Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudomány kar

Szakdolgozat

Ramsey-számok

írta:
Solymos András
matematikus szak

Témavezető:

Komjáth Péter, egyetemi tanár
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi kar
Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2010.

Bevezető

Ez a dolgozat azt foglalja össze, amit Ramsey-számokról tudok, illetve amikre különböző módon felhívták figyelmemet, főleg a két-színű, szimmetrikus esetre koncentrálva.
Az elején általános tételekről és a valószínűségi módszerről, a közepén általános felső és konstruktív alsó becslésekről, kisebb Ramsey-számok pontos értékéről és $R(5,5)$ becsléséről, a végén pedig egy cikkrészletről írok, arra az estre, ha sok pontú a gráfunk és arra kérdésére keressük a választ, hogy legalább mennyi adott méretű egyszínű klikket tartalmaz.

Minden bizonyítás a felsorolt szakirodalmakból származik, ez alól kivételt képez az utolsó fejezetben található lemma és néhány közismert állítás.

A problémával valamikor 17 évesen találkoztam, egy könyvben (Szigorúan nyilvános), melyben egy Erdős Pállal folytatott beszélgetésről olvastam.

Úgy tette fel a kérdést, hogy vajon hány embert kell véletlenszerűen kiválasztanunk a telefonkönyvből, hogy biztosan legyen köztük három akik kölcsönösen ismerik egymást, vagy hárman akik egyáltalán nem.
Maga a kérdésfeltevés természetes, mégis már $R(4,4)$ *értékének meghatározása sem egyszerű feladat, ötre pedig máig senki sem tudja a pontos választ, csak becsülni tudjuk, ráadásul a magasabb esetek jól körülhatárolására pillanatnyilag még remény sincs.*

Tőle származik a következő mondat:

„Képzeljük el, hogy az embernél sokkal hatalmasabb idegen faj landol a Földön, és az R(5,5) értékét követelik, vagy elpusztítják a bolygót. Ebben az esetben hadra kéne fognunk minden számítógépet és matematikust, hogy megtaláljuk az értéket. De tegyük fel, hogy ehelyett az R(6,6) értékére kíváncsiak; ebben az esetben minden erőnkkel meg kéne próbálnunk legyőzni őket."

<u>*Definíció*</u>: Jelölje $R(k,l)$ azt a legkisebb (természetes) számot ($=:n$), melyre minden legalább n pontú egyszerű, irányítatlan gráf tartalmaz vagy egy k méretű klikket (teljes részgráfot) vagy egy l méretű független ponthalmazt.

Több szín esetére a definíció így módosul:
$R_s(k_1,k_2,\dots,k_s)$ jelentse azt a legkisebb $n\in\mathbb{N}$ számot, hogy bárhogyan is színezek ki egy n pontú teljes gráf éleit s darab színnel, biztosan tartalmaz egy egyszínű $K_{k_i}-t$ valamely i -re.

Az általánosított definíció tetszőleges részgráfra a következőképpen szól:

Legyen $R_s(G_1,G_2,G_3,\dots,G_s)$ azon n természetes számok közül a legkisebb, melyekre igaz, hogy bárhogyan is színezem ki s darab színnel K_n éleit, az biztosan tartalmazni fog valamely i -re egy i színű G_i részgráfot.

Általános tételek

<u>Állítás</u>: $R(1,k)=1$ **,** $R(2,k)=k$

<u>bizonyítás</u>:
az első esetben az a kérdés, hogy van-e pontja a gráfnak, a második pedig azt mondja, hogy ha a gráfnál nincs éle, de van legalább k pontja, akkor az tartalmaz egy üres-k-ast.

<u>Tétel</u>: $R(k,l)\leq R(k-1,l)+R(k,l-1)$

<u>bizonyítás</u>: indukcióval

$R(2,l)=l \text{ és } R(k,2)=k$, továbbá tegyük fel, hogy minden olyan (t,s) - párra igaz az állítás, melyre vagy $t\leq k$ és $s<l$, vagy $t<k$ és $s\leq l$.

Indirekt tegyük fel, hogy $n\geq R(k-1,l)+R(k,l-1)$, és azt, hogy az n pontú gráfunk nem tartalmaz se K_k-t , se $\bar{K}_l-t$

Legyen v a gráf egy tetszőleges pontja. Az ő szomszédainak száma legyenek V_1 , illetve a nem-szomszédainak: V_2 .

$V_1\leq R(k-1,l)-1$, különben vagy lenne benne egy K_{k-1} , és utóbbit v-vel kiegészítve egy K_k is, vagy tartalmazna $\bar{K}_l-t$. Hasonló okokból: $V_2\leq R(k,l-1)-1$.

De ekkor $n=V_1+V_2+1\leq 1+R(k-1,l)-1+R(k,l-1)-1=R(k-1,l)+R(k,l-1)-1$
és ezzel ellentmondásra jutottunk.

Hasonlóan az is bizonyítható, hogy $R(G,H)\leq R(G',H)+R(G,H')$, ahol G' , illetve H' , a G , illetve H gráfok egy-egy tetszőleges pontjának törlésével keletkeznek.

<u>Következmény</u>: $R(k,l)\leq\binom{k+l-2}{k-1}$

<u>bizonyítás</u>: indukcióval

Ez $R(k,2)$ és $R(2,l)$ -re igaz. Ismét tegyük fel, hogy minden olyan (t,s) - párra igaz az állítás, melyre vagy $t\leq k$ és $s<l$, vagy $t<k$ és $s\leq l$.

Ekkor:
$$R(k,l)\leq R(k-1,l)+R(k,l-1)\leq\binom{k+l-3}{k-2}+\binom{k+l-3}{k-1}=\binom{k+l-2}{k-1} ,$$

ahol az első egyenlőtlenség az előző állítás, a második pedig egy binomiális azonosság.

Következmény: $R(k,k)\le 4^k$

bizonyítás:
Ez az előző következménye:

$$R(k,k)\le\binom{2k-2}{k-1}\le\binom{2k}{k}=\frac{(2k)!}{k!k!}=\frac{(2k)!!(2k-1)!!}{k!k!}\le\left(\frac{(2k)!!}{k!}\right)^2=4^k$$

Megemlíteném még Thomason azon 1987-es eredményét, miszerint:

$$R(k,k)\le\frac{1}{\sqrt{k}}\binom{2k-2}{k-1}$$

Illetve azt, hogy Conlonnak 2009-ben sikerült a $\frac{1}{\sqrt{k}}$ -t $\frac{1}{k^{c\log k/\log\log k}}$ -ra cserélnie.

Az általános esetre Rödl bizonyította be a következőt:

$$R(k,l)\le\frac{c}{(\log(k+l))^d}\binom{k+l-2}{k-1},$$

alkalmas $c,d>0$ konstansokkal.

A későbbiekben gyakran használni fogom Goodman következő észrevételét:

$$M=\binom{N}{3}-\frac{1}{2}\sum_{v\in V}d(v)(N-1-d(v))$$

Ahol $M=N(K_3)+N(\bar{K}_3)$ (tehát M, a teljes és üres háromszögek számának összege)

Bizonyítás:

Nevezzünk egy ponthármast „rossz”-nak, ha a gráfból és a komplementer-gráfból is tartalmaz élt. Egy adott v pontra illeszkedő rossz ponthármasok száma $d(v)(N-1-d(v))$.
Ezt minden pontra összeadva minden rossz ponthármast pontosan kétszer számoltam le, és így könnyen látható, hogy a fenti egyenlőség igaz.

A véletlen módszer

A véletlen (vagy valószínűségi) módszer ötlete, hogy ha egy (véges) gráf létezésének valószínűsége $\neq 0$ *, akkor léteznie is kell olyan gráfnak ami rendelkezik a vizsgált tulajdonsággal, még ha konkrétan nem is tudjuk megkonstruálni.*

<u>*Tétel*</u>*:* Ha $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}<1$, akkor $R(k,k)>n$. Azaz $R(k,k)\geqslant 2^{\frac{k-1}{2}}$, ha $k\geqslant 3$.

<u>*Bizonyítás*</u>*:*
Színezzük ki K_n éleit két színnel, úgy hogy egymástól függetlenül $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ eséllyel legyen egy él kék vagy piros (egy ilyen, gráfot szokás $G\left(n,\frac{1}{2}\right)$ -del jelölni).
Tetszőleges S pont-k-asra, legyen E_S az az esemény, hogy S egyszínű (S ponthalmaza általa feszített részgráfban az összes él ugyan olyan színű). $P(E_S)=2\cdot 2^{-\binom{k}{2}}=2^{1-\binom{k}{2}}$. Így aztán annak az esélye, hogy valamely k-as egyszínű legfeljebb $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}$, a feltétel miatt ez kisebb mint 1 , azaz létezik minden legfeljebb n pontú gráfnak olyan színezése, melyben mindegyik k-as két-színű.

A tétel második felének bizonyítására áttérve: legyen $k\geqslant 3$ és $n\leqslant 2^{\frac{k-1}{2}}$, ekkor:

$$P(a\ gráfban\ van\ teljes\ vagy\ üres\ k-as)\leqslant\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}}<\frac{n^k}{k!}\cdot 2^{1-\binom{k}{2}}\leqslant\frac{\left(2^{\frac{k-1}{2}}\right)^k\cdot 2^{1-\binom{k}{2}}}{k!}=\frac{2}{k!}<1.$$

<u>*Tétel*</u>: Legyen G egy háromszög mentes gráf és tegyük fel, hogy minden pont legfeljebb d-ed fokú. ($d\geqslant 1$)

Akkor:

$$\alpha(G)\geqslant\frac{n\log(d)}{8d},$$

ahol $\alpha(G)$ a gráf maximális független ponthalmazának méretét jelöli és a logaritmus kettes alapú.

<u>*Bizonyítás*</u>*:*
Ha $d<16$, akkor a $\chi(G)\cdot\alpha(G)\geqslant n$ -es becslésből következik, hogy $\alpha(G)\geqslant\frac{n}{d+1}$ és ebből az állítás.

Megjegyzés: utóbbinak, tehát annak, hogy $\alpha(G)\geqslant\frac{n}{d+1}$, egy erősebb formája is belátható, méghozzá az, hogy: $\alpha(G)\geqslant\sum_{v\in V(G)}\frac{1}{d_v+1}$, ahol $d_v=d(v)$, azaz a v pont foka.
Ebből következik az állítás $d<16$ -ra: hiszen ha minden pont foka legfeljebb d , ezzel a nevezőt felülről, így a törtet alulról becsülve megkaptuk a kívánt $\alpha(G)\geqslant\frac{n}{d+1}$ becslést.

A megjegyzés bizonyítása:

Legyen $(v_{1,}v_{2,}v_{3,}\dots,v_n)$ a gráf pontjainak egy fix véletlen sorrendje.

$S:=\{v_i \mid \forall v_j\in N(v_i)\Rightarrow j>i\}$, azaz legyen S azon pontok halmaza, melyeknek, ebben a fix sorrendeben, minden szomszédja nagyobb indexű.

S független ponthalmaz, mert ha lenne benne él, akkor ennek az élnek a két végpontja közül az egyiknek nagyobb az indexe és ez a nagyobb indexű pont ellent mondana S definíciójának, hiszen van kisebb sorszámú szomszédja.

