Költségelosztási modellek

Diplomamunka

Írta: Radványi Anna Ráhel

Matematikus szak

Témavezetők:

Kovács Gergely
Operációkutatás Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Pintér Miklós Péter
Matematika Tanszék
Budapesti Corvinus Egyetem, Közgazdaságtudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2010

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A dolgozatban egy költségelosztási problémára keresünk megoldást. Vizsgáljuk a költségelosztás fogalmát, elvárt tulajdonságait és modellezésének lehetőségeit, illetve értékeljük az egyes megoldási javaslatokat.

A költségelosztások a gazdasági problémák megoldása során felmerülő releváns kérdések. Egy gazdasági tevékenység során minden esetben felmerülnek bizonyos költségek, amelyek elosztásáról –több szereplő esetén– meg kell egyezni. Az elosztásnak pedig olyannak kell lennie, amit minden résztevő valamiféleképpen „igazságosnak" ítél meg.

A dolgozat alapját egy öntözéses gazdálkodás területéről származó probléma adja. Felhasználók egy csoportja egy közös csatornarendszer segítségével látja el saját területének öntözését. A csatornarendszer egy közös ponton csatlakozik a főcsatornához, ahonnan a csatornarendszer vízellátását fedezik. A rendszer működéséhez és fenntartásához szükséges költségek a felhasználókat terhelik. Egy lehetséges költségelosztás megadja, hogy az egyes felhasználók külön-külön mekkora költségeket vállalnak a rendszer teljes költségéből. Természetesen a felhasználóknak együttesen fedezniük kell a teljes összköltséget.

Az 1. fejezetben matematikai definíció segítségével pontosítjuk a költségelosztás fogalmát. Axiómákban rögzítjük a felhasználók, mint haszonmaximalizáló, racionális döntéshozók „igazságosságra" való törekvéseit leíró feltételeket. Különböző költségelosztási modellekkel szolgálunk a fa- és lánc-struktúrával reprezentálható csatornarendszerek esetében, és megvizsgáljuk, hogy az egyes modellek mennyire alkalmasak az „igazságosság" axiómáinak kielégítésére.

A 2. fejezet tartalmazza a kooperatív játékelmélet alapvető fogalmait és összefüggéseit. A kooperatív játékelmélet egyre elterjedtebb az olyan problémák elemzésekor, amelyek egy gazdasági tevékenység során felmerülő döntési helyzet rendezésére irányulnak. A szereplők saját érdekeik érvényesítése mellett a többi szereplő döntéseitől függően vállalnak esetlegesen részt egy adott együttműködésben. Ennek kapcsán lehetőségük van a választott stratégiákról vagy akár a kifizetések elosztásáról megállapodásokat kötni, melyek esetleges megszegése büntetést von maga után. Ezek a kikényszeríthető szerződések adják a kooperatív játékelmélet alapját. Megismerkedünk továbbá a mag-elosztás és a Shapley-érték fogalmával és tulajdonságaival, külön figyelmet szentelve a konvex játékok esetének. Ezen fogalmak segítségünkre lesznek az „igazságos” allokációk megválasztásában.

A 3. és egyben utolsó fejezetben a kooperatív játékelmélet alkalmazásával elemezzük az első fejezet eredményeit. Definiáljuk az öntözési játékot, amelynek segítségével a dolgozat alapjául szolgáló költségelosztási problémát modellezhetjük. Megvizsgáljuk, hogy a konkrét problémánkra milyen megoldásokkal szolgál a mag-elosztás és a Shapley-érték, és ez mennyire támasztja alá az első fejezetben intuitív módon, az axiómák segítségével megfogalmazott „igazságosságra” való törekvésünket.

1. fejezet

Költségelosztások

A dolgozat alapját egy költségelosztási probléma adja. Gazdálkodók egy csoportja egy főcsatornához csatlakozó csatornarendszerből fedezi saját földterületének vízigényét. A csatornarendszer működtetése és karbantartása költségeket von maga után, ezeket a gazdálkodók közösen állják. A probléma pedig az, hogy a gazdálkodók (továbbiakban felhasználók) hogyan osszák fel „igazságosan” egymás között a csatornarendszerre vonatkozó összköltséget. Ebben a fejezetben megismerkedünk a dolgozatban szereplő alapmodellekkel és az „igazságosság” fogalmát megragadni kívánó axiómákkal.

A formális elemzéshez először is foglaljuk össze a példánkban szereplő öntözőrendszer két legfontosabb sajátosságát! Elsőként elmondható, hogy minden felhasználó alapvetően saját földterületének öntözése céljából használ vizet, az állatállomány eltartására szolgáló vízmennyiség és az ebből eredő költségek elhanyagolható nagyságrendűek. Az általános tapasztalat pedig azt mutatja, hogy az öntözőcsatornák kapacitása elegendő az összes érintett földterület öntözéséhez. Így tehát a feladat nem egy adott vízmennyiség elosztása, sokkal inkább a csatornák működési, fenntartási és egyéb költségeinek a felhasználók közötti elosztása lesz.

1.1. Alapmodellek

Tekintsük a formális bevezetést! Reprezentáljuk a feladatot egy fával, a fa gyökere legyen a főcsatorna (amit 0. csúcsnak fogunk tekinteni), a fa egyéb csúcsai pedig a felhasználók. $\mathcal{L}$-lel a fa leveleinek halmazát jelöljük.

Legyen $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ a főcsatornához csatlakozó felhasználók véges, rendezett halmaza. A felhasználók halmazán definiálható egy rendezés, ami reflexív, tranzitív, de nem feltétlenül teljes, ugyanis nem minden esetben lesz bármely két felhasználó pozíciója összehasonlítható. Tekintsük például a gráfon a gyökértől kiindulva végrehajtott mélységi keresés elérési sorrendjét. Az így kapott sorrendben jelölje i a zsiliptől számított i-edik felhasználót. A csatornarendszer i-edik szakasza (azaz a gráf i-edik éle) legyen az a szakasz, amivel az i-edik felhasználó a rendszerhez csatlakozik. Minden $i \in N$-re jelölje c_i a főcsatorna i-edik szakaszára eső éves fenntartási költségét, az ezen költségek által meghatározott költségvektort pedig $c = (c_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}_+^N$. A keresett eredmény a $\sum c_i$ összesített költség egy „igazságos" elosztása lesz.

1.1. Megjegyzés. Speciális esetben a probléma egyetlen lánccal reprezentálható, aminek első csúcsa a főcsatorna, a felhasználók pedig a lánc további, egymás után következő csúcsai. Ekkor a rendezés a természetesen adódó sorrend szerint lesz. A későbbiekben ennek a speciális esetnek külön figyelmet fogunk szentelni.

A továbbiakban definiálni fogunk különböző költségelosztási sémákat, és megvizsgáljuk, milyen természetesen adódó tulajdonságokkal rendelkeznek. Ehhez szükségünk van néhány jelölés bevezetésére.

Egy i felhasználóra megkülönböztetjük az őt *megelőző* és az őt *követő* felhasználók halmazát. Jelölje I_i^- azon csúcsok halmazát, melyek az i-t a gyökérrel összekötő, egyértelmű úton helyezkednek el. Ez a halmaz lesz az i-t *megelőző* felhasználók halmaza. Most tekintsünk egy olyan irányítást, ahol a fa éleit a gyökértől, mint forrástól kifelé mutató irányítással látjuk el, azaz a gyökérből csak kifelé vezetnek élek, minden további csúcs be-foka pedig egy. Az ilyen irányítással ellátott fában jelölje I_i^+ az i-ből irányított úton elérhető csúcsok halmazát. Ez pedig az i-t *követő* felhasználók halmaza lesz.

Vagyis $I_i^- = \{j \in N | j < i\}$, $I_i^+ = \{j \in N | i < j\}$, ahol a $j < i$ reláció fennállása jelöli, ha létezik j-ből i-be irányított út.

Példánkban először kétféle elosztási szabályt vizsgálunk, az átlag szerinti (a) és a soros (b) elosztást. A költségek mérhetők hektáronkénti egységben, egységnyi felhasznált vízmennyiségben vagy felhasználónként, mi ez utóbbit fogjuk tekinteni. (Az 1.2. definíció és a fejezetben felhasznált axiómák alapjául Aadland és Kolpin (1998) munkája szolgált.)

1.2. Definíció. *Egy* $\xi : \mathbb{R}_+^N \to \mathbb{R}_+^N$ *leképezés egy költségelosztási szabály, ha* $\forall c \in \mathbb{R}_+^N$ *-re* $\sum \xi_i(c) = \sum c_i$, *ahol* $(\xi_i(c))_{i \in N} = \xi(c)$.

(a) Az átlag szerinti költségelosztási szabály szerint a csatorna fenntartási költségeit egyenlő arányban osztjuk szét minden felhasználó között, azaz

$$\xi_i^a(c) = \sum_{j \in N} \frac{c_j}{n} \quad \forall i \in N\text{-re.}$$

(b) A soros költségelosztási szabály szerint az egyes szegmensekre eső költségeket osztjuk el egyenlő módon azok között, akik az adott szegmenst igénybe veszik, vagyis

$$\xi_i^s(c) = \sum_{j \in I_i^- \cup \{i\}} \frac{c_j}{|I_j^+| + 1} \quad \forall i \in N\text{-re,}$$

ami speciálisan a lánc *esetére így is felírható:*

$$\xi_i^s(c) = \frac{c_1}{n} + \cdots + \frac{c_i}{(n-i+1)} \quad \forall i \in N\text{-re.}$$

1.3. Példa. Tekintsük a következő példát lánc esetén! Legyen $N = \{1, 2, 3\}$ és $c = \{6, 1, 5\}$. Az átlag szerinti elv esetén az aggregált költségek elosztása a felhasználók között egyenlő mértékű, azaz $\xi^a(c) = (4, 4, 4)$. Másrészről a soros elosztási szabályt alkalmazva az első szegmens költségeit mindhárom felhasználó között kell egyenlően felosztani, a második szegmenst a 2-es és 3-as számú között, míg a harmadik szegmens költségeit egyedül a 3-as felhasználó állja. Így tehát a következő elosztást kapjuk: $\xi^s(c) = (2,\ 2{,}5,\ 7{,}5)$.

A következőkben karakterizáljuk a költségelosztási sémákat, bevezetünk olyan axiómákat, melyek teljesülése a modellezés szempontjából jogosan elvárható.

Vektorok összehasonlítása alatt minden esetben koordinátánkénti összehasonlítást fogunk érteni, tehát $c \leq c'$, ha $\forall i \in N$-re $c_i \leq c'_i$.

1. Axióma. ξ költségmonoton, ha $\forall c \leq c'$ esetén $\xi(c) \leq \xi(c')$.

2. Axióma. ξ rang-tulajdonságú, ha $\forall c \in \mathbb{R}_+^N$ és $\forall j$-re $\forall i \in I_j^- \cup \{j\}$ esetén $\xi_i(c) \leq \xi_j(c)$.
Lánc esetén pedig $\forall i \leq j$-re $\xi_i(c) \leq \xi_j(c)$.

