d(\partial G) = 0$.*

*Bizonyítás.* A 3.26. Következmény szerint az $\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ IFS hasonlósági dimenziója $d$, tehát

$$\sum_{i=1}^{m} q_i^d = 1. \tag{1}$$

Mivel $G$ korlátos nyílt, így

$$0 < \mathcal{H}^d(G) < \infty. \tag{2}$$

A 3.11. Lemma szerint

$$\mathcal{H}^d\left(S_i(G)\right) = q_i^d \cdot \mathcal{H}^d(G). \tag{3}$$

Mivel az $S_i(G)$-k diszjunktak és minden $i$-re $S_i(G) \subseteq G$, így $\bigcup_{i=1}^m S_i(G) \subseteq G$ és az unió diszjunkt unió. Tehát

$$\mathcal{H}^d\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(G)\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{H}^d\left(S_i(G)\right) = \sum_{i=1}^{m} q_i^d \cdot \mathcal{H}^d(G) = \mathcal{H}^d(G),$$

ahol az első egyenlőség a diszjunktságnak köszönhető, a második egyenlőség (3) miatt, a harmadik (1) miatt igaz. Összefoglalva tehát

$$\bigcup_{i=1}^{m} S_i(G) \subseteq G \tag{4}$$

és

$$\mathcal{H}^d\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(G)\right) = \mathcal{H}^d(G),$$

és mivel (2) szerint $\mathcal{H}^d(G) < \infty$, így $\bigcup_{i=1}^m S_i(G)$ teljes mértékű $G$-ben, azaz

$$\mathcal{H}^d\left(G \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(G)\right)\right) = 0. \tag{5}$$

Mivel $\bigcup_{i=1}^m S_i(G)$ a $\mathcal{H}^d = c_d \cdot \lambda^d$ szerint teljes mértékű $G$-ben, így sűrű is $G$-ben, azaz $\overline{G} = \overline{\bigcup_{i=1}^m S_i(G)}$. Mivel az unió véges , így $\overline{\bigcup_{i=1}^m S_i(G)} = \bigcup_{i=1}^m \overline{S_i(G)}$. Használva, hogy az $S_i$-k homeomorfizmusok, kapjuk, hogy $\overline{S_i(G)} = S_i(\overline{G})$ minden $i$-re. Tehát végül kapjuk, hogy $\overline{G} = \overline{\bigcup_{i=1}^m S_i(G)} = \bigcup_{i=1}^m \overline{S_i(G)} = \bigcup_{i=1}^m S_i(\overline{G})$. Így a $\overline{G}$ nem-üres kompakt halmaz fixpontja a $H \longmapsto \bigcup_{i=1}^m S_i(H)$ halmaz-operációnak, de a 3.12. Tétel szerint pontosan egy ilyen kompakt fixhalmaz létezik. Mivel $K$ is kompakt fixhalmaz, így szükségképpen $K = \overline{G}$. Ezzel beláttuk az i) állítást.

Az (5) egyenlet szerint $\mathcal{H}^d\left(G \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m S_j(G)\right)\right) = 0$, így ha a halmazra alkalmazzuk az $S_i$ hasonlóságot, akkor

$$0 = \mathcal{H}^d\left(S_i\left(G \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} S_j(G)\right)\right)\right) = \mathcal{H}^d\left(S_i(G) \setminus S_i\left(\bigcup_{j=1}^{m} S_j(G)\right)\right) =$$

$$= \mathcal{H}^d\left(S_i(G)\setminus\left(\bigcup_{j=1}^m S_i\circ S_j(G)\right)\right) = \mathcal{H}^d\left(S_i(G)\setminus\left(\bigcup_{k=1}^m\bigcup_{j=1}^m S_k\circ S_j(G)\right)\right),$$

az utolsó egyenlőség azért igaz, mert az $S_k(G)$-k diszjunktak és $S_k\circ S_j(G)\subseteq S_k(G)$, tehát $S_i(G)\cap S_k\circ S_j(G)$ csak akkor nem üres, ha $k=i$, valamint az $S_k\circ S_j(G)$-k is diszjunktak. Az utolsó egyenletet uniózva $i$ szerint kapjuk, hogy

$$\mathcal{H}^d\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(G)\setminus\left(\bigcup_{k=1}^m\bigcup_{j=1}^m S_k\circ S_j(G)\right)\right)=0 \tag{6}$$

és $\bigcup_{k=1}^m\bigcup_{j=1}^m S_k\circ S_j(G)$ diszjunkt unió. Tehát mivel

$$G\setminus\left(\bigcup_{i=1}^m\bigcup_{j=1}^m S_k\circ S_j(G)\right)\subseteq$$

$$\subseteq\left(G\setminus\left(\bigcup_{j=1}^m S_j(G)\right)\right)\bigcup\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(G)\setminus\left(\bigcup_{k=1}^m\bigcup_{j=1}^m S_k\circ S_j(G)\right)\right)$$

és $\mathcal{H}^d$ külső mérték, így (5) és (6) szerint

$$\mathcal{H}^d\left(G\setminus\left(\bigcup_{i=1}^m\bigcup_{j=1}^m S_k\circ S_j(G)\right)\right)=0 \tag{7}$$

és $\bigcup_{i=1}^m\bigcup_{j=1}^m S_i\circ S_j(G)$ diszjunkt unió. Ezt a gondolatmenetet iterálva kapjuk, hogy minden $n$-re

$$\mathcal{H}^d\left(G\setminus\left(\bigcup_{i_1=1}^m\dots\bigcup_{i_n=1}^m S_{i_1\dots i_n}(G)\right)\right)=0 \tag{8}$$

és $\bigcup_{i_1=1}^m\dots\bigcup_{i_n=1}^m S_{i_1\dots i_n}(G)$ diszjunkt unió.

Legyen $q=\max_{1\le i\le m} q_i$, így $diam(S_{i_1\dots i_n}(K)) = q_{i_1}\cdot\ldots\cdot q_{i_n}\cdot diam(K)\le q^n\cdot diam(K)$, minden $(i_1,\dots,i_n)\in\{1,\dots,m\}^n$ multi-indexre. Legyen $B(x,r)\subseteq G$ nyílt gömb és $n$ olyan nagy, hogy $q^n\cdot diam(K)<r$. Ekkor van olyan $S_{j_1\dots j_n}(K)$ elemi rész, amelyik tartalmazza $x$-et, mivel $x\in G\subseteq\overline{G}=K$ és az elemi részek fedik $K$-t. Mivel $diam(S_{j_1\dots j_n}(K))\le q^n\cdot diam(K)<r$ és $x\in S_{j_1\dots j_n}(K)$, így $S_{j_1\dots j_n}(K)\subseteq B(x,r)\subseteq G$. Tehát az $S_{j_1\dots j_n}(\partial G)=S_{j_1\dots j_n}(K\setminus G)\subseteq B(x,r)\subseteq G$, és mivel az $\bigcup_{i_1=1}^m\dots\bigcup_{i_n=1}^m S_{i_1\dots i_n}(G)$ diszjunkt nyíltak uniója, így $\left(\bigcup_{i_1=1}^m\dots\bigcup_{i_n=1}^m S_{i_1\dots i_n}(G)\right)\cap S_{j_1\dots j_n}(K\setminus G)=\emptyset$. Tehát $S_{j_1\dots j_n}(\partial G)\subseteq G\setminus\left(\bigcup_{i_1=1}^m\dots\bigcup_{i_n=1}^m S_{i_1\dots i_n}(G)\right)$, és (8) szerint $\mathcal{H}^d\left(G\setminus\left(\bigcup_{i_1=1}^m\dots\bigcup_{i_n=1}^m S_{i_1\dots i_n}(G)\right)\right)=0$, és mivel $S_{j_1\dots j_n}(\partial G)$ ennek része, így $0=\mathcal{H}^d\left(S_{j_1\dots j_n}(\partial G)\right)=q_{i_1}^d\cdot\ldots q_{i_n}^d\cdot\mathcal{H}^d(\partial G)$. Tehát $\mathcal{H}^d(\partial G)=0$, így ii)-t is beláttuk. $\square$

**3.28. Következmény.** *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^d$ OSC önhasonló halmaz, $dim_H K = d$ és $G$ az OSC egy korlátos tanúja. Ekkor $intK \neq \emptyset$ és $\mathcal{H}^d(K) = \mathcal{H}^d(G) = \mathcal{H}^d(intK)$.*

*Bizonyítás.* Használva 3.27. Tételt $K = \overline{G} \supseteq G$, tehát $intK \neq \emptyset$. Mivel a $K = G \cup (\overline{G} \setminus G)$ a $K$ egy diszjunkt felbontása mérhető halmazokra, így $\mathcal{H}^d(K) = \mathcal{H}^d(G) + \mathcal{H}^d(\partial G) = \mathcal{H}^d(G)$, használva, hogy $\mathcal{H}^d(\partial G) = 0$ a 3.27. Tétel szerint. Mivel $G \subseteq intK \subseteq K$, így $\mathcal{H}^d(G) \leq \mathcal{H}^d(intK) \leq \mathcal{H}^d(K) = \mathcal{H}^d(G)$, tehát mindenhol egyenlőség áll, így $\mathcal{H}^d(G) = \mathcal{H}^d(intK) = \mathcal{H}^d(K)$ és ezzel az állítást bebizonyítottuk. □

**3.29. Tétel.** *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^d$ önhasonló halmaz, mely az $\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ önhasonló IFS attraktora, $\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ OSC és $dim_H K = s$. Ekkor $\mathcal{H}^s\left(S_{\vec{i}}(K) \cap S_{\vec{j}}(K)\right) = 0$ minden, $\vec{i}, \vec{j} \in \{1, 2, \ldots, m\}^n$, $\vec{i} \neq \vec{j}$ multi-indexre.*

*Bizonyítás.* A 3.26. Következmény szerint $dim_H(K) = dim_S(\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\})$, azaz $\sum_{i=1}^m q_i^s = 1$. A 3.25. Tétel szerint $K$ egy $s$-halmaz, azaz

$$0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty. \tag{9}$$

A 3.11. Lemma miatt $\mathcal{H}^s(S_i(K)) = q_i \cdot \mathcal{H}^s(K)$ és

$$\mathcal{H}^s(S_{i_1 \ldots i_n}(K)) = q_{i_1}^s \cdot \ldots \cdot q_{i_n}^s \cdot \mathcal{H}^s(K). \tag{10}$$

Ahogy azt a 3.17. Megjegyzésben említettük, $K = \bigcup_{i_1=1}^m \ldots \bigcup_{i_n=1}^m S_{i_1 \ldots i_n}(K)$. Tehát

$$\mathcal{H}^s(K) = \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i_1=1}^m \ldots \bigcup_{i_n=1}^m S_{i_1 \ldots i_n}(K)\right) \leq \sum_{i_1=1}^m \ldots \sum_{i_n=1}^m \mathcal{H}^s\left(S_{i_1 \ldots i_n}(K)\right) =$$

$$\sum_{i_1=1}^m \ldots \sum_{i_n=1}^m q_{i_1}^s \cdot \ldots \cdot q_{i_n}^s \cdot \mathcal{H}^s(K) = \sum_{i_1=1}^m q_{i_1}^s \cdot \ldots \cdot \sum_{i_n=1}^m q_{i_n}^s \cdot \mathcal{H}^s(K) = \mathcal{H}^s(K),$$

ahol az első egyenlőtlenség azért teljesül, mert $\mathcal{H}^s$ külső mérték, a második egyenlőség (10) miatt igaz, az utolsó két egyenlőség kiemelés és 1-es szorzók elhagyása, ahol használjuk, hogy $\sum_{i=1}^m q_i^s = 1$. Tehát az egyenlőtlenségnél is egyenlőség áll, azaz $\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i_1=1}^m \ldots \bigcup_{i_n=1}^m S_{i_1 \ldots i_n}(K)\right) = \sum_{i_1=1}^m \ldots \sum_{i_n=1}^m \mathcal{H}^s\left(S_{i_1 \ldots i_n}(K)\right)$. Ez csak akkor lehetséges ha az unió tagjai mértékben diszjunktak, mert ha lenne pozitív mértékű metszet a halmazok között, akkor elhagyva a metszetet, a bal oldal értéke nem változna, a jobb oldalon szigorúan csökkenne az összeg, hiszen (9) szerint véges. Ez ellentmondana annak, hogy $\mathcal{H}^s$ külső mérték. Tehát az unió tagjai mértékben diszjunktak, azaz ha $\vec{i}, \vec{j} \in \{1, 2, \ldots, m\}^n$ és $\vec{i} \neq \vec{j}$, akkor $\mathcal{H}^s\left(S_{\vec{i}}(K) \cap S_{\vec{j}}(K)\right) = 0$. □

# 4. Feszülés

Feszülő halmaznak nevezünk egy $H$ halmazt, ha van legalább két egymással nem párhuzamos egyenes, hogy ezen egyenesekre vetítve a halmazt a vetület egy $\mathcal{H}^1(H)$ hosszú intervallum. A dolgozat egyik fő tárgya a feszülő halmazok, valamint az ilyen speciális egyenesek halmazának vizsgálata (ezen speciális egyenesekre való merőleges vetítések halmazát $FP(H)$-val jelöljük). A fejezet egyik legfontosabb eredménye, hogy megmutatjuk, hogy egy feszülő halmaz minden síkbeli $\mathcal{C}^1$-görbét $\mathcal{H}^1$-null-halmazban metsz (4.16. Tétel). Ennek a tételnek a jelentőségét az mutatja, hogy a következő fejezetben számos helyen alkalmazásra kerül ez a tény. A másik fő eredmény, mely bizonyságot nyer ezen fejezet végéig a 4.22. Tétel, mely az $FP(H)$ halmaz „kicsi" mivoltáról árulkodik.

A 6. fejezetben példákat is mutatunk feszülő halmazokra.

**4.1. Jelölés.** Ha $x \in \mathbb{R}^d$ akkor az $x$ $j$-edik koordinátáját $x_j$-vel jelöljük, így $x = (x_1, \ldots, x_d)$.

Az $x$ vektor euklideszi normáját $\|x\|$-val jelöljük, azaz $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$.

Az $n \times k$-as valós együtthatós mátrixok terét $\mathbb{R}^{n \times k}$-val jelöljük. Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor az $A$ euklideszi norma által generált mátrixnormáját $\|A\|$-val jelöljük, azaz $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$, ahol $x \in \mathbb{R}^k$.

Legyen $S^1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\right\}$ az egységkörvonal. Ezt a halmazt a $\theta \longmapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ leképezéssel paraméterezhetjük, és így azonosíthatjuk ${}^{\mathbb{R}}/_{2\pi}$-vel. Legyen $a, b \in S^1$, ekkor jelölje $\measuredangle(a, b)$ az $a$ és $b$ vektorok által bezárt kisebbik szöget. Ezzel a jelöléssel $(S^1, \measuredangle)$ metrikus tér.

$\mathbb{R}P^1$jelöli a sík egydimenziós lineáris altereinek halmazát. Ezt a halmazt azonosíthatjuk ${}^{S^1}/_{\{\pm 1\}}$-el, és ezzel az azonosítással mértéket és topológiát definiálhatunk $\mathbb{R}P^1$-en. Legyen $L, M \in \mathbb{R}P^1$, ekkor jelölje $\measuredangle(L, M)$ az $L$ és az $M$ által bezárt kisebbik szöget. Ezzel a jelöléssel $(\mathbb{R}P^1, \measuredangle)$ metrikus tér.

Ha $L \in \mathbb{R}P^1$, akkor $L^\perp$ jelöli az $L$-re merőleges lineáris alteret. Ha $M$ egy (affin) egyenes és $M$ párhuzamos $L \in \mathbb{R}P^1$-el, akkor $M^\perp$ jelöli az $L$-re merőleges lineáris alteret.

A sík egydimenziós lineáris altereire történő merőleges vetítések halmazát $\prod$-vel jelöljük. Ha $L \in \mathbb{R}P^1$ akkor jelölje $\pi_L$ az $L$-re történő merőleges vetítést. Az $L \longmapsto \pi_L$ leképezés egy bijekció $\mathbb{R}P^1$ és $\prod$ között. Ezzel a leképezéssel mértéket és topológiát definiálhatunk $\prod$-n.

Ha $M$ egy (affin) egyenes, akkor jelölje $M^*$ az $M$-mel párhuzamos origón átmenő egyenest, így $M^* \in \mathbb{R}P^1$. Ezzel a jelöléssel tehát $\pi_{M^*} \in \prod$.

**4.2. Definíció.** Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$ 1-halmaz. Egy $\pi \in \prod$ vetítést a $H$ halmaz feszítő projekciójának hívunk, ha $\mathcal{H}^1(H) = \mathcal{H}^1(\pi(H))$ és $\pi(H)$ intervallum.

**4.3. Definíció.** Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$ 1-halmaz. Egy $\pi \in \prod$ vetítést a $H$ halmaz gyenge feszítő projekciójának hívunk, ha $\mathcal{H}^1(H) = \mathcal{H}^1(\pi(H))$.

**4.4. Definíció.** Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$ 1-halmaz. Ekkor a $H$ feszítő projekcióinak halmazát $FP(H)$, a gyenge feszítő projekcióinak halmazát $GFP(H)$ jelöli.

