Ritka hipergráfok: algoritmusok és alkalmazások

Szakdolgozat

Írta: Kaszanitzky Viktória Eszter

Matematikus szak

Témavezető:

Jordán Tibor, egyetemi docens

Operációkutatási Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2010

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A dolgozat célja a kombinatorikus merevség témakörébe tartozó néhány eredmény bemutatása. Ezeknek a többsége a közelmúltban született, szerepel közöttük a $(2,5)$-kritikus, 3-uniform hipergráfok konstruktív karakterizációja, ami egy saját eredmény. A dolgozatban központi szerepet játszik a pebble game algoritmus, amelynek több változatát is megismerhetjük.

A dolgozatban használt definíciók, tételek

Ritka gráfok és hipergráfok

Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf, k és l nemnegatív egészek. Azt mondjuk, hogy G (k,l) *ritka*, ha minden $G' = (V', E')$ részgráfjára teljesül, hogy

$$|E'| \leq k|V'| - l.$$

Ha G (k,l)-ritka és még az

$$|E| = k|V| - l$$

egyenlőség is teljesül, akkor G-t (k,l)-*kritikus*nak nevezzük. A fenti definícióval megegyező módon definiálhatjuk a (k,l)-ritka hipergráfok fogalmát is.

Merev gráfok és szerkezetek

Egy $G = (V, E)$ gráfból és egy $p : V \to \mathbb{R}^d$ hozzárendelésből álló (G,p) párt (d-dimenziós) szerkezetnek nevezünk. Az $uv \in E$-nek a $p(u)$ és a $p(v)$ pontokat összekötő szakasz felel meg. Azt mondjuk, hogy (G,p) a G gráf egy $\mathbb{R}^d$-beli realizációja. A (G,p) szerkezetben az uv él hossza a $p(u)$ és $p(v)$ pontok távolsága.

Legyenek (G,p) és (G,q) szerkezetek. A két szerkezet *ekvivalens*, ha minden $uv \in E$-re az uv élnek megfelelő szakasz egyenlő hosszú a két szerkezetben. A szerkezetek *kongruensek*, ha minden $u, v \in V$-re az u és v pontok távolsága egyenlő a két szerkezetben. A (G,p) szerkezet merev, ha létezik olyan $\varepsilon > 0$, melyre minden olyan (G,p)-vel ekvivalens (G,q) szerkezetre, melyre $p(v) - q(v) < \varepsilon$ minden $v \in V$-re (G,q) kongruens (G,p)-vel.

A (G,p) szerkezet mozgása (G,q)-ba egy olyan $P : [0,1] \times V \to \mathbb{R}^d$ függvény, amelyre:

- $P(0, v) = p(v)$ és $P(1, v) = q(v)$ minden $v \in V$-re,
- $|P(t, u) - P(t, v)| = |p(u) - q(v)|$ minden $t \in [0, 1]$-re és minden $uv \in E$-re,
- $P(t, v)$ folytonos t-ben minden $v \in V$-re.

Megmutatható, hogy ha van mozgás (G, p)-ből (G, q)-ba, akkor differenciálható mozgás is van. A (G, p) szerkezet *infinitezimális mozgása* egy olyan $u : V \to \mathbb{R}^d$ hozzárendelés, amelyre minden $v_iv_j \in E$ esetén teljesül az

$$(u_i - u_j)(p(v_i) - p(v_j)) = 0$$

egyenlőség. Ezen egyenlőségeknek az együtthatóit egy mátrixba foglalva kapjuk a (G, p) szerkezet $R(G, p)$ d-dimenziós *merevségi mátrixát.* A merevségi mátrixban minden élhez egy sor, minden csúcshoz d darab oszlop tartozik. $v_iv_j \in E$ esetén a megfelelő sorban a v_i oszlopaiban $p(v_i) - p(v_j)$, míg v_j oszlopaiban $p(v_j) - p(v_i)$ koordinátái állnak. A sor többi eleme nulla. Így (G, p) infinitezimális mozgásai azok az $u \in \mathbb{R}^{d|V|}$-beli vektorok, melyekre $R(G, p)u = 0$.

	v_i				v_j		
0..0	a_i-a_j	b_i-b_j	0..0	0..0	a_j-a_i	b_j-b_i	0..0

1. ábra. A merevségi mátrix v_iv_j élnek megfelelő sora.

Legyen $n \geq 2$, $d \geq 1$. Ekkor legyen

$$S(n, d) = \begin{cases} dn - \binom{d+1}{2}, & ha\ n \geq d + 2 \\ \binom{n}{2}, & különben. \end{cases}$$

Az n pontú G gráfhoz tartozú (G, p) szerkezet *infinitezimálisan merev*nek nevezünk, ha $rang(R(G, p)) = S(n, d)$.

A $p : V \to \mathbb{R}^d$ leképezést (vagy $\mathbb{R}^{d|V|}$ egy pontját) nevezzük *generikusnak*, ha az $R(K_n, p)$ minden olyan részdeterminánsa, amely (a benne szereplő koordinátákat változóknak tekintve) nem azonosan nulla polinom, a p koordinátáit behelyettesítve sem tűnik el.

Belátható, hogy generikus estben a merevség ekvivalens az infinitezimális merevséggel, amely generikus esetben csak a G gráftól függ. Ezért lehetséges nem csak szerkezetek, hanem gráfok merevségéről beszélni. A G gráfra azt mondjuk, hogy *generikusan merev* vagy röviden, *merev* $\mathbb{R}^d$-ben, ha létezik olyan $p : V \to \mathbb{R}^d$ hozzárendelés, amelyre (G, p) infinitezimálisan merev.

A kombinatorikus merevség témakörének klasszikus tétele Lamantól származik, a síkbeli merev gráfok jellemzését adja meg.

Tétel 0.0.1 (Laman, [7]) *d=2 esetén G pontosan akkor minimálisan generikusan merev, ha* $(2, 3)$*-kritikus.*

Laman tételének közismert bizonyítása a Henneberg-felépítésen alapszik:

Tétel 0.0.2 (Henneberg, [5]) *A* $G = (V, E)$ *gráf pontosan akkor* $(2, 3)$*-kritikus, ha előáll* K_2*-ből az alábbi műveletek segítségével:*

(A) másodfokú kiterjesztés: *felveszünk egy új* u *csúcsot és valamely* $v_1, v_2 \in V$*-re, ahol* $v_1 \neq v_2$ *hozzáveszünk egy* uv_1 *és egy* uv_2 *élet.*

(B) harmadfokú kiterjesztés: *valamely* $v_1v_2 \in E$ *élet felosztunk egy* u *csúccsal valamint behúzunk egy* uv_3 *valamely* $v_3 \in V$*-re, ahol* $v_3 \notin \{v_1, v_2\}$.

A bizonyítás azt használja, hogy a fenti lépések kettővel növelik a merevségi mátrix rangját. Tehát a gráf konstrukciója alapján látható, hogy a mátrix teljesrangú, vagyis a szerkezet infinitezimálisan merev, ami generikus esetben azzal ekvivalens, hogy merev.

Matroidok

Legyen adott egy $\mathcal{S}$ véges halmaz részhalmazainak egy $\mathcal{F}$ rendszere. Az $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{F})$ párt matriodnak nevezzük, ha kielégíti az alábbi tulajdonságokat:

(F1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(F2) $Y \subseteq X \in \mathcal{F}$ esetén $Y \in \mathcal{F}$

(F3) $X, Y \in \mathcal{F}$, $|X| < |Y|$ esetén létezik olyan $z \in Y - X$, hogy $X + z \in \mathcal{F}$.

A fenti tulajdonságokat *függetlenségi axiómák*nak nevezzük. $\mathcal{F}$ elemeit *független* halmazoknak, míg a nem $\mathcal{F}$-belieket *összefüggő* halmazoknak hívjuk. Az $\mathcal{F}$ maximális független halmazait *bázis*oknak, míg a minimális összefüggő halmazokat *kör*öknek nevezzük. Legyen $\mathcal{M}$ *rangfüggvény*e, melyet $X \subseteq \mathcal{S}$ esetén $r(X)$ jelöl az X-ben található maximális független halmaz elemszáma.

Jelölje $\mathcal{C}$ $\mathcal{M}$ köreinek halmazát. $\mathcal{M}$ megadható a körök segítségével is, az alábbiak a *köraxiómák*:

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$

(C2) $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ esetén $C_1 \not\subset C_2$

(C3) Legyen C_1 és C_2 két különböző $\mathcal{C}$-beli elem, $e \in C_1 \cap C_2$, $e_1 \in C_1 - C_2$. Ekkor létezik olyan $C \in \mathcal{C}$, hogy $e_1 \in C_1 - C_2 + e$.

A G gráf élein definiált $R(G,p)$-beli sorok lineáris függetlensége által meghatározott matroidok azonosak minden generikus realizációra. Az így kapott matroid a G gráf d-dimenziós *merevségi matroid*ja. Jelölje ezt a matroidot $R_d(G)$, ragfüggvényét pedig $r_d(G)$. Tehát G merev $\mathbb{R}^d$-ben, ha

$$r_d = S(n,d).$$

A ritka gráfok és hipergráfok tulajdonságainak vizsgálatával megfigyelhető, hogy egy adott, $G = (V,E)$ gráf vagy hipergráf (k,l)-ritka részgráfjai egy matroid független halmazait alkotják, melynek bázisai a (k,l)-kritikus részgráfok. Ezeket a matroidokat nevezzük *count matroid*oknak. Jelölje azon matroidot, melynek független halmazai az összes, n csúcson lehetséges (k,l)-ritka gráfok, $\mathcal{M}_{k,l}$. Egy adott H hipergráf count matroidját jelölje $\mathcal{M}_{k,l}(H)$. Laman tételének állítása úgy is megfogalmazható, hogy gráfok esetében $\mathcal{M}_{2,3}$ azonos a kétdimenziós merevségi martoiddal.

A pebble game algoritmus

A dolgozat első részében néhány, ritka és merev gráfokkal kapcsolatos, többségében új eredmény áttekintése szerepel. Ezekben a fejezetekben hasznos segédeszköz lesz egy algoritmus, melyet *pebble game*nek neveznek. Az algoritmus Jacobstól és Hendricksontól származik, melyet [6]-ben írtak le. Az elnevezés az algoritmus eredeti, kevésbé matematikai megfogalmazásából ered. Az algoritmus segítségével többek között el lehet dönteni, hogy a vizsgált gráf ritka-e, illetve meg tudunk benne találni egy maximális élszámú ritka részgráfot.

Az algoritmus egy n-csúcsú üres gráfból indul, k és l rögzített, nemnegatív egészek. Egy játékos játszik, aki megpróbál minél több élet behúzni a gráfba úgy, hogy a gráf (k,l)-ritka legyen. Induláskor minden csúcsra k kavicsot teszünk. Amikor beveszünk egy új élet a gráfba, az él egy tetszőleges végpontjáról leveszünk egy kavicsot, amelyre azt mondjuk, hogy lefedi az élet. Egy új él akkor vehető be, ha a végpontjairól össze tudunk gyűjteni legalább $l+1$ darab kavicsot. Ha nem sikerül összegyűjteni ennyi kavicsot a végpontjairól, akkor a kavicsokat megpróbáljuk elcsúsztatni úgy, hogy elegendő kavics kerüljön a vizsgált él végpontjaira. Az elcsúsztatás művelet azt jelenti, hogy ha egy $e = uv$ élet az u végpontról levett kavics fed le, akkor a kavicsot visszatesszük u-ra és leveszünk helyette egy másik, v csúcson levő kavicsot, amennyiben ez lehetséges. Ezt a műveletet ismételjük valamely élsorozat mentén. Ha már nem tudunk több élet bevenni a gráfba, az algoritmus leáll.

Ezt az algoritmust Berg és Jordán formalizálta [1]-ben. Az alapgondolat, hogy a kavicsok levétele az élek irányításának felel meg, az elcsúsztatás pedig valamely irányított út mentén az irányítás megfordításának. Az algoritmus segítségével $O(|V|^2)$ időben eldönthető egy gráfról, hogy merev-e a síkban.

A fejezetek témaköreinek áttekintése

Az első fejezetben a Laman-tételnek az eredetitől lényegesen különböző bizonyítása szerepel. A bizonyítás Whiteleytól származik. Egy másik típusú szerkezet, a 2-keret mátrixának segítségével látja be a merevségi mátrix rangjára vonatkozó állítást.

A második fejezetben a (k,l)-ritka gráfokra szerepel egy karaktrizációja, ez Streinu és Theran eredménye. Ez a karakterizáció azért érdekes, mert nem minden (k,l) párra ismert a (k,l)-ritka gráfok konstruktív karakterizációja. Ebben a fejezetben a pebble game algoritmus színezett változata is szerepel, ebben az esetben az éleket nem csak irányítjuk, hanem színezzük is.

A síkbeli merev gráfoknak vannak triviális mozgásai, ezek egy három dimenziós teret alkotnak, melynek bázisa két eltolás és egy forgatás. A harmadik fejezetben azt a kérdést vizsgáljuk, hogy egy gráfban hány csúcs valamely koordinátáját kell lerögzíteni ahhoz, hogy a gráf által definiált szerkezet egyáltalán ne mozdulhasson el. Vagyis nemcsak a merevséget követeljük meg, de a triviális mozgásokat is ki szeretnénk zárni. A fejezetben egy algoritmus is szerepel, amely megtalálja a rögzítendő koordinátákat.

