Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

n-pont halmazok a síkban

Szakdolgozat

Készítette: *Strenner Balázs*
matematikus hallgató

Témavezető: *Laczkovich Miklós* egyetemi tanár
Analízis Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapest, 2010

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Minden pozitív egész n esetén n-pont halmazoknak nevezzük azokat a síkbeli halmazokat, melyeket minden síkbeli egyenes pontosan n pontban metsz. Transzfinit rekurzióval könnyen megmutatható, hogy minden $n \geq 2$ esetén létezik n-pont halmaz. Arról azonban, hogy egy n-pont halmaz lehet-e valamilyen értelemben „szép”, a mai napig alig ismert valami.

Nagyon nehéz megoldatlan kérdés, hogy egy n-pont halmaz lehet-e Borel-halmaz, de még az sem ismert, hogy lehet-e G_δ. Ami ismert, az az, hogy egy n-pont halmaz nem lehet F_σ [5], valamint hogy Gödel konstruálhatósági axiómájából, $V = L$-ből következik koanalitikus n-pont halmaz létezése [15]. Ez utóbbi talán az olyan egyetlen lényeges eredmény a témakörben, amit nem fogunk részletesen tárgyalni.

Az 1. fejezetben megvizsgáljuk az n-pont halmazok néhány alapvető tulajdonságát: létezését, Hausdorff-dimenzióját és Hausdorff-mértékét. Továbbá megmutatjuk, hogy minden analitikus n-pont halmaz Borel, és hogy egy Borel n-pont halmaz első kategóriájú, egy G_δ n-pont halmaz pedig sehol sem sűrű.

Mauldin foglalkozott először a görbeszerűség kérdésével [13]. Bebizonyította, hogy egy $\mathcal{H}^1$-mérhető n-pont halmaz nem lehet görbeszerű, majd ezt felhasználva visszavezette egy geometriai mértékelméleti sejtésre azt a kérdést, hogy létezik-e Borel n-pont halmaz. Ezen eredmények tárgyalásához meglehetősen sokat kell tudni a görbék illetve a görbeszerű halmazok általános tulajdonságairól, ezért a 2. fejezetben részletesen foglalkozunk ezzel a témakörrel. Mauldin eredményeit a 3. fejezetben ismertetjük.

A 4. fejezetet az F_σ-halmazok terén elért eredményeknek szenteljük. Az első bizonyítási kísérlet arra vonatkozóan, hogy egy 2-pont halmaz nem lehet F_σ, Larmantól [11] származik. A bizonyítása két részből tevődik össze: az egyik, hogy egy 2-pont halmaz nem tartalmazhat ívet, a másik pedig, hogy egy F_σ 2-pont halmaz tartalmaz ívet. Bár Larman bizonyítása hibás volt, Baston és Bostock [3] ugyanezt az ötletet használva egy helyes bizonyítást adott az állításra. Később Bouhjar, Dijkstra és van Mill [4] hasonló gondolatmenettel igazolta, hogy egy 3-pont halmaz sem lehet F_σ. Azonban ki fog derülni, hogy $n \geq 4$ esetén egy n-pont halmaz tartalmazhat ívet, így ilyenkor Larman bizonyítási sémája nem működik. A korábbi eredményeket ügyesen összerakva Bouhjar, Dijkstra, és Mauldin mégis talált frappáns bizonyítást arra, hogy egy n-pont halmaz semmilyen n esetén nem lehet F_σ-halmaz. A fejezetet ezzel a bizonyítással zárjuk.

Az 5. fejezetben olyan – természetesen kiválasztási axiómát használó – konstrukciókat ismertetünk, melyek azt mutatják, hogy sok tételünkben a feltételek valóban szükségesek. Megmutatjuk, hogy egy n-pont halmaz lehet sűrű, lehet sehol sem sűrű, és lehet második kategóriájú (így nem Baire tulajdonságú). Továbbá egy n-pont halmaz Hausdorff-dimenziója lehet 2, és ha $n \geq 4$, akkor egy n-pont halmaz tartalmazhat kört. Nem tudjuk azonban, hogy Mauldin említett tételéből elhagyható-e a $\mathcal{H}^1$-mérhetőség feltétele, azaz hogy létezik-e görbeszerű n-pont halmaz.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Laczkovich Miklósnak, aki rengeteget segített a dolgozat írása közben felmerülő kérdéseim megválaszolásában. Nagyon sokat tanultam észrevételeiből, javaslataiból, és a közös munkához való hozzáállásából is.