**4.5. Lemma.** *Ha $H \subseteq \mathbb{R}^2$, akkor $\mathcal{H}^s(\pi(H)) \leq \mathcal{H}^s(H)$.*

A 4.5. Lemma a $\mathcal{H}^s$ definíciójából könnyen levezethető. A bizonyítást az olvasóra bízzuk.

**4.6. Lemma.** *Ha $A \subseteq H$ 1-halmazok a síkon, akkor $GFP(A) \supseteq GFP(H)$.*

*Bizonyítás.* Legyen $\pi$ gyenge feszítő projekciója $H$-nak, azaz $\mathcal{H}^1(H) = \mathcal{H}^1(\pi(H))$. Mivel $\pi(H) \subseteq \pi(A) \cup \pi(H \setminus A)$, ezért $\mathcal{H}^1(\pi(H)) \leq \mathcal{H}^1(\pi(A)) + \mathcal{H}^1(\pi(H \setminus A))$. Alkalmazva a 4.5. Lemmát $\mathcal{H}^1(\pi(A)) \leq \mathcal{H}^1(A)$ és $\mathcal{H}^1(\pi(H \setminus A)) \leq \mathcal{H}^1(H \setminus A)$. Mivel $A \subseteq H$ 1-halmaz, így mérhető, tehát $\mathcal{H}^1(A) + \mathcal{H}^1(H \setminus A) = \mathcal{H}^1(H)$. Az eddigieket összerakva nyerjük, hogy

$$\mathcal{H}^1(H) = \mathcal{H}^1(\pi(H)) \leq \mathcal{H}^1(\pi(A)) + \mathcal{H}^1(\pi(H \setminus A)) \leq$$

$$\mathcal{H}^1(A) + \mathcal{H}^1(H \setminus A) = \mathcal{H}^1(H),$$

így mindenhol egyenlőség áll, speciálisan $\mathcal{H}^1(\pi(A)) = \mathcal{H}^1(A)$. Tehát $\pi$ gyenge feszítő projekciója $A$-nak. $\square$

**4.7. Definíció.** A $H \subseteq \mathbb{R}^2$ 1-halmaz feszülő halmaz, ha $|FP(H)| \geq 2$, gyengén feszülő halmaz, ha $|GFP(H)| \geq 2$.

**4.8. Definíció.** Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$ a $\mathcal{H}^1$ szerint $\sigma$-véges és $\mathcal{H}^1(H) > 0$. Ekkor azt mondjuk, hogy $H$ teljesen rektifikálhatatlan, ha minden $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ Lipschitz-leképezésre, $\mathcal{H}^1(H \cap \gamma(\mathbb{R})) = 0$. A teljesen rektifikálhatatlan halmazokat szokták 1-teljesen rektifikálhatatlannak is hívni.

**4.9. Tétel.** *Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$ teljesen rektifikálhatatlan. Ekkor majdnem minden $\pi \in \prod$-re $\mathcal{H}^1(\pi(H)) = 0$.*

A 4.9. Tétel bizonyításának részleteit lásd [7, 18.1.Tétel].

**4.10. Definíció.** Egy $g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^d$ leképezés $\mathcal{C}^k$-leképezés, ha $k$-szor folytonosan differenciálható.

**4.11. Lemma.** *Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$, $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ Lipschitz-leképezés $M$ Lipschitz-konstanssal. Ekkor $\mathcal{H}^1(\gamma(H)) \leq M \cdot \mathcal{H}^1(H)$.*

A 4.11. Lemma a $\mathcal{H}^s$ definíciójából könnyen levezethető. A bizonyítást az olvasóra bízzuk.

**4.12. Lemma.** *Legyen $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ differenciálható és $\|f'(x)\| \leq M$ minden $x \in [a, b]$ elemre. Ekkor $\|f(x) - f(y)\| \leq M \cdot |x - y|$ minden $x, y \in [a, b]$ elemre.*

Ennek az elemi tételnek a bizonyítását az olvasóra bízzuk.

**4.13. Tétel.** *Legyen $\gamma : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^d$ Lipschitz-leképezés, $\varepsilon > 0$. Ekkor létezik egy $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ $\mathcal{C}^1$-leképezés, melyre*

$$\mathcal{H}^k\left(\left\{x \in \mathbb{R}^k \mid \gamma(x) \neq g(x)\right\}\right) < \varepsilon.$$

A 4.13. Tétel bizonyításának részleteit lásd [3, 3.1.16.Tétel].

**4.14. Következmény.** *Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$, ekkor a következők ekvivalensek:*
*i) $H$ teljesen rektifikálhatatlan*
*ii) $\mathcal{H}^1(H \cap \gamma(\mathbb{R})) = 0$ minden $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}^1$-leképezésre*

*Bizonyítás.* i)$\Rightarrow$ii): Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$ teljesen rektifikálhatatlan halmaz. Tegyük fel indirekt, hogy $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}^1$-leképezés, melyre $\mathcal{H}^1(H \cap \gamma(\mathbb{R})) > 0$. Mivel $\gamma(\mathbb{R}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma([-n, n])$ és $\mathcal{H}^1(H \cap \gamma(\mathbb{R})) > 0$, így létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, melyre

$$\mathcal{H}^1(H \cap \gamma([-n_0, n_0])) > 0, \tag{11}$$

Mivel $\gamma' \mid_{[-n_0,n_0]}$ létezik és folytonos $[-n_0, n_0]$-en, így korlátos. Tehát létezik $M > 0$, hogy $\left\|\gamma' \mid_{[-n_0,n_0]} (x)\right\| \leq M$ minden $x \in [-n_0, n_0]$-re. Ekkor a 4.12. Lemma szerint

$$\left\|\gamma \mid_{[-n_0,n_0]} (x) - \gamma \mid_{[-n_0,n_0]} (y)\right\| \leq M \cdot |x - y|$$

$[-n_0, n_0]$-on. Tehát $\gamma \mid_{[-n_0,n_0]}$ Lipschitz-leképezés $M$ Lipschitz-konstanssal. Jelölje $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ azt a leképezést, melyre

$$\hat{\gamma}(x) = \begin{cases} \gamma(-n) & ha\, x < -n \\ \gamma(x) & ha\, -n \leq x \leq n \\ \gamma(n) & ha\, x > n \end{cases}$$

Ekkor $\hat{\gamma}$ Lipschitz-leképezés $M$ Lipschitz-konstanssal, és $\hat{\gamma}(\mathbb{R}) = \gamma([-n_0, n_0])$. Tehát a (11) egyenlet szerint $\mathcal{H}^1(H \cap \hat{\gamma}(\mathbb{R})) > 0$, de ez ellentmond annak, hogy $H$ teljesen rektifikálhatatlan.

ii)$\Rightarrow$i): Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$, melyre $\mathcal{H}^1(H \cap g(\mathbb{R})) = 0$ minden $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}^1$-leképezésre. Tegyük fel indirekt, hogy $H$ nem teljesen rektifikálhatatlan, azaz $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ Lipschitz-leképezés $M$ Lipschitz-konstanssal, melyre $h = \mathcal{H}^1(H \cap \gamma(\mathbb{R})) > 0$. Legyen $0 < \varepsilon < \frac{h}{M}$ fix. Ha alkalmazzuk a 4.13. Tételt $\gamma$-ra, $\varepsilon$-ra, $k = 1$-re és $d = 2$-re, kapunk egy $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}^1$-leképezést, melyre

$$\mathcal{H}^1 \left(\{x \in \mathbb{R} \mid \gamma(x) \neq g(x)\}\right) < \varepsilon.$$

Ekkor

$$H \cap \gamma(\mathbb{R}) \subseteq (H \cap g(\mathbb{R})) \cup \gamma \left(\{x \in \mathbb{R} \mid \gamma(x) \neq g(x)\}\right)$$

és mivel $\mathcal{H}^1$ külső mérték, így

$$\mathcal{H}^1 \left(H \cap \gamma(\mathbb{R})\right) \leq \mathcal{H}^1 \left(H \cap g(\mathbb{R})\right) + \mathcal{H}^1 \left(\gamma \left(\{x \in \mathbb{R} \mid \gamma(x) \neq g(x)\}\right)\right). \tag{12}$$

Használva a 4.11. Lemmát $\{x \in \mathbb{R} \mid \gamma(x) \neq g(x)\}$-re és $\gamma$-ra, kapjuk, hogy

$$\mathcal{H}^1 \left(\gamma \left(\{x \in \mathbb{R} \mid \gamma(x) \neq g(x)\}\right)\right) \leq M \cdot \mathcal{H}^1 \left(\{x \in \mathbb{R} \mid \gamma(x) \neq g(x)\}\right) < M \cdot \varepsilon,$$

valamint $\mathcal{H}^1 \left(H \cap g(\mathbb{R})\right) = 0$ az alap feltevésünk miatt. Ezt összevetve a (12) képlettel kapjuk, hogy

$$h = \mathcal{H}^1 \left(H \cap \gamma(\mathbb{R})\right) \leq \mathcal{H}^1 \left(H \cap g(\mathbb{R})\right) + \mathcal{H}^1 \left(\gamma \left(\{x \in \mathbb{R} \mid \gamma(x) \neq g(x)\}\right)\right) <$$

$$0 + M \cdot \varepsilon < M \cdot \frac{h}{M} = h,$$

ami ellentmondás. $\square$

**4.15. Lemma.** *Ha $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ Lipschitz-leképezés, $H \subseteq \mathbb{R}$ Borel halmaz, $\gamma' = \overrightarrow{0}$ majdnem mindenütt $H$-n, akkor $\mathcal{H}^1(\gamma(H)) = 0$.*

Ez a lemma a 4.11. Lemma következménye. A bizonyítást az olvasóra bízzuk.

**4.16. Tétel.** *Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$ 1-halmaz. Ha $H$ gyengén feszülő halmaz, akkor teljesen rektifikálhatatlan.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel indirekt, hogy $H$ nem teljesen rektifikálhatatlan gyengén feszülő halmaz, azaz 4.14. Következmény szerint létezik $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}^1$-leképezés, melyre $\mathcal{H}^1(H \cap \gamma(\mathbb{R})) > 0$. Mivel a 4.15. Lemma szerint $\mathcal{H}^1\left(\gamma\left(\{x \in \mathbb{R} \mid \gamma'(x) = 0\}\right)\right) = 0$, így $\mathcal{H}^1\left(H \cap \gamma\left(\left\{x \in \mathbb{R} \mid \gamma'(x) \neq \overrightarrow{0}\right\}\right)\right) > 0$. Legyen $L, M \in \mathbb{R}P^1$ olyanok, hogy $\pi_L, \pi_M \in GFP(H)$ és $L \neq M$, ilyen alterek léteznek, mivel $H$ gyengén feszülő. Legyen $\alpha$ az $L$ és az $M$ által bezárt kisebbik szög. Legyen $k \in \mathbb{N}$ olyan, hogy

$$\frac{2\pi}{k} < \alpha. \tag{13}$$

Az $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$-t lefedjük $2k$ darab origó középpontú $\frac{2\pi}{k}$ nyílásszögű nyílt szögtartománnyal. Legyen

$$K_n = \Big\{(r \cdot \cos(\beta), r \cdot \sin(\beta)) \in \mathbb{R}^2 \Big| 0 < r < \infty,$$

$$\frac{(n-1)}{2} \cdot \frac{2\pi}{k} < \beta < \frac{n+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{k}\Big\}.$$

Ekkor $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\} = \bigcup_{n=1}^{2k} K_n$ , tehát

$$H \cap \gamma\left(\left\{x \in \mathbb{R} \mid \gamma'(x) \neq \overrightarrow{0}\right\}\right) = \bigcup_{n=1}^{2k} \Big(H \cap \gamma\left(\{x \in \mathbb{R} \mid \gamma'(x) \in K_n\}\right)\Big),$$

így létezik $n_0 \in \{1, \ldots, 2k\}$, hogy $\mathcal{H}^1\Big(H \cap \gamma\left(\{x \in \mathbb{R} \mid \gamma'(x) \in K_{n_0}\}\right)\Big) > 0$. Ha $\gamma'(x) \in K_{n_0}$, akkor mivel $K_{n_0}$ nyílt, $\exists l \in \mathbb{N}$, hogy $\forall y \in [x - \frac{1}{l}, x + \frac{1}{l}]$ $\frac{\gamma(y)-\gamma(x)}{y-x} \in K_{n_0}$. Tehát

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \gamma'(x) \in K_{n_0} \text{ és} \forall y \in [x - \frac{1}{l}, x + \frac{1}{l}]\text{–re} \frac{\gamma(y) - \gamma(x)}{y - x} \in K_{n_0}\right\} =$$

$$\gamma\left(\{x \in \mathbb{R} \mid \gamma'(x) \in K_{n_0}\}\right),$$

így létezik $l_0 \in \mathbb{N}$, hogy

$$\mathcal{H}^1\Bigg(H\cap\gamma\Bigg(\Bigg\{x\in\mathbb{R}\,\Bigg|\,\gamma'(x)\in K_{n_0}\text{ és}$$

$$\forall y\in[x-\frac{1}{l_0},x+\frac{1}{l_0}]\text{–ra }\frac{\gamma(y)-\gamma(x)}{y-x}\in K_{n_0}\Bigg\}\Bigg)\Bigg)>0.$$

Mivel $\mathbb{R}=\bigcup_{z=-\infty}^{\infty}[\frac{z}{l_0},\frac{z+1}{l_0}]$, így

$$H\cap\gamma\left(\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\gamma'(x)\in K_{n_0}\text{ és}\,\forall y\in[x-\frac{1}{l_0},x+\frac{1}{l_0}]\text{–ra }\frac{\gamma(y)-\gamma(x)}{y-x}\in K_{n_0}\right\}\right)=$$

$$\bigcup_{z=-\infty}^{\infty}\Bigg(H\cap\gamma\Bigg(\Bigg\{x\in[\frac{z}{l_0},\frac{z+1}{l_0}]\,\Bigg|\,\gamma'(x)\in K_{n_0}\text{ és}$$

$$\forall y\in[x-\frac{1}{l_0},x+\frac{1}{l_0}]\text{–ra }\frac{\gamma(y)-\gamma(x)}{y-x}\in K_{n_0}\Bigg\}\Bigg)\Bigg),$$

tehát létezik $z_0\in\mathbb{Z}$, hogy

$$\mathcal{H}^1\Bigg(H\cap\gamma\Bigg(\Bigg\{x\in[\frac{z_0}{l_0},\frac{z_0+1}{l_0}]\,\Bigg|\,\gamma'(x)\in K_{n_0}\text{ és}$$

$$\forall y\in[x-\frac{1}{l_0},x+\frac{1}{l_0}]\text{–ra }\frac{\gamma(y)-\gamma(x)}{y-x}\in K_{n_0}\Bigg\}\Bigg)\Bigg)>0.$$

Legyen

$$A=\Bigg\{x\in[\frac{z_0}{l_0},\frac{z_0+1}{l_0}]\,\Bigg|\,\gamma'(x)\in K_{n_0}\text{ és}$$

$$\forall y\in[x-\frac{1}{l_0},x+\frac{1}{l_0}]\text{–ra }\frac{\gamma(y)-\gamma(x)}{y-x}\in K_{n_0}\Bigg\}.$$

Ekkor $diam(A)\le\frac{1}{l_0}$, mivel $A\subseteq[\frac{z_0}{l_0},\frac{z_0+1}{l_0}]$, tehát ha $x,y\in A$, akkor $y\in[\frac{z_0}{l_0},\frac{z_0+1}{l_0}]$, tehát $A$ definíciója szerint $\frac{\gamma(y)-\gamma(x)}{y-x}\in K_{n_0}$. Tehát összefoglalva

$$\mathcal{H}^1(H\cap\gamma(A))>0 \tag{14}$$

és

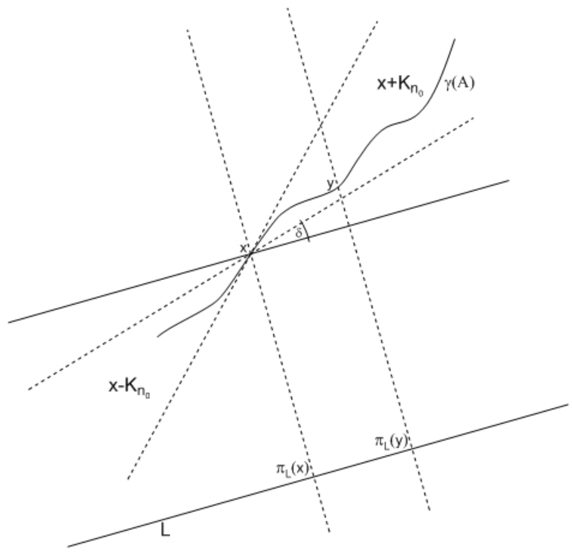
$$x,y\in A\Rightarrow\frac{\gamma(y)-\gamma(x)}{y-x}\in K_{n_0}. \tag{15}$$

A 4.6. Lemma és a (14) egyenlet miatt

$$\pi_L,\pi_M\in GFP(H\cap\gamma(A)). \tag{16}$$

Mivel $K_{n_0}$ egy origó középpontú $\frac{2\pi}{k}$ nyílásszögű nyílt szögtartomány, $k$-t a (13) egyenlet szerint választottuk, és $\alpha$ definíciója szerint az $L$ és az $M$ által bezárt kisebbik szög, így $L$ és $M$ közül legfeljebb az egyik metszheti $K_{n_0}$-et, sőt $L$ és $M$ közül legalább az egyik egy legalább $\frac{\pi}{2} > \delta > 0$ szöget zár be minden $K_{n_0} \cup -K_{n_0}$-beli vektorral. Feltehetjük például, hogy ez $L$-re áll fenn.