$P(v\in S)=\frac{1}{d(v)+1}$, mivel $|N(v)\cup\{v\}|=d(v)+1$, és a pontok egy fix véletlen sorrendjére, pontosan az egyiket választhatjuk be $S-be.$

Használva a várható érték linearitását:

$$E(|S|)=\sum_{v\in V(G)}P(v\in S)=\sum_{v\in V(G)}\frac{1}{d(v)+1}\Rightarrow\alpha(G)\geqslant\sum_{v\in V(G)}\frac{1}{d(v)+1}\left(\geqslant n\cdot\frac{n}{\sum d(u)+1}=\frac{n^2}{2\mathrm{m}+n}\right)$$

ezzel a megjegyzés állítását bebizonyítottuk.

Visszatérve a tétel bizonyításához:

Feltehető, hogy $d\geqslant 16$. Legyen W egy véletlenül választott független ponthalmaz, egyenletesen kiválasztva G összes független halmaza közül. Minden $v\in V$ -re legyen $X_v:=d|\{v\}\cap W|+|N(v)\cap W|$. Azt állítom, hogy $E(X_v)\geqslant\frac{\log(d)}{4}$.

Legyen H a $V\setminus(N(v)\cup\{v\})$ által feszített részgráf és jelöljük $S-sel$ H egy fix független ponthalmazát. Ezen túl, legyen X az $S-sel$ nem szomszédos $N(v)$ -beli pontok halmaza. $|X|:=x$.
Elegendő megmutatni, hogy:

$$E(X_v|W\cap V(H)=S)\geqslant\frac{\log(d)}{4}$$

feltételes várható értékre adott becslés érvényes, minden lehetséges S -re.

Vegyük észre, hogy $W\cap V(H)=S$ -hez pontosan 2^x+1 lehetséges W létezik, ugyanis: egy lehetőség, hogy $W=S\cup\{v\}$, illetve van még 2^x lehetőség melyre $v\notin W$ és W X egy részhalmazának és S -nek az uniójaként áll elő.

Ebből következik, hogy a feltételes várható érték értéke épp: $\frac{d}{2^x+1}+\frac{x2^{x-1}}{2^x+1}$.

Azt, hogy $\frac{d}{2^x+1}+\frac{x2^{x-1}}{2^x+1}\geqslant\frac{\log(d)}{4}$ indirekt módon mutatom meg: a fordított irányú szigorú egyenlőtlenségből következne, hogy $2^x(\log(d)-2x)>4d-\log(d)$, illetve ebből és $x\geqslant 1$ azon következményéből, hogy $\log(d)>2x\geqslant 2$ láthatjuk, hogy: $4d-\log(d)<\sqrt{d}(\log(d)-2)$ ami ellentmond azzal, hogy $d\geqslant 16$.

Ezért:

$$E(X_v|W\cap V(H)=S)\geqslant\frac{\log(d)}{4}$$

A várható érték linearitása miatt $\frac{n\log(d)}{4}\leq E\left(\sum_{v\in V}X_v\right)$, másrészt legfeljebb $2d\,E(|W|)$, mert a szummában minden $u\in W$ d -nyit ad hozzá X_u -hoz és a fokát a többi X_v -hez, ami legfeljebb d nagyságú.

Ebből következik, hogy W méretének várható értéke legalább $\frac{n\log(d)}{8d}$.

Következmény: Létezik olyan b szám, hogy $R(3,k)\leqslant\frac{bk^2}{\log(k)}$, minden $k>1$ -re.

Bizonyítás:

Legyen $G=(V,E)$ egy $\frac{8k^2}{\log(k)}$ pontú háromszög-mentes gráf.
Ha van benne legalább k-ad fokú pont, akkor annak szomszédai, a háromszög-mentesség miatt, független ponthalmazt alkotnak.
Ha nincs k-ad fokú pontja, akkor az előző tétel értelmében, tartalmaz $\frac{8k^2}{\log(k)}\frac{\log(k)}{8k}=k$ méretű független ponthalmazt.

Így mindkét esetben $\alpha(G)\geqslant k$.

Érdemes még megemlíteni Kim híres tételét: $R(3,k)>\frac{b'k^2}{\log k}$, alkalmas b'-re.

Egy érdekes felső becslés

<u>Motiváció</u>: *Ha egy gráfnak (legalább)* $4\mathrm{R}(k-2,k)+2$ *pontja van, akkor közülük két pontot kitüntetve osszuk négy különböző csoportba a gráf maradék pontjait, a következő módon: vannak közös szomszédaik, közös nem-szomszédai, olyanok, akik az elsőnek szomszédai, de a másodiknak nem, illetve olyanok, akik az elsőnek nem szomszédai, de a másodiknak igen. Így lesz legalább az egyikben* $R(k-2,k)$ *darab pont. Innen nem tudunk tovább lépni, hiszen az utóbbi három esetben* K_{k-2} *is előállhat részgráfként. Ezért érdekesek a következő bizonyítások*:

<u>Jelölések</u>: $N(K_k)$:= a K_k-k száma a gráfban és ha $N(U_l)-et$ vagy $N(\bar{K}_l)-et$ írok, akkor az üres l -esek számára gondolok.

<u>Lemma</u>: Ha egy gráf nem tartalmaz se K_k-t , se U_l-et, akkor a következők érvényesek:

(1) $(s+1)N(K_{s+1})\leq N(K_s)[R(k-s,l)-1]$ minden $s=1,2,3,\ldots k-2$ -re, és

(2) $(t+1)N(U_{t+1})\leq N(U_t)[R(k,l-t)-1]$ minden $t=1,2,3,\ldots l-2$ -re fennáll.

(3) $N(K_{k-1})+N(U_{k-1})\leq N(K_{k-2})+N(U_{k-2})$

<u>A lemma bizonyítása</u>:

(1) azon pontok száma, melyek egy adott K_s -el együtt egy K_{s+1} -et alkothatnak, legfeljebb $R(k-s,l)-1$ lehet, mert különben ők K_s -el kiegészülve, vagy egy K_k-t vagy egy U_l-et alkotnának.

Másrészt tetszőleges K_{s+1} s+1 darab K_s -et tartalmaz. Ezekből következik, hogy:
$(s+1)N(K_{s+1})\leq N(K_s)[R(k-s,l)-1]$

(2) alkalmazzuk a gráf komplementerére a Lemma előző pontját.

(3) Mivel $R(2,k)=R(k,2)=k$, alkalmazzuk (1)-et $s:=k-2$ -re, így:

$$(k-1)N(K_{k-1})\leq N(K_{k-2})(R(k-(k-2),k)-1)=N(K_{k-2})(R(2,k)-1)=(k-1)N(K_{k-2}) ,$$

adjuk ezt össze (2) $s=k-2$ esetével, ezzel bebizonyítottuk (3)-at:

$$N(K_{k-1})+N(U_{k-1})\leq N(K_{k-2})+N(U_{k-2}) .$$

<u>Megjegyzés</u> *(jelölje n a pontok számát):*

$$N(K_2)+N(U_2)=\frac{1}{2}(n-1)n>2\mathrm{n}=N(K_1)+N(U_1), ha\, n>5$$

$$N(K_2)+N(U_2)\leq N(K_1)+N(U_1), ha\, n\leq 5$$

illetve:

$$N(K_3)+N(U_3)=\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n-\frac{1}{2}\sum d_i(n-1-d_i)\geq$$

$$\geq\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n-\frac{1}{8}n(n-1)^2=\frac{n(n-1)(n-5)}{24}\geq\binom{n}{2}=N(K_2)+N(U_2), \quad ha\, n\geq 17$$

$$N(K_3)+N(U_3)\leq N(K_2)+N(U_2), ha\, n\leq 17 \quad ,$$

ahol $d_{1,} d_{2,} d_{3,} \ldots d_n$ G fokszámsorozata.

Következmény: Ha $n>R(k,k)-1$, akkor $N(K_{k-1})+N(U_{k-1})>N(K_{k-2})+N(U_{k-2})$

Szintén az előző lemma miatt:

$$2\mathrm{N}(K_2)\leq N(K_1)[R(k-1,l)-1], illetve$$
$$2\mathrm{N}(U_2)\leq N(U_1)[R(k,l-1)-1]$$

Így $n(n-1)=2(N(K_2)+N(U_2))\leq n[R(k-1,l)-1+R(k,l-1)-1]$.

Megjegyzés:

Ha $R(k-1,l)$ és $R(k,l-1)$ is páros, akkor $R(k,l)\leq R(k-1,l)+R(k,l-1)-1$.

Ha $R(k,l)$ páratlan, akkor az egyenlőtlenség paritási okokból igaz.
Ha páros, akkor mivel $n=N(K_1)=N(U_1)$ páratlanok, $2\mathrm{N}(K_2)\leq N(K_1)[R(k-1,l)-1]-1$ is igaz, mert a jobboldalon eredetileg két páratlan szám szorzata állt, a baloldal pedig páros.
Ehhez hasonlóan belátható, hogy: $2\mathrm{N}(U_2)\leq N(U_1)[R(k,l-1)-1]-1$.

Utóbbiakból következik, hogy: $n(n-1)=2(N(K_2)+N(U_2))\leq n[R(k-1,l)+R(k,l-1)-2]-2$

A Lemma $s=t=2$ -re már érdekesebb következményt hordoz magában:

Tétel: Legyenek a,b,c olyan, hogy: $a+1\geq R(k-2,l), b+1\geq R(k,l-2), c+1\geq R(k-1,l)$.

Továbbá, ha $n:=R(k,l)-1\geq 2\mathrm{c}+1+\frac{(b-a)}{3}$ és $k\leq l$, akkor:

$$R(k,l)\leq\frac{(b+3\mathrm{c}+3)}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(b+3\mathrm{c}+3)^2-8-4\mathrm{a}-4(1+c)(3\mathrm{c}+b-a)}$$

Bizonyítás: Legyen $s=t=2$, $n:=R(k,l)-1$ és G legyen egy olyan n pontú gráf, mely nem tartalmaz sem teljes k -ast, sem üres l -est. A Lemmát alkalmazva:

$$3\mathrm{N}(K_3)+3\mathrm{N}(U_3)\leq aN(K_2)+bN(U_2)$$

Korábbról tudjuk még, hogy:

$$N(K_3)+N(U_3)=\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i(n-1-d_i)$$

, illetve $N(K_2)+N(U_2)=\frac{1}{2}(n-1)n$

Így:

$$3\left[\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i(n-1-d_i)\right]\leq a(N(K_2)+N(U_2))+(b-a)N(U_2)=$$

$$=\frac{a}{2}(n-1)n+\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n}(n-1-d_i)$$

ebből:

$$(n-2-a)(n-1)n\leq 3\sum_{i=1}^{n} d_i(n-1-d_i)+(b-a)\sum_{i=1}^{n}(n-1-d_i)=\sum_{i=1}^{n}(n-1-d_i)(3d_i+b-a) \quad ([\#])$$

Legyen $f(d)=(n-1-d)(3d+b-a),$ ennek maximuma a $d_0=\frac{(3n-3-b+a)}{6}$ -ban van.