3. Axióma. ξ szubvenciómentes, ha $\forall c \in \mathbb{R}_+^N$ és $\forall\ I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq N$ halmaz esetén

$$\sum_{j \in J} \xi_j(c) \leq \sum_{j \in J} c_j,$$

ahol az egyszerűség kedvéért $J := I_{i_1}^- \cup \cdots \cup I_{i_k}^- \cup I$.
Láncra pedig a J halmaz mindig az I legnagyobb indexű i tagjához tartozó $I_i^- \cup \{i\}$ halmaz lesz, azaz $j \in J$ pontosan akkor teljesül, ha $j \leq i$. Ebben az esteben tehát elég azt írni, hogy $\forall i \in N$ és $c \in \mathbb{R}_+^N$ esetén

$$\sum_{j \leq i} \xi_j(c) \leq \sum_{j \leq i} c_j.$$

A három axióma értelmezése kézenfekvő. A költségmonotonitás felel azért, hogy növekvő költségek esetén egyetlen felhasználóra eső költség se csökkenhessen. Ez a kritérium biztosítja, hogy semelyik felhasználó se tegyen szert haszonra olyan esetleges ügyletek által, melyek az összköltséget növelnék.

A rang-tulajdonság biztosítja, hogy a költségelosztások rangsorolhatók aszerint, hogy az egyes felhasználók a csatorna mekkora hányadát használják. Vagyis, ha $i \in I_j^-$, akkor a j felhasználó definíció szerint több szegmensét használja a főcsatornának, mint i, azaz a j-re eső költség legalább akkora, mint az i-re eső.

A szubvenció-mentesség pedig megakadályozza, hogy a felhasználók bármely csoportjának többet kelljen fizetnie, mint a csoport kollektív költsége. Ha a szubvenció esete állna fenn, akkor a felhasználók néhány csoportjának fizetnie kellene az általuk használt csatornaszakaszokért és további „támogatást" nyújtanának a csatorna mentén hátrébb elhelyezkedő felhasználóknak. Ez pedig sértené azt a célunkat, mely szerint a költségek „igazságos" elosztására törekszünk. (A későbbiekben definiált megfelelő kooperatív játékban a szubvenció-mentesség felel majd azért, hogy mag-elosztást kapjunk.) Könnyen ellenőrizhető továbbá, hogy a soros költségelosztási elv kielégíti mindhárom axiómát, míg az átlag szerinti csak az első kettőt (Aadland és Kolpin (1998)).

A továbbiakban megemlítünk néhány további lehetséges elosztási elvet és megvizsgáljuk, mely axiómákat elégítik ki. Ehhez vezessük be az alábbi fogalmakat!

Jelölje $c(N)$ a csatorna fenntartásának összköltségét, azaz a $\sum_{i \in N} c_i$ értéket. Az $s_i = c(N) - c(N \setminus i)$ költséget a fogyasztó *szeparálható költségének* nevezzük, ahol $c(N \setminus i)$ jelöli a csatorna fenntartási költségét, amennyiben az i-t nem kell kiszolgálni. (Vegyük észre, hogy s_i a leveleken mindig c_i-vel egyezik meg, egyébként 0.) Olyan $\xi(c)$ költségallokációt keresünk, amelyik teljesíti a $\xi_i(c) \geq s_i$ egyenlőtlenséget minden $i \in N$ esetén. További kérdés még, hogy mennyit fedezzenek az egyes fogyasztók a fennmaradó, összesen

$$k(N) = c(N) - \sum_{i \in N} s_i = c(N) - \sum_{i \in \mathcal{L}} c_i$$

közös költségből. A fogyasztók ugyanis nem egyforma mértékben használják a csatornát, csak különböző részeire van szükségük. Így azt sem szeretnénk, ha a fogyasztók többet fizetnének annál, mintha egyedül használnák a csatornát. Jelöljük $e(i)$-vel az $i \in N$ fogyasztónak az így értelmezett ún. *egyedi költségét*, vagyis

$$e(i) = \sum_{j \in I_i^- \cup \{i\}} c_j.$$

Az „igazságosság" értelmében tehát teljesülnie kell a $\xi_i(c) \leq e(i)$ egyenlőtlenségnek, minden $i \in N$-re. Természetesen a fentiekben említett két korlátozás csak akkor kielégíthető, ha

$$c(N) \leq c(N \setminus i) + e(i),$$

minden $i \in N$-re. Ez a mi esetünkben mindig teljesül. Átrendezve az egyenlőtlenséget ez annyit jelent, hogy

$$c(N) - c(N \setminus i) \leq e(i), \text{ azaz } \; s_i \leq e(i).$$

Ha i nem levél, akkor s_i értéke 0, $e(i)$ pedig triviálisan mindig nemnegatív, ha pedig i levél, akkor $s_i = c_i$, vagyis $c_i \leq e(i)$ kell, hogy teljesüljön, ami $e(i)$ definíciójából látszik.

Az egyéni költségekből a szeparálható költségeket kivonva kapjuk a $(k(i) = e(i) - s_i)_{i \in N}$ vektort, ami a közös rész egyéni használatakor felmerülő költségeket tartalmazza.

Ezek alapján tekintsük az alábbi költségelosztásokat:

- A közös költség *egyenlő* elosztása:

$$\xi_i^{egy}(c) = s_i + \frac{1}{|N|} k(N) \quad \forall i \in N\text{-re.}$$

- A közös költség *egyéni használatból eredő költségrészek arányában* történő elosztása:

$$\xi_i^{eha}(c) = s_i + \frac{k_i}{\sum\limits_{j \in N} k_j} k(N) \quad \forall i \in N\text{-re.}$$

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy ezen költségelosztások mely axiómákat elégítik ki.

Tekintsük először a közös rész egyenlő elosztásának esetét!

1.4. Állítás. *A ξ^{egy} költségmonoton.*

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy tetszőleges $c \leq c'$ esetén $\xi^{egy}(c) \leq \xi^{egy}(c')$. Az $s(c)$ szeparálható költségekből álló vektor ebben az esetben olyan, hogy minden $i \in \mathcal{L}$ esetén $s_i = c_i$, egyébként pedig 0. Ezért két esetet különböztetünk meg, először, amikor a költségnövekedés nem levélen realizálódik, másodszor pedig, amikor levél esetén nő. Az első esetben az s vektor nem változik, viszont $k(N)_c \leq k(N)_{c'}$, mivel

$$k(N)_c = c(N) - \sum_{i \in \mathcal{L}} c_i,$$

$$k(N)'_c = c'(N) - \sum_{i \in \mathcal{L}} c'_i = c'(N) - \sum_{i \in \mathcal{L}} c_i$$

és $c(N) \leq c'(N)$, így tehát kész vagyunk.

A második esetben azonban éppen azt kapjuk, hogy $i \in \mathcal{L}$ esetén $s_i(c) \leq s_i(c')$,

$$k(N)_c = \sum_{i \in N \setminus \mathcal{L}} c_i = \sum_{i \in N \setminus \mathcal{L}} c'_i = k(N)'_c,$$

vagyis $k(N)$ nem változik, tehát összességében a ξ_n^{egy} értéke nem csökkenhetett. Amennyiben a két eset együttesen áll fenn, úgy a növekedés az s vektorban és a $k(N)$ értékben is megmutatkozik, így az összegükre is igaz, hogy nem csökkenhet. □

1.5. Állítás. *A ξ^{egy} teljesíti a rang-tulajdonságot.*

Bizonyítás. Azt kell ellenőrizni, hogy tetszőleges i-re és j-re $i \in I_j^-$ esetén $\xi_i^{egy}(c) \leq \xi_j^{egy}(c)$. Mivel azonban rögzített c-re $\xi_i^{egy}(c) = \xi_h^{egy}$ $\forall i, h \in I_j^-$ esetén, és $j \in \mathcal{L}$-re $\xi_i^{egy} < \xi_j^{egy}$ $\forall i \in I_j^-$-re, így az állítás teljesülése nyilvánvaló. □

1.6. Állítás. *A ξ^{egy} elosztás pontosan akkor nem szubvenciómentes, ha a problémát reprezentáló fában van legalább 3-hosszú lánc.*

Bizonyítás. Abban az esetben, ha a fa csupa 1-hosszú láncokból áll, a szubvenció-mentesség triviálisan teljesül, minden esetben $\xi_i = c_i$.
Ha a fában legfeljebb 2-hosszú láncok szerepelnek, szintén teljesül a szubvenció-mentesség. Egy konkrét 2-hosszú lánc esetén ugyanis a következőket tudjuk:
$c(N) = c_1 + c_2$, $s = (0, c_2)$, $k(N) = c_1$. Ekkor $\xi_1(c) = 0 + \frac{c_1}{2}$, $\xi_2(c) = c_2 + \frac{c_1}{2}$, ami azt jelenti, hogy $\xi_1(c) \leq c_1$ és $\xi_1(c) + \xi_2(c) \leq c_1 + c_2$, vagyis a szubvenció-mentesség mindig teljesül, ha $|N| = 2$.
Egy további esetet még meg kell említenünk: a fában legfeljebb 2-hosszú láncok szerepelnek, de ezek nem „függetlenek", hanem „elágazók". Azaz az első csúcsból külön-külön ágazik el egy-egy további pont (3 csúcsra ez egy Y alakot jelent). A fenti számolással analóg módon meggondolható, hogy a szubvenció-mentesség az ilyen „elágazó" esetekben is teljesül, ugyanis a c_1 költség osztódik tovább annyi részre, ahány további csúcs kapcsolódik hozzá. Így tehát legfeljebb 2-hosszú láncokra a szubvenció-mentesség fennáll. Ha pedig egy legfeljebb 2-hosszú láncokból álló fában ez lánconként teljesül, akkor akárhogy választva csúcsokat, a szubvenció-mentesség teljesülni fog, ugyanis csak a megfelelő egyenlőtlenségeket kell összegezni, amikről külön-külön tudjuk, hogy igazak, és így az összegükre is igaz lesz.
Tekintsük most azt az esetet, amikor a fában szerepel legalább 3-hosszú lánc. Ekkor a legalább 3-hosszú láncra (ha több ilyen van, akkor egy tetszőlegesre) a következőket írhatjuk fel:
$c(N) = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$, $s = (0, 0, \cdots 0, c_n)$, $k(N) = c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1}$. Ezek alapján $\xi_1(c) = 0 + \frac{c_1 + \cdots + c_{n-1}}{n}$, ami azt jelenti, hogy c_1 minden esetben megválasztható úgy, hogy már a $\xi_1(c) \leq c_1$ feltétel se teljesüljön.
Tekintsünk egy egyszerű ellenpéldát pontosan 3-hosszú láncra! Ekkor speciálisan $\xi_1 = \frac{c_1 + c_2}{3}$, tehát elég olyan c_1-et választani, ami ennél kisebb, vagyis, amire $c_2 > 2c_1$ teljesül. Legyen például a konkrét láncon $c = (3, 9, 1)$, ekkor $c(N) = 13$, $s = (0, 0, 1)$, $k(N) = 12$ és így $\xi^{egy}(c) = (0 + \frac{12}{3}, 0 + \frac{12}{3}, 1 + \frac{12}{3}) = (4, 4, 5)$. Azaz az

első felhasználónak többet kell fizetnie, mint amennyi a belépésének a költsége, és a többletfizetéssel mintegy „támogatja” a tőle hátrébb elhelyezkedő többi felhasználót. Ebből tehát látszik, hogy a szubvenció-mentesség nem teljesül, amennyiben a fában található legalább 3-hosszú lánc. □

Vegyük most a közös költség egyéni használatból eredő költségrészek arányában történő elosztását!