Elegendő belátni, hogy $\pi_L : \gamma(A) \longrightarrow L$ Lipschitz-leképezés $\cos(\delta) < 1$ Lipschitz-konstanssal, mert ekkor a 4.11. Lemma szerint $\mathcal{H}^1\left(\pi_L(H \cap \gamma(A))\right) \leq \cos(\delta) \cdot \mathcal{H}^1\left((H \cap \gamma(A))\right) < \mathcal{H}^1\left((H \cap \gamma(A))\right)$. Tehát $\pi_L \notin GFP(H \cap \gamma(A))$ ellentmondásban lenne a (16) képlettel.




Tehát belátjuk, hogy $\pi_L : \gamma(A) \longrightarrow L$ Lipschitz-leképezés $\cos(\delta) < 1$ Lipschitz-konstanssal. Legyen $x, y \in A$. Ekkor (15) miatt $\frac{\gamma(y)-\gamma(x)}{y-x} \in K_{n_0}$, de ekkor a $\gamma(y) - \gamma(x)$ és az $L$ között bezárt kisebbik szög legalább $\delta$. Ekkor

$$\left\| \pi_L(\gamma(y)) - \pi_L(\gamma(x)) \right\| \leq \cos(\delta) \cdot \left\| \gamma(y) - \gamma(x) \right\|.$$

Így $\pi_L : \gamma(A) \longrightarrow L$ Lipschitz-leképezés $\cos(\delta) < 1$ Lipschitz-konstanssal. □

**4.17. Következmény.** *Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$ 1-halmaz, ekkor $GFP(H)$ nullmértékű.*

*Bizonyítás.* A 4.16. Tétel szerint $H$ teljesen rektifikálhatatlan. Ekkor a 4.9. Tétel szerint $\left\{\pi \in \prod \mid \mathcal{H}^1(\pi(H)) > 0\right\}$ nullmértékű, de

$$GFP(H) = \left\{\pi \in \prod \mid \mathcal{H}^1(\pi(H)) = \mathcal{H}^1(H) > 0\right\} \subseteq$$

$$\left\{\pi \in \prod \mid \mathcal{H}^1(\pi(H)) > 0\right\}.$$

Tehát $GFP(H)$ nullmértékű. □

**4.18. Lemma.** *Ha $H$ kompakt 1-halmaz, akkor $GFP(H)$ kompakt.*

*Bizonyítás.* Belátjuk, hogy $\prod \backslash GFP(H)$ nyílt, tehát $GFP(H)$ zárt. Mivel $\prod$ kompakt, így minden zárt része is kompakt, tehát $GFP(H)$ is.

Legyen $\pi \in \prod \backslash GFP(H)$. Belátjuk, hogy ekkor $\pi$ egy környezete is $\prod \backslash GFP(H)$ része. Legyen $\pi = \pi_L$ alkalmas $L \in \mathbb{R}P^1$-gyel. Feltehető, hogy $L$ a vízszintes egyenes. Mivel $\pi \notin GFP(H)$, így $\mathcal{H}^1(\pi(H)) < \mathcal{H}^1(H)$. Létezik a $\pi(H)$-nak olyan $I_n$ $(n\epsilon\mathbb{N})$ nyílt intervallum fedése, melyre $\mathcal{H}^1(\pi(H)) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}^1(I_n) < \mathcal{H}^1(H)$. Mivel $H$ kompakt, így $\pi(H)$ is kompakt, tehát feltehető, hogy az intervallum fedés véges, azaz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\pi(H) \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} I_n$. Ekkor $\mathcal{H}^1(\pi(H)) \leq \sum_{n=0}^{N} \mathcal{H}^1(I_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^1(I_n) < \mathcal{H}^1(H)$. Alkalmas $R$-rel $H$ része az origó középpontú $2R$ oldalhosszú nyílt négyzetnek. Ekkor $H \subseteq \cup_{n=0}^{N} I_n \times (-R, R)$. Legyen $\varepsilon > 0$ fix. Minden $n$-re létezik egy $\delta_n$ szög, hogy ha az $L$ és egy $L' \in \mathbb{R}P^1$ által bezárt szög kisebb, mint $\delta_n$ akkor $diam(\pi_{L'}(I_n \times (-R, R))) < (1 + \varepsilon) \cdot diam(I_n)$. Vegyük a $\delta = min\,\{\delta_n \mid 0 \leq n \leq N\}$ számot. Ekkor ha az $L$ és az $L'$ által bezárt szög kisebb, mint $\delta$, akkor $diam(\pi_{L'}(I_n \times (-R, R))) < (1+\varepsilon) \cdot diam(I_n)$ minden $0 \leq n \leq N$ természetes számra egyszerre teljesül. Mivel $H \subseteq \cup_{n=0}^{N} I_n \times (-R, R)$, így $\pi_{L'}(H) \subseteq \cup_{n=0}^{N} \pi_{L'}(I_n \times (-R, R))$, tehát

$$\mathcal{H}^1(\pi_{L'}(H)) \leq \sum_{n=0}^{N} diam(\pi_{L'}(I_n \times (-R, R))) < \sum_{n=0}^{\infty} (1+\varepsilon) \cdot \mathcal{H}^1(I_n) < \mathcal{H}^1(H)$$

alkalmas $\varepsilon$ választással. Tehát minden ilyen $L'$-re $\mathcal{H}^1(\pi_{L'}(H)) < \mathcal{H}^1(H)$, azaz $\pi_{L'} \notin GFP(H)$. □

**4.19. Következmény.** *Ha $H$ 1-halmaz, akkor $GFP(H)$ kompakt.*

*Bizonyítás.* A 3.5. Tétel szerint létezik $K_n \subseteq H$ kompakt halmazok felszálló sorozata, melyre $\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}^1(K_n) = \mathcal{H}^1(H)$. Azt fogjuk belátni, hogy $GFP(H) = \bigcap_{n=1}^{\infty} GFP(K_n)$, amiből következik az állítás, hiszen a 4.18. Lemma szerint mindegyik $GFP(K_n)$ kompakt, így a metszetük is az.

A 4.6. Lemma szerint $GFP(K_n) \supseteq GFP(H)$ minden $n$-re, tehát

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} GFP(K_n) \supseteq GFP(H)$$

.

A másik irányú tartalmazás belátásához legyen $\pi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} GFP(K_n)$. Ekkor $\mathcal{H}^1(\pi(K_n)) = \mathcal{H}^1(K_n)$ minden $n$-re. Ezért $\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}^1(\pi(K_n)) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{H}^1(K_n) = \mathcal{H}^1(H)$, mivel $K_n$-et így választottuk. A $\pi(K_n)$ sorozat felszálló, így a mértékek folytonossága miatt

$$\mathcal{H}^1(\cup_{i=1}^{\infty} \pi(K_n)) = \mathcal{H}^1(H). \tag{17}$$

Mivel $\pi(H) \supseteq \pi(K_n)$ minden $n$-re, tehát $\pi(H) \supseteq \cup_{i=1}^{\infty} \pi(K_n)$. Ezért

$$\mathcal{H}^1(\pi(H)) \geq \mathcal{H}^1(\cup_{i=1}^{\infty} \pi(K_n)) = \mathcal{H}^1(H)$$

(17) miatt, de a 4.5. Lemma miatt itt egyenlőség áll. Tehát $\pi \in GFP(H)$ és ebből következik, hogy

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} GFP(K_n) \subseteq GFP(H)$$

. □

**4.20. Definíció.** Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$. Jelölje $IP(H)$ azon $\pi \in \prod$ projekciók halmazát, melyekre $\pi(H)$ nem elfajuló intervallum.

Ezzel a jelöléssel $FP(H) = GFP(H) \cap IP(H)$

**4.21. Lemma.** *Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt, ekkor az $IP(H)$ halmaz kompakt.*

*Bizonyítás.* Belátjuk, hogy $\prod \setminus IP(H)$ nyílt, azaz ha $\pi \in \prod \setminus IP(H)$, akkor $\pi$ egy környezete is elkerüli $IP(H)$-t. Legyen $\pi \in \prod \setminus IP(H)$. Legyen $x \epsilon conv(\pi(H)) \setminus \pi(H)$, ilyen $x$ létezik, mivel $\pi(H)$ nem intervallum. Ekkor mivel $H$ kompakt, így $\pi(H)$ is az, és $\exists r$, hogy $[x-r, x+r] \subseteq conv(\pi(H)) \setminus \pi(H)$. Feltehető, hogy $\pi$ a vízszintes egyenesre való merőleges vetítés. A $H$ kompaktsága miatt $H \subseteq (-R, R) \times (-R, R)$ alkalmas $R$-rel. Ekkor $[x-r, x+r] \times (-R, R)$ is elkerüli $H$-t. Ekkor az összes olyan $L$ egyenes, mely az $[x-r, x+r] \times \{R\}$ egy pontját köti össze az $[x-r, x+r] \times \{-R\}$ egy pontjával elkerüli a $H$ halmazt, így

$$\pi_{L^\perp}(x) \notin \pi_{L^\perp}(H). \tag{18}$$

Mivel $[x-r, x+r] \subseteq conv(\pi(H))$, így az $A = H \cap [-R, x-r] \times \mathbb{R} \neq \emptyset$ és a $B = H \cap [x+r, R] \times \mathbb{R} \neq \emptyset$ . Az $L$ elválasztja $A$-t és $B$-t egymástól. Tehát $\pi_{L^\perp}(x)$ elválasztja $\pi_{L^\perp}(A)$-t és $\pi_{L^\perp}(B)$-t egymástól, de (18) miatt $\pi_{L^\perp}(x) \notin \pi_{L^\perp}(H)$, így $\pi_{L^\perp}(H)$ nem intervallum. Azon $\pi_{L^\perp}$ vetítések, melyekre $L$ az $[x-r, x+r] \times \{R\}$ egy pontját köti össze az $[x-r, x+r] \times \{-R\}$ egy pontjával, a $\pi$ egy környezetét alkotják. Tehát $\pi$ egy környezete is elkerüli $IP(H)$-t. □

**4.22. Tétel.** *Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$ 1-halmaz. Ekkor:*

*i) $FP(H)$ nullmértékű, sehol sem sűrű halmaz.*

*ii) Ha $H$ kompakt, akkor $FP(H)$ kompakt.*

*iii) $GFP(H)$ nullmértékű kompakt halmaz, így sehol sem sűrű.*

*Bizonyítás.* Ha $GFP(H)$ legfeljebb egy elemű, akkor a mindhárom állítás triviális. Tegyük fel a továbbiakban, hogy $GFP(H)$ legalább két elemű, azaz $H$ gyengén feszülő halmaz.

iii) $GFP(H)$ a 4.17. Következmény szerint nullmértékű, és a 4.19. Következmény szerint kompakt.

ii) Mivel $FP(H) = GFP(H) \cap IP(H)$, így a 4.21. Lemma és ii) miatt $FP(H)$ két kompakt halmaz metszete, így kompakt.

i) triviálisan következik iii)-ből. □

# 5. Önhasonló halmazok vetületei és feszülése

A 4.22. Tétel mutatja, hogy az $FP(H)$ halmaz topológiai és mértékelméleti szempontból meglehetősen „kicsi”, de nem állít semmit $FP(H)$ számosságáról. Önhasonló 1-halmazok egy osztályára meg fogjuk mutatni, hogy $FP(H)$ véges halmaz. Például ha mindegyik $S_i$ homotécia, és az Iterált Függvényrendszer teljesíti a Nyílt Halmaz Feltételt, akkor $FP(H)$ véges halmaz (5.33. Következmény).

**5.1. Jelölés.** Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^2$ önhasonló halmaz, mely az $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ önhasonló IFS attraktora. Ekkor jelöljük $\phi_i$-vel azt az egyértelmű ortogonális transzformációt, melyre $S_i(x) = q_i \cdot \phi_i(x) + b_i$ alkalmas $q_i \in (0,1)$, $b_i \in \mathbb{R}^2$ konstansokkal. Jelölje $\mathcal{O}(\{S_i \mid 1 \le i \le m\})$ a $\phi_i$ transzformációk által generált csoportot. Ha egyértelmű, hogy melyik IFS-hez tartozó $\mathcal{O}(\{S_i \mid 1 \le i \le m\})$ csoportról van szó, akkor $\mathcal{O}(\{S_i \mid 1 \le i \le m\})$ helyett csak röviden $\mathcal{O}$-t írunk.

A $\mathcal{O}$ csoport mérete azt mutatja, hogy az $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ önhasonló IFS hasonlóságai mennyire nem homotéciák.

Az 5.2. Lemma és az 5.3. Lemma jól ismert elemi geometriai tételek, bizonyításukat az olvasóra bízzuk.

**5.2. Lemma.** *Legyen $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ortogonális transzformáció. Ekkor $\phi$ tükrözés vagy forgatás.*

**5.3. Lemma.** *Legyen $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ egy $\alpha$-szögű forgatás, mely nem véges rendű. Ekkor a $\phi^k$ forgatás szöge $\alpha_k = k \cdot \alpha \,(mod\, 2\pi)$ és az $\{\alpha_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ halmaz sűrű a $[0, 2\pi)$-ben.*

A következő lemmában használt $L^*$ jelölést a 4. fejezet elején vezettük be.

**5.4. Lemma.** *Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$ 1-halmaz és $\pi_L \in GFP(H)$. Legyen $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ hasonlóság. Ekkor $\pi_{S(L)^*} \in GFP(S(H))$.*

*Bizonyítás.* Legyen $S$ egy $q$ arányú hasonlóság. Az $S(H)$ halmaz $\pi_{S(L)^*}(S(H))$ vetülete egybevágó a $\pi_L(q \cdot H)$ vetülettel. Tehát

$$\mathcal{H}^1\left(\pi_{S(L)^*}(S(H))\right) = \mathcal{H}^1\left(\pi_L(q \cdot H)\right) = q \cdot \mathcal{H}^1\left(\pi_L(H)\right) = q \cdot \mathcal{H}^1\left(H\right) = \mathcal{H}^1\left(S(H)\right).$$

Tehát $\pi_{S(L)^*} \in GFP(S(H))$. □

**5.5. Lemma.** *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^2$ önhasonló 1-halmaz, mely az $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ önhasonló IFS attraktora és $\pi_L \in GFP(K)$. Ekkor $\pi_{\phi_i^{-1}(L)} \in GFP(K)$.*

*Bizonyítás.* Mivel $K$ 1-halmaz, így az $S_i(K) \subseteq K$ is 1-halmaz. A 4.6. Lemma szerint tehát $GFP(K) \subseteq GFP(S_i(K))$, tehát $\pi_L \in GFP(S_i(K))$. Alkalmazva ekkor az 5.4. Lemmát $H = S_i(K)$, $S = S_i^{-1}$, $L = L$-el kapjuk, hogy $\pi_{S_i^{-1}(L)^*} \in GFP(S_i^{-1}S_i(K)) = GFP(K)$. Mivel $L$ egy lineáris altér, így $S_i^{-1}(L)$ egy $\phi_i^{-1}(L)$-el párhuzamos affin altér, tehát $\pi_{\phi_i^{-1}(L)} = \pi_{S_i^{-1}(L)^*} \in GFP(K)$. □

**5.6. Definíció.** Egy $A \subseteq \prod$ halmazt $\mathcal{O}$-invariánsnak mondunk, ha minden $\pi_L \in A$, $\phi \in \mathcal{O}$ elemre $\pi_{\phi(L)} \in A$.

**5.7. Megjegyzés.** Legyen $G$ egy csoport és $H$ egy halmaz. Ekkor egy $\beta : G \times H \longrightarrow H$ leképezést baloldali csoporthatásnak hívunk, ha $\beta(1, h) = h$ és $\beta(g_1, \beta(g_2, H)) = \beta(g_1 g_2, h)$ teljesül $g_1, g_2 \in G$, $h \in H$ tetszőleges elemre (1 a $G$ egységeleme).

A $(\phi, \pi_L) \longmapsto \pi_{\phi(L)}$ leképezés egy $\mathcal{O} \times \prod \longrightarrow \prod$ baloldali csoporthatás.

**5.8. Következmény.** *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^2$ önhasonló 1-halmaz, mely az $\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ önhasonló IFS attraktora. Ekkor a következőek igazak:*

*i) $GFP(K)$ $\mathcal{O}$-invariáns.*

*ii) Ha $GFP(K) \neq \emptyset$, akkor $\mathcal{O}$ véges csoport.*

*Bizonyítás.* Ha $GFP(K) = \emptyset$ akkor természetesen igaz a tétel.

A továbbiakban tegyük fel, hogy $GFP(K) \neq \emptyset$.