Mivel a gráfban nincs teljes k -as, se üres l -es és $n\geq 2c+1+\frac{(b-a)}{3}$, ezért $d_i\leq c\leq d_0$.
Így: $f(d_i)\leq f(c),$ ezt [#]-ra alkalmazva a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$(n-2-a)(n-1)n\leq\sum_{i=1}^{n} f(d_i)\leq n(n-1-c)(3c+b-a)$$

Utóbbit rendezve és bal oldalt teljes négyzetté alakítva:

$$\left(n-\frac{1}{2}(3c+b+3)\right)^2\leq\frac{1}{4}(b+3c+3)^2-2-a-(1+c)(3c+b-a)$$

adódik és ebből az állítás következik.

<u>*Következmény*</u>*:* $R(k,k)\leqslant 4R(k-2,k)+2$

<u>*Bizonyítás*</u>*:* G legyen olyan, hogy nem tartalmaz, se K_k-t, ,se $\bar{K}_k-t$ és pontjai száma, $n:=R(k,k)-1$. Mivel:

$$f(d_i)\leqslant f(d_0)=\frac{1}{12}(3n-3+b-a)^2$$

$a=b$ és [#] miatt:

$$n(n-1)(n-2-a)\leqslant\frac{1}{12}n(3n-3)^2$$

$$\downarrow$$

$$(n-1)(n-2-a)\leq\frac{1}{12}9(n-1)^2$$

$$\downarrow$$

$$4n-8-4a\leq 3n-3$$

Ebből következik, hogy: $n\leqslant 5+4a$, végül $a:=R(k-2,k)-1$ -et, helyettesítve:

$R(k,k)-1\leqslant 5+4(R(k-2,k)-1)$ adódik. Tehát: $R(k,k)\leqslant 4R(k-2,k)+2$.

Most pedig az utóbbinak egy szerintem nagyon szép általánosítása következik:

<u>*Tétel*</u>*:* Legyenek G és H legalább 3 pontú gráfok. $A:=R(G'',H)$ és $B:=R(G,H'')$, ahol G'' -t, illetve H'' -t úgy kapjuk meg G -ből, illetve H -ból, hogy töröljük két (tetszőleges) pontját. Ekkor:

$$R(G,H)\leqslant A+B+2+2\sqrt{\frac{(A^2+AB+B^2)}{3}}$$

<u>*Bizonyítás*</u>*:*
Legyen $N=R(G,H)-1$. Ekkor van olyan színezése a K_N -nek, hogy se piros G -t, se kék H -t nem tartalmaz. Legyen E_p a piros élek halmaza, E_k pedig a kékeké. Jelölje V a ponthalmazt és $F_p:=(V,E_p)$, $F_k:=(V,E_k)$, a V piros-, illetve kék élei által meghatározott részgráfokat.

Ismét a háromszögek számával fogunk dolgozni:
Az egyszínű háromszögek száma a kétszínű K_N -ünkben:

$$M=\frac{1}{3}\left(\sum_{uv\in E_p}\left|N_p(u)\cap N_p(v)\right|+\sum_{uv\in E_k}\left|N_k(u)\cap N_k(v)\right|\right) \quad ,$$

ahol a $N_p(u)$ és $N_k(u)$: u szomszédainak halmaza F_p -ben, illetve F_k -ban.
Ha $uv\in E_p$, akkor G'' egy példánya $N_p(u)\cap N_p(v)$ -ben egy piros G -t eredményezne, ezért $\left|N_p(u)\cap N_p(v)\right|\leqslant R(G'',H)-1=A-1$. Hasonló okokból kék színre alkalmazva arra következtethetünk, hogy: $\left|N_k(u)\cap N_k(v)\right|\leqslant R(G,H'')-1=B-1,$ tetszőleges $uv\in E_k$ élre. Ezért az egyszínű háromszögek M értékére a következő becslés adható:

$$M\leqslant\frac{(A-1)|E_p|+(B-1)|E_k|}{3}$$

Goodman következő eredményét fogom használni: (ld. 3. oldal)

$$M=\binom{N}{3}-\frac{1}{2}\sum_{v\in V}d_p(v)(N-1-d_p(v)) \quad ,$$

ahol $d_p=|N_p(v)|$.

Tegyük fel, hogy $d_1,d_2,\dots,d_N$ olyanok, hogy $\sum_{i=1}^{N}d_i=s$, akkor $N\sum_{i=1}^{N}d_i^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{N}d_i\right)^2=s^2$, és egyenlőség csak akkor lehetséges, ha minden $d_i=\frac{s}{N}$. Így:

$$\sum_{i=1}^{N}d_i(N-1-d_i)=(N-1)s-\sum_{i=1}^{N}d_i^2\leqslant(N-1)s-\frac{s^2}{N}$$

Mivel $\sum_{v\in V}d_p(v)=2|E_p|$, az utóbbi egyenlőtlenséget használva M -et a következőképpen becsülhetjük alulról:

$$M\geqslant\binom{N}{3}-|E_p|\left(N-1-\frac{2|E_p|}{N}\right)=\frac{N(N-1)(N-5)}{24}+\frac{2}{N}\left(|E_p|-\frac{1}{2}\binom{N}{2}\right)^2$$

és az egyenlőtlenség szigorú, kivéve ha $\frac{2|E_p|}{N}$ egész, és $d_p(v)=\frac{2|E_p|}{N}$, minden v -re.

Legyen x az a szám, amire: $|E_p|=\frac{1}{2}\binom{N}{2}+x$ és $|E_k|=\frac{1}{2}\binom{N}{2}-x$,ahol $|x|\leqslant\frac{1}{2}\binom{N}{2}$.

Így M alsó, illetve felső becslése a következőképpen módosul:

$$\frac{N(N-1)(N-5)}{24}+\frac{2\mathrm{x}^2}{N}\leqslant M\leqslant\frac{(A-1)|E_p|+(B-1)|E_k|}{3}=\frac{N(N-1)(A+B-2)}{12}+\frac{(A-B)x}{3}$$

Rendezve az egyenlőtlenség jobb és bal oldalát:

$$\frac{N(N-1)[N-(2\mathrm{A}+2\mathrm{B}+1)]}{24}\leqslant\frac{(A-B)x}{3}-\frac{2\mathrm{x}^2}{N}$$

A jobb oldalt maximalizáljuk x -ben ($(-\infty,\infty)$ -n, nem törődve a rá rótt korlátokra), amit az $x=\frac{N}{12}(A-B)$ -ben vesz fel, így:

$$(N-1)[N-(2\mathrm{A}+2\mathrm{B}+1)]\leqslant\frac{(A-B)^2}{3}$$

Ebből pedig következik a tétel állítása, hiszen a bal oldal $=(N-1)^2-2(N-1)(A+B)$, amiből következik, hogy:

$$(N-1)^2-2(N-1)(A+B)+(A+B)^2\leqslant\frac{(A-B)^2}{3}+(A+B)^2 \text{ , és ebből}$$

$$((N-1)+(A+B))^2\leqslant\frac{(A-B)^2}{3}+(A+B)^2=\frac{A^2-2\mathrm{AB}+B^2+3\mathrm{A}^2+6\mathrm{AB}+3\mathrm{B}^2}{3}=\frac{4}{3}(A^2+AB+B)$$

most már csak az egyenlőtlenség két legszélső részét rendezve:

$$(N-1)-(A+B)\leqslant 2\sqrt{\frac{A^2+AB+B^2}{3}}$$

és emlékezve N definíciójára, a tételt bizonyítottuk.

Ebből újfent következik, a $R(k,k)\leqslant 4R(k,k-2)+2$, hiszen ekkor $G=K_k=H$ -ra, illetve $A=R(k,k-2)=B$ -re alkalmazzuk az előzőt:

$$R(k,k)\leqslant A+A+2+2\sqrt{\frac{(A^2+A\cdot A+A^2)}{3}}=2A+2+2\sqrt{\frac{3A^2}{3}}=2\mathrm{A}+2+2\mathrm{A}=4\mathrm{R}(k,k-2)+2.$$

Pontosan ugyan ezzel a gondolatmenettel belátható, hogy: $R(G,G)\leq 4\mathrm{R}(G'',G)+2$

Konstruktív alsó becslések

Az ötlet onnan származhat, hogy ha $k-1$ *db diszjunkt kék* K_{l-1} *-est csupa piros éllel kötök össze, akkor ebben nem lesz se piros* K_k *, se kék* K_l *. Így* $R(k,l)>(k-1)(l-1)$ *.*
Speciálisan: $R(k,k)\geq k^2-2\mathrm{k}+2$ *.*

<u>*Tétel*</u>: $R(m,n)\geq R(m,n-k)+R(m,k+1)-1$, ha $k\in[1,\dots n-2]$.

<u>*Elnevezés*</u>: $G\,egy\,(k,l)-\,jó\,gráf\,,ha\,nem\,tartalmaz\,se\,K_k-t\,,se\,\bar{K}_l-et\,,$ vagy ahogy itt fogok fogalmazni: nem tartalmaz se piros K_k -t, se kék K_l -t.
(szokás egy $R(k,l)-1$ pontú (k,l) -jó gráfot $(k,l)-$ kritikusnak is nevezni)

<u>*Bizonyítás*</u>:
Legyen $r_1:=R(m,n-k)$, $r_2:=R(m,k+1)$. Vegyünk egy K_{r_1-1} -et egy $(m,n-k)$ -jó-, és egy tőle diszjunkt K_{r_2-1} -et egy $(m,k+1)-jó$ színezéssel. A két komponens közti élek legyenek mind kékek. Ebben a gráfban nincs piros $K_m,$ hiszen az eredetiekben külön-külön nem volt és minden új él kék, de a legnagyobb kék teljes is legfeljebb $(n-k-1)+(k+1-1)=n-1$ méretű lehet, a két komponensben a két legnagyobb méretű összege. Így $R(m,n)>r_1+r_2-2$.

Az előzőnek könnyen adódó következménye $k=1$ -re, az hogy:
$R(m,n)\geq R(m,n-1)+R(m,1+1)-1=R(m,n-1)+m-1$. Sőt, utóbbit még egyszer alkalmazva, most a másik változóban, az kapjuk, hogy: $R(m,n)\geq R(m-1,n-1)+m+n-3$.
Tehát: $R(k,k)-R(k-1,k-1)\geq 2\mathrm{k}-3$.

Ennek erősítése a következő:
(ami épp kétszer annyit bizonyít a szomszédos szimmetrikus Ramsey számok különbségéről:
$R(k,k)-R(k-1,k-1)\geq 4\mathrm{k}-6$ -ot)

<u>*Tétel*</u>: $R(m,n)\geq R(m,n-1)+2\mathrm{m}-3$, feltéve, hogy $m,n\geq 2$

<u>*Bizonyítás*</u>: legyen $G=K_{r-1}$ egy $(m,n-1)$ -jó gráf, $r:=R(m,n-1)$. G -nek tartalmaznia kell egy piros K_{m-1} -et, különben hozzáadva egy pontot, amit minden régi ponttal piros éllel kötök össze, kialakulna egy $(m,n-1)$ -jó színezés r ponton, ami lehetetlen.
A bizonyítás során csak egy piros K_{m-2} létezését fogom használni: ennek pontjai legyenek $u_1,\dots,u_{m-2}$. Első lépésben adjunk hozzá $m-2$ darab pontot, $v_1,\dots,v_{m-2}$ -t. Minden i -re a $v_i u_i$ legyen kék, minden más $x\in G$ -re legyen a $v_i x$ él ugyan olyan színű, mint az $u_i x$ él. Így minden $u_i v_j$ él piros $(j\neq i)$. Illetve legyen minden $v_i v_j$ él is piros.
Idáig egy $H:=K_{r+m-3}$ -at színeztünk ki, azzal, hogy „kiemeltem” még egy példányban a piros K_{m-2} -t.