1.7. Állítás. *A ξ^{eha} nem költségmonoton.*

Bizonyítás. Egyszerű ellenpéldával igazoljuk: vegyünk egy 4-hosszú láncot, legyen $N = \{1,2,3,4\}$, c$=(1,1,3,1)$, $c' = (1,2,3,1)$. A költségnövekedés $i = 2$ esetén valósul meg. Ekkor a költség-monotonitás már a $\xi^{eha}(c)$ és $\xi^{eha}(c')$ első koordinátáira sem lesz igaz. Ugyanis $\xi_1^{eha}(c) = \dfrac{5}{13} = 0,384$, illetve $\xi_1^{eha}(c') = \dfrac{6}{16} = 0,375$, vagyis $\xi^{eha}(c) \geq \xi^{eha}(c')$ biztosan nem teljesül. □

1.8. Állítás. *A ξ^{eha} teljesíti a rang-tulajdonságot.*

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy $i \in I_j^-$ esetén $\xi_i(c) \leq \xi_j(c)$.

Definíció alapján:

$$\xi_i(c) = s_i + \frac{k(i)}{\sum\limits_{l\in N} k(l)} \cdot k(N),$$

$$\xi_j(c) = s_j + \frac{k(j)}{\sum\limits_{l\in N} k(l)} \cdot k(N).$$

Minden $i \in I_j^-$-re tudjuk, hogy $s_i \leq s_j$, mivel $i \in N \setminus \mathcal{L}$, így $s_i = 0$, s_j pedig 0, ha $j \in N \setminus \mathcal{L}$ vagy c_j, ha $j \in \mathcal{L}$. Már csak a $k(i) = e(i) - s_i$ és $k(j) = e(j) - s_j$ viszonyát kell tisztázni. Azt kell belátni, hogy $k(i) \leq k(j)$, minden $i \in I_j^-$ esetben. Ekkor ugyanis $\xi_i(c) \leq \xi_j(c)$.

1. $i \in I_j^-$, $j \notin \mathcal{L}$

   Ekkor $s_i = s_j = 0$ és $e(i) < e(j)$, mivel $e(i) = \sum\limits_{l\in I_i^- \cup\{i\}} c_l$ és $e(j) = \sum\limits_{l\in I_j^- \cup\{j\}} c_l$, illetve $I_i^- \cup \{i\} \subset I_j^- \cup \{j\}$, amennyiben $i \in I_j^-$. Vagyis $k(i) < k(j)$.

2. $i \in I_j^-$, $j \in \mathcal{L}$

   Ekkor $0 = s_i < s_j = c_j$.

   Ebben az esetben:

$$k(i) = e(i) - s_i = \sum_{l\in I_i^- \cup\{i\}} c_l - 0 = \sum_{l\in I_i^- \cup\{i\}} c_l,$$

$$k(j) = k(n) = e(n) - s_n = \sum_{l\in I_j^- \cup\{j\}} c_l - c_j = \sum_{l\in I_j^- \cup\{j\}} c_l.$$

- $i = j - 1$-re $k(i) = k(j)$,
- $i \in I^-_{j-1}$-re $k(i) \leq k(j)$.

Vagyis minden esetben $k(i) \leq k(j)$, amivel az állítást igazoltuk. $\square$

1.9. Állítás. *A ξ^{eha} bármely $c \in \mathbb{R}^+$ esetén nem elégíti ki a szubvenció-mentességet.*

Bizonyítás. Tekintsük a következő ellenpéldát: egy 5-hosszú láncra legyen $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $c = (10, 1, 1, 100, 1)$. Ekkor az elosztásra a következőt kapjuk: $\xi^{eha} = (4{,}35,\ 4{,}79,\ 5{,}23,\ 48{,}81,\ 49{,}81)$. A szubvenció-mentesség $i = 3$ esetén nem teljesül, ugyanis $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 14,37 > 12 = c_1 + c_2 + c_3$. $\square$

1.2. Eredmények láncra

Egy gazdálkodók között végzett felmérésben a megkérdezettek válaszai azt mutatták, hogy az eddigiekben leírt axiómák bármelyikének áthágása egyfajta „igazságtalanságot" eredményez (Aadland és Kolpin (2004)). Ugyanakkor azt érezhetjük, hogy a soros elosztás esetében a hátrébb elhelyezkedő falhasználóknak olykor már „túl sokat" kellene fizetniük, ami szintén sértheti az alapvető „igazságossági" szándékunkat. Ezeket a megállapításokat kell összhangba hozni egy látszólag átlag szerinti költségelosztás létezésének tényével. Ezért definiálunk egy módosított szabályt, amely a lehető „legközelebb" esik az átlag szerinti elosztási szabályhoz, és mindhárom axiómát kielégíti. Ebben a részben a lánc speciális esetére szorítkozunk, Aadland és Kolpin (1998) fogalmait és eredményeit alkalmazzuk.

1.10. Definíció. *Egy korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabály egy költségmonoton, rang-tulajdonságú, szubvenciómentes elosztási elv, ahol az eltérés a szétosztott legmagasabb és legalacsonyabb költségek között a legkisebb, az összes lehetséges elosztási elvet tekintve.*

Nyilvánvaló, hogy az átlag szerinti elosztás esetén a legmagasabb és legalacsonyabb költségek megegyeznek. A korlátozott átlag szerinti elosztás ezt a tényt próbálja realizálni, megőrizve a jogosan elvárt kritériumokat, azaz kielégítve az axiómákat. A fenti definíció azonban nem garantálja sem a létezést, sem az egyértelműséget. A létezés kérdését foglalja magába az a probléma, hogy a különböző költségprofilok különböző minimalizálási eljárásokhoz vezetnek-e, a szétosztott költségek közötti eltérésre nézve. Az egyértelműség kérdésének felmerülése pedig abból a tényből következik, mely szerint az említett minimalizáció nem ad direkt kikötéseket a „közbülső" költségekre. Az 1.11. tétel az egyetlen korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabály létezését fogalmazza meg.

Ehhez vezessük be a következőket: adott $h, i \in N \cup \{0\}$ és $i > h$. Legyen

$$P(h,i) = \frac{\sum\limits_{h<j\leq i} c_j}{i-h}.$$

$P(h,i)$ reprezentálja a $\{h+1,...,i\}$ csatorna részekhez tartozó felhasználónkénti költségeket, a megfelelő szegmensekhez tartozó felhasználók között felosztva.

1.11. Tétel. (Aadland és Kolpin (1998)) *Egyértelműen létezik egy ξ^r korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabály, mely rekurzíven konstruálható a következő módon: legyen*

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= min\{P(0,i)\,|i>0\}, & h_1 &= max\{i|P(0,i)=\mu_1\},\\
\mu_2 &= min\{P(h_1,i)\,|i>h_1\}, & h_2 &= max\{i|P(h_1,i)=\mu_2\},\\
&\vdots\\
\mu_j &= min\{P(h_{j-1},i)\,|i>h_{j-1}\}, & h_j &= max\{i|P(h_{j-1},i)=\mu_j\},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

és $\xi_i^r(c) = \mu_j$ $\forall j = 1,...,n'$ és $i \in (h_{j-1}, h_j]$, ahol n' jelöli a j utolsó indexét.

A fenti formula látszólag bonyolult, valójában azonban könnyen kiszámolható. A μ_1 értéke egyszerűen a legalacsonyabb az egy főre eső költségek között, $\{1,...,h_1\}$ pedig a csatorna szegmensek leghosszabb sorozata, amin ez a legalacsonyabb költség érvényesül. A h_1+1-nél induló csatornaszakaszhoz tartozó legkisebb egy főre jutó költség a μ_2, ez a $\{h_1+1,...,h_2\}$ szakaszon realizálódik, és így tovább.

1.12. Példa. Tekintsük a korábbi példánkat, ahol $N = \{1,2,3\}$ és $c = (6,1,5)$. Az egy főre jutó költség az első szegmensen 6, az első kettőn 3,5, mindhárom szegmensen pedig 4, azaz $\mu_1 = 3,5$, $h_1 = 2$. Így tehát a $\xi^r(c) = (3{,}5,\ 3{,}5,\ 5)$, míg $\xi^a(c) = (4,4,4)$, $\xi^s(c) = (2,\ 2{,}5,\ 7{,}5)$ volt.

1.13. Példa. Egy valamivel bonyolultabb példa szemléltetésével érthetőbbé válik a fenti tételben szereplő képlet. Legyen $N = \{1,2,3,4,5\}$ és $c = (6,2,5,4,5)$. Ebben az esetben a minimális egy főre jutó költség az $\{1,2\}$ szakaszon vétetik fel, tehát $\mu_1 = 4$ és $h_1 = 2$. A maradék három szegmensen, a $\{3,4,5\}$ halmazon az egy főnyi minimális költség a $\{3,4\}$-en vétetik fel, vagyis $\mu_2 = \frac{(c_3+c_4)}{2} = 4{,}5$ és $h_2 = 4$. Ezek alapján $\xi^r(c) = (4,\ 4,\ 4{,}5,\ 4{,}5,\ 5)$.

Megjegyezzük továbbá, hogy a többi elosztásra az alábbi eredmények adódnak: $\xi^{egy}(c) = (3{,}4,\ 3{,}4,\ 3{,}4,\ 3{,}4,\ 8{,}4)$, $\xi^{eha}(c) = (1{,}67,\ 2{,}23,\ 3{,}62,\ 4{,}74,\ 9{,}74)$, valamint $\xi^a(c) = (4{,}4,\ 4{,}4,\ 4{,}4,\ 4{,}4,\ 4{,}4)$ és $\xi^s(c) = (1{,}2,\ 1{,}7,\ 3{,}36,\ 5{,}36,\ 10{,}36)$.

A korlátozott átlag szerinti elosztásnak egy további, olyan tulajdonságát vizsgáljuk meg, ami költségelosztások esetén szintén hozzájárul ahhoz, hogy az „igazságosságot” árnyaltabban tudjuk kifejezni. Kimondunk tehát egy újabb axiómát, mely azt a célt szolgálja, hogy a felhasználók egy olyan csoportja, amely eddig „támogatásban” részesült, egy esetleges költségnövekedés esetén szintén köteles legyen részt vállalni az újonnan felmerülő költségekből.

4. Axióma. ξ kielégíti a kölcsönösség axiómáját, ha $\forall i$-re

(a) $\sum\limits_{h \leq i} \xi_h(c) \leq \sum\limits_{h \leq i} c_h$

(b) $c' \geq c$ és

(c) $\sum\limits_{h \leq i} (c_h - \xi_h(c)) \geq \sum\limits_{j > i} (c'_j - c_j)$

teljesülése esetén nem igaz, hogy $\xi_h(c') - \xi_h(c) < \xi_j(c') - \xi_j(c) \;\; \forall\; h \leq i$ és $j > i$ esetén.