Ha $\phi_i$ egyenesre való tükrözés, akkor $\phi_i^{-1} = \phi_i$, tehát az 5.5. Lemma szerint

$$\pi_L \in GFP(K) \Rightarrow \pi_{\phi_i(L)} = \pi_{\phi_i^{-1}(L)} \in GFP(K).$$

Most tegyük fel, hogy $\phi_i$ forgatás. Megmutatjuk, hogy $\phi_i$ véges rendű. Tegyük fel indirekt, hogy $\phi_i$ nem véges rendű forgatás. Ekkor persze $\phi_i^{-1}$ is nem véges rendű forgatás. Az 5.5. Lemma szerint $\pi_L \in GFP(K) \Rightarrow \pi_{\phi_i^{-1}(L)} \in GFP(K)$ és ezt iterálva kapjuk, hogy ha $k \in \mathbb{N}$, akkor $\pi_L \in GFP(K) \Rightarrow \pi_{\phi_i^{-k}(L)} \in GFP(K)$. Ekkor mivel $\phi_i^{-1}$ nem véges rendű forgatás, így az 5.3. Lemma szerint $\left\{\phi_i^{-k}(L) \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ sűrű $\mathbb{R}P^1$-ben, tehát $\left\{\pi_{\phi_i^{-k}(L)} \mid k \in \mathbb{N}\right\} \subseteq GFP(K)$ sűrű $\prod$-ben, tehát $GFP(K)$ sűrű $\prod$-ben. Ez ellentmond a 4.22. Tételnek. Tehát ha $\phi_i$ forgatás, akkor véges rendű.

Ha $\phi_i$ forgatás, akkor mivel véges rendű, így létezik $j \in \mathbb{N}$, hogy $\phi_i^{-j} = \phi_i$. Az 5.5. Lemma szerint szerint $\pi_L \in GFP(K) \Rightarrow \pi_{\phi_i^{-1}(L)} \in GFP(K)$, és ezt iterálva kapjuk, hogy ha $k \in \mathbb{N}$, akkor $\pi_L \in GFP(K) \Rightarrow \pi_{\phi_i^{-k}(L)} \in GFP(K)$. Speciálisan $k = j$-re

$$\pi_L \in GFP(K) \Rightarrow \pi_{\phi_i(L)} = \pi_{\phi_i^{-j}(L)} \in GFP(K).$$

Tehát minden $i \in \{1, \ldots, m\}$-re

$$\pi_L \in GFP(K) \Rightarrow \pi_{\phi_i(L)} \in GFP(K) \,\text{és}\, \pi_{\phi_i^{-1}(L)} \in GFP(K).$$

Tehát $GFP(K)$ invariáns a $\phi_i$-k által generált csoportra, azaz $GFP(K)$ $\mathcal{O}$-invariáns. Ezzel beláttuk i)-t.

ii) belátásához tegyük fel indirekt, hogy $\mathcal{O}$ végtelen csoport. Ekkor ha van végtelen sok különböző tükrözés $\mathcal{O}$-ban, akkor legyenek ezek rendre $T_1, T_2, \ldots$. Ekkor ha $T_1 T_i = T_1 T_j$, akkor $T_i = T_j$, tehát $T_1 T_2, T_1 T_3, \ldots$ különböző forgatások, tehát van végtelen sok különböző forgatás $\mathcal{O}$-ban. Ha nincs végtelen sok különböző tükrözés $\mathcal{O}$-ban, akkor van végtelen sok különböző forgatás $\mathcal{O}$-ban.

Tehát van végtelen sok különböző forgatás $\mathcal{O}$-ban. Ekkor van akármilyen kicsi szögű forgatás $\mathcal{O}$-ban és így $\mathcal{O}$ forgatásainak szögei sűrű halmazt alkotnak $[0, 2\pi)$-ben. Mivel $GFP(K)$ nem üres és $\mathcal{O}$-invariáns, így $GFP(K)$ is sűrű $\prod$-ben, de ez ellentmond a 4.22. Tételnek. Tehát $\mathcal{O}$ véges csoport és ezzel beláttuk ii)-t. $\square$

**5.9. Definíció.** Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^2$ önhasonló halmaz, mely az $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ önhasonló IFS attraktora. Ekkor legyen

$$IP_{\mathcal{O}}(K) = \left\{\pi_L \in \prod \mid \pi_{\phi(L)} \in IP(K) \, \forall \phi \in \mathcal{O}\right\}.$$

Most tegyük fel továbbá, hogy $K$ 1-halmaz. Ekkor legyen

$$FP_{\mathcal{O}}(K) = \left\{\pi_L \in \prod \mid \pi_{\phi(L)} \in FP(K) \, \forall \phi \in \mathcal{O}\right\}.$$

Ekkor $IP_{\mathcal{O}}(K)$ és $FP_{\mathcal{O}}(K)$ $\mathcal{O}$-invariáns halmazok.

Mivel az 5.8. Következmény szerint $GFP(K)$ $\mathcal{O}$-invariáns, így

$$FP_{\mathcal{O}}(K) = IP_{\mathcal{O}}(K) \cap GFP(K).$$

**5.10. Megjegyzés.** Ha $\pi_L \in IP(K)$, akkor $\pi_L(K)$ intervallum. Ha $\pi_L \in IP_{\mathcal{O}}(K)$, akkor $\pi_L(S_{i_1 \ldots i_n}(K))$ intervallum minden $(i_1, \ldots, i_n)$ multi-indexre.

**5.11. Megjegyzés.** Ha minden $\phi_i$ az identikus leképezés, akkor a $\mathcal{O} = \{Id\}$. Ekkor $IP_{\mathcal{O}}(K) = IP(K)$ és $FP_{\mathcal{O}}(K) = FP(K)$.

Sőt, ha $\phi_i \in \{Id, -Id\}$, akkor minden $L \in \mathbb{R}P^1$ egyenesre $\phi_i(L) = L$, tehát $\pi_{\phi_i(L)} = \pi_{\phi_i^{-1}(L)} = \pi_L$. Tehát ha minden $\phi_i \in \{Id, -Id\}$, azaz $\mathcal{O} \subseteq \{Id, -Id\}$, akkor $IP_{\mathcal{O}}(K) = IP(K)$ és $FP_{\mathcal{O}}(K) = FP(K)$. A $\phi_i \in \{Id, -Id\}$ feltétel pont azt jelenti, hogy $S_i$ homotécia. Tehát, ha minden $S_i$ homotécia, akkor $IP_{\mathcal{O}}(K) = IP(K)$ és $FP_{\mathcal{O}}(K) = FP(K)$.

**5.12. Lemma.** *Legyen $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ortogonális transzformáció. Ekkor a $\pi_L \longmapsto \pi_{\phi(L)}$ leképezés egy $\prod \longrightarrow \prod$ homeomorfizmus.*

*Bizonyítás.* Elegendő megmutatni, hogy az $L \longmapsto \phi(L)$ leképezés egy $\mathbb{R}P^1 \longrightarrow \mathbb{R}P^1$ homeomorfizmus, mivel $\prod$-n az $L \to \pi_L$ bijekcióval definiáltuk a topológiát. Az $L \longmapsto \phi(L)$ leképezés viszont egy izometrikus bijekció $(\mathbb{R}P^1, \measuredangle)$-ről önmagára, melynek az inverze is izometrikus, tehát homeomorfizmus. $\square$

**5.13. Lemma.** *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^2$ önhasonló 1-halmaz, mely az $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ önhasonló IFS attraktora. Ekkor $IP_{\mathcal{O}}(K)$ és $FP_{\mathcal{O}}(K)$ kompakt halmazok.*

*Bizonyítás.* A 4.21. Lemma szerint $IP(K)$ kompakt, hiszen $K$ kompakt. Mivel az 5.12. Lemma szerint a $\pi_L \longmapsto \pi_{\phi(L)}$ leképezés folytonos, így minden $\phi \in \mathcal{O}$ transzformációra $\left\{\pi_L \in \prod \mid \pi_{\phi(L)} \in IP(K)\right\}$ kompakt halmaz. Mivel

$$IP_{\mathcal{O}}(K) = \left\{\pi_L \in \prod \mid \pi_{\phi(L)} \in IP(K) \, \forall \phi \in \mathcal{O}\right\} =$$

$$\bigcap_{\phi\in\mathcal{O}} \left\{\pi_L \in \prod \mid \pi_{\phi(L)} \in IP(K)\right\},$$

így $IP_{\mathcal{O}}(K)$ kompakt halmazok metszete, tehát kompakt.

A 4.22. Tétel szerint $FP(K)$ kompakt, hiszen $K$ kompakt. Mivel az 5.12. Lemma szerint a $\pi_L \longmapsto \pi_{\phi(L)}$ leképezés folyonos, így minden $\phi \in \mathcal{O}$ transzformációra $\{\pi_L \in \prod \mid \pi_{\phi(L)} \in FP(K)\}$ kompakt halmaz. Mivel

$$FP_{\mathcal{O}}(K) = \left\{\pi_L \in \prod \mid \pi_{\phi(L)} \in FP(K)\, \forall \phi \in \mathcal{O}\right\} =$$

$$\bigcap_{\phi\in\mathcal{O}} \left\{\pi_L \in \prod \mid \pi_{\phi(L)} \in FP(K)\right\},$$

így $FP_{\mathcal{O}}(K)$ kompakt halmazok metszete, így kompakt. □

**5.14. Lemma.** *Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$, $\pi_L \in \prod$ és $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ hasonlóság, melyre $S(x) = q \cdot \phi(x) + b$, ahol $q > 0$, $b \in \mathbb{R}^2$ és $\phi$ ortogonális transzformáció. Ekkor $\pi_L(S(H))$ egybevágó $q \cdot \pi_{S^{-1}(L)^*}(H)$-val.*

*Bizonyítás.* Egybevágóság erejéig ugyanazt a halmazt kapjuk ha $\phi$-vel transzformáljuk $H$-t és ezt vetítjük $L$-re, mint amikor $\phi^{-1}$-el transzformáljuk $L$-et és erre vetítjük $H$-t. A $q$-val való szorzás minden vetületet $q$-szorosára változtat és a $b$-vel való eltolás egybevágóság erejéig nem változtat a vetületeken. Tehát $\pi_L(S(H))$ egybevágó $q \cdot \pi_{\phi^{-1}(L)}(H) = q \cdot \pi_{S^{-1}(L)^*}(H)$-val. □

**5.15. Definíció.** Egy $\pi_L \in \prod$ projekció $\mathcal{O}$ szerinti orbitján a

$$\left\{\pi_{\phi(L)} \in \prod \mid \phi \in \mathcal{O}\right\}$$

halmazt értjük.

A következő tétel erős fegyvert ad a kezünkbe a vetületek vizsgálatához. Kimondja, hogy az elemi részek vetületeinek átfedései nem számottevőek.

**5.16. Tétel.** *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^2$ önhasonló halmaz, mely az $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ önhasonló IFS attraktora, $dim_S(\{S_i \mid 1 \le i \le m\}) = s$ és $\mathcal{O}$ véges csoport. Ekkor*

*i) egy $\pi \in \prod$ projekció $\mathcal{O}$ szerinti orbitjához tartozó minden $\pi'$ projekcióra $\mathcal{H}^s(\pi(K)) = \mathcal{H}^s(\pi'(K))$,*

*ii) minden $\pi \in \prod$ projekcióra $\mathcal{H}^s\left(\pi(S_{\vec{i}}(K)) \cap \pi(S_{\vec{j}}(K))\right) = 0$ minden $\vec{i}, \vec{j} \in \{1, 2, \ldots, m\}^n$, $\vec{i} \neq \vec{j}$ multi-indexre.*

*Bizonyítás.* Legyen $\pi \in \prod$ tetszőleges és $\pi_L$ a $\pi$ $\mathcal{O}$ szerinti orbitjának egy olyan eleme, melyre

$$\mathcal{H}^s(\pi_L(K)) \ge \mathcal{H}^s(\pi_{\phi(L)}(K)) \tag{19}$$

minden $\phi \in \mathcal{O}$ transzformációra. Ilyen $\pi_L$ létezik, mivel $\mathcal{O}$ véges. Ezek az értékek mind végesek, mivel a 3.20. Tétel szerint $\mathcal{H}^s(K) < \infty$ és a 4.5. Lemma szerint

$$\mathcal{H}^s(\pi_{\phi(L)}(K)) \le \mathcal{H}^s(K) < \infty. \tag{20}$$

A 3.17. Megjegyzés szerint

$$K = \bigcup_{i_1=1}^{m} \ldots \bigcup_{i_n=1}^{m} S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_n}(K),$$

így

$$\pi_L(K) = \bigcup_{i_1=1}^{m} \ldots \bigcup_{i_n=1}^{m} \pi_L(S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_n}(K)).$$

Mivel $\mathcal{H}^s$ külső mérték, így

$$\mathcal{H}^s\left(\pi_L(K)\right) = \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i_1=1}^{m} \ldots \bigcup_{i_n=1}^{m} \pi_L(S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_n}(K))\right) \leq$$

$$\sum_{i_1=1}^{m} \ldots \sum_{i_n=1}^{m} \mathcal{H}^s\left(\pi_L(S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_n}(K))\right). \tag{21}$$

Az 5.14. Lemma szerint $\pi_L(S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_n}(K))$ egybevágó $q_{i_1} \cdot \ldots \cdot q_{i_n} \cdot \pi_{S_{i_n}^{-1} \circ \ldots \circ S_{i_1}^{-1}(L)^*}(K)$-val, így

$$\mathcal{H}^s\left(\pi_L(S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_n}(K))\right) = \mathcal{H}^s\left(q_{i_1} \cdot \ldots \cdot q_{i_n} \cdot \pi_{S_{i_n}^{-1} \circ \ldots \circ S_{i_1}^{-1}(L)^*}(K)\right) =$$

$$q_{i_1}^s \cdot \ldots \cdot q_{i_n}^s \cdot \mathcal{H}^s\left(\pi_{S_{i_n}^{-1} \circ \ldots \circ S_{i_1}^{-1}(L)^*}(K)\right), \tag{22}$$

az utolsó egyenlőségnél alkalmazva a 3.11. Lemmát. Tehát (22)-t beírva (21)-be, majd alkalmazva a (19) becslést kapjuk, hogy

$$\mathcal{H}^s\left(\pi_L(K)\right) \leq \sum_{i_1=1}^{m} \ldots \sum_{i_n=1}^{m} \mathcal{H}^s\left(\pi_L(S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_n}(K))\right) =$$

$$\sum_{i_1=1}^{m} \ldots \sum_{i_n=1}^{m} q_{i_1}^s \cdot \ldots \cdot q_{i_n}^s \cdot \mathcal{H}^s\left(\pi_{S_{i_n}^{-1} \circ \ldots \circ S_{i_1}^{-1}(L)^*}(K)\right) =$$

$$\sum_{i_1=1}^{m} \ldots \sum_{i_n=1}^{m} q_{i_1}^s \cdot \ldots \cdot q_{i_n}^s \cdot \mathcal{H}^s\left(\pi_{\phi_{i_n}^{-1} \circ \ldots \circ \phi_{i_1}^{-1}(L)}(K)\right) \leq$$

$$\sum_{i_1=1}^{m} \ldots \sum_{i_n=1}^{m} q_{i_1}^s \cdot \ldots \cdot q_{i_n}^s \cdot \mathcal{H}^s(\pi_L(K)) =$$

$$\sum_{i_1=1}^{m} q_{i_1}^s \ldots \sum_{i_n=1}^{m} q_{i_n}^s \cdot \mathcal{H}^s(\pi_L(K)) = \mathcal{H}^s\left(\pi_L(K)\right)$$

az utolsó sorban kiemeléseket elvégezve, majd használva, hogy a hasonlósági dimenzió $s$, és így $\sum_{i=1}^{m} q_i^s = 1$. Mivel (20) szerint $\mathcal{H}^s\left(\pi_L(K)\right)$ véges, így mindenhol egyenlőség áll, speciálisan a $\mathcal{H}^s(\pi_{\phi_{i_n}^{-1} \circ \ldots \circ \phi_{i_1}^{-1}(L)}(K)) \leq \mathcal{H}^s(\pi_L(K))$

becslésben is egyenlőség áll, tehát $\mathcal{H}^s(\pi_{\phi_{i_n}^{-1}\circ\ldots\circ\phi_{i_1}^{-1}(L)}(K)) = \mathcal{H}^s(\pi_L(K))$ minden $\vec{i} = (i_1, \ldots, i_n)$ multi-indexre. A $\phi_{i_n}^{-1} \circ \ldots \circ \phi_{i_1}^{-1}$ leképezések között megtalálható $\mathcal{O}$ minden eleme, így $\mathcal{H}^s(\pi_{\phi(L)}(K)) = \mathcal{H}^s(\pi_L(K))$ minden $\phi \in \mathcal{O}$ transzformációra. Speciálisan $\mathcal{H}^s(\pi(K)) = \mathcal{H}^s(\pi_L(K)) = \mathcal{H}^s(\pi_{\phi(L)}(K))$ és ezzel az i) állítást beláttuk.

ii) belátásához megint használjuk, hogy egyenlőtlenségeink helyén mindenhol egyenlőség áll, speciálisan

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i_1=1}^{m}\ldots\bigcup_{i_n=1}^{m}\pi(S_{i_1}\circ\ldots\circ S_{i_n}(K))\right) =$$

$$\sum_{i_1=1}^{m}\ldots\sum_{i_n=1}^{m}\mathcal{H}^s\left(\pi(S_{i_1}\circ\ldots\circ S_{i_n}(K))\right). \tag{23}$$

Ha egy mérhető felbontásnál az unió mértéke véges és megegyezik a tagok mértékének összegével, akkor a tagok kénytelenek mértékben diszjunktak lenni, tehát $\mathcal{H}^s\left(\pi(S_{\vec{i}}(K)) \cap \pi(S_{\vec{j}}(K))\right) = 0$ minden $\vec{i}, \vec{j} \in \{1, 2, \ldots, m\}^n$, $\vec{i} \neq \vec{j}$ multi-indexre. □

**5.17. Megjegyzés.** Legyen $\pi_L \in \prod$, melyre $\mathcal{H}^s(\pi_L(K)) > 0$ és teljesüljenek az 5.16. Tétel feltételei. Ekkor az 5.16. Tétel i) állításából következik, hogy minden $i$-re $\mathcal{H}^s(\pi_L(S_i(K))) > 0$, sőt minden $(i_1, \ldots, i_n)$-re $\mathcal{H}^s(\pi_L(S_{i_1\ldots i_n}(K))) > 0$.