A negyedik fejezet a lépcsősen ritka hipergráfokról szól, ez a fogalom a ritka hipergráfok általánosítása. Ezekről is belátható, hogy matroidit alkotnak, valamint polinom időben ellenőrizhető a pebble game algoritmus egy változatával, hogy egy hipergráf lépcsősen ritka-e.

A dolgozat második felében egy új fogalom, a térfogat-merevség és vele kapcsolatos kérdések szerepelnek. Maga a fogalom Whiteleytól származik, aki meg is fogalmazott egy sejtést ezzel kapcsolatban, mely szerint egy 3-uniform hipergráf pontosan akkor terület-merev, ha $(2,5)$-kritikus. Ezt a sejtést be is látta egy speciális esetben, azonban az általános eset még nyitott.

Az utolsó fejezet ritka hipergráfok konstruktív karakterizációjáról szól. Az ebben szereplő eredmények sajátok. A karakterizáció lehet az alapja a térfogat-merev szerkezetekre vonatkozó sejtés bizonyításának is. A Laman-tétel bizonyításához hasonlóan azt kellene még belátni, hogy a karakterizációban szereplő műveletek mindegyike kettővel növeli a terület-merevségi mátrix rangját.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Jordán Tibornak az érdekes témaválasztásért, a számtalan hasznos konzultációért és a dolgozat írása során nyújtott segítségért.

Köszönettel tartozom még Abigélnek és családomnak többi tagjának az egyetemi tanulmányaim alatt tanúsított végtelen türelmükért.

1. fejezet

Síkbeli merev szerkezetek jellemzése

A síkbeli merev gráfok jellemzése ismert, ezt a Laman-tétel adja meg. Erre a tételre több bizonyítás is született, ezek közül az egyik szerepel ebben a fejezetben. A lenti bizonyítás Whiteleytól származik, [17]-ben jelent meg.

Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfra, amely párhuzamos éleket is tartalmazhat, a $G(\mathbf{d})$ *2-keret* egy olyan hozzárendelés, amely minden $e \in E$ élekhez rendel hozzá egy-egy $\mathbf{d}_e \in \mathbb{R}^2$ irányt. A 2-keret *infinitezimális mozgás*a a $v_i \in V$ csúcsokhoz rendelt $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^2$ sebességvektorok egy halmaza, melyre

$$\mathbf{d}_e(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) = 0$$

minden, a v_i és v_j $(i < j)$ csúcsokra illeszkedő e élre. Ezen egyenlőségek rendszere definiálja a 2-keret $R(G, \mathbf{d})$ $e \times 2n$ méretű merevségi merevségi mátrixát. $R(G, \mathbf{d})$-ben G minden éléhez egy sor, minden csúcsához két oszlop tartozik. Az $R(G, \mathbf{d})$ mátrix e élének megfelelő sorában azon helyek kivételével, melyek e végpontjainak felelnek meg, nullák állnak, a többi helyen pedig egy $\mathbf{d}_e$ irányú vektor koordinátái és azoknak az ellentettjei. Tehát az e-nek megfelelő sor:

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & x_e & y_e & 0 & \ldots & 0 & -x_e & -y_e & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

ahol az (x_e, y_e) vektor iránya $\mathbf{d}_e$.

Lemma 1.0.3 *Egy generikus $G(\mathbf{d})$ 2-keret mátrixának sorai pontosan akkor függetlenek, ha G két éldiszjunkt erdő uniója.*

Bizonyítás: Legyen a két erdő F_1 és F_2. Minden F_1-beli élhez rendeljük az $(1, 0)$ irányt, míg F_2 éleihez a $(0, 1)$ irányt. Rendezzük át a mátrixot úgy, hogy az F_1 éleinek megfelelő sorok kerüljenek felülre, a csúcsok x koordinátáknak megfelelő oszlopok pedig balra. Mivel az F_1-beli éleknek megfelelő sorokban az adott él végpontjainak x koordinátáiban egyes szerepel, a többi helyen pedig nulla, az F_2 éleinek soraiban pedig hasonlóan a megfelelő két y koordinátában áll egyes, a kapott mátrix szerkezete:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_2 \end{pmatrix},$$

ahol $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ a két erdő incidenciamátrixát jelöli. Így $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ sorain létezik nemnulla minor. Ezért a merevségi mátrixnak is van nemnulla minorja, tehát a sorai függetlenek.

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy a merevségi mátrix sorai függetlenek. Ekkor át tudjuk rendezni a sorait és oszlopait a fenti módon. A függetlenség miatt létezik nemnulla minor a sorok halmazán. Alkalmazva a Laplace-kifejtést az oszlopok két blokkjára azt kapjuk, hogy létezik a sorok halmazának olyan felbontása két diszjunkt halmazra, melyeken létezik nemnulla minor. Egy ilyen felbontás mindkét része körmentes a sorok függetlensége miatt, tehát megad egy felbontást két éldiszjunkt erdőre.□

Tétel 1.0.4 *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf legalább két csúccsal. Az alábbi tulajdonságok ekvivalensek:*

(i) G reprezentálható, mint egy $G(\mathbf{p})$ minimálisan merev generikus szerkezet;

(ii) G $(2, 3)$-kritikus;

(iii) tetszőleges uv $u, v \in V$ élet hozzáadva E-hez olyan élhalmazt kapunk, amely felbontható két éldiszjunkt feszítő fa uniójára.

Bizonyítás: (i)⇒(ii): Ha valamely $G' = (E', V')$ részgráfra $|E'| > |V'|-3$, akkor az E'-nek megfelelő sorok összefüggőek. Mivel $G(\mathbf{p})$ mártixának sorai lineárisan függetlenek, G $(2, 3)$-ritka. Egy minimálisan merev generikus szerkezet mátrixának rangja $|E| = 2|V| - 3$, így G $(2, 3)$-kritikus.

(ii)⇔(iii): Tekintsük az alábbi, G élhalmazán definiált szubmoduláris függvényt:

$$f(E') = 2|V'| - 3.$$

Valamint legyenek g és h a következő, szintén szubmoduláris függvények:

$$g(E') = 2(|V'| - 1),\ h(E') = |V'| - 1.$$

f nemnegatív a nemüres élhalmazokon, valamint $f(E1) = g(E') - 1$, ezért az f által definiált matroid a g által definiált matroid csonkoltja, amely a h által definiált matroid (amely a G körmatroidja) két példányának direkt összege. Így G pontosan akkor független f matroidjában, ha egy él hozzáadásával olyan gráf keletkezik belőle, amely (2,2)-ritka, vagyis két éldiszjunkt erdő uniója.

(iii)⇒(i) Tegyük fel, hogy egy tetszőleges élet hozzávéve E-hez olyan élhalmaz keletkezik, amely két éldiszjunkt feszítő erdőre bontható. Azt kell belátni, hogy ekkor a merevségi mátrix sorai függetlenek lesznek a csúcsok koordinátáinak megfelelő választása mellett.

Tekintsünk egy $G(\mathbf{d})$ 2-keretet, melyben az élek irányai lineárisan függetlenek $\mathbb{Q}$ felett. Feltevésünk szerint egy tetszőleges él hozzávételével egy független E^* 2-keretet kapunk. Így 1.0.3 alapján $G(\mathbf{d})$-nek létezik egy olyan $\mathbf{u}_{ij}$ infinitezimális mozgása, melyben az új él két végpontjához különböző sebességvektorok tartoznak. Feltevésünk szerint tehát tetszőleges $v_i, v_j \in V$ párra létezik ilyen vektor. Ezeknek a vektoroknak egy megfelelő lineáris kombinációjával olyan infinitezimális mozgást lehet előállítani, amelyben bármely két $v_i, v_j \in V$ csúcsra $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{u}_j$. Legyenek ezek $\mathbf{u}_i = (s_i, t_i)$.

Most állítsunk elő egy független $G(\mathbf{p})$ szerkezetet. Ehhez legyen $\mathbf{p}_i = (-t_i, s_i)$. Mivel $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{u}_j$, így $\mathbf{p}_i \neq \mathbf{p}_j$ minden i, j párra. Ekkor $G(\mathbf{p})$ merevségi mátrixának sorai és az eredeti $G(\mathbf{d})$ mátrixának sorai párhuzamosak.

$$(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) = (-t_i + t_j, s_i - s_j)(s_i - s_j, t_i - t_j) = 0 = \mathbf{d}_e(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j)$$

Mivel $\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j \neq 0$, szükségképpen $\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j = \beta_e \mathbf{d}_e$ valamely nemnulla β_e skalárra. Tehát az új mátrix ekvivalens a régivel. $\square$

2. fejezet

Ritka gráfok felbontása

A (k, l)-ritka gráfoknak megfelelő k és l értékek mellet létezik konstruktív karakterizációja. A kérdés bizonyos esetekben még nyitott.

Fekete és Szegő adtak [2]-ben egy Henneberg-típusú konstruktív karakterizációt a (k, l)-ritka gráfokra $0 \leq l \leq k$ esetén.

Összecsípés alatt értsük az alábbit: élek egy F halmazának mindegyikét felosztunk egy-egy z_e csúccsal, majd ezeket a csúcsokat azonosítjuk, legyen ez a z csúcs. $F = \emptyset$ esetén az összecsípés annyit jelent, hogy adunk a gráfhoz egy új z izolált csúcsot.

Legyen $0 \leq j \leq m \leq k$, $G = (V, E)$ egy gráf. Jelölje $K(k, m, j)$ az alábbi műveletet: válasszunk j élet E-ből, ezeket csípjük össze egy új z csúccsal, vegyünk fel $m - j$ hurkot z-re, majd kössük össze z-t még néhány más csúccsal, $k - m$ új él behúzásával. (Így az új gráfnak k-val több éle, eggyel több csúcsa lesz. z foka $k + m$.) Jelölje P_l azt a gráfot, mely egy csúcsból és l darab rá illeszkedő hurokélből áll.

Tétel 2.0.5 *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, $1 \leq l \leq k$. Ekkor G pontosan akkor (k, l)-kritikus, ha G felépíthető P_{k-l}-ből $K(k, m, j)$ műveletek segítségével, ahol $j \leq m \leq k-1$, $m - j \leq k - l$.*

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. G pontosan akkor $(k, 0)$-kritikus, ha G felépíthető P_k-ból $K(k, m, j)$ műveletek segítségével, ahol $j \leq m \leq k$, $m - j \leq k$.

A következő tételt Frank és Szegő bizonyította [3]-ban. Ennek speciális esete ($k = 2$ mellett) a Laman-gráfok karakterizációja.

Tétel 2.0.6 *Egy $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor $(k, k + 1)$-ritka, ha előáll egyetlen csúcsból az alábbi műveletekkel:*

(1) vegyünk hozzá G-hez egy új z csúcsot és k rá illeszkedő élet úgy, hogy ne keletkezzen k párhuzamos él;

(2) csípjünk össze i élet egy új z csúccsal ($0 \leq i \leq k$) és vegyünk hozzá G-hez $k - i$ z-re illeszkedő élet úgy, hogy ne keletkezzen k párhuzamos él.

Jelölje K_2^{k-1} azt a gráfot, melynek két csúcsa és $k-1$ párhuzamos éle van ($k \geq 2$). G pontosan akkor $(k, k+1)$-kritikus, ha előáll K_2^{k-1}-ből a (2) művelet ismétlésével.

A fejezet további részében szereplő eredmények a (k, l)-kritikus gráfokra adnak karakterizációt tetszőleges $0 \leq l \leq 2k-1$ mellett. Ezen karakterizációk más jellegűek, az élek halmazára adnak meg bizonyos felbontást, amennyiben a megfelelő ritkasági feltétel teljesül.

2.1. A felbontási probléma

Nemüres élhalmazú, (k, l)-ritka gráf csak akkor létezhet, ha $0 \leq l \leq 2k-1$. $0 \leq l \leq k$ esetén *alsó tartomány*ról, $k \leq l \leq 2k-1$ esetén *felső tartomány*ról beszélünk.

Definíció 2.1.1 Map*nek nevezünk egy olyan irányított gráfot, melyben minden csúcs kifoka pontosan egy. Ha egy gráf felbontható k éldiszjunkt map uniójára, akkor* k-map*nek nevezzük.*

Egy olyan felbontást, amely l fából áll és minden csúcs pontosan k fában szerepel, lTk-felbontás*nak nevezünk. Egy olan lTk-felbontást, melyben minden részgráf legalább l egyszínű maximális részfát tartalmaz,* megfelelő lTk-felbontás*nak nevezünk.*

(k, l)-maps-and-trees*nek nevezünk egy olyan felbontást, amely k mapből és l feszítő fából áll.*

A felbontási probléma: Olyan felbontást keresünk, amely igazolja egy gráfról, hogy (k, l)-ritka.

Háromféle felbontásról lesz szó: maps-and-trees, lTk-felbontások és a színezett pebble game-felbontás.