A kölcsönösségi axióma azt fejezi ki, hogy ha (a) az $\{1, ..., i\}$ felhasználók élveznek (akár alacsony) támogatást, (b) a költségek c-ről c'-re nőnek, és (c) amennyiben a plusz költségek kollektíve magasabbak az i utáni szegmensen, mint amekkora támogatást az $\{1, ..., i\}$ csoport élvez, méltánytalan lenne, ha a támogatott csoport tagjai kisebb költségnövekedésre számíthatnának, mint az őket támogató $\{i+1, ..., n\}$ szegmens. Intuitíve tehát, amíg az $\{i+1, ..., n\}$ felhasználók költségnövekedése nem haladja meg az $\{1, ..., i\}$ felhasználóknak nyújtott támogatást, a támogatottak legalább egy kevés tartozással bírnak a támogató csoporttal szemben. A kölcsönösség axiómája biztosítja, hogy a támogató csoportban legalább egy felhasználó esetén az adott felhasználóra eső költségnövekmény ne haladja meg a támogatott csoportban a legmagasabb költségnövekményű felhasználóra eső értéket.

1.14. Tétel. (Aadland és Kolpin (1998)) *A korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabály költségmonoton, rang-tulajdonságú, szubvenciómentes és kielégíti a kölcsönösség axiómáját.*

Emlékezzünk vissza, hogy definíció szerint a korlátozott átlag szerinti költségelosztást a szétosztott legnagyobb és legkisebb költségek közti eltérés minimalizálásával nyertük, megtartva a költség-monotonitást, a rang-tulajdonságot és a szubvenciómentességet. A következő tételünk szerint ugyanezt az eredményt megkaphatjuk úgy is, ha egyszerűen a költségelosztás során kapott legnagyobb értéket minimalizáljuk. Ha a hasznosságot negatív költségekben mérjük, a probléma ekvivalens lesz a rawlsi jólét maximalizálásával (amit a társadalomban elfogadott legkisebb hasznosságban mérünk). A mi esetünkben ugyanis a rawlsi jólét maximalizálása egyenértékű az

n-edik felhasználóra eső költségek minimalizálásával, míg magának a jólétnek a minimalizálása az 1. felhasználóra eső költségek minimalizálásával ekvivalens. Így tehát a korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabály felfogható úgy, mint kollektív törekvés a társadalmi jólét maximalizálására, egyenlőségi alapon.

1.15. Tétel. (Aadland és Kolpin (1998)) *A korlátozott átlag szerinti költségelosztási szabály az egyetlen költségmonoton, rang-tulajdonságú, szubvenciómentes költség mechanizmus, ami maximális ralwsi jólétet biztosít.*

A tétel összehasonlítható Dutta és Ray cikkében megfogalmazott „egalitárius" elosztással, amely konvex játékok esetén a mag egy speciális eleme lesz (Dutta és Ray (1989)).

Példánk kapcsán a soros költségelosztási szabály szintén kiemelkedő jelentőségű. Tekintsük a következő axiómákat!

5. Axióma. ξ szemi-marginális, ha $\forall\ i = 1, ..., n-1$-re $\xi_{i+1}(c) \leq \xi_i(c) + c_{i+1}$.

6. Axióma. ξ növekvően szubvenciómentes, ha $\forall\ i \in N$ és $c \leq c'$ esetén

$$\sum_{h \leq i} (\xi_h(c') - \xi_h(c)) \leq \sum_{h \leq i} (c'_h - c_h).$$

A szemi-marginalitás azt jelenti, hogy ha $\xi_i(c)$ az $\{1, \cdots, i\}$ csoportra nézve „igazságos" elosztás, akkor az $i+1$-edik felhasználónak semmiképpen ne kelljen többet fizetnie, mint $\xi_i(c) + c_{i+1}$. A növekvő szubvenció-mentesség a $\xi(c)$-ből kiindulva azért felel, hogy költségnövekedés esetén a felhasználók egyetlen csoportja se fizessen többet, mint a kollektív többletköltség.

1.16. Tétel. (Aadland és Kolpin (1998)) *A soros költségelosztási szabályt a költségmonotonitás, a rang-tulajdonság, a szemi-marginalitás és a növekvő szubvenciómentesség karakterizálja.*

1.17. Tétel. (Aadland és Kolpin (1998)) *A soros költségelosztási szabály az egyetlen költségmonoton, rang-tulajdonságú és növekvően szubvenciómentes mechanizmus, ami maximális ralwsi jólétet biztosít.*

A tétel szerint tehát a soros költségelosztás egy jólét-maximalizálás végeredményeként kapható meg. Tekintsük a következő eredményt!

1.18. Tétel. (Aadland és Kolpin (1998)) *A soros költségelosztási szabály az egyetlen költségmonoton, rang-tulajdonságú, szemi-marginális mechanizmus, ami minimális ralwsi jólétet biztosít.*

Nyilvánvaló, hogy a korlátozott átlag szerinti költségelosztási elv szemi-marginális, a soros pedig szubvenciómentes. Összegzésül tehát mindkét mechanizmus költségmonoton, rang-tulajdonságú, szubvenciómentes, szemi-margnális, és amíg a korlátozott átlag szerinti költségelosztási elv maximalizálja a rawlsi jólétet, addig a soros éppen hogy minimalizálja azt. Így tehát a korlátozott átlag szerinti elosztási elv a főcsatorna hátsó felén, míg a soros költség-elosztási elv a főcsatorna elején elhelyezkedő felhasználóknak kedvez.

1.3. Súlyozott költségelosztások

Ebben a szakaszban a korlátozott átlag szerinti és a soros elosztási elvek hektáronkénti és víz-részesedés szerinti súlyozott változatát vizsgáljuk meg. Ezek a verziók leírhatók a felhasználónként tárgyalt eset analogonjaként. Az itt szereplő definíciók és tételek alapját Aadland és Kolpin (1998) cikke adja.

Jelöljünk ki minden felhasználóhoz egy $w_i > 0$ súlyt, ezen súly megfeleltethető az öntözött hektárnak, a felhasznált vízmennyiségnek (ez tekinthető a teljes vízkészlet azon hányadának, mely az adott felhasználóra esik), vagy akár egyéb mértékeknek. Tekintsük az alábbi definíciót!

1.19. Definíció. *Az $\omega : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}^N_+$ egy w-súlyozott költségelosztási szabály, ha $\forall c \in \mathbb{R}^N_+$-re $\sum \omega_i(c) w_i = \sum_i c_i$.*

(a) Az átlag szerinti w-súlyozott költségelosztási szabály szerint

$$\omega_i^a(c) = \frac{\sum\limits_{j \in N} c_j}{\sum\limits_{j \in N} w_j} \quad \forall j \in N\text{-re.}$$

(b) A soros w-súlyozott költségelosztási szabály szerint

$$\omega_i^s(c) = \sum_{j \in I_i^- \cup \{i\}} \frac{c_j}{\sum\limits_{l \in I_j^+ \cup \{j\}} w_l} \ ,$$

lánc esetén pedig

$$\omega_i^s(c) = \frac{c_1}{\sum\limits_{j \geq 1} w_j} + \frac{c_2}{\sum\limits_{j \geq 2} w_j} + \cdots + \frac{c_i}{\sum\limits_{j \geq i} w_j} \quad \forall i \in N.$$

Az átlag szerinti w-súlyozott esetben az összköltség egyenlően oszlik meg minden egységnyi súlyon, míg a soros w-súlyozott elosztás szerint a költséget az egyes szegmensekre nézve osztjuk el egyenlő módon (egységnyi súlyok szerint) azok között a felhasznlók között, akik az adott szegmenst igénybe veszik. Tekintsük a korábban már vizsgált példánkat láncra, ahol $N = \{1, 2, 3\}$ és $c = \{6, 1, 5\}$. Feltehető továbbá, hogy $w = \{1, 2, 3\}$. Ezek alapján kiszámolható, hogy $\omega^a(c) = (2, 2, 2)$, míg $\omega^s(c) = (1,\ 1{,}2,\ 2{,}86)$, a költségek pedig $c^a = (2, 4, 6)$ és $c^s = (1,\ 2{,}4,\ 11{,}44)$.

Mint azt a korábbi (felhasználónkénti) esetben tapasztaltuk, az átlag szerinti w-súlyozott elosztás nem fogja kielégíteni az összes szükséges axiómát, mégpedig a szubvenció-mentesség súlyozott megfelelőjét. Ismét egy korlátozott átlag szerinti elosztáshoz folyamodunk, melynek definiálása a korábbi esettel analóg módon történik, a megfelelő „súlyozott" axiómák bevezetése után.

7. Axióma. Az ω w-súlyozott költségelosztási szabály

- költségmonoton, ha $\omega(c) \leq \omega(c') \ \forall c \leq c'$-re,
- rang-tulajdonságú, ha $\omega_i(c) \leq \omega_j(c) \ \forall c \in (R)^N_+$ és $\forall i \in I_j^- \cup \{j\}$,
- szubvenciómentes, ha $c \in \mathbb{R}^N_+$ és $\forall I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq N$ esetén (ahol az egyszerűség kedvéért $J := I_{i_1}^- \cup \cdots \cup I_{i_k}^- \cup I$)

$$\sum_{j \in J} \omega_j(c) w_j \leq \sum_{j \in J} c_j,$$

lánc esetén pedig $j \in J$ pontosan akkor teljesül, ha $j \leq i$, ekkor tehát elég annyit írni, hogy $\forall i \in N$ esetén

$$\sum_{j \leq i} \omega_j(c) w_j \leq \sum_{j \leq i} c_j.$$

A következő axiómákat a korábbi alfejezethez hasonlósan ismét csak lánc esetére mondjuk ki.

8. Axióma. Az ω w-súlyozott költségelosztási szabály

- kielégíti a kölcsönösségi axiómát, ha $c \leq c'$-re

$$\sum_{h \leq i} \omega_h(c) w_h \leq \sum_{h \leq i} c_h \quad \text{és}$$

$$\sum_{h \leq i} (c_h - \omega_h(c) w_h) \geq \sum_{j > i} (c'_j - c_j)$$

esetén nem igaz, hogy $\omega_h(c') - \omega_h(c) < \omega_j(c') - \omega_j(c) \ \forall \ h \leq i$ és $j > i$-re,

- szemi-marginális, ha $\omega_{i+1}(c) \leq \omega_i(c) + \frac{c_{i+1}}{w_{i+1}}, \ \ \forall \ i = 1, \ldots, n-1$ -re,
- növekvően szubvenciómentes, ha $\forall \ i \in N$-re és $c \leq c'$ esetén

$$\sum_{j \leq i} (\omega_j(c') - \omega_j(c)) w_j \leq \sum_{j \leq i} (c'_j - c_j).$$

1.20. Definíció. *Egy korlátozott átlag szerint w-súlyozott költségelosztási szabály olyan költségmonoton, rang-tulajdonságú, szubvenciómentes w-súlyozott mechanizmus, ahol az eltérés a legmagasabb és a legalacsonyabb súlyozottan szétosztott költségek között a lehető legkisebb, az összes elosztási elvet tekintve.*

Korábbi eredményeink a láncokra átfogalmazhatók a w-súlyozott esetre is, adott súlyozás esetén minden egyes súly formálisan megfeleltethető a felhasználónkénti költségekkel. Ezért korábbi tételeink egyszerűen így foglalhatók össze:

1.21. Tétel. (Aadland és Kolpin (1998)) *Az 1.11., 1.14., 1.15., 1.16., 1.17., 1.18. tételek érvényben maradnak a w-súlyozott költségelosztási szabályok esetében is.*

2. fejezet

Játékelméleti bevezető

Ebben a fejezetben megismerkedünk a kooperatív játékelmélet legfontosabb fogalmaival és összefüggéseivel, definícióinkban és jelöléseinkben Peleg és Sudhölter (2003) könyvére, valamint Solymosi (2007) jegyzetére támaszkodunk.