**5.18. Definíció.** Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$. Ekkor azt mondjuk, hogy $H$ kollineáris, ha létezik egy $M$ egyenes, melyre $H \subseteq M$.

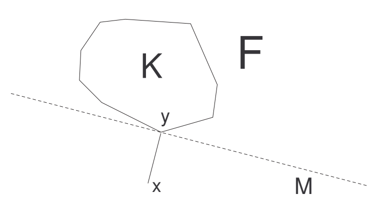
**5.19. Tétel.** *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^2$ önhasonló 1-halmaz, mely az $\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ önhasonló IFS attraktora, $\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ OSC és $K$ nem kollineáris. Ekkor $K$ teljesen rektifikálhatatlan.*

Az 5.19. Tétel bizonyításának részleteit lásd [4, 5.4.szakasz (4) Észrevétel] és [8].

**5.20. Lemma.** *Ha $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt halmaz, akkor $conv(K)$ kompakt.*

Az 5.20. Lemma az elemi geometria jól ismert tétele, bizonyítását itt nem részletezzük.

**5.21. Lemma.** *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^2$ konvex kompakt halmaz, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus K$, $y \in K$, $d = dist(x, K) = \|x - y\|$. Legyen $M$ az $y$ ponton át húzott $[x, y]$ szakaszra merőleges egyenes, és legyen $F$ az a zárt féltér, melynek határa $M$ és $x \notin F$. Ekkor $K \subseteq F$.*



Az 5.21. Lemma az elemi geometria jól ismert tétele, bizonyítását az olvasóra bízzuk.

**5.22. Jelölés.** Legyen $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d) = \big\{K \subseteq \mathbb{R}^d \mid K\,\text{nem} - \text{üres}\,\text{kompakt}\,\text{halmaz}\big\}$.

**5.23. Jelölés.** Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^d$. Legyen ekkor

$$\overline{U}_\varepsilon(H) = \big\{x \in \mathbb{R}^d \mid \exists h \in H, \|x-h\| \le \varepsilon\big\}\,.$$

**5.24. Definíció.** Legyen $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ nem-üres kompakt halmazok. Legyen ekkor $d_H = \inf\big\{\varepsilon \mid X \subseteq \overline{U}_\varepsilon(Y), Y \subseteq \overline{U}_\varepsilon(X)\big\}$. Ezt a $d_H : \mathcal{K}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{K}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ leképezést Hausdorff-metrikának nevezzük.

**5.25. Tétel.** *$\big(\mathcal{K}(\mathbb{R}^d), d_H\big)$ egy teljes metrikus tér.*

Az 5.25. Tétel könnyen kihozható a [9, 2.6.] eredményből.

**5.26. Tétel.** *Legyen $K_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ összefüggő halmazok egy $d_H$ szerint konvergens sorozata. Ekkor $K = \lim_{n\to\infty} K_n$ is összefüggő.*

Az 5.26. Tétel bizonyítását az olvasóra bízzuk.

**5.27. Lemma.** *Legyen $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények egy sorozata, melyre létezik a $\lim_{n\to\infty} graph(f_n)$, ahol a limeszt a $d_H$ metrika szerint értjük. Legyen $K = \lim_{n\to\infty} graph(f_n)$. Ekkor majdnem minden $\pi_L \in \prod$ vetítésre $\pi_L(K) > 0$.*

A 5.27. Lemma könnyen kihozható az 5.26. Tételből. A bizonyítást az olvasóra bízzuk.

**5.28. Lemma.** *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^2$ önhasonló 1-halmaz, mely az $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ önhasonló IFS attraktora, $K$ teljesen rektifikálhatatlan és tegyük fel, hogy a $\mathcal{O}$ végtelen csoport. Ekkor $IP_\mathcal{O}(K) = \emptyset$.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel indirekt, hogy $IP_\mathcal{O}(K) \neq \emptyset$. Ekkor, ha van végtelen sok különböző tükrözés $\mathcal{O}$-ban, akkor legyenek ezek rendre $T_1, T_2, \ldots$. Ekkor, ha $T_1T_i = T_1T_j$, akkor $T_i = T_j$, tehát $T_1T_2, T_1T_3, \ldots$ különböző forgatások, tehát van végtelen sok különböző forgatás $\mathcal{O}$-ban. Ha nincs végtelen sok különböző tükrözés $\mathcal{O}$-ban, akkor van végtelen sok különböző forgatás $\mathcal{O}$-ban.

Tehát van végtelen sok különböző forgatás $\mathcal{O}$-ban. Ekkor van akármilyen kicsi szögű forgatás $\mathcal{O}$-ban, és így $\mathcal{O}$ forgatásainak szögei sűrű halmazt alkotnak $[0, 2\pi)$-ben. Mivel $IP_\mathcal{O}(K)$ nem-üres és $\mathcal{O}$-invariáns, így $IP_\mathcal{O}(K)$ is sűrű $\prod$-ben, de $IP_\mathcal{O}(K)$ kompakt, így $IP_\mathcal{O}(K) = \prod$. Mivel $K$ teljesen rektifikálhatatlan 1-halmaz, így a $IP_\mathcal{O}(K) = \prod$ egyenlet ellentmond a 4.9. Tételnek. Tehát $IP_\mathcal{O}(K) = \emptyset$. $\square$

**5.29. Tétel.** *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^2$ önhasonló 1-halmaz, mely az $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ önhasonló IFS attraktora, $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ OSC és $K$ nem kollineáris. Ekkor $IP_\mathcal{O}(K)$ véges halmaz.*

*Bizonyítás.* Ha $IP_{\mathcal{O}}(K) = \emptyset$, akkor a tétel triviális. Tegyük fel tehát a továbbiakban, hogy $IP_{\mathcal{O}}(K) \neq \emptyset$.

Az 5.19. Tétel szerint $K$ teljesen rektifikálhatatlan. Ha a $\mathcal{O}$ végtelen csoport lenne, akkor az 5.28. Lemma ellentmondana az $IP_{\mathcal{O}}(K) \neq \emptyset$ egyenletnek. Tehát $\mathcal{O}$ véges csoport.

A tétel bizonyításához elegendő megmutatni, hogy ha $\pi_L \in IP_{\mathcal{O}}(K)$, akkor $\pi_L$ izolált $IP_{\mathcal{O}}(K)$-ban, mivel $IP_{\mathcal{O}}(K)$ kompakt és ha egy kompakt halmaz minden pontja izolált, akkor a halmaz véges.

Legyen $\pi_L \in IP_{\mathcal{O}}(K)$ tetszőleges. Megmutatjuk tehát, hogy ekkor $\pi_L$ izolált $IP_{\mathcal{O}}(K)$-ban. Mivel $\pi_L \in IP_{\mathcal{O}}(K)$, így az 5.10. Megjegyzés szerint $\pi_L(S_{i_1\ldots i_n}(K))$ intervallum minden $(i_1,\ldots,i_n)$ multi-indexre. Ezek a $\pi_L(S_{i_1\ldots i_n}(K))$ $n$-edik generációs elemi rész vetületek az 5.16. Tétel szerint $\mathcal{H}^1$ mértékben diszjunktak és az uniójuk kiadja $\pi_L(K)$-t, ami szintén intervallum, így egymásba nem nyúló zárt intervallumok. Tehát $\bigcup_{i_1=1}^m \ldots \bigcup_{i_n=1}^m \pi_L(S_{i_1\ldots i_n}(K))$ a $\pi_L(K)$ zárt intervallum egy felbontása $m^n$ darab egymásba nem nyúló zárt intervallumra, melyek az 5.17. Megjegyzés szerint nem elfajuló intervallumok.

Először megmutatjuk, hogy minden $S_{i_1\ldots i_n}(K)$ elemi részre igaz, hogy nem létezik $w, z \in S_{i_1\ldots i_n}(K)$, melyre $w \neq z$ és

$$v = \pi_L(z) = \pi_L(w) = \text{a}\, \pi_L(S_{i_1\ldots i_n}(K))\, \text{intervallum egyik végpontja.}$$

Tegyük fel indirekt, hogy létezik ilyen $w$ és $z$. Legyen $\|w-z\| = d > 0$ és legyen $q = \max_{1\le i\le m} q_i < 1$. Legyen $k \in \mathbb{N}$ akkora, hogy $q^{n+k} \cdot diam(K) < \frac{d}{2}$. Ekkor $S_{i_1\ldots i_n} \circ S_{j_1\ldots j_k}(K) \subseteq S_{i_1\ldots i_n}(K)$ minden $(j_1,\ldots,j_k)$ multi-indexre, és az $S_{i_1\ldots i_n} \circ S_{j_1\ldots j_k}(K)$ elemi részek fedik $S_{i_1\ldots i_n}(K)$-t. Tehát létezik $(j_1,\ldots,j_k)$ és $(l_1,\ldots,l_k)$ multi-index, melyre $w \in S_{i_1\ldots i_n} \circ S_{j_1\ldots j_k}(K)$ és $z \in S_{i_1\ldots i_n} \circ S_{l_1\ldots l_k}(K)$. Mivel $diam(S_{i_1\ldots i_n} \circ S_{j_1\ldots j_k}) \le q^{n+k} diam(K) < \frac{d}{2}$ és $diam(S_{i_1\ldots i_n} \circ S_{l_1\ldots l_k}(K)) \le q^{n+k} diam(K) < \frac{d}{2}$, valamint $w \in S_{i_1\ldots i_n} \circ S_{j_1\ldots j_k}(K)$, $z \in S_{i_1\ldots i_n} \circ S_{l_1\ldots l_k}(K)$ és $\|w-z\| = d$, így $(j_1,\ldots,j_k) \neq (l_1,\ldots,l_k)$. Tehát $\pi_L(S_{i_1\ldots i_n} \circ S_{j_1\ldots j_k}(K))$ és $\pi_L(S_{i_1\ldots i_n} \circ S_{l_1\ldots l_k}(K))$ egymásba nem nyúló nem elfajuló zárt intervallumok, melyek benne vannak $\pi_L(S_{i_1\ldots i_n}(K))$ intervallumban és tartalmazzák $\pi_L(S_{i_1\ldots i_n}(K))$ intervallum $v$ végpontját. Ez ellentmondás, tehát $\pi_L(S_{i_1\ldots i_n}(K))$ intervallum végpontjaira $\pi_L$ az $S_{i_1\ldots i_n}(K)$ elemi résznek csak egy-egy pontját vetíti.

Nevezzünk két azonos generációhoz tartozó $S_{i_1\ldots i_n}(K)$ és $S_{j_1\ldots j_n}(K)$ elemi részt szomszédosnak, ha a $\pi_L(S_{i_1\ldots i_n}(K)) \cap \pi_L(S_{j_1\ldots j_n}(K))$ egyelemű, azaz a $\pi_L(S_{i_1\ldots i_n}(K))$ és a $\pi_L(S_{j_1\ldots j_n}(K))$ a végpontjukban találkoznak. Legyen $\{v\} = \pi_L(S_{i_1\ldots i_n}(K)) \cap \pi_L(S_{j_1\ldots j_n}(K))$. Ekkor létezik pontosan 1 darab $w \in S_{i_1\ldots i_n}(K)$ és pontosan 1 darab $z \in S_{j_1\ldots j_n}(K)$, melyre $\pi_L(w) = \pi_L(z) = v$, hiszen $v$ a $\pi_L(S_{i_1\ldots i_n}(K))$ és a $\pi_L(S_{j_1\ldots j_n}(K))$ intervallumok egyik végpontja. Ha $w = z$, akkor azt mondjuk, hogy az $S_{i_1\ldots i_n}(K)$ és $S_{j_1\ldots j_n}(K)$ szomszédos elemi részek illeszkednek.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $L \in \mathbb{R}P^1$ a vízszintes egyenes.

Megmutatjuk, hogy nem lehetséges, hogy minden generációra minden szomszédos azonos generációhoz tartozó elemi rész pár illeszkedik. Tegyük fel indirekt, hogy minden generációra minden szomszédos azonos generációhoz tartozó elemi rész pár illeszkedik. Legyen $[a,b] = \pi_L(K) \subseteq L = \mathbb{R} \times \{0\} = \mathbb{R}$, ahol $a < b$. Vegyük az $[a,b]$ intervallumnak azt az $a = v_0 < v_1 < \ldots < v_{m^n} = b$ felosztását, melyre mindegyik $n$-edik generációs elemi részre $\pi_L(S_{i_1\ldots i_n}(K)) = [v_{k-1}, v_k]$, alkalmas $k \in \{1, \ldots, m^n\}$ indexel. Ekkor persze minden $(i_1, \ldots, i_n)$ multi-indexre pontosan egy $k$ index létezik, melyre $\pi_L(S_{i_1\ldots i_n}(K)) = [v_{k-1}, v_k]$. Legyen $z_k \in K$ olyan, melyre $\pi(z_k) = v_k$. Ha $v_k \in \pi_L(S_{i_1\ldots i_n}(K))$ és $v_k \in \pi_L(S_{j_1\ldots j_n}(K))$, de $(i_1, \ldots, i_n) \neq (j_1, \ldots, j_n)$, akkor $S_{i_1\ldots i_n}(K)$ és $S_{j_1\ldots j_n}(K)$ elemi részek szomszédosak és legalább az egyikük tartalmazza $z_k$-t. Mivel mindkét elemi résznek pontosan egy eleme vetül $v_k$-ra és az indirekt feltevés szerint a szomszédos elemi részek illeszkednek, így $z_k$ mindkét elemi résznek eleme. Tehát minden $k \in \{1, \ldots, m^n\}$ indexre létezik pontosan egy $(i_1, \ldots, i_n)$ multi-index, melyre $\{z_{k-1}, z_k\} \subseteq S_{i_1\ldots i_n}(K)$, az a $(i_1, \ldots, i_n)$ multi-index, melyre $\pi_L(S_{i_1\ldots i_n}(K)) = [v_{k-1}, v_k]$. Legyen $z_k = (v_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$. Legyen $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ az a folytonos függvény, melyre $f(v_k) = y_k$ minden $k \in \{0, 1, \ldots, m^n\}$ indexre és $f\mid_{[v_{k-1}, v_k]}$ lineáris minden $k \in \{1, \ldots, m^n\}$ indexre.