2.2. A színezett pebble game algoritmus

Legyen adott csúcsoknak egy véges halmaza. Rögzítsük a k és l természetes számokat. Az algoritmus során egy olyan irányított H gráfot építünk, amely minden lépésben (k, l)-ritka. H minden éléhez hozzárendeljük a c_i ($i = 1, 2, ..., k$) színek valamelyikét úgy, hogy azonos csúcsból induló élek különböző színűek legyenek.

Az algoritmus elején H-nak n csúcsa van és nincs éle.

Él hozzávétele: Legyenek v és w H csúcsai, melyekre $\delta(v) + \delta(w) \leq 2k - (l+1)$. Ekkor valamelyik csúcs, pl. v kifoka kisebb, mint k. Vegyük hozzá a (v, w) élet $E(H)$-hoz, irányítsuk w felé, rendeljünk hozzá egy olyan színt, amely még nincs hozzárendelve egyik v-ből induló élhez sem.

Az irányítás javítása: Ha $\delta(v) + \delta(w) > 2k - (l+1)$, akkor az irányítást javítanunk kell, ha lehet. Ez akkor lehetséges, ha a v és w csúcsok valamelyikéből létezik út olyan u pontba, melyre $\delta(u) < k$. Egy ilyen út mentén megfordítjuk az irányítást, így továbbra is minden csúcs kifoka legfeljabb k lesz. Az útban szereplő élek színe is megváltozhat. Ha szükséges, megváltoztatjuk az él színét olyanra, amilyen színű él még nem indul ki a kezdőpontjából.

Azt mondjuk, hogy az eljárás végén kapott H irányított, színezett élű gráf egy *pebble game-gráf*. Tekintsük az egyszínű élek halmazait. Ezen partíció által megadott felbontást H *pebble game-felbontás*ának nevezzük.

Tétel 2.2.1 *Egy G gráf akkor és csak akkor (k,l)-ritka ($0 \leq l \leq 2k-1$), ha G pebble game-gráf.*

Bizonyítás: Ha G pebble game-gráf, akkor (k,l)-ritka is. Egy adott lépés után csak olyan részgráf lehetne sértő, amely az aktuális (v,w) élet tartalmazza, így elég csak ezeket vizsgálni. Mivel H-t meg tudtuk úgy irányítani, hogy minden csúcs kifoka legfeljebb k legyen és $\delta(v) + \delta(w) \leq 2k - (l+1)$, ezért a csúcsok egy tetszőleges V' halmaza az (v,w) él hozzávétele után legfeljebb $(|V'|-2)k + 2k - (l+1) + 1 = |V'|k - l$ élet feszít.

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy G nem pebble game-gráf. Vagyis van olyan él, amelyet tartalmazó összefüggőségi komponens nem irányítható meg úgy, hogy minden csúcs kifoka legfeljebb k legyen és $\delta(v) + \delta(w) \leq 2k - (l+1)$. Ez azt jelenti, hogy az adott komponensnek több, mint $2k-1$ éle van. Tehát a gráf nem (k,l)-ritka.$\square$

Megjegyzés: H minden egyszínű részgráfja $(1,0)$-ritka.

Lemma 2.2.2 *A H pebble game-gráf minden H' részgráfja tartalmaz legalább l darab egyszínű részfát. Egy c_i színű részfa egy olyan be-fenyő, melynek a gyökere olyan csúcs, amelyből nem lép ki c_i színű él, vagy kilép belőle egy ilyen él, de a másik végpontja nincs H'-ben.*

Bizonyítás: Tekintsünk egy tetszőleges $v \in V(H')$ csúcsot, amelyből nem lép ki c_i színű él, vagy ha kilép, akkor az él másik végpontja nincs H'-ben. Vegyük azon H'-beli csúcsokat, amelyekből v elérhető c_i színű élekből álló úton. Ezek egy c_i gyökerű be-fenyőt alkotnak. Mivel H pebble game-gráf, ezért 2.2.1 alapján (k,l)-ritka is. Tehát $|E(H')| \leq k|V(H') - l|$. Vagyis legalább l darab olyan csúcs van H'-ben, amely egy egyszínű fa gyökere. $\square$

Ezt alkalmazva a teljes gráfra kapjuk:

Lemma 2.2.3 *Egy pebble game konfigurációban az olyan csúcsok, melyekből nem lép ki c_i színű él mind egy-egy c_i színű be-fenyő gyökerei.*

Tétel 2.2.4 *Egy G gráf akkor és csak akkor (k, l)-ritka, ha felbontható k darab $(1, 0)$-ritka éldiszjunkt részgráfra úgy, hogy G minden részgráfja a felbontásban szereplő $(1, 0)$-ritka részgráfok közül legalább l darab részfát tartalmazzon.*

Bizonyítás: Ha G (k, l)-ritka, akkor pebble game-gráf, vagyis a megjegyzés alapján létezik felbontása $(1, 0)$-ritka éldiszjunkt részgráfokra. A 2.2.2 lemmából következik a részgráfokra vonatkozó állítás.

A másik irány bizonyításához vegyük észre, hogy ha egy adott H' részgráfban szereplő c_i színű fákból t_i darab van, akkor a c_i színű élek öszesen legfeljebb $n - t_i$ élet feszíthetnek. Ezt az összes színre szummázva azt kapjuk, hogy G (k, l)-ritka. □

2.3. A kanonikus pebble game konstrukció

Ez a pebble game algoritmus egy javított változata. Az a cél, hogy az algoritmus során minél kevesebb egyszínű kör keletkezzen.

Él hozzávétele: Válasszunk olyan színt, ha lehet, amilyen színű él még nem lép ki az él egyik végpontjából sem. Ha ilyen nincs, akkor a lehetséges színek közül válasszuk a legmagasabb sorszámút.

Irányítás javítása: Csak úgy javíthatunk az irányításon, hogy ne keletkezzen egyszínű kör.

Megjegyzés: Egyszínű kör az alábbi két esetben keletkezhet:

(M1) Van a gráfban egy c_i színű vw út, hozzáadjuk a wv élet a gráfhoz és a c_i színt rendeljük hozzá.

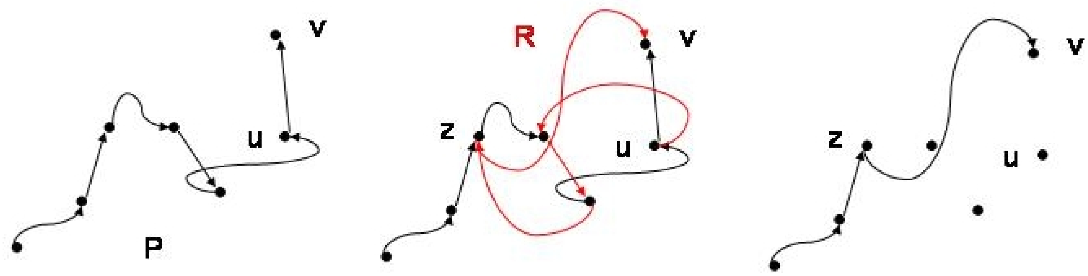
(M2) Van a gráfban egy c_i színű vw út, a vw él szerepel a gráfban és az irányítás javításakor megfordítjuk, majd a c_i színt kapja.

Lemma 2.3.1 *Legyen adott egy G gráf a pebble game konstrukciójával együtt. Az* ***(M1)*** *tipusú lépések kiküszöbölhetőek a c_i $(1 \leq i \leq l')$ színek esetében, ahol $l' = \min\{k, l\}$.*

Bizonyítás: Ha lehetséges, akkor olyan színt adunk az vw élnek, amilyen színű él se v-ből, se w-ből nem lép ki. Ha ez nem lehetséges, akkor is legalább $l + 1$ színből választhatunk. A legmagasabb sorszámút választjuk, így a legkisebb indexű l szín esetében nem fog egyszínű kör keletkezni. □

Lemma 2.3.2 *Az irányítás minden javítása, amely elvégzése után új élet tudunk hozzáadni, helyettesíthető egy olyannal, amely során nincs* **(M2)** *lépés és ugyanazon él hozzáadását eredményezi.*

Bizonyítás: Feltehető, hogy az irányítás javítása egy P út mentén történik. Tekintsük azt az élet, melynek megfordítása és c_i színűre színezése **(M2)** lépéshez vezetett. Legyen ez uv. Ekkor volt a gráfban c_i színű R uv út. Keressük meg ezen az uv úton azt a csúcsot, amelyet az eredeti P útban is benne volt és v-hez legközelebb van, legyen ez z. P-nek a z és v közötti részét helyettesítsük R-nek a z és v közötti részével.
Ezzel kiküszöböltük az adott **(M2)** lépést, hiszen az új út színezhető úgy, hogy v és z között egyetlen él színe se változzon, így egyszínű kör sem keletkezhet. □



2.1. ábra. Az első rajzon egy P javító út, a következőn pirossal jelölve az R egyszínű uv út látható. A harmadikon pedig a kettőből keletkező kanonikus javító út szerepel.

A fenti két lemmából együtt kapjuk az alábbi lemmát:

Lemma 2.3.3 *Ha G (k, l)-ritka, akkor létezik kanonikus pebble game konstrukciója.*

A következő tétel már korábban is ismert volt, Whiteley bizonyította [20]-ben.

Tétel 2.3.4 *Legyen $0 \leq l \leq k$. Egy G gráf akkor és csak akkor (k, l)-kritikus, ha G $(k - l, l)$-maps-and-trees.*

Bizonyítás: 2.2.4 alkalmazásával kapjuk, hogy ha G $(k - l, l)$-maps-and-trees, akkor (k, l)-kritikus is.

A másik irányfoz tekintsük a G (k, l)-kritikus gráf egy kanonikus pebble game konstrukcióját. Mivel G kritikus, $\sum_{e \in V(G)} \delta(e) = nk - l$. A kanonikus él hozzáadási művelet tulajdonságából következik, hogy $i = 1, 2, ..., l$ esetén van legalább egy csúcs, melyből nem lép ki c_i színű él. Tehát pontosan egy csúcs van mindegyik színhez. 2.2.3 alapján ezek mindegyike egy $(n - 1)$-csúcsú fa gyökere. Tehát megkaptuk a keresett l db feszítő fát. □

Tétel 2.3.5 *Legyen $k \leq l \leq 2k-1$. Egy G gráf akkor és csak akkor (k,l)-kritikus, ha G egy $kn-l$-élű megfelelő lTk.*

Bizonyítás: Egy lTk-felbontás szükségszerűen ritka is.

2.2.4 és 2.3.3 alapján már tudjuk, hogy ha G ritka, akkor felbontható l fára. Minden csúcsnak k fában kell szerepelnie, ha megy ki belőle c_i színű él, akkor nyilván benne van egy c_i színű fában, ha pedig nem lép ki belőle ilyen akkor, akkor egy c_i színű fa gyökere. $\square$

3. fejezet

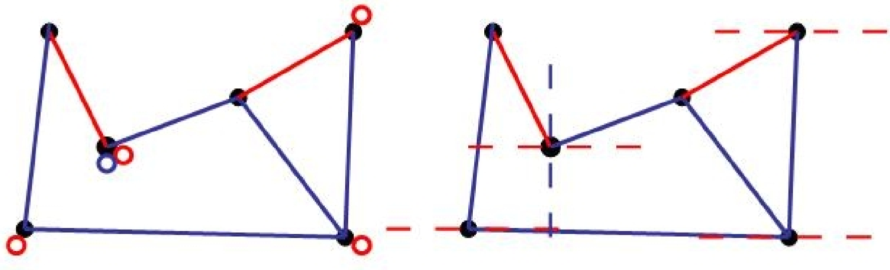
Rögzítés sínekkel

3.1. Rögzített koordináták

A síkbeli merev gráfoknak van 3 szabadsági foka, melyet az eltolások és a forgatás adnak. Ha ki szeretnénk zárni ezeket a triviális mozgásokat is, akkor használhatunk például síneket, melyek a hozzájuk tartozó csúcsok valamely koordinátáját rögzítik. Ezen kívül elegendően sok sín hozzávételével egy nem merev gráf is rögzíthető.

Tekintsünk egy síkbeli szerkezetet. Legyen a szerkezet gráfja $(2,3)$-ritka, és legyen a gráfnak $2n-k$ éle. Rögzítsük le bizonyos csúcsok x vagy y (esetleg mindkét) koordinátáit. Ezek a csúcsok csak az adott vízszintes vagy függőleges egyenes mentén mozoghatnak. (Ha mindkét koordináta rögzített, a csúcs nem mozdulhat el.) Nevezzünk *sín*nek egy olyan párt, mely egy csúcsból és egy hozzá tartozó koordinátából áll.

Egy $2n-k$ élű $(2,3)$-ritka gráfnak, mint síkbeli szerkezetnek pontosan k darab szabadsági foka van, ezek közül $k-3$ nemtriviális. A feladat az, hogy meghatározzuk síneknek egy k elemű halmazát, mely lerögzíti a szerkezetet. Ezt a feladatot nevezzük *slider-pinning problémá*nak.



3.1. ábra. A síneket színezett hurkokkal reprezentálhatjuk. A második ábra a hurkoknak megfelelő rögzített koordinátákat szemlélteti.