Egy koalíciós formában megadott játékot kooperatívnak nevezünk, ha egy játékban kikényszeríthető szerződések vannak. Azaz a játékosoknak lehetőségük van a kifizetés elosztásáról vagy a választott stratégiáról megállapodásokat kötni, még akkor is, ha ezeket a megállapodásokat az adott játék szabályai nem írják elő. Szerződések, illetve megállapodások kötése többek között a közgazdaságtanban elterjedt tevékenység, például minden egy-fordulós eladó-vevő tranzakció egy megállapodás. Sőt, ez több-lépcsős tranzakciók esetében is elmondható. Egy megállapodást általában akkor tekintünk megkötöttnek, ha a megsértése olyan (akár magas pénzbeli) büntetéssel jár, ami visszatartja a játékost a megszegéstől.

A kooperatív játékokat két csoportba soroljuk: az átruházható és az át nem ruházható hasznosságú játékok csoportjaiba. Az átruházható hasznosságúak esetében feltesszük, hogy a játékosok egyéni preferenciái egy közvetítő eszköz által összemérhetők. Így egy konkrét koalíció tagjai a koalíció által elért kifizetést szabadon feloszthatják egymás között. Követve az elterjedt elnevezést, ezeket a játékokat TU-játékoknak (transferable utility games) fogjuk hívni. Az átruházható hasznossággal nem rendelkező NTU-játékok (non transferable utility games) esetén vagy ez a közvetítő eszköz hiányzik, vagy ha van is ilyen kompenzálást lehetővé tevő fogalom, azt a szereplők nem egyforma mértékben ítélik meg.

2.1. TU-játékok

2.1.1. Koalíciós játékok

Legyen N a játékosok nemüres, véges halmaza, egy S koalíció pedig az N halmaz egy részhalmaza.

2.1. Definíció. *Egy átváltható hasznosságú kooperatív játék egy (N, v) pár, ahol N a játékosok halmaza, v pedig egy függvény, ami az N minden S részhalmazához egy $v(S)$ valós számot rendel hozzá. Minden esetben feltesszük, hogy $v(\emptyset) = 0$.*

2.2. Megjegyzés. Egy (N, v) kooperatív játékot röviden v játéknak is nevezünk. N a játékosok halmaza, v a koalíciós függvény, S pedig az N részhalmaza. Ha az S koalíció létrejön a v játékban, akkor a koalíció tagjai megkapják a $v(S)$ értéket, amely számot a *koalíció értékének* nevezünk.

2.3. Megjegyzés. Egy adott S koalíció a $v(S)$ értékét tetszés szerint szétoszthatja tagjai között. Az S koalíció tehát el tud érni minden megvalósítható $x \in \mathbb{R}^S$ kifizetést, vagyis ami kielégíti a

$$\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$$

egyenlőtlenséget. Az átruházható hasznosság valójában ezt a tényt takarja.

2.4. Megjegyzés. A kooperatív játékok legtöbb alkalmazásában általában egyének, vagy egyének bizonyos csoportjai (például szakszervezetek, városok, nemzetek) töltik be a játékosok szerepét. Néhány érdekes közgazdasági játékelméleti modellben a játékosok azonban nem egyének, hanem közgazdasági projektek céljai, termelési tényezők, illetve egyéb szituációk közgazdasági változói.

2.5. Definíció. *Egy (N, v) játék szuperadditív, ha*

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T),$$

minden $S, T \subseteq N$ és $S \cap T = \emptyset$ esetén.

Amennyiben az $S \cup T$ koalíció létrejön, a tagjai dönthetnek úgy, mintha S és T külön-külön jöttek volna létre, ekkor a $v(S) + v(T)$ kifizetést érik el. Mindazonáltal a szuperadditivitás sokszor sérül. Léteznek tröszt-ellenes törvények, melyek az $S \cup T$ koalíció profitját csökkentenék, ha a koalíció létrejönne.

2.6. Definíció. *Egy (N, v) játék gyengén szuperadditív, ha*

$$v(S \cup \{i\}) \geq v(S) + v(\{i\}),$$

minden $S \subseteq N$ és $i \notin S$ esetén.

2.7. Definíció. *Egy (N, v) játék konvex, ha*

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T),$$

minden $S, T \subseteq N$ esetén.

Nyilvánvaló, hogy egy konvex játék szuperadditív is. A következő ekvivalens karakterizáció könnyen meggondolható: egy (N, v) játék pontosan akkor konvex, ha $\forall\ i \in N$-re

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T)$$

$\forall\ S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ esetén.

Tehát egy játék akkor és csak akkor konvex, ha a játékosoknak egy koalícióhoz való egyéni határhozzájárulásai monoton növőek. A konvex játékok a játékelmélet fontos alkalmazásaiban is előfordulnak.

2.8. Definíció. *Egy (N, v) játék konstans összegű, ha $\forall S \subseteq N$-re*

$$v(S) + v(N \setminus S) = v(N)$$

.

Konstans összegű játékokkal már a játékelmélet kezdeti szakaszaiban is sokat foglalkoztak (von Neumann és Morgenstern (1944)).

2.9. Definíció. *Egy (N, v) játék nem lényeges, ha additív, azaz $\forall S \subseteq N$ esetén*

$$v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\}).$$

A nem lényeges játékok a játékelmélet szemszögéből triviálisnak mondhatóak. Ha ugyanis minden $i \in N$ játékos igénye legalább $v(\{i\})$, akkor a $v(N)$ érték elosztása egyértelműen meghatározott.

2.10. Megjegyzés. Legyen N a játékosok, $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza. Jelölje $\mathbb{R}^N$ az N-ből $\mathbb{R}$-be menő függvények halmazát. Ha $x \in \mathbb{R}^N$ és $S \subseteq N$, akkor $x(S) = \sum\limits_{i \in S} x_i$.

2.11. Megjegyzés. Legyen N a játékosok halmaza, $x \in \mathbb{R}^N$, az eddigiek szerint tekintsük x-et, mint koalíciós függvényt. Így (N, x) koalíciós formában adott játék, ahol $x(S) = \sum\limits_{i \in S} x_i$ minden $S \subseteq N$-re.

2.12. Definíció. *Két játék, (N, v) és (N, w) stratégiailag ekvivalens, ha $\exists\ \alpha > 0$ és $\beta \in \mathbb{R}^N$, hogy*

$$w(S) = \alpha v(S) + \beta(S)$$

minden $S \subseteq N$ esetén.

A fenti definíció kompatibilis a koalíciós formában adott játék játékosainak hasznosságaira tett kikötéseinkkel. Valóban, a hasznosságok minden egyes játékosra pozitív affin transzformációkkal vannak meghatározva, mindegyik azonos meredekséggel, és a fentiek értelmében a $w = \alpha v + \beta$ egyenlőséggel kifejezve.

2.13. Definíció. *Egy (N, v) játék 0-normalizált, ha $v(\{i\}) = 0$ $\forall i \in N$-re.*

Nyilvánvaló, hogy minden játék stratégiailag ekvivalens egy 0-normalizált játékkal.

2.14. Definíció. *Egy (N, v) játék monoton, ha*

$$S \subseteq T \subseteq N \Rightarrow v(S) \leq v(T).$$

2.1.2. Költségallokációs játékok

Legyen N a játékosok halmaza. A költségallokációs feladat egy (N, v_c) játék, ahol N a játékosok halmaza, a v_c koalíciós függvény pedig a problémához tartozó költségfüggvény. Intiutív módon N lehet egy közmű vagy középület potenciális felhasználóinak halmaza. Minden felhasználót egy adott szinten vagy egyáltalán nem szolgálunk ki. Legyen $S \subseteq N$. Ekkor $v_c(S)$ reprezentálja az S tagjainak lehető leghatékonyabb módon történő kiszolgálásához szükséges minimális költséget. Az (N, v_c) játékot *költségjátéknak* nevezzük.

Habár egy (N, v_c) költségjáték formálisan játéknak tekinthető, az alkalmazások szemszögéből mégsem az, mert a költségfüggvény nem egy hagyományos koalíciós függvény. Ugyanakkor kapcsolatba hozhatók az (N, v) koalíciós játékok közül az ún. *megtakarítási játékokkal*, amelyek esetében $v_s(S) = \sum\limits_{i \in S} v_c(\{i\}) - v_c(S)$ minden $S \subseteq N$ esetén.

Legyen (N, v_c) egy költségjáték, (N, v_s) pedig a hozzá tartozó megtakarítási játék. Ekkor (N, v_c) *szubadditív*, vagyis

$$v_c(S) + v_c(T) \geq v_c(S \cup T),$$

minden $S, T \subseteq N$ és $S \cap T = \emptyset$ esetén, pontosan akkor, ha (N, v_s) szuperadditív. (N, v_c) *konkáv*, vagyis

$$v_c(S) + v_c(T) \geq v_c(S \cup T) + v_c(S \cap T),$$

minden $S, T \subseteq N$ esetén, pontosan akkor, ha (N, v_s) konvex. Az alkalmazásokban a költségjátékok többnyire szubadditívak (lsd. Lucas (1981), Young (1985), Tijs és Driessen (1986) tanulmányait a költségjátékokról).

Megyei költségelosztási probléma

Városok egy N csoportjának (azaz egy megyének) lehetősége van egy közös vízellátó rendszer építésére. Minden városnak van egy minimum vízigénye, amit vagy a saját elosztórendszerükkel vagy néhány másik, esetleg az összes többi várossal közös rendszer segítségével elégítenek ki. Egy $S \subseteq N$ koalíció alternatív vagy egyéni $v_c(S)$ költsége az a minimális költség, mellyel az S tagjainak az igényei a lehető leghatékonyabb módon kielégíthetők. Abból a tényből kiindulva, hogy egy $S \subseteq N$ halmazt számos különböző alrendszer szolgálhat ki, szubadditív költségjátékhoz jutunk. Ilyen játékok vizsgálatával többek között Suzuki és Nakayama (1976), Young, Okada, Hashimoto (Young et al. (1982)) foglalkozott.

Az első fejezetben vázolt probléma is egy ilyen költségjáték; felhasználók egy N csoportja egy közös csatornarendszer segítségével szeretné saját területének öntözését ellátni. A csatornarendszer felhasználók közötti szakaszainak adott az üzemeltetési és fenntartási költsége. Minden $S \subseteq N$ felhasználó-csoportra $c(S)$ az adott csoport területeinek öntözéséhez igénybevett csatornaszakaszok költségeinek összege. Az öntözési játék pontos definíciója (3.1.) és legfontosabb tulajdonságai a 3. fejezetben olvashatók.