Köszönöm továbbá Elekes Mártonnak a folyosószéli beszélgetéseink során elejtett hasznos megjegyzéseit.

1. fejezet

Egyszerűbb állítások n-pont halmazokról

1.1. n-pont halmazok létezése

1.1.1. Definíció. Legyen $H \subset \mathbf{R}^2$ és $n \in \mathbf{N}$. A H halmazt n-pont halmaznak nevezzük, ha a sík minden egyenese pontosan n pontban metszi.

Mazurkiewicz [14] bizonyította be 1914-ben, hogy létezik 2-pont halmaz. A bizonyítás egyszerű transzfinit indukciót használ, és a gondolatmenet könnyen átvihető általános n-pont halmazok esetére. Bagemihl [1], Sierpiński [18], ill. Bagemihl és Erdős [2] cikkeiben találhatók a kérdéshez kapcsolódó különböző jellegű általánosítások. A teljesség kedvéért közlünk egy bizonyítást n-pont halmazok létezésére.

1.1.2. Állítás. *Minden $n \geq 2$ esetén létezik n-pont halmaz.*

Bizonyítás. Legyen κ a legkisebb kontinuum számosságú rendszám. A sík egyenesei és a szintén kontinuum számosságú $\{\alpha : 1 \leq \alpha < \kappa\}$ halmaz között létesítsünk bijekciót, így kapjuk a sík egyeneseinek egy $\{l_\alpha : 1 \leq \alpha < \kappa\}$ jólrendezését.

Minden $\alpha < \kappa$-hoz hozzárendelünk egy $H_\alpha \subset \mathbf{R}^2$ halmazt, melynek számossága legfeljebb ω és α számosságának a maximuma, speciálisan kisebb, mint kontinuum. $H_0 \overset{\text{def}}{=} \emptyset$. Tegyük fel, hogy α rákövetkező rendszám, és $\alpha = \beta + 1$. Az l_α-n fekvő pontok kontinuum számosságú halmazt alkotnak, míg azon – l_α-tól különböző – egyenesek száma, melyek legalább 2 pontban metszik H_β-t, kisebb, mint kontinuum. Következésképp l_α-n van kontinuum sok pont, mely az előbb említett egyenesek egyikén sincs rajta. Ha

$|H_\beta \cap l_\alpha| = k \leq n$, akkor válasszunk ki $n-k$ ilyen pontot és H_α-t definiáljuk úgy, mint H_β és ezen pontok egyesítését.

Ha $\alpha < \kappa$ limeszrendszám, akkor legyen $H'_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta$, és H_α legyen H'_α és véges sok l_α-n fekvő pont uniója, melyeket az előző gondolatmenet szó szerinti alkalmazásával kapunk, ha az ottani H_β-t H'_α-re cseréljük. Végül legyen

$$H = \bigcup_{\beta<\kappa} H_\beta.$$

Látható, hogy az a tulajdonság, hogy egy adott l egyenesre $|H_\alpha \cap l| \leq n$, $\alpha = 0$-ra teljesül, utána pedig semelyik lépésben nem változik, tehát $|H \cap l| \leq n$ is fennáll. Azt pedig, hogy itt valójában minden l egyenes esetén egyenlőség áll, az biztosítja, hogy minden l-hez létezik β, hogy $l = l_\beta$, és H_β definíciója szerint $|H \cap l| \geq |H_\beta \cap l| = |H_\beta \cap l_\beta| = n$. $\square$

1.2. Analitikus n-pont halmazok tulajdonságai

A következőkben n-pont halmazok Hausdorff-dimenziójával kapcsolatosan bizonyítunk néhány állítást. A Hausdorff-mérték és -dimenzió definícióját ismertnek vesszük. Egy H halmaz s-dimenziós Hausdorff-mértékét $\mathcal{H}^s(H)$-val, a Hausdorff-dimenzióját egyszerűen $\dim(H)$-val jelöljük. Megjegyezzük továbbá, hogy minden Borel, sőt, minden analitikus halmaz mérhető bármilyen dimenziós Hausdorff-mértékre nézve.