3.2. Algoritmus

Nevezzük *komponens*eknek a maximális merev részgráfokat G-ben. G minden éléhez egyértelműen létezik őt tartalmazó komponens. Könnyen látható, hogy két komponens csúcshalmának legfeljebb egy közös eleme lehet.

Algoritmus: Slider-pinning a merev komponensek segítségével.

Input: $2n - k$ élű G $(2, 3)$-ritka gráf.
Output: k színezett sín, amelyek rögzítik G-t.
Eljárás: Használjuk a pebble game algoritmust, hogy megtaláljuk a komponenseket. Válasszunk egy tetszőleges komponenst, ez lesz a bázis. Ezt rögzítsük egy tetszőleges él végpontjához hozzáadott három hurokkal.

Az alábbi eljárást addig folytassuk, amíg egyetlen komponenst kapunk:

Válasszunk egy tetszőleges ij élet, amely kilép a bázisból. Adjunk hozzá a j csúcshoz egy tetszőleges színű hurkot.

Válasszunk a bázisban futó tetszőleges ik élet. Vegyük hozzá G-hez a jk élet.

Az algoritmus helyességének bizonyításának az alapgondolata, hogy a bázissal szomszédos komponens egyetlen lehetséges mozgása a közös csúcs körüli elfordulás. Ha egy kilépő él végpontjának az egyik koordinátáját rögzítjük, akkor ezt az egyetlen lehetséges mozgást megszüntetjük.

Az algoritmusnak $k - 3$ fázisa van, mindegyik $O(n)$ időt igényel. Így a teljes futási idő $O(n^2)$, mivel ennyi idő kell a kezdeti komponensek megtalálásához.

4. fejezet

Lépcsősen ritka hipergráfok

Ismert eredmény, hogy egy tetszőleges hipergráf (k,l)-ritka részgráfjai matroidot alkotnak. A ritkaság fogalmát lehet általánosítani úgy, hogy az élek bizonyos monoton csökkenő részhalmazrendszerén egyre erősebb ritkasági feltételeket szabunk meg. Az ezen feltételeket teljesítő részgráfok rendszeréről is belátható, hogy matroidot alkotnak.

4.1. Lépcsősen ritka hipergráfok, mint matroidok

Definíció 4.1.1 *Legyen $H = (V, E)$ egy hipergráf. Legyen $E = E_1 \supseteq E_2 \supseteq ... \supseteq E_t$ a hiperélek egy monoton csökkenő részhalmazsorozata. Azt mondjuk, hogy az (E_i) sorozat a H-nak egy* lépcsős felbontása.

Példa: $E_i = \{e \in E | e \textit{ dimenziója legalább } i\}$ a standard lépcsős felbontás.

Rögzítsünk H-n egy lépcsős felbontást. Jelölje H_i az E_i által indukált részgráfot.

Definíció 4.1.2 *Legyen $H = (V, E)$ egy hipergráf, rögzítsünk H-n egy lépcsős felbontást. Azt mondjuk, hogy H* $(k, \mathbf{l})$-ritka, *ahol $\mathbf{l} = (l_1, l_2, ..., l_t)$ és $l_1 < l_2 < ... < l_t$, ha H_i (k, l_i)-ritka. Ha H $(k, \mathbf{l})$-ritka és (k, l_1)-kritikus, akkor H* $(k, \mathbf{l})$-kritikus.

Tétel 4.1.3 *A $(k, \mathbf{l})$-ritka hipergráfok egy matroid független halmazait alkotják. Elég nagy n-re a $(k, \mathbf{l})$-kritikus hipergráfok a matroid bázisai.*

A bizonyítás a köraxiómák ellenőrzésén alapszik. $\mathcal{M}_{k,l}$ körei az olyan n' csúcsú, $kn' - l + 1$ élű részgráfok, melyeknek minden részgráfja (k, l)-ritka. Definiáljuk rekurzívan az alábbi $\mathcal{C}$ családot: $\mathcal{C}_t$ a (k, l_t)-körök H_t-ben. $i < t$ esetén $\mathcal{C}_i$ álljon $\mathcal{C}_{i+1}$ elemeiből és H_i azon (k, l_i)-köreiből, amelyek $\mathcal{C}_{i+1}$ egyetlen elemét sem tartalmazzák. Végül $\mathcal{C} := \mathcal{C}_1$.

Példa: Tekintsük a $k = 1$, $\mathbf{l} = (0, 1)$ esetet. $\mathcal{C}_2$ az $(1, 1)$-köröket tartalmazza, melyek [11] és [16] alapján a gráfelméleti értelemben vett körök lesznek. A $(0, 1)$-körök pedig [4] alapján azok a részgráfok, melyek két körből és egy őket összekötő útból állnak. Mivel a valódi körök már $\mathcal{C}_2$-ben vannak, $\mathcal{C}_1$-ben csak azok a részgráfok szerepelnek, amelyek két hurokból és egy őket összekötő útból állnak.

Lemma 4.1.4 *Legyenek d, k és l_i olyanok, hogy $(d-1)k \leq l_i < dk$. Ekkor C_i minden eleme vagy egyetlen élből vagy csak legalább d dimenziós élekből áll.*

Bizonyítás: Ha k és l_i olyanok, mint a lemma állításában, akkor nyílván egy (k, l_i)-ritka gráfnak csak olyan éle lehet, amely legalább d dimenziós. Mivel egy (k, α)-kör minden valódi részgráfja $\alpha \geq l_i$ esetén (k, l_i)-ritka, ezért vagy csak legalább d dimenziós élekből áll a kör, vagy egyetlen élből. □

Lemma 4.1.5 *Egy H hipergráf akkor és csak akkor $(k, \mathbf{l})$-ritka, ha nem tartalmaz $\mathcal{C}$-beli részgráfot.*

Bizonyítás: Könnyen látható, hogy egy $(k, \mathbf{l})$-ritka gráf nem tartalmazhat $\mathcal{C}$-beli részgráfot, hiszen nem lehet (k, l_i)-kör H_i-ben.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy H nem ritka. Ez azt jelenti, hogy valamely i-re tartalmaz H_i-beli C kört. Két lehetőség van: ha $C \in \mathcal{C}$, kész vagyunk. Ha C nincs $\mathcal{C}$-ben, akkor van egy $C' \subset C$, hogy $C' \in \mathcal{C}$. □

Bizonyítás: (4.1.3) 4.1.5 alapján elegendő megvizsgálni, hogy $\mathcal{C}$ teljesíti-e a köraxiómákat. $\mathcal{C}$ nem tartalmazza az üres halmazt és $\mathcal{C}$ egyik eleme sem tartalmaz $\mathcal{C}$-belit.

Azt kell még belátni, hogy $C_i, C_j \in \mathcal{C}$, $y \in C_i \cap C_j$ esetén $(C_i \cup C_j) - y$ tartalmaz $\mathcal{C}$-beli elemet. Tegyük fel, hogy C_i egy (k, l_i)-kör, C_j egy (k, l_j)-kör, $j \geq i$. Legyen m_i, m_j, $m_\cup$, $m_\cap$ az élek száma C_i-ben, C_j-ben, $C_i \cup C_j$-ben és $C_i \cap C_j$-ben. Hasonlóan n_i, n_j, $n_\cup$, $n_\cap$ legyen a csúcsok száma a fenti halmazokban.

4.1.5 miatt y legalább d dimenziós, ahol $l_j < dk$, különben C_j egyetlen éle y lenne és így C_j nem lehetne $\mathcal{C}$-ben. Mivel $C_i \cap C_j \subsetneq C_j$ és ezért ritka, így $n_\cap \geq d$ és $m_\cap \leq kn_\cap - l_j$. Az élek leszámlálásával:

$$m_\cup = m_i + m_j - m_\cap \geq m_i + m_j - (kn_\cap - l_j) =$$

$$kn_i - l_i + 1 + kn_j - l_j + 1 - (kn_\cap - l_j) = kn_\cup - l_i + 2$$

Vagyis $(C_i \cup C_j) - y$ nem lehet (k, l_i)-ritka. 4.1.5 alapján ez azzal ekvivalens, hogy van benne $\mathcal{C}$-beli részgráf. □

4.2. Pebble game algoritmus hipergráfokra

Legyen $H = (V, \mathcal{E})$ egy hipergráf. Legyen H-ban legkisebb dimenziójú él dimenziója s. Legyenek $k > 0$ és $l \geq 0$ olyan egészek, melyekre $ks - l \geq 1$ Feladatunk, hogy eldöntsük, hogy H (k, l)-ritka-e.

A V csúcshalmazon az üres gráfból indulunk. Az algoritmus egyesével veszi be vagy utasítja el az éleket. Tegyük fel, hogy már m darab hiperélet bevettünk, ezek halmaza $\mathcal{E}_m = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Legyen $H_m = (V, \mathcal{E}_m)$. A következő lépésben azt vizsgáljuk, hogy az $e_{m+1} = \{u_1, \ldots, u_d\}$ élet hozzá tudjuk-e venni H_m-hez úgy, hogy (k, l)-ritka hipergráfot kapjunk.

Egy hipergráf irányítása olyan, hogy minden élnek egy feje van, a többi élre illeszkedő csúcs a töve. Egy csúcs befoka annyi, ahány élnek ő a feje.

Állítás 4.2.1 *A $H_{m+1} = (V, \mathcal{E}_m + e_{m+1})$ hipergráf pontosan akkor (k, l)-ritka, ha H_m-nek létezik olyan irályítása, melyre:*

- $\varrho(v) \leq k$ *minden* $v \in V$*-re,*
- $\sum_{j=1}^{d} \varrho(u_j) \leq dk - (l + 1)$

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy nem létezik ilyen irányítás. Az előző él hozzávételekor kapott irányításból induljunk ki. Erre igaz, hogy $\varrho(v) \leq k$ minden $v \in V$-re. Tehát az első tulajdonság teljesül, vagyis feltevésünk szerint a második tulajdonságnak sérülnie kell. Ha az $u_1, \ldots, u_d$ csúcsok valamelyikébe pl. u_i-be létezik irályított út egy olyan $x \in V$ csúcsból, melyre $\varrho(x) \leq k - 1$, akkor ezen út mentén irányítsuk át a hiperéleket úgy, hogy egy fordított irányú utat kapjunk. Vagyis az útban szereplő éleknek legyen az az új feje, amelyik csúcsnál beléptünk az él csúcshalmazába, a régi feje pedig legyen tő. Egy ilyen átirányítás elvégzésekor az út belső pontjainak befoka nem változik. Az x befoka eggyel nő, u_i befoka pedig eggyel csökken. Ezt az eljárást folytassuk addig, amíg az $u_1, \ldots, u_d$ csúcsok valamelyikébe tudunk találni ilyen javító utat valamely más legfeljebb $k - 1$-fokú csúcsból.

Mivel a második feltétel sérül, ezért az elakadás pillanatában (amikor már nincs javító út), $\sum_{j=1}^{d} \varrho(u_j) \geq dk - l$. Legyen Z azon csúcsok halmaza, melyekből eljuthatunk irányított úton az$u_1, \ldots, u_d$ csúcsok valamelyikébe. Ekkor $\varrho(x) = k$ minden $z \in Z$-re, valamint Z-be nem lép be él, így a Z-beli csúcsok befokainak összege egyenlő a Z által feszített élek számával, tehát:

$$i(Z) = \sum_{z \in Z} \varrho(z) = \sum_{j=1}^{d} \varrho(u_j) + \sum_{z \in Z - e_{m+1}} \varrho(z) \geq (dk - l) + (|Z| - d)k = |Z|k - l,$$

vagyis Z sértő halmazt alkot az e_{m+1} él hozzávétele után.

A másik irány bizonyításához tekintsünk egy irányítást, amely teljesíti mindkét feltételt. Tekintsünk egy tetszőleges $\{u_1, \ldots, u_d\} \subseteq X \subseteq V$ halmazt. Elég csak az ilyen halmazokat ellenőrizni, hiszen azok a halmazok, amelyek nem feszítik ki az e_{m+1} élet, továbbra sem sérthetik meg a ritkasági feltételt.

$$i(X) \leq \sum_{x \in X} \varrho(x) = \sum_{j=1}^{d} \varrho(u_j) + \sum_{x \in X - e_{m+1}} \varrho(x) \leq (dk - (l+1)) + (|X| - d)k = |X|k - (l+1).$$

Tehát az e_{m+1} él hozzávétele után is ritka hipergráfot kapunk. $\square$

Az algoritmus használható arra is, hogy egy H-ban megtaláljunk egy maximális rangú (k, l)-ritka részgráfot.

4.3. Pebble game algoritmus maximális méretű lépcsősen ritka részgráf megtalálására

Legyen $H = (V, E)$ egy hipergráf, adott rajta egy $E = E_1 \supseteq E_2 \supseteq ... \supseteq E_t$ lépcsős felbontás és egy megfelelő $(k, \mathbf{l})$ vektor. Feladat: keressünk maximális méretű $(k, \mathbf{l})$-ritka részgráfot. Ehhez a pebble game algoritmust fogjuk használni.

Az algoritmus indulásakor H-nak n csúcsa van és nincs éle.