2.2. Kifizetések és a mag

A gyakorlatban előforduló problémák kapcsán nemcsak azt fontos megvizsgálni, hogy egy koalíció létrejön-e, illetve milyen koalíciók jönnek létre. Lényeges továbbá az is, hogy az adott koalíció tagjai meg tudnak-e egyezni abban, hogy a koalíció által elért összhasznot mindenki számára elfogadható módon osszák szét egymás között. Ezt az elosztást nevezzük a játék megoldásának.

Gyakran előfordul, hogy a játékosok akkor érik el a legnagyobb kifizetést, ha egyedül a nagykoalíció jön létre. Például a szuperadditív játékokkal modellezhető esetekben minden közös taggal nem rendelkező koalíciónak érdemes egyesülnie, mert ezáltal nagyobb összhaszonra tehetnek szert. Így végül minden játékos a nagykoalíció mellett fog dönteni. Ez azonban nem mindig egyértelmű. A játékosok haszonmaximalizáló magatartása felvethet további szempontokat, amik miatt a nagykoalíció szuperadditív játékok esetén sem jön létre feltétlenül. Ugyanúgy, ahogy a 0-monoton és a lényeges játkokkal modellezhető helyzetekben sem mindig egyértelemű, hogy a nagykoalíció éri el a legnagyobb kifizetést. Előfordulhat, hogy a játékosok egy valódi részhalmazának előnyösebb a belőlük álló koalíciót választani a nagykoalícióval szemben. Ez a néhány szempont is alátámasztja, hogy a játékosok koalíciókba szerveződésének modellezése egy jóval összetettebb feladat.

Egyelőre tegyük fel, hogy a nagykoalíció létrejön, azaz minden játékos számára előnyösebb egyetlen koalícióba szerveződni. Ekkor a feladat az elért maximális összhaszon mindenki számára „kielégítő” módon történő szétosztása.

2.15. Definíció. *Az (N, v) játékban a $v(N)$ érték elosztása során keletkező $x_i \in \mathbb{R}$ értéket az $i \in N$ játékos* kifizetésének *nevezzük.*
A v koalíciós függvény által leírt kooperatív játék egy lehetséges kimenetelét a játékosok kifizetéseit tartalmazó $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ kifizetésvektorral *jellemezzük.*

2.16. Definíció. *Az (N, v) játékban az $x = (x_1, \ldots, x_n)$ kifizetésvektor*

- elérhető *az S koalíció számára, ha $\sum\limits_{i \in S} x_i \leq v(S)$,*
- elfogadtható *az S koalíció számára, ha $\sum\limits_{i \in S} x_i \geq v(S)$,*
- előnyösebb *az S számára, mint az $y = (y_1, \ldots, y_n)$ kifizetésvektor, ha $\forall i \in S$ esetén $x_i > y_i$,*
- *az* S koalíción keresztül dominálja *az $y = (y_1, \ldots, y_n)$ kifizetésvektort, ha az S számára x elérhető és egyben előnyösebb, mint y (ezt $x \mathrm{dom}_S y$-nal fogjuk jelölni),*
- nem dominált az S koalíción keresztül*, ha nincs az S számára olyan elérhető z kifizetésvektor, amire $z \mathrm{dom}_S x$,*
- dominálja az y kifizetésvektort*, ha létezik olyan S koalíció, amelyre $x \mathrm{dom}_S y$ (ezt $x \mathrm{dom} y$-nal fogjuk jelölni),*
- nem dominált*, ha egyetlen S koalíción keresztül sem dominált.*

Az *elérhető, elfogadható* és *előnyösebb* fogalmak pusztán azokat a természetes elvásásokat tükrözik, hogy egy koalíció tagjai a $v(S)$ érték elosztása során csak olyan kifizetéseket tudnak megvalósítani, amik nem haladják meg a koalíció által elért összhasznot. Ezen felül pedig minden játékos szeretné egyéni hasznát maximalizálni, így a számára előnyösebb kifizetést szeretné választani.

A *dominancia* fogalma pedig azt próbálja megragadni, hogy a játékosok szabadon dönthetnek arról, hogy mely koalíció(k)ban kívánnak részt venni, és egy adott koalíció csak akkor jön létre, ha tagjai azt egyöntetűen akarják.

2.17. Megjegyzés. Fennállnak az alábbi összefüggések:

1. Az x kifizetésvektor pontosan akkor elfogadható az S koalíció számára, ha x S-en keresztül nem dominált.

2. Tetszőleges $S \in N$ esetén a dom_S asszimetrikus, irreflexív és tranzitív reláció.
3. A *dom* reláció mindig irreflexív, de még egy szuperadditív játékban sem feltétlenül asszimetrikus vagy tranzitív.

2.2.1. A mag

A mag a kooperatív játékelmélet egyik alapvető és fontos fogalma. Segítségével megfoghatóbbá válik, hogy egy játékban melyek lesznek azok az elosztások, amiket egy adott koalíció tagjai megoldásként elfogadnak. Tekintsük az alábbi definíciót!

2.18. Definíció. *Az (N, v) játékban az $x = (x_1, \dots, x_n)$ kifizetésvektor*

- szétosztás, *ha* $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$, *vagyis az N koalíció számára elfogadható és elérhető,*
- elosztás, *ha* $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ *és* $x_i \geq v(\{i\})$ $\forall i \in N$*-re, azaz olyan szétosztás, ami minden egyszemélyes koalíció (azaz minden játékos) számára elfogadható,*
- mag-elosztás, *ha* $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ *és* $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ $\forall S \in N$ *esetén, azaz olyan szétosztás, ami minden koalíció számára elfogadható.*

Egy (N, v) játékban a szétosztások halmazát $I^*(N, v)$-vel, az elosztások halmazát $I(N, v)$-vel, a mag-elosztások halmazát pedig $C(N, v)$-vel jelöljük. Ez utóbbi $C(N, v)$ halmazt szoktuk röviden a kooperatív játék *mag*jának hívni.

A mag tehát valamiféleképpen azt fejezi ki, hogy mik azok az elosztások, melyeket egy-egy adott koalíció tagjai elég „igazságosnak” éreznek ahhoz, hogy elfogadják azt.

2.19. Megjegyzés. Igazak az alábbi állítások:

1. Tetszőleges (N, v) játék esetén a szétosztások $I^*(N, v)$ halmaza egy hipersík, azaz sosem üres.
2. Egy (N, v) játékban az elosztások $I(N, v)$ halmaza pontosan akkor nem üres, ha $v(N) \geq \sum_{i \in N} v(\{i\})$.

A fentieket a következő példán keresztül szemléltetjük.

2.20. Példa. Legyen (N, v) egy 3-szereplős, (0,1)-normalizált játék (azaz olyan 0-normalizált játék, ahol $v(N) = 1$). Az $I^*(N, v)$ szétosztáshalmaz az $x_1+x_2+x_3 = 1$ egyenlet megoldásvektoraiból álló hipersík. Az $I(N, v)$ elosztáshalmaz pedig a hipersíkon elhelyezkedő, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ csúcspontok által meghatározott egységszimplex lesz.

A mag nemürességének kérdése azonban már nem ilyen egyértelmű.

2.21. Példa. Vegyük a fenti 3-szereplős, (0,1)-normalizát játékot, és különböztessünk meg két esetet:

1. Legyen $v(S) = \sum\limits_{i \in S} v(\{i\})$, illetve
2. legyen $v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad |S| \geq 2 \\ 0, & \text{ha} \quad |S| \leq 1 \end{cases}$.

Ha az 1. esetet tekintjük, akkor azt tapasztaljuk, hogy ebben az esetben a mag az egyetlen $x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ kifizetésből áll. Ha viszont a 2. esetet nézzük, akkor a kétszemélyes koalíciók esetében csak akkor lesz egy $x = (x_1, x_2, x_3)$ kifizetés elfogadható, ha $x_1 + x_2 \geq 1$, $x_1 + x_3 \geq 1$, $x_2 + x_3 \geq 1$ mindegyike teljesül, azaz $x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{3}{2}$. Ez viszont a nagykoalíció számára nem elérhető. Ebben az esetben tehát a játék magja üres.

Az előző példa második esetében a mag azért üres, mert a nagykoalíció értéke a többi koalícióhoz képest nem „elég nagy”. További példák és egyéb meggondolások az alábbi jegyzetben olvashatók: Solymosi (2007).

2.3. A Shapley-érték

Ebben a részben megismerkedünk Shapley híressé vált megoldás-koncepciójával, a *Shapley-érték*kel (Shapley (1953)), és áttekintjük annak tulajdonságait. Shapley azt vizsgálta, hogy egy adott játékban egy szereplő számára mi lesz az „értéke” annak, hogy csatlakozik a játékhoz. Azaz milyen „mérőszám” az, ami megadja egy játékos szerepének értékét a játékban. Bevezetjük az *megoldás* fogalmát és rögzítünk néhány természetesen adódó axiómát, amik már egyértelműen meghatározzák a Shapley-értéket.

Jelöljük $\mathcal{G}^N$-nel az N játékoshalmazzal rendelkező TU-játékok halmazát. *Megoldás*nak egy olyan $\psi : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^N$ függvényt nevezünk, ami tetszőleges $v \in \mathcal{G}^N$ játékhoz hozzárendeli a $\psi(v) = (\psi_i(v))_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ vektort. Azaz megadja egy játékos értékét egy tetszőleges $v \in \mathcal{G}^N$ játékban.

Legyen $\pi : N \to \{1, \ldots, n\}$ a játékosok egy sorbarendezése, Π_N pedig a játékosok összes lehetséges sorbarendezéseinek a halmaza.

2.22. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\psi : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^N$ megoldás*

- hatékony (Pareto-optimális), *ha* $\sum\limits_{i \in N} \psi_i(v) = v(N)$,

- egyénileg elfogadható, *ha* $\psi_i(v) \geq v(\{i\})$ *minden* $i \in N$*-re,*

- szimmetrikus, *ha* $\forall i, j \in N$, $\forall S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ *és* $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ *esetén* $\psi_i(v) = \psi_j(v)$,

- sallangmentes, *ha* $\psi_i(v) = v(\{i\})$, *amennyiben* $i \in N$ *sallang játékos* v*-ben, vagyis* $v(S \cup i) - v(S) = v(\{i\})$ *minden* $S \subseteq N \setminus i$*-re,*

- kovariáns, *ha* $\psi(\alpha v + \beta) = \alpha\psi(v) + b$ *minden* $\alpha > 0$ *és* $b \in \mathbb{R}^N$ *esetén (ahol* β *a* b *vektor által generált additív játék),*

- additív, *ha* $\psi(v + w) = \psi(v) + \psi(w)$ *minden* $v, w \in G^N$*-re* $((v + w)(S) := v(S) + w(S)$ *értelmezéssel minden* $S \subseteq N$*-re),*

- homogén, *ha* $\psi(\alpha v) = \alpha\psi(v)$ *minden* $\alpha \in \mathbb{R}$*-re* $((\alpha v)(S) := \alpha v(S)$ *értelmezéssel minden* $S \subseteq N$ *esetén),*

  ahol a fenti feltételek minden $v, w \in G^N$*-re fennállnak minden tulajdonság esetén.*

A hatékonyság felel azért, hogy elosztást kapjunk. Az egyéni elfogadhatóság természetes reprezentációja annak, hogy minden játékos legalább annyit „ér”, mint a belőle álló egyszemélyes koalíció. A szimmetria azt fogalmazza meg, hogy egy játékos kifizetése csak a játékban betöltött szerepétől függ, olyan értelemben, hogy azonos szerepet betöltő játékosok azonos kifizetésben részesülnek. A sallangmentesség azt fejezi ki, hogy annak a játékosnak az értéke, aki bármelyik koalícióhoz csatlakozva az általa elérhetőnél se nagyobb, se kisebb értékváltozást nem idéz elő, annyi legyen, mint amennyi ez a konstans hozzájárulása. A kovariancia azért fontos, hogy egy esetleges skála-módosítást az értékelés is „megfelelően” kövessen. Az utolsó két tulajdonság már nem ennyire egyértelműen megkövetelhető, de együttes teljesülésük a kovarianciánál jóval erősebb tulajdonságot eredményez.