H -ban nincs piros K_m , mivel az eredeti nem tartalmazott és ha ebben lenne, akkor annak szükségképpen használnia kell új pontokat is $(v_i-ket),$ de minden ilyen i-re, u_i -t nem használhat (de u_j -t $j\neq i$ -re igen), mert az $u_i v_i$ élek kékek és mivel minden más él ugyan olyan színű mint az eredetiben volt, ezért ha az újban lenne, akkor már az eredetiben is lett volna egy piros K_m .

Ellenben kék K_{n-1} -et tartalmazhat, de ha van is ilyen benne, az csak egy (u_i,v_i) párt használhat.

Most adjunk $m-1$ darab pontot hozzá H -hoz, $x_1, \ldots, x_{m-1}$ -et. Az $x_i x_j$ élek legyenek pirosak minden $i \neq j$ -re és az $x_i y$ élek kékek, minden y -ra ami nem u_j , v_j vagy x_j . Végül az $u_i x_j$ élek legyen pirosak, ha $i \geq j$ (egyébként kékek) és a $v_i x_j$ élek pirosak, ha $i < j$, $i \geq j$ -re pedig kékek.

Már csak annak igazolása hiányzik, hogy a kettő-színezett $r+2\text{m}-4$ -esünkben, nincs se piros K_m , se kék K_n . Egy maximális piros teljes részgráfnak x_i -t is szükséges használnia, de onnan piros él csak u_j , v_j vagy x_j -be fut. Legyen x_k és x_l a legkisebb és legnagyobb indexű x_i a feltételezett K_m -ben használtak közül, ezek száma nem nagyobb mint $l-k+1$. Ezenkívül minden érintett u_i -re: $i \geq l$ és hasonlóan minden fellépő v_j -re $j < k$.
Tehát legfeljebb $m-1-l$ u -t, $k-1$ v -t használhatunk, így összesen legfeljebb $(l-k+1)+(m-1-l)+(k-1)$ pontból állhat, ami $=m-1$.

A kék K_n -es létezésének vizsgálata maradt hátra: tegyük fel, hogy van benne: ez pontosan egy x_i -t használhat, így aztán ez egy H -beli K_{n-1} -et egészít ki, mivel ez csak egy (u_i, v_i) párt használhat, ellenmondásra jutottunk, mert vagy az $x_i u_j$ vagy az $x_i v_j$ él piros.

Az utóbbi tétel egymás utáni alkalmazásából következik, hogy: $R(k,k) \geq 2k^2 - 6k + 6$

Tétel: $R(k,k) > ck^3$

Bizonyítás: Legyenek a G gráf pontjai egy k elemű halmaz három elemű részhalmazai!
Ekkor $|V(G)| = \binom{k}{3}$. Két pontja akkor legyen összekötve, ha a hozzájuk tartozó két háromelemű halmaz metszete pontosan 1 elemű.
Legyen $H \subseteq G$ egy legalább 8 pontú teljes részgráf. Mivel $H-ban$ van olyan x pont, aminek az egyik eleme, legalább három másik H -beli pontnak is eleme, ezért ezt a négy pontot csak úgy metszheti egy háromelemű részhalmaz, ha utóbbi tartalmazza x -et, ezért a H -beli pontokhoz tartozó elemhármasok pontosan ebben az x -ben metszik egymást, így $|H| \leq \frac{k-1}{2}$.
(Hiszen a pontokhoz tartozó három elemű részhalmazok uniója $\leq k$ elemű.)

Most legyen H' : $\bar{G}$ egy teljes részgráfja. Vezessük be H' pontjai között a $g_1 \cap g_2 \neq \emptyset$ relációt. Ez egy ekvivalencia reláció, mert önmagával mindenki relációban áll és a metszet kommutatív művelet, tehát a reláció reflexív és szimmetrikus, a tranzitivitás pedig abból adódik, hogy ha g_1 és g_3 is legalább két elemben metszi a háromelemű $g_2 - t$, akkor az ő metszetük sem nem lehet üres.
Ha tudnánk, hogy minden ekvivalenciaosztály pontjainak száma nem nagyobb, mint a hozzájuk tartozó háromelemű halmazok uniójának elemszáma, akkor minthogy a különböző osztálybeli pontokhoz tartozó hármasok egyesítési nem metszik egymást, az adódik, hogy H' pontjainak a száma, legfeljebb az alaphalmaz elemszáma, azaz k.
A ≤ 4 pontú osztályokra az állítás igaz. Ha pedig egy osztály ≥ 5 pontot tartalmaz, akkor az előbbihez hasonló módon belátható, hogy bármely két pontjához tatozó elemhármas metszete megegyezik, így az egyesítés a pontok számánál kettővel nagyobb méretű halmaz.

Ebből extremális halmazrendszerekre vonatkozó tételekkel, Frankl Péter és Wilson a következő, lényegesen erősebb konstruktív alsó becslést sikerült bebizonyítania: $R(k,k) > k^{\frac{c \log k}{\log \log k}}$.

Egy kis kitérő

Jelöljük $P_k - val$ *a k hosszú (tehát k éllel rendelkező) utat.*

<u>*Állítás*</u>: Ha $k \geq l$, akkor $R(P_k, P_l) = k + \left[\frac{(l+1)}{2}\right]$

<u>*Bizonyítás*</u>:
Jelölések: egy k hosszú út pontjai: $U_1, U_2, \ldots U_{k+1}$, élei pedig: $U_1 U_2, U_2 U_3, \ldots U_k U_{k+1}$.
és ha még hozzáadom az $U_{k+1} U_1$ élt akkor egy $k+1$ hosszú kört kapok.

először a $\leq -t$ fogom bebizonyítani, k-ra vonatkozó indukcióval:
A tétel $k=1$ -re igaz és felteszem, hogy minden k -nál kisebb számra is már igaz az állítás.

Vegyünk egy G $k + \left[\frac{(l+1)}{2}\right]$ pontú gráfot. Ha $l < k$, akkor G bármely $k - 1 + \left[\frac{(l+1)}{2}\right]$ pontú részgráfjában van egy $k-1$ hosszú út vagy a komplementerében egy l hosszú.
Ha $k = l$, akkor egy $k - 1 + \left[\frac{l}{2}\right]$ pontú részgráfot vegyünk. Így vagy ő vagy a komplementere tartalmazni fog egy $k-1$ hosszú utat.

Mindegyik esetben feltehető, hogy a leghosszabb út G -ben $k-1$ hosszú.
Legyen egy ilyen út egymást követő pontjai: $U_{1,} U_{2,} \ldots U_k$ és $U := \{U_{1,} U_{2,} \ldots U_k\}$.
A többi pont legyen: $V_{1,} V_{2,} \ldots, V_{\left[\frac{(l+1)}{2}\right]}$, és $V := \left\{V_{1,} V_{2,} \ldots, V_{\left[\frac{(l+1)}{2}\right]}\right\}$.
Szükségünk lesz a következő tulajdonságokra:

(1) minden $V_i \in V$ -re vagy $V_i U_j \in \bar{G}$ vagy $V_i U_{j+1} \in \bar{G}$
(2) minden $V_i \in V$ -re $V_i U_1 \in \bar{G}$ és $V_i U_k \in \bar{G}$
(3) tetszőleges $V_{i_1}, V_{i_2}, V_{i_3}$ -ra és U_j, U_{j+1} -re az utóbbiakból legalább az egyik, össze van kötve $\bar{G}$ -ben legalább kettőhöz az előbbiekből.

<u>*Bizonyítás*</u>:
A (2) -es azt mondja ki, hogy az út nem hosszabbítható egyik végén sem (tehát nem hosszabb mint $k-1$).
Az (1) -es azt, hogy nem lehet az utat közbülső, egymást követő pontokban meghosszabbítani.
A (3) -as ha nem lenne igaz, akkor U_j és U_{j+1} is, V_{i_1} , V_{i_2} , V_{i_3} közül legalább kettővel össze lenne kötve G -ben, tehát legalább az egyikük U_j -vel és U_{j+1} -vel is össze lenne kötve, ami ellentmond (1) -el.

Vegyünk egy olyan maximális utat $\bar{G}$ -ben, ami nem tartalmazza az U_1 és U_k pontokat, minden egyes éle U -beli pontot köt össze V -belivel és végpontjai V -ben vannak.
Ennek az útnak a végpontjai legyenek $A, B \in V$ és magának az útnak a neve pedig legyen: S .

Ha S V -nek minden pontját tartalmazná, akkor az $U_1 A, B U_k$ éleket hozzávételével egy

$2\left[\frac{(l+1)}{2}\right]\geq l$ hosszú utat kapnánk $\bar{G}$ -ben. Tehát feltehető, hogy $W:=V\setminus S\neq\emptyset$.

Vegyünk egy újabb maximális utat $\bar{G}$ -ben (legyen ez q) a következő tulajdonságokkal: nem használ S -beli pontot, se U_1 -et, se U_k -t és minden éle U és W -beli pontokat köt össze, végpontjai legyenek a W -beli C és D .

Megmutatom, hogy V minden pontja vagy S - vagy q -beli:

Tegyük fel, hogy $X\in V$, de $X\notin S$ és $X\notin q$. Nyilván S -nek és q -nak együttesen legfeljebb $|V(S\cup q)\cap U|\leq\left[\frac{(l+1)}{2}\right]-3<\left[\frac{(k-3)}{2}\right]=\left[\frac{(k-1)}{2}\right]-1$ pontja van U -ban, hiszen $l\leq k\Leftrightarrow l<k+1$.

Így léteznie kell olyan $U_i, U_{i+1}\in\{U_2, U_3, \dots U_{k-1}\}$ pontoknak melyek, se q -hoz, se S -hez nem tartoznak.

Alkalmazzuk (3)-at a V -beli A -ra, C -re és X -re és az U -beli U_i, U_{i+1} -re, ami ellentmond S és q maximalitásával.
Így S és q együttes hossza $2\left[\frac{(l+1)}{2}\right]-4$, így az U_1A, BU_k és az U_kC, DU_1 élek hozzá vételével kapunk egy $2\left[\frac{(l+1)}{2}\right]$ hosszú kört $\bar{G}$ -ben: ha $2\nmid l$, akkor megkaptuk a kívánt l hosszú utat, de páros esetben is van egy $l-1$ hosszú.
Vegyük észre, hogy még mindig kimaradt két egymást követő pontja U -nak és (1) miatt ezek közül legalább az egyike össze van kötve körbeli ponttal, így ismét kaptunk egy l hosszú utat $\bar{G}-ben$.

Példa egy kritikus gráfra: (tehát példa eggyel kevesebb pontú, se k hosszú utat G -ben, se l hosszú utat $\bar{G}$ -ben nem tartalmazó gráfra, ismét feltesszük, hogy $k\geq l$)
vegyünk egy K_k és egy $\bar{K}_{\left[\frac{(l+1)}{2}\right]-1}=\emptyset_{\left[\frac{(l+1)}{2}\right]-1}$ diszjunkt unióját (tehát ne fusson él köztük): ebben nincs P_k hiszen az csak a teljes gráfban lehetne, de az még csak nem is tartalmaz $k+1$ pontot. A komplementerben sincs P_l mivel a leghosszabb $\bar{G}-beli$ utak a két halmaz között vezető éleket is használják, de így is csak legfeljebb $2\left[\frac{(l+1)}{2}-1\right]\leq l+1-2=l-1<l$ hosszú utat kaphatunk.