0. lépés: Ha már adott egy $H' = (V', E')$ $(k, \mathbf{l})$-ritka részgráf, akkor válasszunk egy tetszőleges $e \in E$ élet.

i. lépés: Nézzük meg, hogy e benne van-e E_i-ben. Ha nincs benne, akkor e-t vegyük hozzá H' élhalmazához. Ha $e \in E_i$, akkor a (k, l_i) pebble game algoritmussal leellenőrizzük, hogy hozzávehető-e E'-höz úgy, hogy az $E' \cap E_i$ által indukált részgráf (k, l_i)-ritka legyen. Ha igen, menjünk az (i+1)-edik lépésre. Ha nem, utasítsuk el e-t.

Az algoritmus helyessége: Az algoritmus megtalál egy tartalmazásra nézve maximális $(k, \mathbf{l})$-ritka részgráfot, ami a 4.1.3 alapján maximális méretű is lesz.

5. fejezet

Térfogat-merevség

5.1. Az általános eset ismertetése

Térfogat-szerkezetnek nevezünk $\mathbb{R}^d$-ben adott n pontot és a rajtuk kijelölt m darab d-dimenziós szimplexet. A síkbeli esetben ($d = 2$) terület-szerkezetről beszélünk.

A szerkezet pontjainak összes olyan mozgása megengedett, amely megőrzi a kijelölt szimplexek térfogatát. A szerkezet térfogat-merev (illetve a síkban terület-merev), ha a megengedett mozgások a pontjain értelmezett összes d-dimenziós szimplex térfogatát megtartják. Ebben az esetben csak a triviális térfogat-tartó transzformációk lehetségesek.

Whiteley [19]-ban fogalmazta meg azt a sejtést, hogy egy terület-szerkezet pontosan akkor minimálisan terület-merev, ha a hozzárendelt 3-uniform hipergráf $(2, 5)$-kritikus. Streinu és Theran ennek a sejtésnek a d-dimenziós általánosítását szerették volna bizonyítani [13]-ban.

Sejtés:[13] Egy d-dimenziós térfogat-szerkezet pontosan akkor minimálisan térfogat-merev, ha a csúcsok és a kijelölt szimplexek által meghatározott $(d+1)$-uniform hipergráf $(d, d^2 + d - 1)$-kritikus.

Ez a sejtés [13]-ban, mint tétel szerepel. A bizonyítás azonban hibásnak bizonyult, így a kérdés továbbra is nyitott. A 5.2.1 és 5.2.2 fejezetekben szereplő definíciók és lemmák [13]-ból származnak.

5.2. A d=2 eset

5.2.1. Terület-merevség

Legyen G egy n csúcsú 3-gráf, amely egy $\mathbf{p}$ ponthalmazként be van ágyazva a síkba, jelöljük ezt $G(\mathbf{p})$-vel. Egy $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ él beágyazása egy $\triangle(p_{e_1}, p_{e_2}, p_{e_3})$ háromszög, melyet jelöljünk $e(\mathbf{p})$-vel. Legyen $\mathbf{p}_i = (a_i, b_i)$.

Egy (G, vol) *absztrakt terület-szerkezet* egy G 3-gráf, melynek minden e éléhez egy nemnulla, $vol(e)$ előjeles területet rendelünk hozzá.

Ha $vol(e(\mathbf{p})) = vol(e)$ minden $e \in E$-re, akkor azt mondjuk, hogy $G(\mathbf{p})$ az absztrakt terület-szerkezet egy *realizáció*ja.

A $G(\mathbf{p})$ terület-szerkezet $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}$ konfigurációs tere az $\mathbb{R}$ feletti realizációinak halmaza, vagyis:

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2n} : G(\mathbf{q}) \ \textit{a} \ (G, vol) \ \textit{realizációja}\}$$

A $\triangle(p_{e_i}, p_{e_j}, p_{e_k})$ háromszög területe:

$$vol(\triangle(p_{e_i}, p_{e_j}, p_{e_k})) = \frac{1}{2} det \begin{pmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a_i b_j + a_j b_k + a_k b_j - a_k b_j - a_j b_i - a_i b_k)$$

Alkalmazzuk minden p_i pontra az $\mathbf{A}\mathbf{p}_i + \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \in SL(d)$ affin transzformációt. Ezzel egy $\mathbf{q} = (\mathbf{A}\mathbf{p}_1 + \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{p}_n + \mathbf{b})$ vektort kapunk, amely a fenti területre vonatkozó egyenlőségeket teljesíti. Itt $\mathbf{A}$ egy 1 determinánsú mátrix, amely megtartja a térfogatot, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ egy eltolásnak felel meg.

A triviális terület-tartó transzformációk egy $2^2 + 2 - 1 = 5$ dimenziójú Γ csoportot alkotnak. Tekintsük a $\mathcal{C}/\Gamma$ teret. Definiáljuk a $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\Gamma$ projekciót.

Definíció 5.2.1 *[13] Egy terület-szerkezet térfogat-merev, ha a $\mathcal{C}/\Gamma$ hányados-topológia $\pi(\mathbf{p})$ pontja izolált pont.*

A terület-merev szerkezetek nem merevek a szokásos értelemben, mindig van térfogattartó deformációjuk, melyeket Γ azon elemei indukálnak, melyek nem izometriák.

5.1. ábra. Példa egy terület-merev és egy nem terület-merev szerkezetre. A baloldali példában a három kisebb, vonalkázott háromszög tartozik a szerkezethez. Bárhogy mozgatjuk a pontokat úgy, hogy a kijelölt háromszögek területei megmaradjanak. a nagy háromszög területe is állandó marad, hiszen az a kis háromszögek területeinek összege. A jobboldali példáról pedig rögtön látszik, hogy nem lehet terület-merev.

5.2.2. Infinitezimális terület-merevség

Legyen $G(\mathbf{p})$ egy terület-szerkezet és $\mathbf{u}(t)$ egy területtartó deformáció. Minden $e = ijk \in E$ élre $vol(\triangle(\mathbf{p}_i(t)\mathbf{p}_j(t)\mathbf{p}_k(t))) = const$. Feltehetjük, hogy $\mathbf{u}(t)$ differenciálható. Deriválással az alábbi egyenlőséget kapjuk:

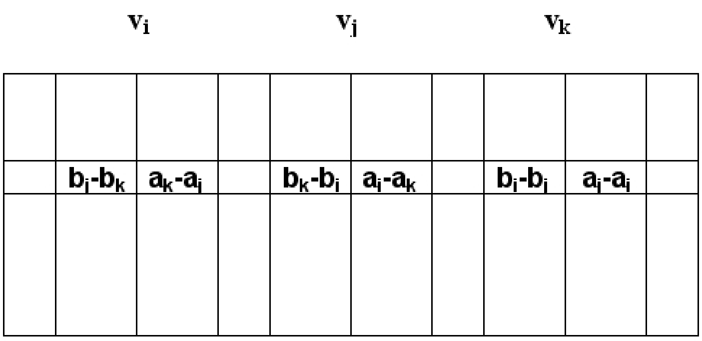
$$\langle(\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t))^{\perp}, \mathbf{p}'_k(t)\rangle + \langle(\mathbf{p}_k(t) - \mathbf{p}_i(t))^{\perp}, \mathbf{p}'_j(t)\rangle + \langle(\mathbf{p}_j(t) - \mathbf{p}_k(t))^{\perp}, \mathbf{p}'_i(t)\rangle = 0$$

Egy olyan $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2n}$ vektort, amely kielégíti a

$$\langle(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)^{\perp}, \mathbf{v}_k\rangle + \langle(\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_i)^{\perp}, \mathbf{v}_j\rangle + \langle(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_k)^{\perp}, \mathbf{v}_i\rangle = 0$$

egyenlőséget minden $e = ijk \in E$ élre, a $G(\mathbf{p})$ egy *infinitezimális mozgás*ának nevezzük.

Ezen feltételeket összegyűjtve definiálhatjuk az $\mathbf{M}(G(\mathbf{p}))$ *terület-merevségi mátrix*ot. Ez egy $m \times 2n$-es mátrix, melyben minden élhez egy sor és minden csúcshoz két oszlop tartozik, egyik az x a másik az y koordinátához. Azon helyek kivételével, melyek az él pontjainak felelnek meg, nullák állnak. A mátrix szerkezetét a 5.2 ábra szemlélteti.



5.2. ábra. A terület-merevségi mátrix $v_iv_jv_k$ élnek megfelelő sora.

Az alábbi lineárisan független vektorok mind merőlegesek G terület-merevségi mátrixának sorterére:

$$(1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0)$$

$$(0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$$

$$(b_1, 0, b_2, 0, \dots, b_n, 0)$$

$$(0, a_1, 0, a_2, \dots, 0, a_n)$$

$$(-a_1, b_1, -a_2, b_2, \dots, -a_n, b_n)$$

Így $\mathbf{M}(G(p))$ rangja nem lehet nagyobb, mint $2n - 5$.

Definíció 5.2.2 *[13] Egy $G(\mathbf{p})$ terület-szerkezet* infinitezimálisan terület-merev*, ha az $\mathbf{M}(G(\mathbf{p}))$ terület-merevségi mátrixának a rangja $2n - 5$.*

Lemma 5.2.3 *[13] Legyen $G(\mathbf{p})$ egy terület-szerkezet. Ha $G(\mathbf{p})$ infinitezimálisan terület-merev, akkor terület-merev.*

Egy $G(\mathbf{p})$ terület-szerkezetet *generikus*nak nevezünk, ha $\mathbf{M}(G(\mathbf{p}))$ rangja maximális az összes lehetséges $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2n}$ vektor közül.

Az $\mathbf{M}(G)$ generikus terület-merevségi mátrix ugyanolyan alakú, mint $\mathbf{M}(G(\mathbf{p}))$, csak itt változók szerepelnek a meghatározott értékek helyett.

Definíció 5.2.4 *[13] Egy G gráf* generikusan terület-merev*, ha az $\mathbf{M}(G)$ generikus merevségi mátrixának létezik olyan $(2n-5) \times (2n-5)$-ös részmátrixa, melynek determinánsa nemnulla.*

Lemma 5.2.5 *[13] Egy $G(\mathbf{p})$ generikus terület-szerkezet pontosan akkor terület-merev, ha infinitezimálisan terület-merev.*

5.2.3. Egy megoldott speciális eset

Tekintsük az alábbi módon definiált 3-uniform hipergráfot: legyen adott egy Δ háromszög, melynek belsejében felveszünk néhány csúcsot és ezek között behúzunk annyi élet, hogy Δ egy háromszögelését kapjuk. Így kapunk egy $G = (V_G, E_G)$ síkgráfot. Jelölje F_G G lapjainak halmazát. Legyen a $H = (V_H, E_H)$ hipergráf a következő: $V_H = V_E$, a hiperélek E_H halmaza legyen a háromszögelésben szereplő háromszögek csúcshalmazainak halmaza.

Az Euler-formula alapján ki tudjuk számolni a háromszögek, vagyis a hipergráf éleinek számát:

$$|V_G| - |E_G| + |F_G| = 2$$

G-ben minden lap háromszög, így az alábbi összefüggés áll fenn: $3|F_G| = 2|E_G|$. Ezt beírva és átrendezve kapjuk, hogy $|F_G| = 2|V_G| - 4$. Mivel a külső háromszög nem alkot hiperélet, ezért a hiperélek száma ennél eggyel kevesebb, vagyis

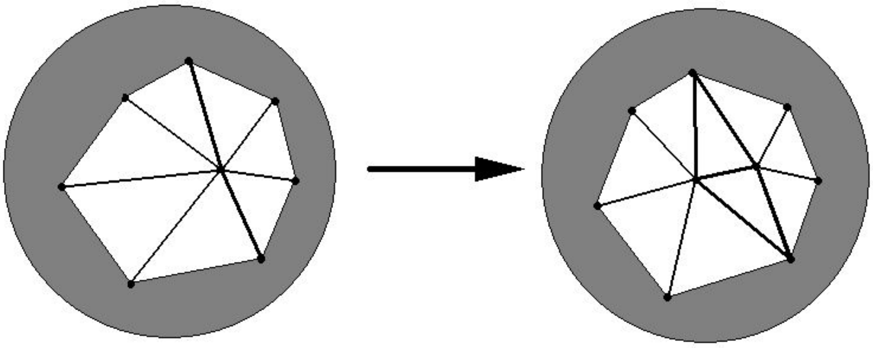
$$|E_H| = |F_G| - 1 = 2|V_H| - 5$$

Hasonló igaz V_G minden V'_G részhalmazára és az általa indukált $H' = (V'_H, E'_H)$ hipergráfra. (A G gráf V'_G által feszített rászgráfja legyen $G = (V_G, E_G)$, melynek lapjainak halmaza F'_G.) Itt csak annyit tudunk mondani, hogy minden lapot legalább három él határol, vagyis $3|F_{G'}| \leq 2|E_{G'}|$. Ebből kapjuk, hogy

$$|E_{H'}| \leq |F_{G'}| - 1 \leq 2|V_{H'}| - 5.$$

Vagyis a háromszögelés hipergráfja $(2,5)$-kritikus.