**5.30. Lemma.** $\lim_{n\to\infty} graph(f_n) = K$*, ahol a limeszt a* $d_H$ *Hausdorff-metrika szerint értjük.*

*Bizonyítás.* Emlékeztetjük az olvasót a $q = \max_{1\leq i\leq m} q_i < 1$ definícióra. Megmutatjuk, hogy $d_H(K, graph(f_n)) \leq q^n \cdot diam(K)$ és mivel $q < 1$, így $\lim_{n\to\infty} q^n \cdot diam(K) = 0$ és ebből következik a lemma állítása. Legyen $n$ fix. Legyen $x \in K$ tetszőleges. Ekkor $x$ benne van valamelyik $n$-edik generációs elemi részben, legyen ez $S_{i_1\ldots i_n}(K)$. Ekkor van olyan $z_k$ pont, melyre $z_k \in S_{i_1\ldots i_n}(K)$. Mivel $diam(S_{i_1\ldots i_n}(K)) = q_{i_1} \cdot \ldots \cdot q_{i_n} \cdot diam(K) \leq q^n \cdot diam(K)$, így $\|x - z_k\| \leq q^n \cdot diam(K)$. Az $f_n$ definíciója szerint $z_k \in graph(f_n)$, tehát $x \in \overline{U}_{q^n\cdot diam(K)}(graph(f_n))$. Ez minden $x \in K$ elemre igaz, tehát

$$K \subseteq \overline{U}_{q^n\cdot diam(K)}(graph(f_n)). \tag{24}$$

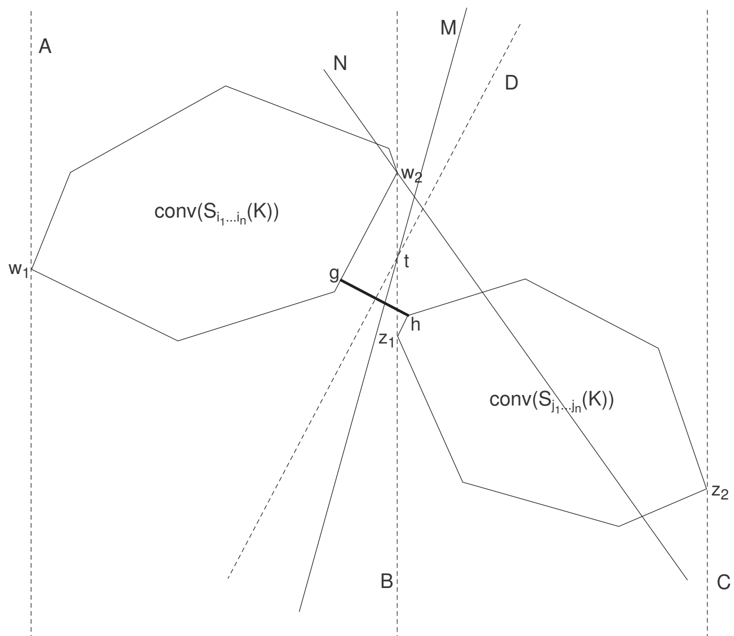
Legyen most $x \in graph(f_n)$ tetszőleges. Ekkor $x$ benne van valamelyik $[z_{k-1}, z_k]$ szakaszban, alkalmas $k$ indexel. Legyen $S_{i_1\ldots i_n}(K)$ az az egyértelmű elemi rész, melyre $\{z_{k-1}, z_k\} \subseteq S_{i_1\ldots i_n}(K)$. Mivel $diam(S_{i_1\ldots i_n}(K)) \leq q_{i_1} \cdot \ldots \cdot q_{i_n} \cdot diam(K) \leq q^n \cdot diam(K)$ és $\{z_{k-1}, z_k\} \subseteq S_{i_1\ldots i_n}(K)$, így $diam([z_{k-1}, z_k]) \leq q^n \cdot diam(K)$. Tehát $\|x - z_k\| \leq q^n \cdot diam(K)$. Mivel $z_k \in S_{i_1\ldots i_n}(K) \subseteq K$, és $\|x - z_k\| \leq q^n \cdot diam(K)$, így $x \in \overline{U}_{q^n\cdot diam(K)}(K)$. Ez minden $x \in graph(f_n)$ elemre igaz, tehát

$$graph(f_n) \subseteq \overline{U}_{q^n\cdot diam(K)}(K). \tag{25}$$

(24) és (25) szerint tehát $graph(f_n) \subseteq \overline{U}_{q^n\cdot diam(K)}(K)$ és $K \subseteq \overline{U}_{q^n\cdot diam(K)}(graph(f_n))$, így a $d_H$ definíciója alapján $d_H(K, graph(f_n)) \leq q^n \cdot diam(K)$. Ezzel beláttuk a lemma állítását. □

Mivel az 5.30. Lemma szerint $\lim_{n\to\infty} graph(f_n) = K$, így a 5.27. Lemma szerint majdnem minden $\pi_M \in \prod$ vetítésre $\mathcal{H}^1(\pi_M(K)) > 0$. Mivel $K$ kielégíti az 5.19. Tétel feltételeit, így $K$ teljesen rektifikálhatatlan, de ez ellentmond a 4.9. Tételnek. Tehát az indirekt feltevésből ellentmondásra jutottunk, így van olyan szomszédos azonos generációhoz tartozó elemi rész pár, amely nem illeszkedik.

Megmutatjuk tehát, hogy $\pi_L$ izolált $IP_{\mathcal{O}}(K)$-ban. Legyen $S_{i_1\dots i_n}(K)$ és $S_{j_1\dots j_n}(K)$ $((i_1,\dots,i_n)\neq(j_1,\dots,j_k))$ egy olyan azonos generációhoz tartozó szomszédos elemi rész pár, amelyik nem illeszkedik. Mivel $S_{i_1\dots i_n}(K)$ és $S_{j_1\dots j_n}(K)$ szomszédosak, így feltehető, hogy $[a,b]=\pi_L(S_{i_1\dots i_n}(K))\subseteq L=\mathbb{R}\times\{0\}=\mathbb{R}$ és $[b,c]=\pi_L(S_{j_1\dots j_n}(K))\subseteq L=\mathbb{R}\times\{0\}=\mathbb{R}$ egymásba nem nyúló intervallumok, ahol $a<b<c$. Ekkor létezik $w_1,w_2\in S_{i_1\dots i_n}(K)$, melyre $\pi_L(w_1)=a$ és $\pi_L(w_2)=b$ és létezik $z_1,z_2\in S_{j_1\dots j_n}(K)$, melyre $\pi_L(w_1)=b$ és $\pi_L(w_2)=c$. Mivel $S_{i_1\dots i_n}(K)$ és $S_{j_1\dots j_n}(K)$ nem illeszkedik, így $w_2\neq z_1$. Mivel $\pi_L(w_2)=\pi_L(z_1)=b$, így $w_2$ és $z_1$ $x$-koordinátái megegyeznek, tehát $y$-koordinátáik különböznek. Tegyük fel, hogy $w_2$ $y$-koordinátája nagyobb, mint $z_1$ $y$-koordinátája (a bizonyítás ellenkező esetben hasonlóan történik, így csak ezt az esetet részletezzük). Legyen $A$ a $w_1$-en át húzott $y$-koordinátatengellyel párhuzamos egyenes, $B$ a $w_2$-n át húzott $y$-koordinátatengellyel párhuzamos egyenes (így $B$ tartalmazza $z_1$-et is) és $C$ a $z_2$-n át húzott $y$-koordinátatengellyel párhuzamos egyenes. Lásd az ábrát a következő oldalon. Legyen $F_1=(\text{a } B \text{ egyenestől balra eső nyílt féltér})\cup\{w_2\}$ és $F_2=(\text{a } B \text{ egyenestől jobbra eső nyílt féltér})\cup\{z_1\}$. Ekkor $F_1$ és $F_2$ diszjunkt konvex halmazok és $S_{i_1\dots i_n}(K)\subseteq F_1$, valamint $S_{j_1\dots j_n}(K)\subseteq F_2$. Tehát $conv(S_{i_1\dots i_n}(K))$ és $conv(S_{j_1\dots j_n}(K))$ diszjunkt konvex halmazok és az 5.20. Lemma szerint kompaktak is. Ekkor, mivel $conv(S_{i_1\dots i_n}(K))$ és $conv(S_{j_1\dots j_n}(K))$ diszjunkt kompakt halmazok, a távolságuk egymástól egy $d>0$ konstans, és létezik olyan $g,h\in\mathbb{R}^2$ pontpár, melyre $g\in conv(S_{i_1\dots i_n}(K))$, $h\in conv(S_{j_1\dots j_n}(K))$ és $\|g-h\|=d$. Legyen $D$ a $[g,h]$ szakasz felezőmerőlegese. Ekkor $D$ két nyílt féltérre vágja a síkot, és az 5.21. Lemma szerint ezek közül egyik tartalmazza $S_{i_1\dots i_n}(K)$-t, a másik pedig $S_{j_1\dots j_n}(K)$-t. Ennél fogva $D$ nem lehet függőleges egyenes, mert függőleges egyenes nem válaszja el az $S_{i_1\dots i_n}(K)$ és $S_{j_1\dots j_n}(K)$ elemi részeket. Tehát a $D$ és a $B$ egyenesnek pontosan egy metszéspontja van, legyen ez $t$.




Mivel $K$ kompakt, így létezik $R > 0$, melyre $K$ része a $t$ középpontú $2R$ oldalhosszú tengelypárhuzamos négyzetnek. A $B$ és a $C$ egyenesek által határolt nyílt sávban a $D$ egyenes fölött nincs a $conv(S_{j_1 \dots j_n}(K))$ halmaznak pontja, hiszen ahogy azt a $D$ definiálásakor megjegyeztük, $D$ elválasztja $conv(S_{i_1 \dots i_n}(K))$ és $conv(S_{j_1 \dots j_n}(K))$ halmazokat. Legyen $M$ egy olyan $t$-n keresztül húzott egyenes, melynek a $B$ és a $C$ egyenesek által határolt nyílt sávba eső része $D$ fölött helyezkedik el, és a $C$ egyenest, valamint az $A$ egyenest a $t$ középpontú $2R$ oldalhosszú tengelypárhuzamos négyzeten kívül metszi. Mivel $B^\perp = L$, így az ilyen tulajdonságú $M$ egyenesekre az $M^\perp$ egyenesek $L$ egy féloldali pontozott környezetét alkotják. Tegyük fel indirekt, hogy egy ilyen $M$ egyenesre $\pi_{M^\perp} \in IP_{\mathcal{O}}(K)$. Az $M$ egyenes elválasztja a $conv(S_{i_1 \dots i_n}(K))$ és $conv(S_{j_1 \dots j_n}(K))$ halmazokat, és mivel $\pi_{M^\perp} \in IP_{\mathcal{O}}(K)$, így $\pi_{M^\perp}(K)$ intervallum, melynek a $\pi_{M^\perp}(M)$ pont mindkét oldalán van pontja. Tehát a $K$ halmaznak kell, hogy legyen pontja az $M$ egyenesen. Mivel $K$ része a $t$ középpontú $2R$ oldalhosszú tengelypárhuzamos négyzetnek, így $K \cap M \neq \emptyset$ része az $A$ és a $C$ egyenesek által határolt nyílt sávnak. Mivel $M$ elválasztja a $conv(S_{i_1 \dots i_n}(K))$ és $conv(S_{j_1 \dots j_n}(K))$ halmazokat, így nem metszi az $S_{i_1 \dots i_n}(K)$ és az $S_{j_1 \dots j_n}(K)$ elemi részt. Tehát létezik egy $S_{l_1 \dots l_n}(K)$ elemi rész és $e \in \mathbb{R}^2$, melyre $(l_1, \dots, l_n) \neq (i_1, \dots, i_n)$, $(l_1, \dots, l_n) \neq (j_1, \dots, j_k)$ és $e \in S_{l_1 \dots l_n}(K) \cap M$. Az $e$ pont benne van az $A$ és a $C$ egyenesek által határolt nyílt sávban. Mivel $\pi_L \in IP_{\mathcal{O}}(K)$, így $\pi_L(S_{l_1 \dots l_n}(K))$ intervallum, tehát

$$\mathcal{H}^1\Bigg(\pi_L(S_{l_1 \dots l_n}(K)) \cap \Bigg(\pi_L(S_{i_1 \dots i_n}(K)) \cup \pi_L(S_{i_1 \dots i_n}(K)\Bigg)\Bigg) > 0,$$

de ez ellentmond az 5.16. Tételnek. Tehát $\pi_{M^\perp} \notin IP_{\mathcal{O}}(K)$. Megmutattuk tehát, hogy $\pi_L$ féloldalról izolált $IP_{\mathcal{O}}(K)$-ban.

Most belátjuk a másik oldali izoláltságot is. Legyen $N$ egy olyan $w_2$-n át húzott egyenes, mely elválasztja a $z_1$ és $z_2$ pontokat. Az ilyen tulajdonságú $N$ egyenesekre az $N^\perp$ egyenesek az $L$ egyenes egy féloldali pontozott környezetét alkotják, éppen azon oldali környezetet, melyikről még nem bizonyítottuk az izoláltságot. Tehát elegendő megmutatni, hogy egy ilyen $N$ egyenesre $\pi_{N^\perp} \notin IP_{\mathcal{O}}(K)$. Tegyük fel indirekt, hogy $\pi_{N^\perp} \in IP_{\mathcal{O}}(K)$. Ekkor $\pi_{N^\perp}(S_{i_1\dots i_n}(K))$ és $\pi_{N^\perp}(S_{i_1\dots i_n}(K)$ vetületek intervallumok, és az 5.16. Tétel szerint egymásba nem nyúlóak, hiszen $\mathcal{H}^1$ mértékben diszjunktak. Ez lehetetlen, mivel $N$ választása szerint $w_2 \in N$, és $N$ elválasztja a $z_1$ és $z_2$ pontokat, de akkor $\pi_{N^\perp}(w_2) \in \pi_{N^\perp}(S_{i_1\dots i_n}(K))$ a $\pi_{N^\perp}(S_{i_1\dots i_n}(K)$ intervallum belső pontja. Tehát ellentmondáshoz jutottunk, így $\pi_{N^\perp} \notin IP_{\mathcal{O}}(K)$. Beláttuk tehát, hogy $\pi_L$ izolált $IP_{\mathcal{O}}(K)$-ban. Ahogy a bizonyítás elején megjegyeztük, ebből már következik a tétel állítása. □

A dolgozat egyik legfontosabb eredménye a következő.

**5.31. Következmény.** *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^2$ önhasonló 1-halmaz, mely az $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ önhasonló IFS attraktora, $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ OSC, minden $S_i$ homotécia és $K$ nem kollineáris. Ekkor $IP(K)$ véges halmaz.*

*Bizonyítás.* Teljesülnek az 5.29. Tétel feltételei, tehát $IP_{\mathcal{O}}(K)$ véges halmaz. Az 5.11. Megjegyzés szerint $IP_{\mathcal{O}}(K) = IP(K)$, így $IP(K)$ véges halmaz. □

**5.32. Tétel.** *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^2$ önhasonló 1-halmaz, mely az $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ önhasonló IFS attraktora, $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ OSC. Ekkor $FP_{\mathcal{O}}(K)$ véges halmaz.*

*Bizonyítás.* Ha $FP_{\mathcal{O}}(K)$ üres vagy egyelemű, akkor a tétel triviális, tehát feltehetjük, hogy $FP_{\mathcal{O}}(K)$ legalább kételemű. Ekkor $K$ gyengén feszülő halmaz, tehát a 4.16. Tétel szerint $K$ teljesen rektifikálhatatlan. Tehát $K$-t nem tartalmazza semelyik egyenes, mivel egy egyenes $\mathbb{R}$ Lipschitz-képe, így a $K$-val vett metszete $\mathcal{H}^1$ szerint nullmértékű, de $\mathcal{H}^1(K) > 0$. Tehát $K$ nem kollineáris.

Teljesülnek az 5.29. Tétel feltételei, tehát $IP_{\mathcal{O}}(K)$ véges halmaz. Ahogy azt az 5.9. Definíciónál megjegyeztük $FP_{\mathcal{O}}(K) = IP_{\mathcal{O}}(K) \cap GFP(K)$, így $FP_{\mathcal{O}}(K)$ véges halmaz. □

Most már kimondhatjuk dolgozatunk talán legfontosabb eredményét.

**5.33. Következmény.** *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^2$ önhasonló 1-halmaz, mely az $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ önhasonló IFS attraktora, $\{S_i \mid 1 \le i \le m\}$ OSC és minden $S_i$ homotécia. Ekkor $FP(K)$ véges halmaz.*

*Bizonyítás.* Teljesülnek az 5.32. Tétel feltételei, tehát $FP_{\mathcal{O}}(K)$ véges halmaz. Az 5.11. Megjegyzés szerint $FP_{\mathcal{O}}(K) = FP(K)$, így $FP(K)$ véges halmaz. □

# 6. Példák feszülő halmazokra

Hamarosan mutatunk példákat feszülő halmazokra, de előbb néhány lemmával előkészítjük a feszülés bizonyítását.

**6.1. Tétel.** *Legyen* $\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ *önhasonló IFS. Ekkor a* $K \longmapsto \bigcup_{i=1}^m S_i(K)$ *halmazleképezés egy* $\big(\mathcal{K}(\mathbb{R}^d), d_H\big) \longrightarrow \big(\mathcal{K}(\mathbb{R}^d), d_H\big)$ *kontrakció.*

A 6.1. Tétel bizonyításának részleteit lásd [4, 3.2.szakasz (1) Tétel].

**6.2. Tétel.** *(Banach fixponttétel) Legyen* $(X, d)$ *egy teljes metrikus tér és* $f : X \longrightarrow X$ *kontrakció. Ekkor létezik pontosan egy fixpontja az* $f$ *leképezésnek. Legyen* $x \in X$ *tetszőleges pont, ekkor az* $(f^n(x))_{n=0}^{\infty}$ *sorozat konvergál az egyértelmű fixponthoz a* $d$ *metrika szerint.*

Ezen jól ismert tétel bizonyítását az olvasóra bízzuk.

**6.3. Következmény.** *Legyen* $K \subseteq \mathbb{R}^d$ *önhasonló halmaz, mely az* $\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ *önhasonló IFS attraktora és legyen* $H \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$. *Ekkor az* $\big(\bigcup_{i_1=1}^m \dots \bigcup_{i_n=1}^m S_{i_1 \dots i_n}(H)\big)_{n=1}^{\infty}$ *sorozat konvergál a* $K$ *halmazhoz a* $d_H$ *metrika szerint.*

A 6.3. Tétel következménye a 6.1. és a 6.2. Tételnek.

A 6.4. és a 6.5. Lemma bizonyítása egyszerű topológiai alapismereteket igényel. A bizonyítást az olvasóra bízzuk.