Egy $\mathcal{H}^s$-mérhető, pozitív és véges $\mathcal{H}^s$-mértékű halmazt *s-halmaznak* nevezünk. A most következő tételt többször is fogjuk használni. A tétel bizonyítással együtt, analitikus halmazok helyett Borel-halmazokra kimondva, szerepel [12] 8. fejezetében. Az analitikus eset megtalálható Federer [7, 2.10.47-48] és Rogers [16, 2.7. fejezet, 57. Tétel] könyvében.

1.2.1. Tétel. *Legyen $n \geq 1$ egész, $0 \leq s \leq n$, és legyen $A \subset \mathbf{R}^n$ analitikus, melyre $\mathcal{H}^s(A) > 0$. Ekkor létezik $K \subset A$ kompakt s-halmaz.*

Mielőtt tovább mennénk, bizonyítás nélkül közlünk néhány tételt, melyekre később szükségünk lesz.

1.2.2. Tétel ([12], 7.5. Tétel)**.** *Ha $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ Lipschitz-leképezés L konstanssal, $0 \leq s \leq m$, és $H \subset \mathbf{R}^m$, akkor*

$$\mathcal{H}^s(f(H)) \leq L^s \mathcal{H}^s(H).$$

Speciálisan

$$\dim(f(H)) \leq \dim(H).$$

1.2.3. Tétel ([12], 10.11. Tétel speciális esete). *Ha* $1 < s < 2$, $A \subset \mathbf{R}^2$ $\mathcal{H}^s$*-mérhető és* $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$, *akkor*

$$\dim\left(A \cap (W + x)\right) = s - 1 \quad \textit{és} \quad \mathcal{H}^{s-1}\left(A \cap (W + x)\right) < \infty$$

$\mathcal{H}^s$*-m. m.* x *esetén m. m.* W *origón áthaladó egyenesre. (Szavakban: az* A *halmaz m. m. pontján áthaladó m. m. egyenes akkora halmazban metszi* A*-t, amekkorában azt elvárjuk.)*

1.2.4. Állítás. *Ha* $A \subset \mathbf{R}^2$ *analitikus* n*-pont halmaz, akkor* $\dim(A) = 1$.

Bizonyítás. Az 1.2.2. Tételt egy egyenesre való merőleges vetítésre, mint f függvényre alkalmazva adódik, hogy $\dim(A) \geq 1$.

A másik irány belátásához tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben $\dim(A) = s > 1$. Ekkor tetszőleges $1 < t < s$ esetén $\mathcal{H}^t(A) = \infty$, tehát létezik $K \subset A$ kompakt halmaz, melyre $0 < \mathcal{H}^t(K) < \infty$, és az 1.2.3. Tétel szerint van olyan egyenes, ami K-t $t - 1 > 0$ dimenziós, tehát végtelen halmazban metszi. A-t méginkább, ami ellentmond annak, hogy A n-pont halmaz. $\square$

1.2.5. *Megjegyzés.* Az 5.1.1. Tétel szerint A-ról valóban szükséges feltenni, hogy analitikus.

1.2.6. Állítás. *Ha az* $A \subset \mathbf{R}^2$ *halmaz* n*-pont halmaz, akkor* $\mathcal{H}^1(A) = \infty$.

Bizonyítás. Használjuk az 1.2.2. Tételt. $\square$

1.2.7. *Megjegyzés.* Érdekes kérdés, hogy egy analitikus n-pont halmaz σ-véges $\mathcal{H}^1$-mértékű-e. Megjegyezzük, hogy a 3. fejezetben részletezett (Pn) sejtés mellett ez igaz, ugyanis közvetlen következménye a 3.3.2. Tételnek.