<u>Következmény</u>: $R(k\ db\ független\ él, l\ db\ független\ él)=2\mathrm{k}+l-1$, $(k\geq l)$

<u>Bizonyítás</u>: Ez az előző következménye:

Egy három hosszú út 2 darab független élt tartalmaz.
Ebből könnyen látszik, hogy egy $2\mathrm{k}-1$ hosszú út k darab független élet tartalmaz, így: $R(k\ db\ független\ él, l\ db\ független\ él)\leq R(P_{2\mathrm{k}-1}, P_{2l-1})=2\mathrm{k}-1+\left[\frac{(2l-1)+1}{2}\right]=2\mathrm{k}+l-1$.

Kritikus gráfnak megfelel az előző teljes $2\mathrm{k}-1-es$ és üres $l-1-es$ diszjunkt uniója.

Egy pillanatra képzeljük el, hogy egy gráf pontjai az emberiség által ismert tételek, élei pedig jelentsék azt, hogy van valamilyen összefüggés/kapcsolat a kettő között.

Megfordítom a Ramsey kérdést: nem azt kérdezem, hogy legalább hány pontúnak kell lennie egy 2-színű gráfnak, hogy biztosan tartalmazzon, ilyen vagy olyan részgráfot, hanem azt, hogy fix n esetén, mely (k,l) *párokra igaz az, hogy* $R(k,l)\leq n$.

Ezt tekintve azt mondhatom, hogy egy klikk egymással összefüggő állításokat fog össze, illetve egy független ponthalmaz „axiomatikus" jellegű állítások gyűjteménye.
Ezzel a gondolatmenettel csak az a probléma, hogy igazából feltehető a tranzitivitás.
Így elég lenne utakat nézni, de ennél sokkal jobb összefüggő komponenseket vizsgálni:

Definíció: $f_r(n)$ jelölje azt a legnagyobb számot, hogy akárhogyan is színezünk ki egy n pontú teljes gráfot r darab színnel, abban mindenképpen legyen egy legalább $f_r(n)$ méretű egy-színű összefüggő részgráf.

$r=2$ -re ez egy jól ismert állítás: *Egy gráf összefüggő, ha a komplementere nem az.*

Ez könnyen bizonyítható: ha a gráf nem összefüggő, akkor felbomlik komponensekre és minden pont ami különböző komponensben van az a komplementerben össze lesz kötve egymással.

Állítás: r legyen páratlan és $n:=(r+1)v$, $(v=1,2,\ldots)$, ekkor:

$$f_r(n)\leq\frac{2}{r+1}n$$

Bizonyítás: Nézzük először az $n=2\mathrm{k}$ esetet. Itt tehát független élrendszer kell, minden színben. Ha jól ki tudnám színezni a $2\mathrm{k}$ pontú teljes gráf éleit $2\mathrm{k}-1$ színnel, akkor minden egyes pontot v méretűvé „felfújva" és egy v-esen belül az éleket tetszőlegesen kiszínezve készen volnánk, mert ha $r+1=2\mathrm{k}$, akkor keletkezett egy $v(r+1)=n$ $\left(\Rightarrow v=\frac{1}{r+1}n\right)$ pontú gráfom amiben legfeljebb $2\mathrm{v}$ méretű összefüggő rész van, hiszen az eredeti (a felfújás előtti) gráfban a jó színezés miatt minden egyszínű út egy élből áll. (különben lenne olyan pont amibe két ugyan olyan színű él futna be).
Tehát a legnagyobb összefüggő egyszínű rész $=f_r(n)\leq 2\mathrm{v}=2\frac{n}{r+1}$.

Hátra maradt $K_{2\mathrm{k}}$ kiszínezése $2\mathrm{k}-1$ színnel: tetszőleges méretű K_n -t n színnel ki tudunk színezni, úgy hogy: $V:=\{v_0,v_1,\ldots v_{n-1}\}$ és a v_iv_j él legyen $i+j \pmod n$ színű.
Páratlan n -re nincs is kevesebb szín használó színezés, de páros n-re van:

Színezzünk ki egy K_{n-1} -et az előbbi módon $n-1$ színnel, ezután vegyünk fel egy új pontot: v_{n-1} -et. Minden i -re a v_i ponton a $2\mathrm{i} \pmod{n-1}$ és minden $i\in\{0,1,2,\ldots n-2\}$ -re legyen $w_i:=2\mathrm{i} \pmod{n-1}$. Mivel $n-1$ páratlan ezért $i\neq j\Rightarrow w_i\neq w_j$ így a v_iv_{n-1} éleket w_i -re színezve elkészült a $K_{2\mathrm{k}}$ egy $2\mathrm{k}-1$ színezését, amiben nincs olyan pont amibe két ugyan olyan színű él futna be.

Konkrét értékek és becslések

<u>Állítás</u>: $R(3,3)=6$

<u>bizonyítás</u>:

Egy öt pontú kör nem tartalmaz egyszínű háromszöget, így $R(3,3)>5$:

Másrészt: vegyük egy tetszőleges hat pontú gráf egy pontját:
neki vagy van 3 szomszédja vagy a komplementerben van neki 3. Az első esetben ha van akár egy él is a szomszédok között akkor a kitüntetett ponttal kiegészítve van egy háromszögem, ha nincs akkor a szomszédok tartalmaznak egy üres 3-ast.
A második eset bizonyítása hasonló.

Van egy másik lehetőség is:
$R(3,3)\leqslant 4R(1,3)+2=4\times 1+2=6$, használva azt a tételt, ami a felső becsléseknél láttunk.

Harmadik lehetőség:
Goodman miatt (8. oldal) $N(K_3)+N(\bar{K}_3)\geq\frac{n(n-1)(n-5)}{24}$ és ez >1, ha $n=6$.

<u>Állítás</u>: $R(3,4)=9$

<u>bizonyítás</u>:

$R(2,4)+R(3,3)=4+6=10$ felső becslés, de mindkettő páros így egy korábbi megjegyzés alapján eggyel kevesebb is igaz.

$R(3,4)>8$, mert képzeljünk el 8 embert egy asztal körül, akik a közvetlen szomszédját ismerik, illetve a vele szembe ülőt is.

Háromszög ebben azért nincs, mert egy pontnak csak három ismerőse van, ők viszont egyáltalán nem ismerik egymást.

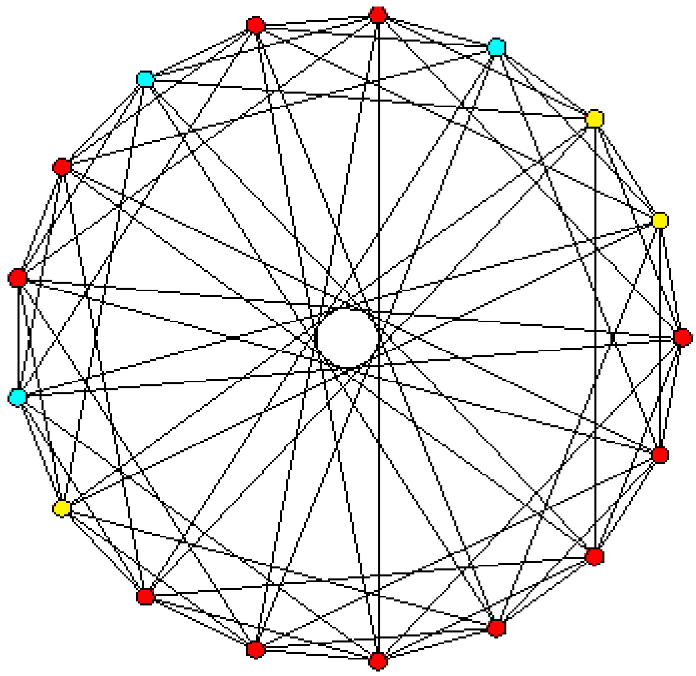
Üres négyszöget pedig azért nem tartalmaz, mert egy adott pont nem-ismerősei épp 4-en vannak és ezek között pedig van három ismeretség és ez a három él nem egy pontra illeszkedik.

<u>Állítás</u>: $R(4,4)=18$

Ez az előző állítás közvetlen következménye: $R(4,4)\leq R(3,4)+R(4,3)=18$.

Vagy ismét használva korábbi eredményünket: $R(4,4)\leq 4\mathrm{R}(2,4)+2=4\times 4+2=16+2=18$.

Példa: 17 pontú sem teljes-, sem üres 4-szöget tartalmazó gráfra:



A sárga ponthármas egy maximális klikket, a kék pedig egy maximális független ponthalmazt alkotnak.

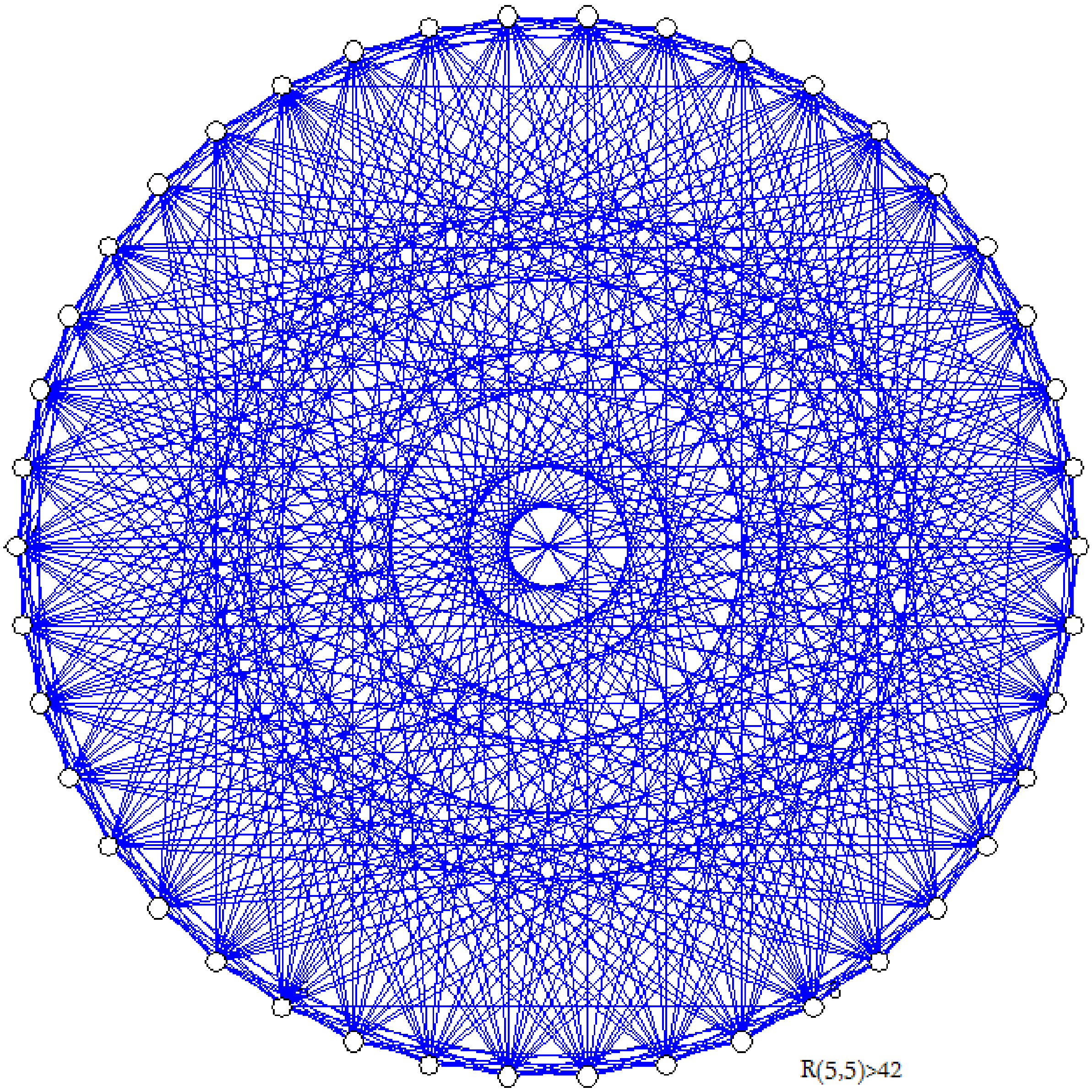
Állítás: $R(3,3,3)=17$
Bizonyítás:
Tegyük fel, hogy van egy 3 színnel kiszínezett teljes gráfunk és azt is, hogy nem tartalmaz egyszínű háromszöget.
Legyen v tetszőleges pont. Vegyük v zöld szomszédait: ez nem tartalmazhat zöld élet különben v -vel kiegészítve lenne benne zöld háromszög. Így az élek a zöld szomszédok között csak két színűek lehetnek (kék vagy piros). Mivel $R(3,3)=6$, a zöld-szomszédok legfeljebb 5-en lehetnek.
Ugyan ez elmondható a másik két színre is.
Mivel (v -t kivéve) mindenki piros, kék vagy zöld szomszéda v-nek ezért, egy ilyen gráfnak nem lehet több pontja mint $1+5+5+5=16$. Így $R(3,3,3)\leq 17$.