**6.4. Lemma.** *Legyen* $K_1, K_2, \dots \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, *melyre* $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$. *Ekkor a* $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ *és a* $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ *sorozat konvergál a* $K$*-hoz a* $d_H$ *metrika szerint.*

**6.5. Lemma.** *Legyen* $K_1, K_2, \dots \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, *melyre* $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$ *és* $\pi \in \prod$. *Ekkor*

$$\pi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \pi(K_n).$$

**6.6. Definíció.** Legyen $\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ önhasonló IFS, $K_0 \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, melyre $S_i(K_0) \subseteq S_i(K)$ minden $i$-re. Ekkor legyen $K_n = \bigcup_{i_1=1}^m \dots \bigcup_{i_n=1}^m S_{i_1 \dots i_n}(K_0)$, ahol $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. A $K_n$ halmazt a $K_0$ kezdetű $n$-edik generációs közelítésnek nevezzük.

**6.7. Lemma.** *Legyen* $K \subseteq \mathbb{R}^2$ *önhasonló halmaz, mely az* $\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ *önhasonló IFS attraktora,* $K_0 \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, *melyre* $S_i(K_0) \subseteq S_i(K)$ *minden* $i$*-re. Ekkor* $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = K$ *egy leszálló metszet, ahol* $K_n$ *a* $K_0$ *kezdetű* $n$*-edik generációs közelítés.*

Gyakran szeretünk leszálló metszetként tekinteni az önhasonló halmazokra, mert egyszerűbbé teszi vizsgálatukat.

*Bizonyítás.* Mivel $S_i(K_0) \subseteq K_0$ minden $i$-re, így $K_0 \supseteq S_{i_1}(K_0) \supseteq \dots \supseteq S_{i_1 \dots i_{n-1}}(K_0) \supseteq S_{i_1 \dots i_n}(K_0)$. Tehát $K_0 \supseteq \bigcup_{i=1}^m S_i(K_0) \supseteq \dots \supseteq \bigcup_{i_1=1}^m \dots \bigcup_{i_n=1}^m S_{i_1 \dots i_n}(K_0) \supseteq \dots$, így a 6.4. Lemmát alkalmazva $\lim_{n \to \infty} K_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, ahol a limeszt a $d_H$ metrika szerint vesszük. A 6.3. Következmény szerint $\lim_{n \to \infty} K_n = K$, és mivel a limesz egyértelmű, így $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = K$. $\square$

**6.8. Lemma.** *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^2$ önhasonló halmaz, mely az $\{S_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ önhasonló IFS attraktora, ahol az $S_i$ hasonlóságok mind homotéciák, és legyen $\pi_L \in \prod$ tetszőleges. Legyen $K_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt halmaz, melyre $S_i(K_0) \subseteq K_0$ minden $i$-re és $\pi_L\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(K_0)\right) = \pi_L(K_0)$. Ekkor $\pi_L(K) = \pi_L(K_0)$.*

Ez a tétel azt mutatja, hogy ha $K_0$ és $K_1$ merőleges vetülete egy $L$ egyenesre megegyezik, akkor a $K$ attraktor vetülete is ugyanaz a vetület lesz. Például ha $K_0$ és $K_1$ ugyanarra az intervallumra vetül, akkor $K$ is. Ez hasznos eszköz lesz arra, hogy az attraktorról megmutassuk, hogy bizonyos projekciók az attraktor feszítő projekciói.

*Bizonyítás.* A 6.7. Lemma szerint $K_n = \bigcup_{i_1=1}^m \dots \bigcup_{i_n=1}^m S_{i_1 \dots i_n}(K_0)$ halmazokra

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \text{ és}$$

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n. \tag{26}$$

Elegendő belátni, hogy minden $L$-re merőleges $M$ affin egyenesre $K_n \cap M = \emptyset$ pontosan akkor, ha $K_0 \cap M = \emptyset$, hiszen ekkor

$$\pi_L(K_0) = \pi_L(K_n) \tag{27}$$

minden $n$-re, és így a (26), (27) egyenletek és a 6.5. Lemma szerint

$$\pi_L(K) = \pi_L\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right) =$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \pi_L(K_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \pi_L(K_0) = \pi_L(K_0).$$

Tehát a lemma bizonyításához azt kell belátni, hogy minden $L$-re merőleges $M$ affin egyenesre

$$K_n \cap M = \emptyset \Longleftrightarrow K_0 \cap M = \emptyset. \tag{28}$$

Legyen $M$ egy tetszőleges $L$-re merőleges affin egyenes. Tegyük fel, hogy $K_0 \cap M = \emptyset$. Ekkor mivel $K_n \subseteq K_0$, így $K_n \cap M = \emptyset$. Tehát minden $L$-re merőleges $M$ affin egyenesre

$$K_n \cap M = \emptyset \Longleftarrow K_0 \cap M = \emptyset.$$

A másik irányt $n$ szerinti teljes indukcióval látjuk be.

Az $n = 1$ eset következik a tétel $\pi_L\left(\bigcup_{i=1}^m S_i(K_0)\right) = \pi_L(K_0)$ feltételéből, hiszen $K_1 = \bigcup_{i=1}^m S_i(K_0)$, így $n = 1$-re (28) igaz.

Legyen $n > 1$ és tegyük fel, hogy minden kisebb számra (28) igaz minden $L$-re merőleges $M$ affin egyenesre. Legyen $M$ fix, és tegyük fel, hogy

$$K_n \cap M = \emptyset.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy ekkor

$$K_0 \cap M = \emptyset.$$

Mivel $K_n = \bigcup_{i_1=1}^m \dots \bigcup_{i_n=1}^m S_{i_1\dots i_n}(K_0)$ és $K_n \cap M = \emptyset$, így $S_{i_1\dots i_n}(H) \cap M = \emptyset$ minden $(i_1, \dots, i_n)$ multi-indexre. Ekkor $S_{i_1}^{-1}(S_{i_1\dots i_n}(K_0) \cap M) = \emptyset$, azaz $S_{i_2\dots i_n}(K_0) \cap S_{i_1}^{-1}(M) = \emptyset$ minden $(i_1, \dots, i_n)$ multi-indexre. Tehát

$$K_{n-1} \cap S_{i_1}^{-1}(M) = \left( \bigcup_{i_2=1}^m \dots \bigcup_{i_n=1}^m S_{i_2\dots i_n}(K_0) \right) \cap S_{i_1}^{-1}(M) = \emptyset \tag{29}$$

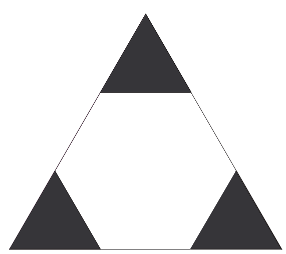
minden $i_1$ indexre. Mivel az $S_i$ hasonlóságok mind homotéciák, így $S_i^{-1}(M)$ egy $L$-re merőleges affin egyenes minden $i$ indexre. Az indukciós feltevés szerint (28) igaz $n-1$-re, tehát alkalmazzuk ezt a (29) egyenletre, így kapjuk, hogy $K_0 \cap S_i^{-1}(M) = \emptyset$, azaz $\emptyset = S_i(K_0 \cap S_i^{-1}(M)) = S_i(K_0) \cap M$ minden $i$ indexre. Tehát $K_1 = (\bigcup_{i=1}^m S_i(K_0)) \cap M = \emptyset$, alkalmazva erre a (28)-at 1-re kapjuk, hogy $K_0 \cap M = \emptyset$. Tehát minden $L$-re merőleges $M$ affin egyenesre

$$K_n \cap M = \emptyset \Longrightarrow H \cap M = \emptyset.$$

Tehát (28) igaz minden $n$-re, és ezzel a lemmát beláttuk. □

**6.9. Jelölés.** Legyen $S_1^{\triangle}(x) = \frac{1}{3}x$, $S_2^{\triangle}(x) = \frac{1}{3}x + (\frac{2}{3}, 0)$, $S_3^{\triangle}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{3}x + (\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ $(x \in \mathbb{R}^2)$. Jelölje $K^{\triangle}$ az $\left\{S_1^{\triangle}, S_2^{\triangle}, S_3^{\triangle}\right\}$ önhasonló IFS attraktorát.

Jelölje $K_0^{\triangle}$ a $(0,0)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ csúcsú szabályos háromszöget. Ekkor az $S_i^{\triangle}$ homotéciák önmagába képezik a $K_0^{\triangle}$ háromszöget a következő ábrán látható módon.



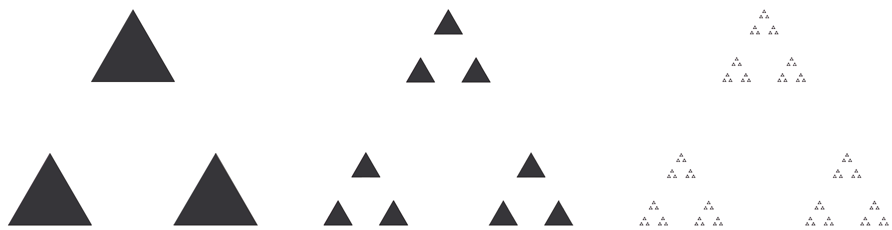
**6.10. Tétel.** *$FP(K^{\triangle}) = GFP(K^{\triangle})$ háromelemű halmaz.*

*Bizonyítás.* Jelölje $K_n^{\triangle}$ a $K_0^{\triangle}$ kezdetű $n$-edik generációs közelítést. Ekkor a 6.7. Lemma szerint

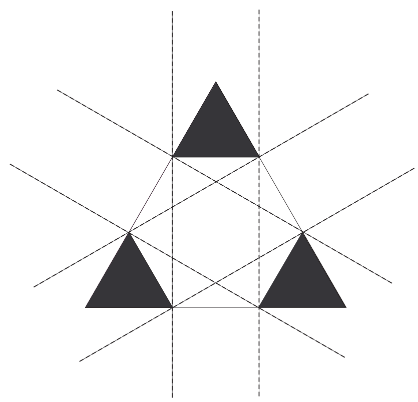
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n^{\triangle} = K^{\triangle} \tag{30}$$

egy leszálló metszet.

A következő ábrák mutatják az első és második generációs közelítéseket, valamint az attraktor halmazt.



A $K_1^{\triangle}$ első generációs közelítésre igaz, hogy a $K_0^{\triangle}$ háromszög oldalaira merőlegesen vetítve az $K_1^{\triangle}$ halmazt a vetület kiadja a teljes oldalt. Ezt a következő ábrán szemléltetjük.



Alkalmazva tehát a 6.8. Lemmát az oldalakkal párhuzamos $L$ egyenesekre, kapjuk, hogy $\pi_L(K^{\triangle}) = \pi_L(K_0^{\triangle})$. A $K_0^{\triangle}$ háromszög oldalai 1 hosszú intervallumok, így a $\mathcal{H}^1$ mértékük is 1. Tehát a 4.5. Lemma szerint

$$1 \leq \mathcal{H}^1(K^{\triangle}). \tag{31}$$

Legyen $\delta > 0$ fix. Legyen $n \in \mathbb{N}$, olyan nagy, melyre $\frac{1}{3^n} < \delta$. Ekkor mivel $diam(K_0^{\triangle}) = 1$, így $diam(S^{\triangle}_{i_1\ldots i_n}(K_0^{\triangle})) = \frac{1}{3^n} < \delta$. (30) szerint $K^{\triangle} \subseteq K_n^{\triangle} = \bigcup_{i_1=1}^3 \cdots \bigcup_{i_n=1}^3 S^{\triangle}_{i_1\ldots i_n}(K_0^{\triangle})$ és $\sum_{i_1=1}^3 \cdots \sum_{i_n=1}^3 diam(S^{\triangle}_{i_1\ldots i_n}(K_0^{\triangle})) = \sum_{i_1=1}^3 \cdots \sum_{i_n=1}^3 \frac{1}{3^n} = 3^n \cdot \frac{1}{3^n} = 1$. Tehát a 3.1. Definíció értelmében $\mathcal{H}^1_\delta(K^{\triangle}) \leq 1$. Ez igaz minden $\delta > 0$ számra, tehát

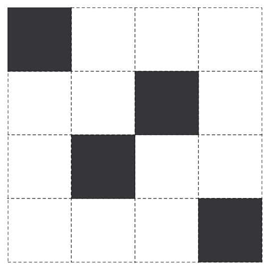
$$\mathcal{H}^1(K^{\triangle}) \leq 1. \tag{32}$$

Így a (31) és a (32) egyenletek következtében $\mathcal{H}^1(K^{\triangle}) = 1$. Mivel a $K_0^{\triangle}$ oldalaira a $K^{\triangle}$ halmaz vetülete egy 1 hosszú intervallum, így az oldalakkal párhuzamos $L_1^{\triangle}, L_2^{\triangle}, L_3^{\triangle} \in \mathbb{R}P^1$ egyenesekre a $\pi_{L_i^{\triangle}}(K^{\triangle})$ egy intervallum és $\mathcal{H}^1(K^{\triangle}) = \mathcal{H}^1(\pi_{L_i^{\triangle}}(K^{\triangle})) = 1$. Tehát $\pi_{L_i^{\triangle}} \in FP(K^{\triangle})$ $i = 1, 2, 3$-ra.

Ha $L \in \mathbb{R}P^1 \setminus \left\{L_1^{\triangle}, L_2^{\triangle}, L_3^{\triangle}\right\}$, akkor a $\pi_L(K_0^{\triangle})$ egy 1-nél rövidebb intervallum és mivel $K^{\triangle} \subseteq K_0^{\triangle}$, így $\mathcal{H}^1(\pi_L(K^{\triangle})) < 1 = \mathcal{H}^1(K^{\triangle})$, azaz $\pi_L \notin GFP(K^{\triangle})$. Tehát $FP(K^{\triangle}) = GFP(K^{\triangle}) = \left\{L_1^{\triangle}, L_2^{\triangle}, L_3^{\triangle}\right\}$ háromelemű. $\square$

**6.11. Jelölés.** Legyen $S_1^\square(x) = \frac{1}{4}x + (0, \frac{3}{4})$, $S_2^\square(x) = \frac{1}{4}x + (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $S_3^\square(x) = \frac{1}{4}x + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $S_4^\square(x) = \frac{1}{4}x + (\frac{3}{4}, 0)$ $(x \in \mathbb{R}^2)$. Jelölje $K^\square$ az $\{S_1^\square, S_2^\square, S_3^\square, S_4^\square\}$ önhasonló IFS attraktorát.

Jelölje $K_0^\square$ a $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ csúcsú négyzetet. Ekkor az $S_i^\square$ homotéciák önmagába képezik a $K_0^\square$ négyzetet a következő ábrán látható módon.



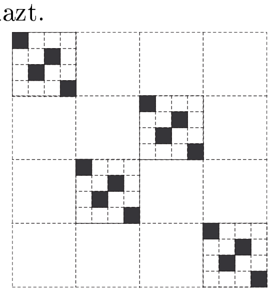
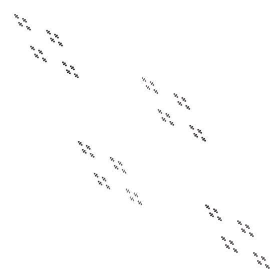
**6.12. Tétel.** *$FP(K^\square)$ kételemű halmaz.*

*Bizonyítás.* Jelölje $K_n^\square$ a $K_0^\square$ kezdetű $n$-edik generációs közelítést. Ekkor a 6.7. Lemma szerint

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n^\square = K^\square \tag{33}$$

egy leszálló metszet.

A következő ábrák mutatják az első és második generációs közelítéseket, valamint az attraktor halmazt.

A $K_1^\square$ első generációs közelítésre igaz, hogy a $K_0^\square$ négyzet oldalaira merőlegesen vetítve az $K_1^\triangle$ halmazt a vetület kiadja a teljes oldalt. Alkalmazva tehát a 6.8. Lemmát az oldalakkal párhuzamos $L$ egyenesekre, kapjuk, hogy $\pi_L(K^\square) = \pi_L(K_0^\square)$. A $K_0^\square$ négyzet oldalai 1 hosszú intervallumok, így a $\mathcal{H}^1$ mértékük is 1. Tehát a 4.5. Lemma szerint

$$1 \leq \mathcal{H}^1(K^\square). \tag{34}$$

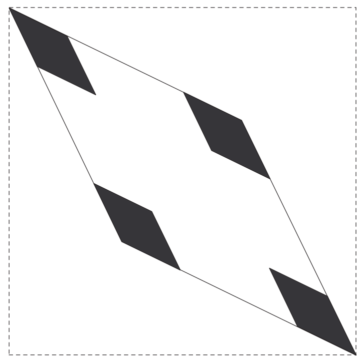
Legyen $x^1 = (0,1)$, $x^2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $x^3 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ és $x^4 = (1,0)$. Ekkor $S_i^\square(x^i) = x^i$ $i = 1,2,3,4$-re. Jelölje $K_0^\diamondsuit$ az $x^1$, $x^2$, $x^3$, $x^4$ csúcsú rombuszt. Ekkor mivel a $K_0^\diamondsuit$ rombusz csúcsai az $S_i^\square$ homotéciák fixpontjai, így $S_i^\square(K_0^\diamondsuit) \subseteq K_0^\diamondsuit$ $i = 1,2,3,4$-re. Jelölje $K_n^\diamondsuit$ a $K_0^\diamondsuit$ kezdetű $n$-edik generációs közelítést. Ekkor a

6.7. Lemma szerint

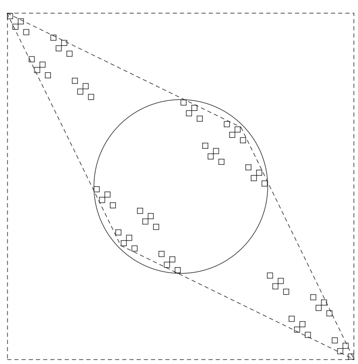
$$K^{\square} = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n^{\diamondsuit} \subseteq K_0^{\diamondsuit} \tag{35}$$

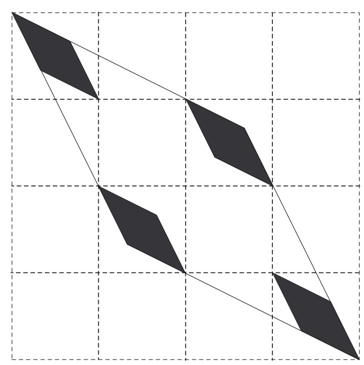
egy leszálló metszet.