Most pedig tekintsük Shapley (1953) megoldásának definícióját:

2.23. Definíció. *Tetszőleges* (N, v) *játékban az* $i \in N$ *játékos* Shapley-értéke *a*

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{|S|!(|N \setminus S| - 1)!}{|N|!}(v(S \cup i) - v(S))$$

szám, míg a játék Shapley-megoldása:

$$\phi(v) = (\varphi_i(v))_{i \in N} \in \mathbb{R}^N.$$

2.24. Állítás. *A Shapley-értékre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:*

- *hatékony,*
- *szuperadditív (sőt 0-monoton) játékban egyénileg elfogadható,*
- *nem feltétlenül magbeli elosztás,*
- *szimmetrikus,*
- *sallangmentes,*
- *additív, homogén és mivel sallangmentes, következésképpen kovariáns is.*

2.25. Tétel. (Shapley (1953)) *Tetszőleges $v \in \mathcal{G}^N$ játékban a $\psi = \phi = (\varphi_i)_{i \in N}$, azaz a Shapley-megoldás az egyetlen hatékony, szimmetrikus, sallangmentes és additív $\mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^N$ függvény.*

2.4. Konvex játékok

A következő fejezetben a konvex játékok speciális szerepet játszanak majd, ezért különösen fontos lesz számunkra, hogy mit mondhatunk egy konvex játék magjáról, illetve Shapely-értékéről. A következőkben néhány új fogalom bevezetésével áttekintjük a konvex játékokra vonatkozó legfontosabb tételeket.

2.4.1. Konvex játékok magja

2.26. Definíció. *Egy (N, v) játékban a játékosok egy $\pi \in \Pi_N$ sorrendjéhez tartozó egyéni $x_i^\pi(v)$ határhozzájárulásokból álló kifizetésvektort* határhozzájárulás-vektor*nak nevezzük és $x^\pi(v)$-vel jelöljük.*

2.27. Definíció. *Egy (N, v) játék* Weber-halmazán *a határhozzájárulás-vektorok konvex burkát értjük, vagyis*

$$W(v) = conv\{x^\pi(v) | \pi \in \Pi_N\}.$$

2.28. Megjegyzés. Tetszőleges (N, v) játékban a Weber-halmaz egy nemüres poliéder.

2.29. Tétel (Weber (1988))**.** *Bármely (N, v) játékban $C(v) \subseteq W(v)$.*

Fontos eredmény tehát, hogy a mag mindig része a Weber-halmaznak. Konvex játékok esetében azonban ennél többet is mondhatunk. Shapley (1971) megmutatta, hogy a fordított irányú tartalmazás is igaz, Ichiishi (1981) pedig, hogy a fordított irány csak a konvex játékok esetében igaz. Nézzük tehát a pontos tételt:

2.30. Tétel (Shapley (1971)-Ichiishi (1981))**.** *A következő állítások ekvivalensek:*

1. (N, v) *konvex játék*
2. $x^\pi \in C(v)$*,* $\forall \pi \in \Pi_N$
3. $C(v) = W(v)$
4. $extC(v) = \{x^\pi(v) | \pi \in \Pi_N\}$

Vagyis konvex játék esetén a mag megegyezik a Weber-halmazzal, továbbá a határhozzájárulás-vektorok a mag extremális pontjai lesznek.

2.4.2. Shapley-érték

Általánosan is belátható (lsd. pl. Solymosi (2007)), hogy a Shapley-érték felírható a következő alakban:

$$\varphi_i(v) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\pi \in \Pi_N} x_i^\pi(v),$$

ahol x^π jelöli a játékosok π sorrendjéhez tartozó határhozzájárulás-vektort. Így azt kapjuk, hogy a Shapley-érték a határhozzájárulás-vektorok súlyozott átlaga, vagyis minden esetben a Weber-halmaz egy belső pontja lesz.

2.31. Megjegyzés. Az alternatív alakból és abból a tényből, hogy konvex játékok esetén a mag megegyezik a Weber-halmazzal, már következik, hogy tetszőleges konvex játékban a Shapley-érték mindig egy mag-elosztás.

3. fejezet

Az öntözési játék

Ebben a fejezetben visszatérünk eredeti problémánkhoz, és megvizsgáljuk, hogy játékelméleti háttérrel kiegészítve, milyen megoldásokhoz jutunk és a kapott eredményeket hogyan értékelhetjük.

Feladatunk tehát annak meghatározása volt, hogy egy főcsatornához csatlakozó felhasználó-csoport tagjai között hogyan osszuk el „igazságosan" a csatorna használatához és fenntartásához kapcsolódó költségeket. A problémát az első fejezetben leírtak szerint egy fával reprezentáljuk, aminek gyökere képviseli a főcsatornát, a további csúcsok pedig az egyes felhasználókat jelölik. A továbbiakban ezen felhasználókat játékosoknak fogjuk nevezni, a feladat megoldását pedig a következőkben definiált *öntözési játék*kal reprezentáljuk.

A játékosok egy részhalmazának *fa-burka* jelentse azt a fát, ami az adott részhalmazhoz tartozó játékosoknak megfelelő csúcsokat a gyökérrel összekötő egyértelmű utak uniója. Egy S részhalmaz (továbbiakban koalíció) fa-burkának csúcshalmazát jelöljük $\overline{S}$-sal.

3.1. Definíció (Öntözési játék). *Egy (N, v_{irr}) játékot* öntözési játék*nak nevezünk, ha adott $c = (c_1, \ldots, c_n)$ költségvektor mellett minden $S \subseteq N$ koalícióra*

$$v_{irr}(S) = \sum_{i \in \overline{S}} c_i.$$

A $c = (c_1, \ldots, c_n)$ költségvektor reprezentálja a problémát leíró gráfban a játékosokhoz tartozó élköltségeket.

Amennyiben tehát az S koalíció létrejön, úgy tagjainak a $\sum_{i \in \overline{S}} c_i$ összköltséget kell egymás között felosztaniuk.

3.2. Megjegyzés. Az (N, v_{irr}) öntözési játék egy költségjáték.

3.3. Tétel. *Az öntözési játék konkáv.*

Bizonyítás. A konkávitáshoz azt kell belátni, hogy minden $S, T \subseteq N$ koalícióra

$$v_{irr}(S) + v_{irr}(T) \geq v_{irr}(S \cup T) + v_{irr}(S \cap T).$$

A definícióból következik, hogy

$$v_{irr}(S) + v_{irr}(T) = \sum_{i \in \overline{S}} c_i + \sum_{i \in \overline{T}} c_i.$$

Továbbá igaz, hogy $\overline{S} \cup \overline{T} = \overline{S \cup T}$ és $\overline{S} \cap \overline{T} \supseteq \overline{S \cap T}$.
Ez utóbbiból adódik, hogy

$$\sum_{i \in \overline{S} \cap \overline{T}} c_i \geq \sum_{i \in \overline{S \cap T}} c_i.$$

Ebből pedig a következőképpen kapjuk a tétel állítását:

$$v_{irr}(S) + v_{irr}(T) = \sum_{i \in \overline{S}} c_i + \sum_{i \in \overline{T}} c_i = \sum_{i \in \overline{S} \cup \overline{T}} c_i + \sum_{i \in \overline{S} \cap \overline{T}} c_i =$$

$$= \sum_{i \in \overline{S \cup T}} c_i + \sum_{i \in \overline{S} \cap \overline{T}} c_i \geq \sum_{i \in \overline{S \cup T}} c_i + \sum_{i \in \overline{S \cap T}} c_i = v_{irr}(S \cup T) + v_{irr}(S \cap T).$$

□

3.4. Definíció. *Legyen $\alpha > 0$ valós szám, $b \in \mathbb{R}^N$ vektor. Egy $v \in \mathcal{G}^N$ pozitív affin transzformáltjának az $\alpha v + \beta \in \mathcal{G}^N$ játékot nevezzük, ahol β a b vektor által generált additív játék.*

3.5. Megjegyzés. A pozitív affin transzformációval kapott $\alpha v + \beta$ játék az eredeti v játékkal stratégiailag ekvivalens.

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy milyen kapcsolat van a konvex és konkáv játékok között. A következő állítás teljesülése a definíciók alapján nyilvánvalóan látszik.

3.6. Állítás. *Egy $v \in \mathcal{G}^N$ játék pontosan akkor konvex, ha a $(-v) \in \mathcal{G}^N$ játék konkáv, ahol $(-v)(S) = -v(S)$ minden $S \subseteq N$-re.*

3.7. Következmény. A v_c játék pontosan akkor konkáv, ha $(-v_c)$ konvex.

Bizonyítás. Elég meggondolni, hogy $(-(-v)) = v$. □

Emlékezzünk vissza, hogy a költségjátékok kapcsolatba hozhatók az ún. megtakarítási játékokkal, amelyek esetében $v_s(S) = \sum_{i \in S} v_c(\{i\}) - v_c(S)$ minden $S \subseteq N$ esetén. A megtakarítási játék a következő alakban is felírható: $v_s = -v_c + \gamma$, ahol γ a $(v_c(\{i\}))_{i \in N} = (c_i)_{i \in N}$ költségvektor által generált additív játék.

3.8. Következmény. A v_s megtakarítási játék a $-v_c$ konvex játék pozitív affin transzformációja, így a két játék stratégiailag ekvivalens.

3.9. Állítás. *A konvex játékok halmaza zárt a stratégiai ekvivalenciára nézve, vagyis minden konvex játékkal stratégiailag ekvivalens játék konvex.*

Bizonyítás. Könnyen meggondolható. (lsd. pl. Solymosi (2007)) □

3.10. Következmény. Minden konvex játék pozitív affin transzformációja is konvex játék.

3.11. Következmény. A konkáv v_c költségjáték segítségével definiált v_s megtakarítási játék konvex.

A megtakarítási játék és a negatív affin transzformáció segítségével a konkáv öntözési játékokról áttérhetünk a konvex játékokra, amikre az előző fejezetben kimondott 2.30. Shapley-Ichiishi tétel már érvényes lesz.