$R(3,3,3)>16$ bizonyításához mutatnom kell egy 16 pontú egyszínű háromszöget nem tartalmazó gráfot:

Vegyünk három diszjunkt $K_5-öt$ melyeket egyenként csak két-két-két színnel színezünk ki, úgy hogy háromszögmentesek legyenek, de $K_5^1:=\{v_1^1,\ldots,v_5^1\}-nél$ csak piros és kék, $K_5^2:=\{v_1^2,\ldots,v_5^2\}-nél$ csak kék és zöld, $K_5^3=\{v_1^3,\ldots,v_5^3\}-nél$ pedig csak zöld és piros színeket használjunk. A $v_i^1 v_i^2$ élek legyenek kékek, a $v_i^1 v_{i\pm 1}^2$ élek legyenek pirosak és a $v_i^1 v_{i+2}^2, v_i^1 v_{i+3}^2$ élek pedig legyenek zöldek. Hasonlóan színezzük ki a többi élet is a K_i-k között.

Végül vegyünk fel egy új pontot, v_0-t, és a $v_0 v_i^1$ éleket zöldre, a $v_0 v_i^2$ éleket pirosra, a $v_0 v_i^3$ éleket pedig kékre színezve megkaptuk a kívánt háromszögmentes gráfot.

Kép: $43 \leq R(5,5)$

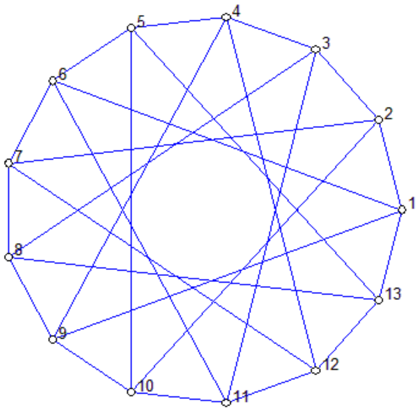


42 pontú, 428 élű gráf, mely se K_5 őt, se $\bar{K}_5$ -öt nem tartalmaz. (ezt nyilván géppel ellenőrizték).

Egyébként: $\binom{42}{2}=861$, ennek fele: $430{,}5$.

Miért érdekesek ezek az értékek? A két élszám szám nagyon közel van egymáshoz, tehát ennek a gráfnak és a komplementerének majdnem ugyan annyi éle van. Ha feltesszük, hogy minden k-ra van olyan $R(k,k)-1$ *pontú kritikus gráf aminek pontosan* $\frac{\binom{R(k,k)-1}{2}}{2}$ *éle van, és még azt is, hogy minden szimmetrikus Ramsey-szám páros, akkor abból következne, hogy* $R(k,k)$ 4 *-el osztva kettőt ad maradékul és ebből az is következne, hogy* $R(5,5)=46$.

Állítás: $R(3{,}5)=14$
bizonyítás: $R(3{,}5)\leq R(2{,}5)+R(3{,}4)=5+9=14$



ez egy 13 pontú gráf, ami nem tartalmaz se háromszöget,
se 5 méretű független ponthalmazt.

Tétel: $R(5{,}5)\leq 53$

bizonyítás:

Jelölések:

$N_F(x):=x\ \textit{szomszédainak halmaza az}\ F-\textit{ben}$
$deg_F(x):=x\ \textit{foka}\ F-\textit{ben}$
$n(F), e(F):=\textit{az}\ F\ \textit{ponjainak , illetve éleinek száma}$
$t(F):=\textit{az}\ F-\textit{beli háromszögek száma}$
$\bar{t}(F):=\textit{az}\ F-\textit{beli üres hármasok száma}=t(\bar{F})$
$V(F):=F\ \textit{pontjainak halamza}$
$(k,l,n)-\textit{jó gráf}:=(k,l)-\textit{jó gráf}\ n\ \textit{ponton};$
$e(k,l,n):=\textit{az élek minimális száma tetszőleges}\ (k,l,n)-\textit{jó gráfban}$
$E(k,l,n):=\textit{az élek maximális száma tetszőleges}\ (k,l,n)-\textit{jó gráfban}$
$t(k,l,n):=\textit{a hátomszögek minimális száma tetszőleges}\ (k,l,n)-\textit{jó gráfnak}$

Szokásosan, legyen $V(F):=n$, és $n_i:=\textit{az}\ i-\textit{ed fokú pontok száma}\ F-\textit{ben}$.
Ismét Goodman ([2]) észrevételét idézzem:

$$t(F)+\bar{t}(F)=\binom{n}{3}-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} i(n-i-1)n_i$$

Illetve Walker ([6]) azon észrevételét, hogy ha F egy $(k,l,n)-\textit{jó}$ gráf, akkor:

$$t(F)+\bar{t}(F)\leqslant\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(E(k-1,l,i)-e(k,l-1,n-i-1)+\binom{n-i-1}{2}\right)n_i$$

Legyen $x\in V$ fix pontja egy F $(k,l)-\textit{jó}$ gráfnak és két részgráfja legyenek a következőek:

$G_x \, és \, H_x$, ahol $V(G_x) := N_F(x) \, és \, V(H_x) := V \setminus (x \cup V(G_x))$.

Könnyen látható, hogy $G_x \; (k-1,l)-$ *jó gráf* , H_x *pedig* $(k,l-1)-$ *jó gráf.*

Egy x pont él-hiánya legyen: $\delta(x)$, ahol:

$$\delta(x) = E(\, k-1 \, , \, l \, , \, n(G_x)\,) - e(\, G_x\,) + e(\, H_x\,) - e(\, k \, , \, l-1 \, , \, n(H_x)\,)$$

Ez azt fejezi ki, hogy G_x és H_x együttesen milyen vannak közel az extrémumhoz.
Ez persze mindig nem-negatív és könnyedén látszik a következő:

$$\delta(x) = E(\, k-1 \, , \, l \, , \, n(G_x)\,) - e(\, G_x\,) + E(\, l-1 \, , \, k \, , \, n(H_x)\,) - e(\, H_x\,) \quad ,$$

Ez a természetes módon általánosítható az egész gráfra:

Legyen $F \; (k,l)-$ *jó gráf* , $\Delta(F) := \sum_{v \in V(F)} \delta(x)$ az él-hiánya F-nek.

<u>*Lemma 1*</u>: n_i az i -ed fokú pontok száma egy F $(k,l,n)-$ *jó gráfban* ,ekkor:

$$0 \leqslant 2\Delta(F) = \sum_{i=0}^{n-1} \big(2E(k-1,l,i) + 2E(l-1,k,n-i-1) + 3\mathrm{i}(n-i-1) - (n-1)(n-2)\big) n_i$$

<u>*bizonyítás*</u>:

mivel az x-re illeszkedő háromszögek száma nem más mint x szomszédainak élszáma ($e(G_x)$) és szimmetrikusan: az x-et tartalmazó üres hármasok száma pedig épp $e(H_x)$. Így:

$$3(t(F) + \bar{t}(F)) = \sum_{v \in V(F)} (e(G_x) + e(H_x)) = \sum_{v \in V(F)} \big(E(k-1,l,n(G_x)) + E(l-1,k,n(H_x)) - \delta(x)\big) \quad ,$$

ezt átrendezve:

$$0 \leqslant \Delta(F) = \sum_{i=0}^{n-1} \big(E(k-1,l,i) + E(l-1,k,n-i-1)\big) n_i - 3(t(F) + \bar{t}(F)) \quad ,$$

mivel $n = \sum_{i=0}^{n-1} n_i$ és $t(F) + \bar{t}(F) = \binom{n}{3} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} i(n-i-1) n_i$ amikből adódik a lemma állítása.

Legyen F egy $(4,5,n)-$ *jó gráf* és jelentse a_i azon élek számát, amelyre pontosan i darab háromszög illeszkedik.

Mivel nem lehet $F-ben$ se K_4 , se $\bar{K}_5$ és $R(2,5)=5$: ezért $i \geqslant 5$ -re $a_i = 0$.
Egy korábbi megjegyzésből következik, hogy G_x $(3,5)-$ *jó* , H_x pedig $(4,4)-$ *jó* gráf lesz.

Lemma 2:

$$\sum_{v\in V(F)} t(H_x)=4\mathrm{a}_4-2\mathrm{a}_2-2\mathrm{a}_1+\sum_{v\in V(F)}\left(\frac{n}{3}+3-deg_F(x)\right)e(G_x).$$

bizonyítás: $T=ABC$ legyen egy tetszőleges háromszög és legyen $b_i(T)$ azon pontok száma $V(F)\setminus T-ben$, melyek pontosan i darab T-belivel vannak összekötve.
Ezen túl, legyen $deg_F(T)=deg_F(A)+deg_F(B)+deg_F(C)$.
Megjegyzés: $b_i=0$, ha $i\geqslant 3$, hiszen F K_4 -mentes.

Kétféle módon leszámolva azon pont-4-esekt, melyeket egy adott T háromszög és vele nem szomszédos x -ek alkotnak, a következő adódik:

$$\sum_{x\in V(F)} t(H_x)=\sum_{T\text{ egy háromszög}} b_0(T) \quad ,$$

és nyilván: $b_0(T)=n-3-b_1(T)-b_2(T)$,és $b_1(T)+2\mathrm{b}_2(T)+6=deg_F(T)$.