Vegyük Δ egy háromszögelését. Egy tetszőleges u csúcsot és két belőle induló uv_1 és uv_2 élet duplázzunk meg. Legyen a két új csúcs u_1 és u_2, mindkettőt kössük össze v_1-gyel és v_2-vel, húzzuk be az u_1u_2 élet. u többi szomszédját kössük össze vagy u_1-gyel vagy u_2-vel úgy, hogy síkgráfot kapjunk. Így Δ egy újabb háromszögelését kapjuk, melyben eggyel több belső pont és kettővel több háromszög van, lásd 5.3. Vagyis, ha az ebből kapott hipergráfot $H^+ = (V_H^+, E_H^+)$-val jelöljük, akkor $V_H^+ = V_H + 1$ és $E_H^+ = E_H + 2$ teljesül.



5.3. ábra. A pontszéthúzás művelet.

Lemma 5.2.6 *[19] A fent leírt pontszéthúzás művelet ismétlésével Δ minden háromszögelése megkapható.*

Bizonyítás: Alkalmazzunk csúcsszám szerinti indukciót. $n = 3$-ra, vagyis, amikor nincs pont Δ belsejében, teljesül az állítás.

Legyen $|V| = n + 1$ és tegyük fel, hogy $|V| \leq n$ esetén már tudjuk, hogy igaz az állítás. Tudjuk, hogy minden síkgráfnak létezik egy legfeljebb ötödfokú csúcsa. A minimális fokszám szerint három esetet különböztetünk meg, hiszen a legkisebb fok csak akkor lehet kettő, ha egy háromszögből áll a háromszögelés.

Ha létezik $w \in V$, hogy $d(w) = 3$ és w szomszédjai x_1, x_2 és x_3, akkor húzzuk össze a wx_1 élet. A keletkező párhuzamos élekből egy-egy példányt hagyjunk meg. Így Δ egy n-csúcsú háromszögelését kapjuk. Az indukciós feltevés szerint ez megkapható pontszéthúzásokkal. A wx_1 él összehúzása és a párhuzamos élek törlése pedig annak a pontszéthúzásnak az inverze, amely az x_1 csúcsot és az x_1x_2 és x_1x_3 éleket duplázza meg. Vagyis az eredeti háromszögelés is megkapható pontszéthúzásokkal.

Ha a legkisebb fokú csúcsra $d(w) = 4$ teljesül és a szomszédjai x_1, x_2, x_3 és x_4, akkor a wx_1 élet összehúzva és a párhuzamos éleket törölve szintén egy n-csúcsú háromszögelést kapunk. Ugyanezt az eljárást alkalmazva az ötödfokú esetben is egy n-csúcsú háromszögelés lesz az eredmény. Mindkét esetben az indukciós feltevést használva a harmadfokú esetnél leírt indoklással kaphatjuk meg a keresett műveletet, amely az él összehúzásának inverz művelete lesz. □

Lemma 5.2.7 *[12] A pontszéthúzás művelet kettővel növeli a terület-merevségi mátrix rangját.*

Bizonyítás: Legyen u az a csúcs, amit széthúzunk így egy új u_1 csúcs keletkezik. Jelölje v_1 és v_2 azokat a csúcsokat, melyekre a két új él illeszkedik, vagyis egy új uu_1v_1 és egy uu_1v_2 él keletkezik. A pontszéthúzással kapott gráfot jelölje G'. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{M}(G'(\mathbf{p}))$ első két sora az uu_1v_1 és az uu_1v_2 éleknek, az első négy oszlopa az u és u_1 csúcsoknak felel meg. Elég azt belátni, hogy $\mathbf{M}(G'(\mathbf{p}))$ teljesrangú, hiszen ebből már következik a terület-merevség. Ehhez legyenek az új u_1 csúcs koordinátái azonosak az u koordinátáival, a többi pont koordinátáját ne változtassuk.

Tegyük fel indirekt, hogy az állítás hamis, vagyis létezik olyan nemtriviális lineáris kombináció, melyre

$$\sum_{i=1}^{2n-5} \lambda_i e_i = 0,$$

ahol e_i jelöli $\mathbf{M}(G'(\mathbf{p}))$ i-edik sorát. Legyen $\mathbf{M}'$ az a mátrix, melyet $\mathbf{M}(G'(\mathbf{p}))$-ből kapunk úgy, hogy az első négy oszlopát kitöröljük és helyette betesszük azt a két oszlopot, mely $\mathbf{M}(G'(\mathbf{p}))$ első és harmadik illetve második és negyedik oszlopának az összege. Ezen mátrix sorait jelöljük e_i'-vel. $\mathbf{M}'$ első két sora nulla, ezt a két sort elhagyva pedig $\mathbf{M}(G(\mathbf{p}))$-t kapjuk. $\mathbf{M}(G'(\mathbf{p}))$ soraira felírva a lineáris kombinációt:

$$\sum_{i=1}^{2n-5} \lambda_i e_i' = \sum_{i=3}^{2n-5} \lambda_i e_i' = 0,$$

vagyis $\mathbf{M}(G(\mathbf{p}))$ sorainak egy olyan lineáris kombinációját kapjuk, amely a nullvektort adja. Mivel feltevésünk szerint $\mathbf{M}(G(\mathbf{p}))$ sorai függetlenek, $\lambda_i = 0$, ha $i \geq 3$. Vagyis $\mathbf{M}(G'(\mathbf{p}))$ két első sora egymás konstansszorosa. Ez viszont azt jelenti, hogy az u, v_1, v_2 csúcsok kollineárisak, ami generikus esetben nem fordulhat elő. □

A fentiekből már következik az alábbi tétel.

Tétel 5.2.8 *[19] Generikus esetben egy háromszög háromszögelése terület-merev.*

Ez a megoldott speciális eset alapozza meg az alábbi sejtést:

Sejtés: Egy $G(\mathbf{p})$ generikus terület-szerkezet pontosan akkor terület-merev, ha a $(2, 5)$-kritikus.

6. fejezet

A (2,5)-kritikus 3-uniform hipergráfok konstruktív karakterizációja

A Bevezetésben és az 1. fejezetben szerepelt néhány példa ritka gráfok konstruktív karakterizációjára. Ebben a fejezetben azt a kérdést vizsgáljuk, hogy adható-e hasonló karakterizáció uniform ritka hipergráfok esetén.

Az alábbi műveletek bizonyos értelemben a Henneberg-féle felépítést általánosítják.

Legyen $d(v) = k$. Legyen a v csúcson a *k-adfokú leemelés* művelet $2 \leq k \leq 5$ esetén a következő: v-t és a rá illeszkedő éleket elhagyjuk, a $\Gamma(v)$ halmazon felveszünk $k-2$ darab 3-élet. (Itt $\Gamma(v)$ a v csúcs szomszédjainak halmazát jelöli.)

Ezzel ellentétes művelet a *k-adfokú kiterjesztés* $2 \leq k \leq 5$ mellett. Válasszunk ki $k-2$ darab 3-élet E-ből, legyenek ezek $e_1, \ldots, e_{k-2}$. (Másodfokú kiterjesztés esetén nem kell élet kiválasztani.) Jelölje az e_i élek csúcsainak halmazát S. Vegyünk fel egy új v csúcsot és k darab különböző v-re illeszkedő $f_1, \ldots, f_k$ 3-élet. Jelölje az új élek által feszített csúcsok halmazát T. Legyenek az új élek olyanok, hogy $S \subseteq T$ teljesüljön. Legyen $G' = (V, E')$, ahol $E' = E \setminus \{e_1, \ldots, e_{k-2}\}$. Nevezzünk egy kiterjesztést *megengedett*nek, ha teljesíti az alábbi tulajdonságokat:

- $k \geq 4$ esetén tetszőleges három f_i, f_j, f_k élre teljesül, hogy minden olyan $A \subseteq E'$-re, melyre $A+v$ kifeszíti az f_i, f_j, f_k éleket, A legfeljebb $2|A|-6$ élet feszít G'-ben;
- $k = 5$ esetén tetszőleges négy f_i, f_j, f_k, f_l élre teljesül, hogy minden olyan $B \subseteq E'$-re, melyre $B + v$ kifeszíti az f_i, f_j, f_k, f_l éleket, B legfeljebb $2|B| - 7$ élet feszít G'-ben.

Ezek a feltételek szükségesek ahhoz, hogy egy kiterjesztés megőrizze a ritkaságot. Ha ugyanis valamely $X \subseteq V$ halmaz $2|A|-5$ élet feszít G'-ben és $A+v$ kifeszíti az f_i, f_j, f_k

élek mindegyikét, akkor az $A + v$ halmaz megsérti a ritkasági feltételt, ugyanis $2|A| - 5 + 3 = 2|A + v| - 4$ darab élet feszít. Másod- és harmadfokú kiterjesztés esetén minden kiterjesztés megengedett.

Tétel 6.0.9 *Egy $H = (V, E)$ 3-uniform hipergráf pontosan akkor $(2, 5)$-kritikus, ha előáll három csúcsból és egy rájuk illeszkedő 3-élből megengedett k-adfokú kiterjesztésekkel, ahol $2 \leq k \leq 5$.*

Legyen a $H = (V, E)$ egy 3-uniform $(2, 5)$-kritikus hipergráf. Jelölje $i(X)$ az $X \subseteq V$ csúcshalmaz által feszített hiperélek számát.

Állítás 6.0.10 *Az $i(X)$ függvény szupermoduláris.*

Bizonyítás: Jelölje $d(X, Y)$ az X és Y csúcshalmazok között futó hiperélek számát. Az $x_1x_2x_3$ élet akkor számítjuk bele $d(X, Y)$-ba, ha $x_1, x_2, x_3 \in X \cup Y$, és valamely $i \in \{1, 2, 3\}$-ra $x_i \in X \setminus Y$ valamint létezik $j \in \{1, 2, 3\}$, hogy $x_j \in Y \setminus X$. A hiperélek elhelyezkedésének vizsgálatával belátható, hogy két tetszőleges $X, Y \in V$ halmazra:

$$i(X) + i(Y) + d(X, Y) = i(X \cup Y) + i(X \cap Y)$$

Ennek az egyenlőségnek a szupermodularitás közvetlen következménye. □

Lemma 6.0.11 *Legyenek az X és Y olyan kritikus halmazok, melyekre $|X \cap Y| \geq 3$. Ekkor $X \cup Y$ és $X \cap Y$ is kritikus.*

Bizonyítás: A kritikus halmazok definícióját valamint a szupermodularitást használva:

$$2|X| - 5 + 2|Y| - 5 = i(X) + i(Y) \leq i(X \cup Y) + i(X \cap Y) \leq$$

$$\leq 2|X \cup Y| - 5 + 2|X \cap Y| - 5 = 2|X| - 5 + 2|Y| - 5.$$

Vagyis mindenhol egyenlőség áll, azaz $X \cup Y$ és $X \cap Y$ is kritikusak. □

Következmény 6.0.12 *Két maximális kritikus halmaz metszete legfeljebb kételemű.*

Lemma 6.0.13 *Legyenek az X_1, X_2, X_3, X_4 halmazok és a v_1, v_2, v_3, v_4 pontok olyanok, hogy:*

- *$v_i \notin X_i$ minden $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ esetén;*
- *$v_{j+1}, v_{j+2}, v_{j+3} \in X_j$ (mod 4) minden $j \in \{1, 2, 3, 4\}$-re;*
- *$|X_i \cap X_j| = 2$ minden $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ esetén.*

Ekkor létezik $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, hogy X_k nem kritikus.

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy mind a négy halmaz kritikus. Ekkor:

$$\sum_1^4 2|X_j| - 20 = \sum_1^4 (2|X_j| - 5) = \sum_1^4 i(X_j) \leq$$

$$\leq i(\bigcup_1^4 X_j) \leq 2|\bigcup_1^4 X_j| - 5 = 2(\sum_1^4 |X_j| - 8) - 5 = \sum_1^4 2|X_j| - 21,$$

vagyis ellentmondáshoz jutunk.

Az utolsó előtti egyenlőség abból következik, hogy v_i pontok mindegyikét háromszor számoljuk a szummában. □

Állítás 6.0.14 *Minden* $(2,5)$*-ritka 3-uniform hipergráfnak létezik legfeljebb ötödfokú csúcsa.*

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy $d(v) \geq 6$ minden $v \in V$ esetén. Ekkor

$$|E| \geq \frac{6n}{3} = 2n$$

lenne, ami ellentmond annak, hogy a gráf $(2,5)$-ritka. □

Megjegyzés: Egy $(2,5)$-kritikus 3-uniform hipergráf minden csúcsa legalább másodfokú.

Nevezzük a v_1, v_2, v_3, v_4 csúcsokat a v-re nézve *általános helyzetű*nek, ha nincs olyan $X \subseteq V \setminus \{v\}$ kritikus halmaz, amelyre $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subseteq X$.

Állítás 6.0.15 $d(v) = 3 + l$*,* $0 \leq l \leq 2$ *és* $|\Gamma(v)| \geq 4$ *esetén létezik négy* v*-re nézve általános helyzetű pont* $\Gamma(v)$*-ben. Valamint ha már leemeltünk* $\leq l$ *élet, akkor még mindig létezik négy általános helyzetű csúcs* $\Gamma(v)$*-ben.*

Bizonyítás: $\leq l$ él leemelése után nem létezik olyan $X \subseteq V - v$ kritikus halmaz, melyre $\Gamma(v) \subseteq X$, hiszen ekkor $X \cup \{v\}$ megsértené a ritkasági feltételt.