Gondoljuk meg, hogy mit jelent a mag egy költségjátékra nézve. Az eredeti definíció szerint a mag:

$$C(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N | \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ és } \forall S \subseteq N : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\}.$$

Költségjátékok esetén pedig a következőképpen írhatjuk fel a magot:

$$C(N, v_c) = \{x \in \mathbb{R}^N | \sum_{i \in N} x_i = v_c(N) \text{ és } \forall S \subseteq N : \sum_{i \in S} x_i \leq v_c(S)\}.$$

3.12. Következmény. Konkáv költségjáték magja nemüres.

Költségjátékokra ugyanis a mag azt fejezi ki, hogy a játékosok egy S koalíciója azokat a szétosztásokat fogja elfogadni, amelyek esetén a koalíció tagjai által fizetendő összköltség nem haladja meg a koalíció teljes költségét.

A Shapley-értékre pedig a 2.23. definíció alapján a következőt kapjuk:

$$\phi(-v) = -\phi(v).$$

3.13. Következmény. Konkáv költségjáték Shapley-értéke magbeli.
(Garcia-Jurado et al. (2004))

A következőkben összegezzük az első fejezet eredményeit, összevetve azokat a játékelmélet fogalmaival és tételeivel. Feladatunk tehát egy fával reprezentálható csatornahálózat felhasználói között „igazságosan” elosztani a csatornarendszer működési és fenntartási költségeit. A probléma modellezhető az öntözési játékkal, ahol a játékosok jelentik a felhasználókat, a csatornatendszer egyes szakaszaira jutó költségeit pedig a játék koalíciós függvénye írja le. A felhasználók egyéni racionalitásból eredő preferenciái azt követelik meg, hogy az első fejezetben kimondott axiómák közül, úgy mint költségmonotonitás (1.), rang-tulajdonság (2.), szubvenciómentesség (3.) minél több teljesüljön. Bármelyik megszegése egyfajta „igazságtalanság” érzését eredményezi.

A kooperatív játékelmélet egyik alapvető fogalma, a mag fontos szerepet játszik abban, hogy ezt az „igazságosnak” gondolt megoldást megtaláljuk. Korábban már megfogalmaztuk, hogy a mag-elosztás valamiféleképpen azt fejezi ki, hogy mik azok a megoldások, amelyeket egy adott koalíció tagjai egyénileg és koalíciós szinten is elfogadhatónak gondolnak, olyan értelemben, hogy a felhasználók egytelen csoportjának se kelljen magasabb költséget fizetnie, mint az általuk használt csatornaszakaszok összköltsége. Ezt az elosztási feltételt fogalmazza meg a szubvenciómentesség.

A továbbiakban a költségprobléma speciális esetére szorítkozunk, még pedig arra az esetre, amikor a feladat reprezentálása az egyetlen útból álló fával, vagyis lánccal történik.

3.14. Állítás. *Öntözési játékok esetén pontosan azok a költségelosztások lesznek magbeliek, amelyek kielégítik a szubvenciómentesség axiómáját.*

Bizonyítás. Öntözési játékok esetén $v_{irr}(S) = v_{irr}(\overline{S})$ és $\sum\limits_{i\in S}\xi_i \leq \sum\limits_{i\in\overline{S}}\xi_i$. A mag-elosztásokra pedig $\sum\limits_{i\in S}\xi_i \leq v_{irr}(S)$. Mivel

$$\sum_{i\in S}\xi_i \leq \sum_{i\in\overline{S}}\xi_i \leq v_{irr}(\overline{S}) = v_{irr}(S),$$

ezért elég azokra az esetekre szorítkoznunk, amikor $S = \overline{S}$. Így a magbeli elosztások azok lesznek, melyekre:

$$\sum_{i\in\overline{S}}\xi_i \leq v_{irr}(\overline{S}) = \sum_{i\in\overline{S}}c_i.$$

Az egyenlőtlenség elejét és végét összevetve épp a szubvenciómentességet kapjuk. □

Öntözési játékokra a szubvenciómentesség tehát karakterizálja a magot. Vizsgáljuk meg az első fejezetben tárgyalt költségelosztásokat ezzel az új „mag-szemlélettel”. Emlékeztetőül idézzük fel, melyek is voltak ezek.

1. Átlag szerinti elosztás:

$$\xi_i^a(c) = \sum_{j \in N} \frac{c_j}{n} \quad \forall i \in N\text{-re.}$$

2. Soros elosztás:

$$\xi_i^s(c) = \frac{c_1}{n} + \dots + \frac{c_i}{(n-i+1)} \quad \forall i \in N\text{-re.}$$

3. A közös költség egyenlő elosztása:

$$\xi_i^{egy}(c) = s_i + \frac{1}{|N|} k(N) \quad \forall i \in N\text{-re.}$$

4. A közös költség egyéni használatból eredő költségrészek arányában történő elosztása:

$$\xi_i^{eha}(c) = s_i + \frac{k_i}{\sum_{j \in N} k_j} k(N) \quad \forall i \in N\text{-re.}$$

5. Korlátozott átlag szerinti elosztás: ξ^r, ami egy olyan költségmonoton, rangtulajdonságú, szubvenciómentes elosztási elv, ahol az eltérés a szétosztott legmagasabb és legalacsonyabb költségek között a legkisebb, az összes lehetséges szétosztási elvet tekintve (konstruktív megadását lsd. 1.11. tétel).

Korábbi eredményeink alapján ξ^s és ξ^r elégíti ki a szubvenciómentesség axiómáját, tehát ezek az elosztások lesznek magbeliek. Azt azonban, hogy a magbeli elosztások közül milyen további szempontok alapján lehet vagy érdemes választani, már nehezebb megfogalmazni.

Egyik lehetséges megoldás lenne a Shapley-érték, mivel ez az egyetlen hatékony (Pareto-optimális), szimmetrikus, sallangmentes és additív megoldás. Tudjuk azt is, hogy az öntözési játékok esetén a Shapley-érték benne van a magban. A ξ^s, vagyis a soros költségelosztás pedig megegyezik a Shapley-értékkel (Aadland és Kolpin (1998)). Így az „igazságosságot" leíró intuíciónkról matematikai bizonyosságot kaptunk, és újabb valós életből vett példával támasztottuk alá a Shapley-érték szerepét.

Ugyanakkor a ξ^r korlátozott átlag szerinti elosztás rendelkezik további tulajdonságokkal, mint például a kölcsönösség axiómája (4.), illetve az a tény, hogy ez az elosztás a legmagasabb és legalacsonyabb költségek közötti eltérés minimalizálására törekszik. Ezen felül figyelembe vehető, hogy a soros és a korlátozott átlag szerinti elosztások a társadalmi jólét maximalizálását eltérő módon valósítják meg. Ezen érvek mellett természetesen elképzelhetőek egyéb, adott szituációktók függő szubjektív szempontok, melyek befolyásolhatják a döntéshozókat abban, hogy a magbeli elosztások közül (melyek a racionális döntéshozók „legjobb" alternatívái), melyiket érdemes választaniuk.

Összefoglalás

A dolgozatban arra a problémára kerestünk megoldást, hogy felhasználók egy adott csoportja miként tudja egymás között egy csatornarendszer fenntartásának és működtetésének költségeit „igazságosan” elosztani. Célunk az volt, hogy az „igazságosság” igényét minél inkább kielégítsük, és olyan elosztási megoldással szolgáljunk, amely minden szereplő számára egyénileg elfogadható.

A modellezés során megfogalmaztunk axiómákat, melyek teljesülése a megoldás elfogadhatósága szempontjából jogosan elvárható. Bemutattunk öt költségelosztási modellt és megvizsgáltuk, hogy a lánc-struktúrával reprezentálható esetekben mely axiómákat elégítik ki. A soros és korlátozott átlag szerinti elosztások bizonyultak a leginkább elfogadhatónak, az „igazságosság” minél pontosabb megragadása tekintetében.

A megfelelő kooperatív játékelméleti bevezetés után bevezettük az öntözési játék fogalmát, melyről megmutattuk, hogy minden esetben konkáv. Konkáv játékok „igazságos” elosztásait a mag tartalmazza, melynek ebben az esetben a Shapley-érték eleme. Azt tapasztaltuk, hogy a soros és a korlátozott átlag szerinti elosztások magbeliek, sőt, a soros elosztás megegyezik a Shapley-értékkel, ami így egy könnyen meghatározható, jó megoldáshoz vezet. További szempontok figyelembe vételével pedig lehetőségünk nyílna a magbeli megoldások közötti választás megkönnyítésére. Ez a dolgozat egy lehetséges továbblépési iránya lehet.

Modellezés szempontjából fontos eredmény, hogy az intuitíve megfogalmazott axiómák a konkáv játékokra vonatkozó eredmények segítségével, matematikailag jól modellezik a racionális döntéshozó magatartásából fakadó előzetes elvárásokat. Nem utolsó sorban pedig újabb alkalmazással szolgáltunk a konkáv játékokra vonatkozóan.

A probléma általánosítása szempontjából további érdekes és kulcsfontosságú eredmény lenne megvizsgálni, hogy a fa-struktúrára és az annál általánosabb gráfmodellekre a dolgozat tételei és megoldásai hogyan teljesülnek. Így a valóságban előforduló költségelosztási problémák jóval szélesebb körére szolgáltathatnánk megoldást.

Irodalomjegyzék

Aadland D, Kolpin V (1998) Shared irrigation cost: An empirical and axiomatical analysis. Mathematical Social Sciences 849:203–218

Aadland D, Kolpin V (2004) Environmental determinants of cost sharing. Journal of Economic Behavior & Organization 53:495–511

Dutta B, Ray D (1989) A concept of egalitarianism under participation constraints. Econometrica 57(3):615–635

Garcia-Jurado I, Mendez-Naya L, Sanchez-Sellero C (2004) Density estimation using game theory. Mathematical Methods of Operations Research 59:349–357

Ichiishi T (1981) Super-modularity: Applications to convex games and to the greedy algorithm for LP. Journal of Economic Theory 25:283–286

Lucas WF (1981) Applications of cooperative games to equitable allocation. In: Game theory and its applications RI. American Mathematical Society, Providence pp. 19–36

Peleg B, Sudhölter P (2003) Introduction to the theory of cooperative games Kluwer

Shapley LS (1953) A value for n-person games. In: Kuhn HW, Tucker AW (eds.) Contributions to the theory of games II, Annals of Mathematics Studies 28. Princeton University Press, Princeton pp. 307–317

Shapley LS (1971) Cores of convex games. International Journal of Game Theory 1:11–26

Solymosi T (2007) Kooperatív játékok. (elektronikus jegyzet) `http://web.uni-corvinus.hu/~opkut/files/koopjatek.pdf`

Suzuki M, Nakayama M (1976) The cost assigment of the cooperative water resource development: A game-theoretical approach. Management Science 22:1081–1086

Tijs SH, Driessen TSH (1986) Game theory and cost allocation problems. Management Science 32:1015–1028

von Neumann J, Morgenstern O (1944) Theory of Games and Economic Behavior Princeton University Press

Weber RJ (1988) Probabilistic values for games. In: Roth AE (ed.) The shapley value, Cambridge University Press, Cambridge pp. 101–119

Young HP (1985) Cost allocation. In: Fair allocation, Proceedings Symposia in Applied Mathematics 33. RI. American Mathematical Society, Providence pp. 69–94

Young HP, Okada N, Hashimoto T (1982) Cost allocation in water resources development. Water Resources Research 18:463–475