Utóbbiból: $b_0(T)=n+3+b_2(T)-deg_F(T)$, továbbá az elsőből és utolsóból, pedig az következik, hogy:

$$\sum_{x\in V(F)} t(H_x)=\sum_{T\text{ egy háromszög}}\left(n+3+b_2(T)-deg_F(T)\right)=(n+3)t(F)+\sum_{T\text{ egy háromszög}}\left(b_2(T)-deg_F(T)\right) \quad .$$

Kétféleképpen leszámlálva azon éleket melyek illeszkednek háromszögbeli pontra:

$$\sum_{T\text{ egy háromszög}} deg_F(T)=\sum_{x\in V(F)} deg_F(x)e(G_x) \quad ,$$

szintén könnyedén látható, hogy:

$$3t(F)=\sum_{x\in V(F)} e(G_x)=\sum_{i=1}^{4} i\,a_i$$

$b_2(T)\,és\,a_i$ definícióiból adódik, hogy:

$$\sum_{T\text{ egy hátomszög}} b_2(T)=\sum_{i=2}^{4} i(i-1)a_i=4a_4-2a_2-2a_1+2\sum_{i=1}^{4} ia_i$$

Az utóbbi négy formula alkalmazásával:

$$\sum_{x\in V(F)} t(H_x)=\frac{1}{3}(n+3)\sum_{x\in V(F)} e(G_x)+4a_4-2a_2-2a_1+2\sum_{x\in V(F)} e(G_x)-\sum_{x\in V(F)} deg_F(x)e(G_x),$$

és ezzel megkaptuk a kívánt állítást.

Emlékezve korábbi jelölésünkre, tudjuk, hogy minden x-re a háromszögek száma H_x -ben legalább $t(4,4,n(H_x))$, ahol $n(H_x)=n-1-deg_F(x)$.

Egy pont háromszöghiányát $\gamma(x)$ -el, a gráfét $\Gamma(F)$ -el jelöljük és $\gamma(x)=t(H_x)-t(4{,}4,n(H_x))$ -el és $\Gamma(F)=\sum_{x\in V(F)}\gamma(x)$ -el definiáljuk, $\gamma(x)\geqslant 0$.

<u>*Lemma 3*</u>: Ha F egy $(4{,}5,n)-jó\ gráf$ és $n\geqslant 24$, akkor:

$$0\leqslant 3\Gamma(F)\leqslant\sum_{i=6}^{13}\left((n+9-3i)E(3,5,i)+6i-3t(4{,}4,n-i-1)\right)n_i \quad .$$

<u>*Bizonyítás*</u>:
mivel $R(3{,}5)=14$, $R(4{,}4)=18$ és az előző lemma eredménye alapján:

$$3\sum_{x\in V(F)}t(H_x)=12a_4-6a_2-6a_1+\sum_{i=6}^{13}\sum_{deg_F(x)=i}(n+9-3i)e(G_x).$$

$n\geqslant 24$ -re $n+9-3i$ csak $i=13$ -ra, illetve $i=12$ -re negatív, de utóbbi esetben csak akkor lesz az, ha n = 24, 25 ,26 .

Így – az imént említett eseteket kivéve – $E(3{,}5,i)$ -vel felülről becsülhetjük $e(G_x)$ -t:

$$3\sum_{x\in V(F)}t(H_x)\leqslant 12a_4+\sum_{i=6}^{13}\left((n+9-3i)E(3{,}5,i)n_i\right)+$$
$$\sum_{deg_F(x)\geqslant 12}\left(E(3{,}5,deg_F(x))-e(G_x)\right)\left(3deg_F(x)-n-9\right).$$

Minden $(3{,}5)-jó\ gráf$ ismert ([5]-nek és [4]-nek köszönhetően) és csak egy $(3{,}5{,}13)-jó\ gráf$ létezik, ebből következik, hogy a 2. szumma $deg_F(x)\geqslant 13$ -ra nulla. Az is igaz, hogy $E(3{,}5{,}12)=24$ és ez kizárólag 4-reguláris gráffal érhető el, sőt bármely (3,5,12)-jó gráfnak csak 3 és/vagy 4 fokú pontjai lehetnek.

Ha valamely x 12 fokú pontra a G_x nem maximális élszámú (tehát $e(G_x)<24$), akkor minden G_x -ben 3-ad fokú y -ra az $\{x,y\}$ él egyel növelt a_3 értékét.

Ezenkívül azokat az éleket, melyek három háromszöghöz is tartoznak, legfeljebb kétszer számoltunk le ilyen módon, különben lenne a G_x -ben egy K_4 .

Ismét a jobb oldal második szummáját megfigyelve: az legfeljebb $3a_3$ lehet, ha $n\geqslant 24$.
És mivel $e(F)\geqslant a_4+a_3$ ezért:

$$3\sum_{x\in V(F)}t(H_x)\leqslant 12e(F)+\sum_{i=6}^{13}(n+9-3i)E(3{,}5,i)n_i$$

Utóbbiból, Γ definíciójából és $12e(F)=\sum_{i=6}^{13}6in_i$ -ből a lemma már következik.

Állítás:

$$153 \leqslant e(4{,}5{,}27)\, és\, E(4{,}5{,}27) \leqslant 160,\ 130 \leqslant e(4{,}5{,}26)\, és\, E(4{,}5{,}26) \leqslant 154,$$
$$116 \leqslant e(4{,}5{,}25)\, és\, E(4{,}5{,}25) \leqslant 148,\ 101 \leqslant e(4{,}5{,}24)\, és\, E(4{,}5{,}24) \leqslant 139.$$

Úgy értve, hogy ha $n \geqslant R(k,l)$, akkor $e(k,l,n)=\infty$, illetve $E(k,l,n)=0$.

Bizonyítás:

Legyen F egy $(4{,}4,n)-jó\, gráf$, valamely $24 \leqslant n \leqslant 27$ -re, e darab éllel és n_i darab i-ed fokú ponttal. A Lemma 1 és 3-at, $\sum_{i=6}^{13} n_i = n$ -t (és egy számítógépet) segítségül hívva ez egy nem-negatív egész-értékű programozási feladattal állunk szemben, n_i változókkal és $2e=\sum_{i=6}^{13} i\, n_i$ célfüggvénnyel. $n=27$ -re maximalizálni (vagy épp minimalizálni kell) a:

$$9n_9+10n_{10}+11n_{11}+12n_{12}+13n_{13} \text{ -at}$$

(a fokszámok csak 9 és 13 között lehetnek, mert $R(4{,}4)=18$ és $R(3{,}5)=14$)

figyelembe véve:

$$27=n_9+n_{10}+n_{11}+n_{12}+n_{13}$$

$$0 \leqslant -21n_9-10n_{10}-n_{11}+2n_{12}-n_{13}$$

illetve:

$$0 \leqslant n_9+4n_{10}+6n_{11}-n_{12}-17n_{13}$$

korlátozásokat.

Az előző kettőből az előbbi az első lemma, utóbbi a harmadik következménye.

[5] azon eredményeit felhasználva, hogy: $E(3{,}4,i)=2\mathrm{i}$, ha $10 \leqslant i \leqslant 13$, $E(3{,}5{,}9)=17$, $E(3{,}5{,}8,)=16$, $E(3{,}5{,}7)=12$, illetve $E(3{,}5{,}6)=9$, melyek szükségesek a $24 \leqslant n \leqslant 26$ esetek kiszámításához.

$n=27$ -re a maximális élszám 160 és ekkor is csak $n_{12}=23$ és $n_{11}=4$ lehetséges, $t(4{,}4,j)$ és $E(4{,}4,i)$ kiszámításához a szerzők szintén számítógépes segítséget használtak.

Tétel: $R(5{,}5) \leqslant 53$

bizonyítás:

Tegyük fel, hogy F egy $(5{,}5{,}53)-jó\, gráf$. Mivel $R(4{,}5) \leqslant 28$, ezért ebben az esetben: $n_{25}+n_{26}+n_{27}=53$. Az első lemmát és az előző tételt felhasználva a következő mondható:

$$0 \leqslant (2\cdot 308+3\cdot 25\cdot 27-52\cdot 51)(n_{25}+n_{27})+(2\cdot 308+3\cdot 26\cdot 26-52\cdot 51)n_{26}=-11(n_{25}+n_{27})-8\mathrm{n}_{26} ,$$

ami ellentmondás.

Megjegyzés: $R(5{,}5) \leqslant 49$, mivel McKay és Radziszowski '95-ben belátták, hogy $R(4{,}5)=25$. Ez a bizonyítás, szinte teljesen számítógépekre hagyatkozik.

Adós maradok a $R(4{,}5) \leqslant 28$ bizonyításával, amit Walker: „A upper bound for the Ramsey number M(5,4)” című cikkében látott be, ami szintén számítógépeket használó bizonyítás.

Egyszínű K_k -asok száma

Mivel $R(k,k)$ pontos értékét nem ismerjük, ezért érzékeltetésképpen hasznos olyan jellegű tételek bizonyítása, melyek azt becsülik, hogy egy nagyon sok pontú gráfban (például $n>4^k$), nagyon sok egyszínű K_k van.

<u>Tétel</u>: Legyenek k,l természetes számok, akkor bárhogyan is színezünk ki egy n pontú gráf éleit két színnel, lesz benne legalább:

$2^{-k(l-2)-\binom{k+1}{2}}\binom{n}{k}-O_{k,l}(n^{k-1})$ db piros k -as, illetve ha ennyi nincs, akkor van benne legalább

$2^{-l(k-2)-\binom{l+1}{2}}\binom{n}{l}-O_{k,l}(n^{l-1})$ db kék teljes- l -es.

<u>Bizonyítás</u>:

indukció a (k,l) párra:

$k=1, l=1$ -re igaz.

Korábbi bizonyításainkhoz hasonlóan tegyük fel, hogy minden olyan (k,l) párra igaz az állítás, melyekre: $k<k_0$ vagy $l<l_0$.

Belátjuk, hogy az állítás $(k_{0,}l_0)$ -ra is igaz:

Minden pontot kiszínezek olyan színűre amelyik színű élből a legtöbb lép ki belőle. (azaz amelyik színű élből van legalább $\frac{n-1}{2}$ olyan, hogy ő az egyik végpontja. Megengedjük a kétszínű pontokat is).
Így van legalább $\frac{n}{2}$ db egyszínű pont. Legyen ez a piros és legyenek a $v_{1,}v_{2,}\dots,v_{\frac{n}{2}}$ a piros pontok.
V_i := a v_i pont piros szomszédainak halmaza. V_i elemszáma legalább $\frac{n-1}{2}$ a definíció miatt.
Az indukciós feltevést k_0-1 -re és l_0 -ra alkalmazom, így minden V_i tartalmaz legalább:

$2^{-(k_0-1)(l_0-2)-\binom{k_0}{2}}\binom{\frac{n-1}{2}}{k_0-1}-O_{k_{0,}l_0}\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{k_0-2}\right)$ db piros k_0-1 méretű klikket vagy

$2^{-(l_0)(k_0-3)-\binom{l_0+1}{2}}\binom{\frac{n-1}{2}}{l_0}-O_{k_{0,}l_0}\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{l_0-1}\right)$ db kék l_0 méretű klikket.