Ha nem létezik olyan kritikus halmaz, amely $\Gamma(v)$ legalább négy elemét tartalmazza, akkor az állítás igaz. Ha létezik olyan K maximális kritikus, melyre $|\Gamma(v) \cap K| \geq 4$, akkor tekintsük az alábbi csúcsokat: $v_1, v_2, v_3 \in \Gamma(v) \cap K$ és $v_4 \in \Gamma(v) \setminus K$. Ekkor a $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ nem lehet benne egy kritikus halmazban K maximalitása miatt. □

Lemma 6.0.16 *Legyen* v *a* $H = (V,E)$ *3-uniform* $(2,5)$*-kritikus hipergráf egy olyan csúcsa, melyre* $k = d(v) \leq 5$*. Ekkor létezik* v*-nél olyan* k*-adfokú leemelés, hogy az eredményül kapott* $H' = (V', E')$ *hipergráf is* $(2,5)$*-kritikus.*

Bizonyítás: Amennyiben $d(v) = 2$, a v-re illeszkedő két él elhagyása után $(2, 5)$-ritka gráfot kapunk, az élek száma kettővel, a csúcsok száma eggyel csökkent, így H' kritikus is lesz.

Ha $d(v) = 3$ és $|\Gamma(v)| = 3$, csak akkor nem tudunk leemelni, ha $\Gamma(v) \subseteq K$ valamely $K \subseteq V \setminus \{v\}$ kritikus halmazra. Ez viszont nem lehet, mert így $K \cup \{v\}$ sértő halmazt alkotnak V-ben.

Az összes többi esetben alkalmazhatjuk a 6.0.15 állítást. Tehát létezik négy általános helyzetű pont. Ezek közül akkor nem tudunk egyik hármasra sem leemelni, ha mindegyik hármas benne van egy (maximális) kritikus halmazban. Ez a 6.0.13 lemma szerint nem lehetséges. Tehát egy élet le tudunk emelni. Ezzel a $d(v) = 3$ eset kész.

$d(v) \geq 4$ esetén ezután is létezik négy általános helyzetű pont 6.0.15 miatt. Ezek közül valamely hármasra le tudunk emelni egy élet, az indoklás a fentivel azonos. Ezzel $d(v) = 4$ is kész.

A $d(v) = 5$ esetben két leemelt él megtalálása után is létezik négy általános helyzetű pont szintén 6.0.15 miatt, amelyek közül valamelyik háromra le tudunk emelni egy újabb élet. □

Bizonyítás: (6.0.9) Könnyen látható, hogy ezek a műveletek $(2, 5)$-kritikus hipergráfot eredményeznek. Ennek ellenőrzésére elég olyan csúcshalmazokat megvizsgálni, melyek tartalmazzák az új v pontot, hiszen a többi halmaz nem feszít több élet, mint az eredeti gráfban. Legyen $H_1 = (V, E)$ egy $(2, 5)$-kritikus 3-uniform hipergráf, $H_2 = (V \cup \{v\}, E')$ az új, a fenti műveletek egyikével kapott hipergráf. Legyen $X \subseteq V$, vizsgáljuk az $Y = X \cup \{v\}$ halmazt.

$d_Y(v) \leq 2$ esetén Y nyílván nem sértheti meg a ritkasági feltételt.

Ha $d_Y(v) = 3$, akkor harmadfokú kiterjesztés esetén

$$i(Y) = i(X) + 3 - 1 \leq 2|X| - 5 + 2 = 2|Y| - 5,$$

míg negyed- és ötödfokú esetben a megengedettség miatt

$$i(Y) = i(X) + 3 \leq 2|X| - 6 + 3 = 2|Y| - 5.$$

Ha $d_Y(v) = 4$, akkor negyedfokú kiterjesztés esetén

$$i(Y) = i(X) + 4 - 2 \leq 2|X| - 5 + 2 = 2|Y| - 5,$$

ötödfokú kiterjesztésnél a megengedettség miatt

$$i(Y) = i(X) + 4 \leq 2|X| - 7 + 4 = 2|Y| - 5.$$

Végül $d_Y(v) = 5$ esetén

$$i(Y) = i(X) + 5 - 3 \leq 2|X| - 5 + 2 = 2|Y| - 5.$$

A másik irányhoz azt kell látni, hogy tetszőleges $(2,5)$-kritikus 3-uniform hipergráfnak létezik ilyen felépítése. A 6.0.23 lemmából következik, hogy létezik leemeléseknek egy sorozata, melynek megfordítása megad egy ilyen konstrukciót. □

Állítás 6.0.17 *A fenti karakterizáció jó abban az értelemben, hogy igazolja a probléma NP-beliségét.*

Bizonyítás: Egy kiterjesztés pontosan akkor megengedett, ha $(2,5)$-ritka hipergráfot eredményez. A ritkaság eldöntésére pedig létezik polinomiális algoritmus, lásd [14], amely így annak eldöntésére is használható, hogy a kiterjesztés megengedett-e. □

Megjegyzés:A leemelés egy másik módszerrel is bizonyítható, ez azt használja, hogy egy tetszőleges hipergrág $(2,5)$-ritka rész-hipergráfjai matroidot alkotnak, lásd [18].A matroid alaphalmaza az élek halmaza, a független halmazok a $(2,5)$-ritka rész-hipergráfok élhalmazai.

Válasszunk egy tetszőleges v csúcsot, mely legfeljebb ötödfokú. Jelölje v szomszédjainak halmazát N, az ezen értelmezett teljes 3-uniform hipergráfot pedig K_N^3. Legyen $H_1 = H - v + K_N^3$ és $H_2 = H + K_N^3$.

Ha $d(v) = 2$, akkor v elhagyásával készen vagyunk. Legyen $d(v) = 2 + k$, ahol $1 \leq k \leq 3$. Ha $r(H_1) = r(H) - 3$, akkor $H - v$ kiegészíthető K_N^3-beli élekkel egy $r(H) - 2$ rangú $(2,5)$-ritka hipergráffá. Tegyük fel indirekt, hogy $r(H_1) \leq r(H) - 3$. Legyen B_N egy kritikus hipergráf (vagyis bázis) az N csúcshalmazon. Ezt egészítsük ki egy B bázissá a H_2 alaphalmazon. Mivel $H_2[B]$ ritka és az N halmazon kritikus, legfeljebb két éle illeszkedik v-re. Ezért $r(H_2) \leq r(H_1) + 2$, ebből $r(H_1) \geq r(H_2) - 2 \geq r(H) - 2$, ami ellentmond az indirekt feltevésnek.

6.0.4. Alkalmazások

Laman-gráfok

Henneberg tételére adható a karakterizáció segítségével egy másik bizonyítás. Itt csak a harmadfokú leemelés létezését szeretnénk belátni. Ehhez egy 3-uniform segédhipergráfot készítünk.

Legyen adott $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf. A $H = (V + u, E')$ hipergráf legyen az alábbi:

$$uv_iv_j \in E' \Leftrightarrow v_iv_j \in E,$$

vagyis H minden hiperéle u-ra illeszkedik.

Állítás 6.0.18 *G pontosan akkor $(2,3)$-ritka, ha H $(2,5)$-ritka. Illetve egy $X \subseteq V$ pontosan akkor kritikus G-ben, ha $X + u$ kritikus H-ban.*

Bizonyítás: H-nak csak azon csúcshalmazai feszíthetnek élet, melyek tartalmazzák u-t. Így elég az ilyeneket ellenőrizni. Természetes módon megfeleltethetjük egymásnak G részgráfjait és H u-t tartalmazó részgráfjait. Jelölje $i_G(X)$ valamint $i_H(X)$ az $X \subseteq V$ által G-ben illetve H-ban feszített (hiper)élek számát.

$$2|X + u| - (k_X + 2) = 2|X| - k_X = i_G(X) = i_H(X + u)$$

teljesül minden $X \subseteq V$ halmazra. Vagyis egy halmazra pontosan akkor igaz az egyik tulajdonság, ha a másik is igaz rá. $\square$

Tehát egy Laman-gráfból a fenti eljárással egy $(2, 5)$ kritikus 3-uniform hipergráfot kapunk. Azt tudjuk, hogy ha G Laman-gráf, akkor van legfeljebb harmadfokú csúcsa, így H-nak is van. A 6.0.23 lemmából tudjuk, hogy egy harmadfokú csúcsnál H-ban létezik leemelés.

Legyen $d_H(v) = 3$, $\Gamma_H(v) = \{v_1, v_2, v_3, u\}$. Ha létezik leemelés valamely uv_iv_j, $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$ pontra, akkor készen vagyunk, hiszen 6.0.18 alapján egy G' olyan Laman-gráfot kapunk, amelyet a (B) művelet inverze eredményez. Így feltehető, hogy csak a $v_1v_2v_3$ pontokra tudunk leemelni, vagyis mindhárom v_i, v_j, u hármas része valamely kritikus halmaznak $H - v$-ben.

Lemma 6.0.19 *Legyenek X, Y, Z kritikus halmazok a H 3-uniform hipergráfban. Ha $|X \cap Y| = |Y \cap Z| = |Z \cap X| = 2$ és $|X \cap Y \cap Z| = 1$, akkor $X \cup Y \cup Z$ is kritikus.*

Bizonyítás: Jelölje $|X| = n_1$, $|Y| = n_2$, $|Z| = n_3$ valamint $|X \cup Y| = |Y \cup Z| = |Z \cup X| = n$. Ekkor teljesül, hogy $n_1 + n_2 + n_3 = n + 5$.

$$2n - 5 \geq i(X \cup Y \cup Z) \geq i(X) + i(Y) + i(Z) = \sum_{i=1}^{3}(2n_i - 5) =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{3} 2n_i - 15 = 2(n + 5) - 15 = 2n - 5$$

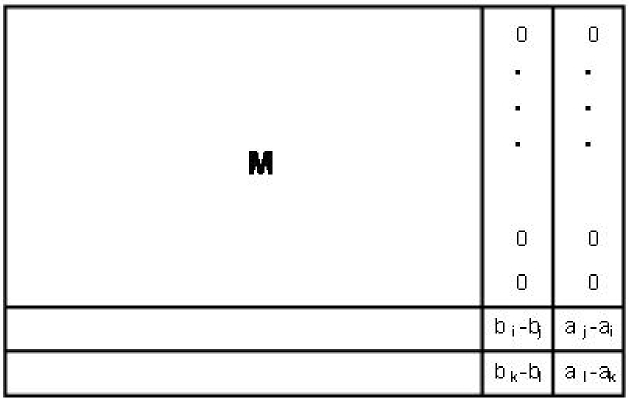
Vagyis minden egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, $X \cup Y \cup Z$ kritikus halmaz. $\square$

Ezen lemmát a v_i, v_j, u hármasokat $H - v$-ben tartalmazó kritkus halmazokra felhasználva ellentmondáshoz jutunk, mivel így a $\{v_1, v_2, v_3, u\}$ pontnégyes része egy $H-v$-beli kritikus halmaznak, ami az 6.0.15 állítás miatt nem lehet.

Terület-merevség, mint lehetséges alkalmazás

A konstruktív karakterizáció az első lépés lehet a terület-merevségre vonatkozó sejtés bizonyítására, mely szerint egy terület-szerkezet pontosan akkor minimálisan terület-merev, ha $(2, 5)$-kritikus. Ehhez azt kellene belátni, hogy a kiterjesztések a terület-merevségi mátrix rangját kettővel növelik. Bizonyos speciális esetekben ez könnyen megmutatható.

A másodfokú kiterjesztés esetén a mátrix úgy változik, hogy hozzáveszünk az új v csúcsnak megfelelő két csupa nulla oszlopot illetve két sort, melyeknek utolsó két koordinátája nem nulla.



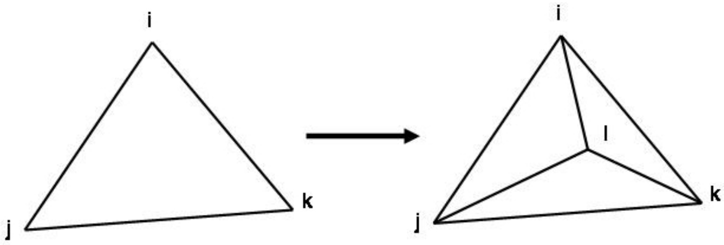
6.1. ábra. A terület-merevségi mátrix változása a másodfokú kiterjesztésnél.

A mátrix rangja akkor nő kettővel, ha

$$det \begin{pmatrix} b_i - b_j & a_j - a_i \\ b_k - b_l & a_l - a_k \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ez viszont elérhető a csúcsok koordinátáinak helyes megválasztásával, hiszen $\{i, j\} \neq \{k, l\}$.

A harmadfokú kiterjesztésnél tekintsük azt az esetet, amikor az új csúcsnak összesen három szomszédja lesz, vagyis amikor minden élpár metszetében két elem van.