A következő ábra mutatja az első generációs közelítést.



Legyen $A = [(0,1),(1,0)]$ szakasz, azaz $K_0^{\square}$ négyzet negatív meredekségű átlója. Legyen $D_0$ az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ középpontú $\frac{1}{4}$ sugarú zárt körlap. A pitagorasz tétel segítségével némi számolással ellenőrizhető, hogy $S_2^{\square}(K_0^{\diamondsuit}) \cup S_3^{\square}(K_0^{\diamondsuit}) \subseteq D_0$. Tehát $S_2^{\square}(K^{\square}) \cup S_3^{\square}(K^{\square}) \subseteq D_0$, mivel a (35) egyenlet szerint $K^{\square} \subseteq K_0^{\diamondsuit}$. Tehát $D_0$ lefedi a $K^{\square}$ két $A$-t nem metsző első generációs elemi részét és $diam(D_0) = \frac{1}{2}$.





Az $S_1^{\square}(D_0)$ lefedi az $S_1^{\square}(K^{\square})$-ban levő két $A$-t nem metsző második generációs elemi részt, és $diam(S_1^{\square}(D_0)) = \frac{1}{8}$. Az $S_2^{\square}(D_0)$ lefedi az $S_2^{\square}(K^{\square})$-ban levő két $A$-t nem metsző második generációs elemi részt és $diam(S_2^{\square}(D_0)) = \frac{1}{8}$. Tehát $D_0 \cup S_1^{\square}(D_0) \cup S_2^{\square}(D_0)$ lefedi $K^{\square}$-nek az $A$ átlót nem metsző második generációs elemi részeit és

$$diam(D_0) + \Big(diam(S_1^{\square}(D_0)) + diam(S_2^{\square}(D_0))\Big) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

A gondolatmenetet iterálva kapjuk, hogy

$$D_N = D_0 \cup \left( \bigcup_{n=1}^{N} \left( \bigcup_{i_1 \in \{1,4\}} \dots \bigcup_{i_n \in \{1,4\}} S^{\square}_{i_1 \dots i_n}(D_0) \right) \right)$$

lefedi a $K^{\square}$-nek az $A$ átlót nem metsző $N+1$-edik generációs elemi részeit, és az unióban szereplő körök átmérőinek összege $\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{2^k}$. Innen nem nehéz látni, hogy a

$$D_\infty = D_0 \cup \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{i_1 \in \{1,4\}} \dots \bigcup_{i_n \in \{1,4\}} S^{\square}_{i_1 \dots i_n}(D_0) \right) \right)$$

lefedi a $K^{\square} \setminus A$ halmazt, és az unióban szereplő körök átmérőinek összege $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$. Tehát $\bigcup_{i=1}^{4} S^{\square}_i(D_\infty)$ lefedi az

$$\bigcup_{i=1}^{4} S^{\square}_i(K^{\square} \setminus A) = K^{\square} \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{4} S^{\square}_i(A) \right)$$

halmazt, a fedésben szereplő körök átmérőinek összege $4 \cdot \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}}{4} = 1$, és minden a fedésben szereplő kör átmérője legfeljebb $\frac{1}{4}$. Ezt a gondolatmenetet iterálva kapjuk, hogy az

$$\bigcup_{i_1=1}^{4} \dots \bigcup_{i_n=1}^{4} S^{\square}_{i_1 \dots i_n}(D_\infty)$$

lefedi az

$$\left( \bigcup_{i_1=1}^{4} \dots \bigcup_{i_n=1}^{4} S^{\square}_{i_1 \dots i_n}(K^{\square} \setminus A) \right) \setminus A = K^{\square} \setminus \left( A \cup \bigcup_{i_1=1}^{4} \dots \bigcup_{i_n=1}^{4} S^{\square}_{i_1 \dots i_n}(A) \right)$$

halmazt, a fedésben szereplő körök átmérőinek összege $4^n \cdot \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}}{4^n} = 1$, és minden a fedésben szereplő kör átmérője legfeljebb $\frac{1}{4^n}$. Tehát $\delta = \frac{1}{4^k}$-ra a $\mathcal{H}^1_\delta$ definíciója alapján

$$\mathcal{H}^1_\delta \left( K^{\square} \setminus \left( A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i_1=1}^{4} \dots \bigcup_{i_n=1}^{4} S^{\square}_{i_1 \dots i_n}(A) \right) \right) \le 1$$

minden $\delta = \frac{1}{4^k}$-ra ($k \in \mathbb{N}$), és mivel $\mathcal{H}^1_\delta$ $\delta$-ban monoton, így

$$\mathcal{H}^1 \left( K^{\square} \setminus \left( A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i_1=1}^{4} \dots \bigcup_{i_n=1}^{4} S^{\square}_{i_1 \dots i_n}(A) \right) \right) \le 1.$$

Ha megmutatnánk, hogy

$$\mathcal{H}^1 \left( K^{\square} \cap \left( A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i_1=1}^{4} \dots \bigcup_{i_n=1}^{4} S^{\square}_{i_1 \dots i_n}(A) \right) \right) = 0,$$

akkor azt kapnánk, hogy $\mathcal{H}^1(K^\square) \leq 1$, és ezt összevetve a (34) egyenlettel kapnánk, hogy

$$\mathcal{H}^1(K^\square) = 1. \tag{36}$$

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy

$$\mathcal{H}^1\left(K^\square \cap \left(A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i_1=1}^{4} \cdots \bigcup_{i_n=1}^{4} S^\square_{i_1\dots i_n}(A)\right)\right) = 0 \tag{37}$$

elég azt megmutatni, hogy $\mathcal{H}^1\left(K^\square \cap S^\square_{i_1\dots i_n}(A)\right) = 0$ minden multi-indexre, valamint, hogy $\mathcal{H}^1(K^\square \cap A) = 0$. Mivel $A \subseteq K^\square_0$, így

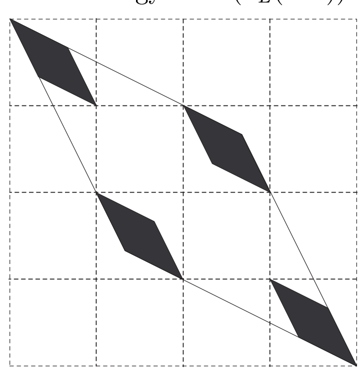
$$K^\square \cap S^\square_{i_1\dots i_n}(A) = \left(K^\square \cap S^\square_{i_1\dots i_n}(K^\square)\right) \cap S^\square_{i_1\dots i_n}(A) = S^\square_{i_1\dots i_n}(K^\square \cap A),$$

tehát a (37) egyenlethez elég azt megmutatni, hogy $\mathcal{H}^1(K^\square \cap A) = 0$.

Megmutatjuk, hogy $\mathcal{H}^1(K^\square \cap A) = 0$ és ezzel a (36) egyenlet bizonyítását befejezzük. Könnyen ellenőrizhető, hogy $intK^\square_0$ az OSC egy tanúja és $dim_S\left(\left\{S^\square_1, S^\square_2, S^\square_3, S^\square_4\right\}\right) = 1$, így a 3.25. Tétel szerint $K^\square$ egy 1-halmaz. Tehát mivel a $K^\square$ nem kollineáris, ezért az 5.19. Tétel szerint $K^\square$ teljesen rektifikálhatatlan, így $\mathcal{H}^1(K^\square \cap A) = 0$, hiszen $A$ az $\mathbb{R}$ Lipschitz képe.

Ahogy azt megmutattuk, a $K^\square$ vetülete a $K^\square_0$ négyzet oldalaival párhuzamos $L^\square_1$, $L^\square_2$ egyenesekre egy 1 hosszú intervallum. Tehát $\pi_{L^\square_i}(K^\square)$ intervallum és $i = 1, 2$-re $\mathcal{H}^1(\pi_{L^\square_i}(K^\square)) = 1 = \mathcal{H}^1(K^\square)$ a (36) egyenlet szerint. Tehát $\pi_{L^\square_1}, \pi_{L^\square_2} \in FP(K^\square)$.

Tehát a tétel belátásához elegendő belátni, hogy ha $L \in \mathbb{R}P^1 \setminus \left\{L^\square_1, L^\square_2\right\}$, akkor $\pi_L(K^\square)$ nem intervallum vagy $diam(\pi_L(K^\square)) < 1$.



Legyen $v = (\cos\theta, \sin\theta)$, ahol $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Ekkor létezik a $v$ vektorral párhuzamos $M$ affin egyenes, mely elválasztja $S^\square_1(K^\diamondsuit_0)$-t $\bigcup_{i=2}^4 S^\square_i(K^\diamondsuit_0)$-tól vagy az $S^\square_4(K^\diamondsuit_0)$-t $\bigcup_{i=1}^3 S^\square_i(K^\diamondsuit_0)$-tól, tehát $\pi_{M^\perp}(K^\square)$ nem intervallum.

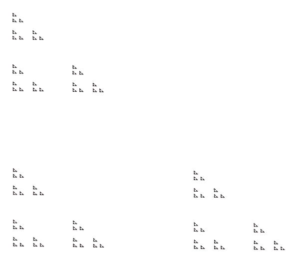
Most legyen $u = (\cos\theta, \sin\theta)$, ahol $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ és $L$ a $u$ vektorra merőleges lineáris altér. Nem nehéz látni, hogy ekkor $diam(\pi_L(K^\diamondsuit_0)) < 1$ és mivel (35) szerint $K^\square \subseteq K^\diamondsuit_0$, így $diam(\pi_L(K^\square)) < 1$.

Az ilyen tulajdonságú $u$ és $v$ vektorokra merőleges lineáris alterek összessége $\mathbb{R}P^1 \setminus \{L_1^{\square}, L_2^{\square}\}$. Ezzel beláttuk, hogy $FP(K^{\square}) = \{L_1^{\square}, L_2^{\square}\}$, azaz $FP(K^{\square})$ kételemű halmaz. $\square$

**6.13. Megjegyzés.** Legyen $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ az az egyértelmű affinitás, melyre $\varphi((0,0)) = (0,0)$, $\varphi((\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})) = (0,1)$ és $\varphi((1,0)) = (1,0)$. Legyen $K_{\perp}^{\triangle} = \varphi(K^{\triangle})$. R. Kenyon az [5] cikkben a $K_{\perp}^{\triangle}$ halmaz vetületeivel foglalkozik. Megmutatja, hogy létezik egy $A \subseteq \prod$ megszámlálható és sűrű halmaz, melyre

$$\pi_L \in A \Longleftrightarrow \mathcal{H}^1(\pi_L(K_{\perp}^{\triangle})) > 0.$$

A következő ábra mutatja a $K_{\perp}^{\triangle}$ halmazt.



**6.14. Megjegyzés.** Egy $\varphi$ affinitás párhuzamos egyenespárokat párhuzamos egyenespárokba visz, úgy hogy párhuzamos egyenesek távolságaránya nem változik, azaz ha $L$, $M$, $N$ párhuzamos affin egyenesek akkor $\frac{dist(L,M)}{dist(M,N)} = \frac{dist(\varphi(L),\varphi(M))}{dist(\varphi(M),\varphi(N))}$. Tehát ha $H \subseteq \mathbb{R}^2$, akkor $\pi_{L^{\perp}}(H)$ hasonló a $\pi_{\varphi(L)^{\perp}}(\varphi(H))$ halmazzal. Tehát alkalmazva ezt $K^{\triangle}$ halmazra és a 6.13. Megjegyzés beli $\varphi$ affinitásra, kapjuk, hogy

$$\mathcal{H}^1(\pi_{L^{\perp}}(K^{\triangle})) > 0 \Longleftrightarrow \mathcal{H}^1(\pi_{\varphi(L)^{\perp}}(K_{\perp}^{\triangle})) > 0 \Longleftrightarrow \pi_{\varphi(L)^{\perp}} \in A.$$

A $\{\pi_{L^{\perp}} \in \prod \mid \pi_{\varphi(L)^{\perp}} \in A\}$ egy megszámlálható és sűrű halmaz $\prod$-ben, tehát $\{\pi_L \in \prod \mid \mathcal{H}^1(\pi_L(K^{\triangle})) > 0\}$ egy megszámlálható és sűrű halmaz.

Minden $L$ egyenesre a $\pi_L(K^{\triangle})$-ról megmutatható, hogy szintén önhasonló halmaz, és természetes módon adódik egy IFS 1 hasonlósági dimenzióval, melynek $\pi_L(K^{\triangle})$ az attraktora. A 3.25. Tétel szerint ha $\mathcal{H}^1(\pi_L(K^{\triangle})) > 0$, akkor OSC is és így a 3.28. Következmény szerint $\pi_L(K^{\triangle})$ tartalmaz intervallumot. Könnyen megmutatható, hogy ha $L$ egy olyan egyenes, mely nem párhuzamos a $K_0^{\triangle}$ háromszög oldalaival, akkor $\pi_L(K^{\triangle})$ nem intervallum, de ha $\mathcal{H}^1(\pi_L(K^{\triangle})) > 0$, akkor tartalmaz intervallumot.

**6.15. Megjegyzés.** A 6.13. Megjegyzésben szereplő eredmény bizonyításában használt módszer segítségével a $K^{\square}$ halmazról is megmutatható, hogy van egy $B \subseteq \prod$ megszámlálható és sűrű halmaz, melynek $\pi_L$ elemeire $\mathcal{H}^1(\pi_L(K^{\square})) > 0$.

**6.16. Megjegyzés.** Az ebben a fejezetben bemutatott példáknál az $FP(K)$ halmaz szabályos volt. Felmerül a kérdés, hogy ez vajon minden esetben igaz-e. A válasz az, hogy nem. Ha adott $M, L \in \mathbb{R}P^1$, akkor konstruálható olyan $K \subseteq \mathbb{R}^2$ önhasonló OSC halmaz, melyre $FP(K) = \{\pi_L, \pi_M\}$.

## 7. Nyitott problémák

**1. Probléma.** Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$ 1-halmaz. Milyen nagy lehet azon origón átmenő egyenesekre való $\pi$ merőleges vetítések halmazának számossága, melyekre $\mathcal{H}^1(H) = \mathcal{H}^1(\pi(H))$? Milyen nagy lehet azon $\pi$ vetítések halmazának számossága, melyekre feltesszük továbbá, hogy $\pi(H)$ intervallum?

**2. Probléma.** Igaz-e, hogy ha $K$ egy önhasonló 1-halmaz, akkor csak véges sok olyan origón átmenő egyenes van, amelyre a $K$ merőleges vetülete egy $\mathcal{H}^1(H)$ hosszú intervallum?

**3. Probléma.** Létezik-e $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt, teljesen rektifikálhatatlan 1-halmaz a síkon, melyhez megadható végtelen sok origón átmenő egyenes úgy, hogy ezen egyenesekre $K$ merőleges vetülete intervallum?

## Hivatkozások

[1] K. Falconer, Fractal geometry, Mathematical foundations and applications. Second edition. *John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ,* 2003.

[2] K. J. Falconer, Sets with prescribed projections and Nikodym sets, *Proc. London Math. Soc.* (3), **53** (1986), 48-64.

[3] H. Federer, Geometric measure theory. *Springer-Verlag New York Inc., New York,* 1969.

[4] J. Hutchinson, Fractals and self-similarity, *Indiana Univ. Math. J.* **30** (1981), no. 5, 713–747.

[5] R. Kenyon, Projecting the one-dimensional Sierpinski gasket, *Israel J. Math.* **97** (1997), 221–238.

[6] B. B. Mandelbrot, The fractal geometry of nature. *W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif.*, 1982.

[7] P. Mattila, Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 44. *Cambridge University Press, Cambridge,* 1995.

[8] P. Mattila, On the structure of self-similar fractals, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* **7** (1982), 189–195.

[9] C. A. Rogers, Hausdorff measures. *Cambridge University Press, London-New York,* 1970.

[10] A. Schief, Separation properties for self-similar sets, *Proc. Amer. Math. Soc.* **122** (1994), no. 1, 111–115.