Lemma: $2^l \binom{\frac{n-1}{2}}{l} = \binom{n}{l} - O(n^{l-1})$, vagy átrendezve: $\binom{\frac{n-1}{2}}{l} = 2^{-l}\binom{n}{l} - O(n^{l-1})$

Bizonyítás: indukcióval

$l:=1$: $2^1 \binom{\frac{n-1}{2}}{1} = \binom{n}{1} - O(1)$, ez igaz, hiszen:

a bal oldal: $2\frac{n-1}{2} = n-1$, a jobb pedig: $n - O(1)$.

Most tegyük fel, hogy $l-1$ -re igaz a lemma:

$$2^{l-1}\binom{\frac{n-1}{2}}{l-1} = \binom{n}{l-1} - O(n^{l-2})$$

a bal oldalt a megfelelő alakra hozva és utána alkalmazva az indukciós feltevést:

$$2^l \binom{\frac{n-1}{2}}{l} = 2^{l-1}\binom{\frac{n-1}{2}}{l-1} 2\frac{\frac{n-1}{2}-l+1}{l} = \left(\binom{n}{l-1} - O(n^{l-2})\right) 2\frac{\frac{n-1}{2}-l+1}{l} =$$
$$= \frac{n-2l+1}{l}\binom{n}{l-1} - O(n^{l-1}) = \frac{n-l+1}{l}\binom{n}{l-1} - \binom{n}{l-1} - O(n^{l-1}) =$$
$$= \binom{n}{l} - \binom{n}{l-1} - O(n^{l-1}) = \binom{n}{l} - O(n^{l-1})$$

adódik, mert $\binom{n}{l-1} \approx \frac{1}{(l-1)!} n^{l-1}$.

Megjegyzés: minden l -re igaz, hogy $2^l \binom{\frac{n-1}{2}}{l} \leqslant \binom{n}{l}$, és az előző állítás másik irányú egyenlőtlensége pedig abból adódik, hogy:

$$\binom{n}{l-1} \geq \left(\frac{n}{l-1}\right)^{l-1} \text{, így } -\binom{n}{l-1} \leqslant -C n^{l-1} \leq -O(n^{l-1}) \text{ .}$$

Visszatérve a tétel bizonyításához:

Ha akár egy i-re is a második eset áll fenn, akkor készen vagyunk, mert alkalmazva az előző lemmát:

$$2^{-(l_0)(k_0-3)-\binom{l_0+1}{2}}\binom{\frac{n-1}{2}}{l_0}-O_{k_0,l_0}\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{l_0-1}\right)=2^{-(l_0)(k_0-3)-\binom{l_0+1}{2}}\left(2^{-l_0}\binom{n}{l_0}-O_{k_0,l_0}\left(n^{l_0-1}\right)\right)=$$

$$=2^{-(l_0)(k_0-3)-\binom{l_0+1}{2}}2^{-l_0}\binom{n}{l_0}-O_{k_0,l_0}\left(n^{l_0-1}\right)=2^{-(l_0)(k_0-2)-\binom{l_0+1}{2}}\binom{n}{l_0}-O_{k_0,l_0}\left(n^{l_0-1}\right)$$

Tehát legalább ennyi kék K_{l_0} -as lesz valamelyik V_i -ben és ezzel készen lennénk.

Ezért feltehető, hogy minden i-re az első eset áll fenn:

$$2^{-(k_0-1)(l_0-2)-\binom{k_0}{2}}\binom{\frac{n-1}{2}}{k_0-1}-O_{k_0,l_0}\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{k_0-2}\right)=2^{-(k_0-1)(l_0-2)-\binom{k_0}{2}}2^{-(k_0-1)}\binom{n}{k_0-1}-O_{k_0,l_0}\left(n^{k_0-2}\right)=$$

$$=2^{-(k_0-1)(l_0-2)-\left(\frac{k_0(k_0-1)}{2}+\frac{2k_0}{2}-1\right)}\binom{n}{k_0-1}-O_{k_0,l_0}\left(n^{k_0-2}\right)=2^{-(k_0-1)(l_0-2)-\binom{k_0+1}{2}+1}\binom{n}{k_0-1}-O_{k_0,l_0}\left(n^{k_0-2}\right)$$

Ezeket a V_i -beli k_0-1 méretű klikkeket a v_i -vel kiegészítve k_0 méretűeket kapunk.

De lehet, hogy egy adott K_{k_0} -t többször számoltunk (k_0 -szor legfeljebb), így legalább:

$$\frac{1}{k_0}\frac{n}{2}\left[2^{-(k_0-1)(l_0-2)-\binom{k_0+1}{2}+1}\binom{n}{k_0-1}-O_{k_0,l_0}(n^{k_0-2})\right]=2^{-(k_0-1)(l_0-2)-\binom{k_0+1}{2}}\binom{n}{k_0}-O_{k_0,l_0}(n^{k_0-1})$$

darab piros K_{k_0} van benne, és erre volt szükségünk.

Most nézzük meg azt, hogy (körülbelül) mikor jelenik meg az első egyszínű K_k *:*

$$2^{-\frac{3}{2}(k^2+k)}\binom{n}{k}\geq 1\sim\frac{2^{-\frac{3}{2}(k^2+k)}}{k^k(n-k)^{n-k}}\geq\frac{1}{n^n}\Rightarrow n^n\geq 2^{\frac{3}{2}k\cdot(k+1)}\cdot k^k(n-k)^{n-k}$$

Ebből következik, hogy ha n *nagyobb, mint* $k\cdot 2^{\frac{3}{2}(k+1)}=k\cdot(2\sqrt{2})^{k+1}$ *, akkor már megjelenik az első* $\tilde{K}_k$ *. (ezzel nem bizonyítottunk be új felső becslést az* $R(k,k)$ *-ra, mert a számolás nem pontos, bár az igaz, hogy ez a szám* $<4^k$ *)*

Alkalmazzuk a tételt $n=4^k$ *-ra, ekkor egyszínű* K_k *-kból lesz legalább:*

$$2^{-\frac{3}{2}(k^2+k)}\binom{4^k}{k}=2^{-\frac{3}{2}(k^2+k)}\frac{(4^k)^{4^k}}{k^k(4^k-k)^{4^k-k}}\approx\frac{\sqrt{2}^{k\cdot(k-3)}}{k^k}=\left(\frac{\sqrt{2}^{(k-3)}}{k}\right)^k$$

Utalva ezzel arra, hogy az $R(k,k)<4^k$ *nagyon erős felső becslés.*

Tételünk, aszimptotikusan új korlátot ad:

<u>*Definíció*</u>: Legyen $k_t(G) := \# \{K_t \subseteq G\}$, és $k_t(n) := \min_G \{k_t(G) + k_t(\bar{G}) \mid |G| = n\}$.
Tehát $k_t(n)$ arra ad alsó korlátot, hogy legalább hány egyszínű K_t van K_n -ben, annak bármely 2-szinezésére is.

Legyen $c_t := \lim_{n \to \infty} \frac{k_t(n)}{\binom{n}{t}}$ amit tekinthetünk az egyszínű $K_t - k$ sűrűségének.

Felső becslése a triviális 1 -en kívül a $2^{1-\binom{t}{2}}$, amit a szimmetrikus Ramsey-számok alsó becslésének köszönhetünk.

A legegyszerűbb alsó becslés c_t -re a: $\frac{1}{\binom{R(k,k)}{k}}$, amiből a $c_t \geq 4^{-(1+O(1))t^2}$ következik.

Az előző tétel segítségével jobb mondható:

$$c_t \geq \frac{2^{-t(t-2)-\binom{t+1}{2}} \binom{n}{t} - O_{t,t}(n^{t-1})}{\binom{n}{t}} \approx 2^{-t^2+2t-\frac{t^2+t}{2}} = 2^{-3\binom{t}{2}} \approx (2\sqrt{2})^{-(1+O(1))t^2}$$

Javítva ezzel c_t alsó becslésén.

Összefoglalva az eddigi eredményeket az mondható, hogy: $2^{\frac{k-1}{2}} \leq R(k,k) \leq 4^k$, *de egy* 4^k *pontú gráfról belátható, hogy nem csak egy, hanem körülbelül* $\left(\frac{\sqrt{2}^{(k-3)}}{k}\right)^k$ *darab egyszínű k-ast is tartalmaz, míg az előbbi alsó becslésre konkrét példa nem ismert.*

Megemlítettem, hogy konstruktív módon bizonyítható az, hogy $k^{\frac{c\log k}{\log\log k}} < R(k,k)$ *és Nagy Zsigmond ölteknek köszönhetően láthattuk, hogy* $k^3 < R(k,k)$.

Továbbá $R(3,k) \approx \frac{k^2}{\log k}$ *és* $R(P_k, P_l) = k + \left[\frac{(l+1)}{2}\right]$.

$R(5,5)$ *pontos értéke 43 és 49 között van, egy az utóbbinál gyengébb felső becslés bizonyítását meg is mutattam.*

Láthattuk azt is, hogy $R(G,G) \leq 4\mathrm{R}(G'', G) + 2$.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretném megköszönni Komjáth Péternek, aki az utolsó pillanatban vállalta témavezetésemet és rengeteg segítségén, észrevételén és cikkajánlásán túl, végtelen türelmével segített hozzá ahhoz, hogy ezt a dolgozatot megírhassam.

Irodalmi jegyzék

Noga Alon, Joel H. Spencer: The probabilistic method (2000)
Huang Yi Ru, Zhang Ke Mint:
A New Upper Bound Formula for Two Color Classical Ramsey Numbers
J. H. Kim: The Ramsey Number R(3; t) has Order of Magnitude $t^2/\log t$ (1995)
Yusheng Li, C. C. Rousseau, Wenan Zang: An Upper Bound for Ramsey Numbers (2003)
S. A. Burr, Erdős Pál, R. J. Faudree, R. H. Shelp:
On the Difference between Consecutive Ramsey Numbers (1989)
Nagy Zsigmond: A Ramsey-szam egy konstruktiv becslese (1972)
P. Frankl, RM Wilson: Intersection theorems with geometric consequences (1981)
L. Gerencsér, A. Gyárfás: On Ramsey-type Problems (1966)
G. Exoo: A Lower Bound for R(5,5) (1989)
Brendan D. McKay, Stanisław P. Radziszowski:
A New Upper Bound for the Ramsey Number R(5,5) (1992)
ennek a cikknek az eredeti jelöléseit tartottam meg a hivatkozásoknál is:
[2] A. W. Goodman: On sets of acquaintances and strangers at any party (1959)
[4]B. D. McKay, Zhang Ke Min: The value of the Ramsey number R(3,8)
[5]S. P. Radziszowski, D. L. Kreher:
On (3,k) Ramsey Graphs: Theoretical and Computation Results (1988)
[6]K. Walker: Dichromatic Graphs and Ramsey Numbers (1968)
David Conlon: On the Ramsy Multiplicity of Complete Graphs

Nagy segítséget nyújtott még Radziszowski: Small Ramsey Numbers című összefoglaló cikke.

A kritikus gráfok képeit a
en.wikipedia.org/wiki/Ramsey's_theorem
www.mts.jhu.edu/~ers/matgraph/samples/html/ramsey.html
forrásokból származnak.

Tartalomjegyzék