Jelölje m annak a hiperélnek a vektorát, melyet kidobunk a gráfból, m_1, m_2 és m_3

legyenek az új élek vektorai. Csak az i, j, k, l csúcsokhoz tartozó koordinátákat jelölve:

$$\begin{array}{rcccccccc} m = & b_j - b_k & a_k - a_j & b_k - b_i & a_i - a_k & b_i - b_j & a_j - a_i & 0 & 0 \\ m_1 = & b_j - b_l & a_l - a_j & b_l - b_i & a_i - a_l & 0 & 0 & b_i - b_j & a_j - a_i \\ m_2 = & b_l - b_k & a_k - a_l & 0 & 0 & b_i - b_l & a_l - a_i & b_k - b_i & a_i - a_k \\ m_3 = & 0 & 0 & b_k - b_l & a_l - a_k & b_l - b_j & a_j - a_l & b_j - b_k & a_k - a_j \end{array}$$

Az $m = m_1 + m_2 + m_3$ egyenlőség áll fenn a vektorok között, amennyiben az l csúcsot az ijk háromszög belsejében vettük föl. Hasonlóan az előző esethez, vegyünk hozzá **M**-hez két nulla oszlopot és az m_1, m_2 vektorokat. Hasonló indoklással belátható, hogy ez kettővel növeli a rangot. Az m vektort pedig helyettesítsük az $m - m_1 - m_2 = m_3$ vektorral, ami nem változtatja a rangot.

6.0.5. Általánosítás

A magasabb dimenziós térfogat-szerkezetek vizsgálatakor felmerül a kérdés, hogy a (d, d^2+d-1)-kritikus, $(d+1)$-uniform hipergráfoknak létezik-e hasonló karakterizációja, hiszen az felhasználható lenne az alábbi sejtés bizonyításához..

Sejtés:[13] Egy d-dimenziós térfogat-szerkezet pontosan akkor minimálisan térfogat-merev, ha a csúcsok és a kijelölt szimplexek által meghatározott $(d+1)$-uniform hipergráf $(d, d^2 + d - 1)$-kritikus.

A választ az alábbi tétel adja meg, amely ennél valamivel általánosabb formában is kimondható, mint azt a fejezet végén látni fogjuk.

Először általánosítsuk a karakterizáció műveleteit $(d + 1)$-élekre.

Legyen $d(v) = k$. Legyen a v csúcson a *k-adfokú leemelés* művelet $d \le k \le d^2 + d - 1$ esetén a következő: v-t és a rá illeszkedő éleket elhagyjuk, a $\Gamma(v)$ halmazon felveszünk $k - d$ darab $(d + 1)$-élet.

Ezzel ellentétes művelet a *k-adfokú kiterjesztés* $d \le k \le d^2+d-1$ mellett. Válasszunk ki $k - d$ $(d + 1)$-élet E-ből, legyenek ezek $e_1, \ldots, e_{k-d}$. Jelölje az e_i élek csúcsainak halmazát S. Vegyünk fel egy új v csúcsot és k darab v-re illeszkedő $f_1, \ldots, f_k$ $(d + 1)$-élet. Jelölje az új élek által feszített csúcsok halmazát T. Legyenek az új élek olyanok, hogy $S \subseteq T$ teljesüljön. Legyen $G' = (V, E \setminus \{e_1, \ldots, e_{k-d}\})$. Nevezzünk egy kiterjesztést *megengedett*nek, ha teljesíti, hogy $(d, d^2 + d - 1)$-kritikus hipergráfból $(d, d^2 + d - 1)$-kritikus hipergráfot eredményez.

Tétel 6.0.20 *Egy $H = (V, E)$ $(d + 1)$-uniform hipergráf pontosan akkor $(d, d^2 + d - 1)$-kritikus, ha előáll $d + 1$ csúcsból és egy rájuk illeszkedő hiperélből olyan k-adfokú kiterjesztésekkel, ahol $d \le k \le d^2 + d - 1$ és az új élek mind különbözőek.*

A fenti tételt hasonlóan lehet bebizonyítani, mint a 6.0.9 tételt. Először szükségünk lesz a $d = 2$ esetben már bizonyított lemmák általánosításaira.

Lemma 6.0.21 *Legyen H egy $(d+1)$-uniform, (d, d^2+d-1)-kritikus hipergráf. Legyenek a $v_1, \ldots, v_{d+2}$ csúcsok és az $X_1, \ldots, X_{d+2}$ halmazok olyanok, hogy*

- *$v_i \notin X_i$, minden $1 \le i \le d+2$-re;*
- *$v_i \in X_j$, $1 \le i, j \le d+2$, $i \ne j$ esetén;*
- *$|X_i \cap X_j| = d$ minden $1 \le i, j \le d+2$, $i \ne j$ párra.*

Ekkor létezik olyan $1 \le k \le d+2$, melyre X_k nem kritikus.

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy mind a $d+2$ halmaz kritikus. Ekkor:

$$\sum_1^{d+2} d|X_j| - (d+2)(d^2+d-1) = \sum_1^{d+2}(d|X_j| - d^2 + d - 1) = \sum_1^{d+2} i(X_j) \le$$

$$\le i(\bigcup_1^{d+2} X_j) \le d|\bigcup_1^{d+2} X_j| - d^2 + d - 1 = d(\sum_1^{d+2} |X_j| - d(d+2)) - d^2 + d - 1 =$$

$$= \sum_1^{d+2} 2|X_j| - (d+2)(d^2+d-1) + 1,$$

vagyis ellentmondáshoz jutunk. □

Lemma 6.0.22 *Legyen H egy $(d+1)$-uniform, (d, d^2+d-1)-ritka hipergráf. $d(v) \ge d+1+k$, $0 \le k$ és $|\Gamma(v)| \ge d+2$ esetén $\le k$ leemelt él hozzávétele után létezik $d+2$ v-re nézve általános helyzetű pont $\Gamma(v)$-ben.*

Bizonyítás: ≤ 1 él leemelése után nem létezik olyan $X \subseteq V - v$ kritikus halmaz, melyre $\Gamma(v) \subseteq X$, hiszen ekkor $X \cup \{v\}$ megsértené a ritkasági feltételt.

Ha nem létezik olyan kritikus halmaz, amely $\Gamma(v)$ legalább $d+2$ elemét tartalmazza, akkor az állítás igaz. Ha létezik olyan K maximális kritikus, melyre $|\Gamma(v) \cap K| \ge d+2$, akkor tekintsük az alábbi csúcsokat: $v_1, \ldots, v_{d+1} \in \Gamma(v) \cap K$ és $v_{d+2} \in \Gamma(v) \setminus K$. Ekkor a $\{v_1, \ldots, v_{d+2}\}$ nem lehet benne egy kritikus halmazban K maximalitása miatt, hiszen ha két kritikus halmaz metszete legalább $d+1$-elemű, akkor metszetük is az. □

Lemma 6.0.23 *Legyen v a $H = (V, E)$ $d+1$-uniform (d, d^2+d-1)-kritikus hipergráf egy olyan csúcsa, melyre $k = d(v) \le d^2 + d - 1$. Ekkor létezik v-nél olyan k-adfokú leemelés, hogy az eredményül kapott $H' = (V', E')$ hipergráf is (d, d^2+d-1)-kritikus.*

Bizonyítás: Amennyiben $d(v) = d$, a v-re illeszkedő két él elhagyása után (d, d^2+d-1)-ritka gráfot kapunk, az élek száma kettővel, a csúcsok száma eggyel csökkent, így H' kritikus is lesz.

Ha $d(v) = d+1$ és $|\Gamma(v)| = d+1$, csak akkor nem tudunk leemelni, ha $\Gamma(v) \subseteq K$ valamely $K \subseteq V \setminus \{v\}$ kritikus halmazra. Ez viszont nem lehet, mert így $K \cup \{v\}$ sértő halmazt alkotnak V-ben.

A továbbiakban $d(v)$-re vonatkozó indukciót használunk. Az összes többi esetben alkalmazhatjuk a 6.0.22 állítást. Tehát létezik $d+2$ általános helyzetű pont. Ezek közül akkor nem tudunk egyik $d+1$ méretű csúcshalmazra sem leemelni, ha mindegyik benne van egy (maximális) kritikus halmazban. Ez a 6.0.21 lemma szerint nem lehetséges. Tehát egy élet le tudunk emelni.

Az eljárást mindaddig folytathatjuk, amíg le nem emeltük a szükséges k darab élet.□

A síkbeli esethez hasonlóan beláttuk, hogy minden legalább $d+2$-csúcsú (d, d^2+d-1)-kritikus $d+1$-uniform hipergráfnak van olyan csúcsa, amelynél elvégezhető a teljes leemelés. Ezen leemelések inverz műveletei megengedett kiterjesztések, amelyekkel tehát minden (d, d^2+d-1)-kritikus $d+1$-uniform hipergráf felépíthető $d+1$ csúcsból és egy rájuk illeszkedő hiperélből. Ezzel a 6.0.20 tételt beláttuk.

Összefoglalás

A dolgozatban néhány, a kombinatorikus merevséggel kapcsolatos eredményt foglaltam össze.

Az első fejezetben egy, Whiteleytól származó új bizonyítás szerepel, amely a kétdimenziós merevségi mátrix rangját egy másik típusú szerkezet, a 2-kerethez tartozó mátrix rangjából számolja ki.

A második, harmadik és negyedik fejezeteket a pebble game algoritmus kapcsolja össze, mindegyikben megismerhetünk egy-egy alkalmazását.

A két utolsó fejezetben egy még megoldatlan probléma, a terület-merevség szerepel. Ehhez kapcsolódik a $(2, 5)$-kritikus hipergráfok konstruktív karakterizációja, amely saját eredmény. További kutatást igényel, hogy ezen karakterizáció segítségével hogyan lehet bizonyítani Whiteley terület-merev gráfokra vonatkozó sejtését.

Irodalomjegyzék

[1] A. Berg, T. Jordán, Algorithms for graph rigidity and scene analysis, in: G. Di Battista, U. Zwick (Eds.), Proceedings of the 11th Annual European Symposium on Algorithms (ESA) 2003, Springer Lecture Notes in Computer Science, vol. 2832, 2003, pp. 78-89.

[2] Zsolt Fekete and László Szegő, A note on [k,l]-sparse graphs, in: Graph Theory in Paris, Eds: Bondy, Fonlupt, Fouquet, Fournier, and Alfonsin; Birkhauser Basel, 2007, pages 169 - 177.

[3] András Frank , László Szegö, Constructive characterizations for packing and covering with trees, Discrete Applied Mathematics, v.131 n.2, p.347-371, 12 September 2003

[4] Ruth Haas, Audrey Lee, Ileana Streinu, Louis Theran: Characterizing sparse graphs by map decompositions. J. Combin. Math. Combin. Comput. 62 (2007), 3–11

[5] L.Henneberg, Die Grapische Statik der starren Systeme, 1911, Leipzig

[6] An Algorithm for Two Dimensional Rigidity Percolation: The Pebble Game, Don J. Jacobs and Bruce Hendrickson. J. Comp. Phys., 137(2):346-365, 1997.

[7] G. Laman: On graphs and rigidity of plane skeletal structures. J. Engineering Math. 4 (1970) 331-340

[8] Audrey Lee, Ileana Streinu, Louis Theran: Graded Sparse Graphs and Matroids, Journal of Universal Computer Science, vol. 13, no. 10, (2007)

[9] Audrey Lee, Ileana Streinu, Louis Theran: The Slider-Pinning Problem. CCCG 2007: 113-116

[10] L. Lovász and Y. Yemini. On generic rigidity in the plane. SIAM J. Algebraic and Discrete Methods, 3(1):91–98, 1982.

[11] Edge-disjoint spanning trees of finite graphs (1961), by C St J A Nash-Williams, J. London Math. Soc

[12] Bernd Schulze, Walter Whiteley: When are Areas independent Constraints on Vertices? (kézirat, 2006)

[13] Ileana Streinu, Louis Theran: Combinatorial and Algorithmic Volume Rigidity http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0711/0711.3013v2.pdf

[14] Ileana Streinu and Louis Theran. Sparse hypergraphs and pebble game algorithms. European Journal of Combinatorics Volume 30 , Issue 8 (November 2009) Pages: 1944-1964

[15] Ileana Streinu and Louis Theran: Sparsity-certifying Graph Decompositions http://arxiv.org/abs/0704.0002

[16] On the Problem of Decomposing a Graph into n Connected Factors, by WT Tutte - Journal of the London Mathematical Society, 1961

[17] Matroid Applications Series: Encyclopedia of Mathematics and its Applications (No. 40) Edited by Neil White, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[18] Walter Whiteley, Some matroids from discrete applied geometry, in Matroid theory(J.E. Bonin, J.G. Oxley and B. Servatius eds., Seattle, WA, 1995), Contemp. Math.,197, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 171.-311.

[19] Walter Whiteley, Some Observations from the (projective) Geometric Theory of Infinitesimal and Static Rigidity http://www.math.tu-berlin.de/geometrie/ps/DDGWorkshopSlides/DDG_talk_Whiteley.pdf

[20] Walter Whiteley, The union of matroids and the rigidity of frameworks, SIAM Journal on Discrete Mathematics, v.1 n.2, p.237-255, May 1988