1.3. Analitikus és Borel n-pont halmazok

1.3.1. Állítás. *Analitikus* n*-pont halmaz Borel is.*

A legtöbb n-pont halmazokkal foglalkozó cikkben ezt az állítást a hamarosan sorra kerülő 1.3.2. Tételre vezetik vissza, melyet azonban nem bizonyítanak, sőt még csak nem is adnak rá hivatkozást. Megjegyezzük azonban, hogy teljesen érthetetlen, hogy mindenhol erre a nemtriviális tételre hivatkoznak, miközben Miller már egy 1989-es cikkében [15] megjegyzett egy néhány soros bizonyítást. Ez a következőképpen hangzik.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy A n-pont halmaz. Ekkor az (x, y) pont pontosan akkor van A komplementerében, ha léteznek $u_1, \ldots, u_n \in \mathbf{R}$ valós számok, hogy $u_1, \ldots, u_n, y$ páronként különbözőek, és $(x, u_1), \ldots, (x, u_n) \in A$. Tehát az $\mathbf{R}^2 \setminus A$ halmaz a

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, u_1, \ldots, u_n) : y \neq u_i \ \ (i = 1, \ldots, n), \\ u_i \neq u_j \ \ (1 \leq i < j \leq n), \ \ (x, u_i) \in A \ \ (i = 1, \ldots, n)\}$$

halmaz vetülete az első két koordinátára vett vetítés által. Ha A analitikus, akkor C is analitikus, és annak vetülete, $\mathbf{R}^2 \setminus A$ is az. Ha pedig A maga és a komplementere is analitikus, akkor Borel. □

Itt használtunk néhány leíró halmazelméleti tételt, melyeket majd használunk az 1.3.2. Tétel bizonyítása során is; ezeket most összegyűjtjük. Mind megtalálhatók Laczkovich Miklós jegyzetének [10] II. részében, a 6. és 7. fejezetben.

Ha $A_1, A_2 \subset \mathbf{R}^n$ diszjunkt analitikus halmazok, akkor léteznek $B_1, B_2 \subset \mathbf{R}^n$ diszjunkt Borel-halmazok, hogy $A_1 \subset B_1$ és $A_2 \subset B_2$. (Ebből nyilvánvalóan következik, hogy ha A és $\mathbf{R}^2 \setminus A$ is analitikus, akkor A Borel.) Ha $A \subset \mathbf{R}^n$ analitikus, és $f : A \to \mathbf{R}^m$ folytonos, akkor $f(A)$ analitikus $\mathbf{R}^m$-ben. Emellett még azt is fogjuk használni, hogy ha $B \subset \mathbf{R}$ Borel, és $f : B \to \mathbf{R}$ Borel-mérhető, akkor f grafikonja Borel.

1.3.2. Tétel. *Ha $A \subset \mathbf{R}^2$ analitikus, melynek minden A_x függőleges szeletére $|A_x| \leq n$, akkor létezik B Borel-halmaz, hogy $A \subset B$, és B-nek minden B_x függőleges szeletére $|B_x| \leq n$.*

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy ha X topologikus tér és $Z \subset Y \subset X$, akkor azt mondjuk, hogy Z *relatíve Borel* Y-ban, ha létezik $B \subset X$ Borel, melyre $B \cap Y = Z$, vagy ami ugyanaz, Z Borel Y altértopológiájában. Továbbá ha még adott egy T topologikus tér és egy $f : Y \to T$ függvény is, akkor azt mondjuk, hogy f *relatíve Borel-mérhető*, ha minden $U \subset T$ nyíltra $f^{-1}(U)$ relatíve Borel Y-ban.

A tételt három részben bizonyítjuk.

1. *Ha $A \subset \mathbf{R}^2$ analitikus, melynek minden A_x függőleges szeletére $|A_x| \leq n$, akkor felírható $A = F_1 \cup \ldots \cup F_n$ alakban, ahol mindegyik F_i analitikus függvénygrafikon (azaz $|(F_i)_x| \leq 1$ minden x-re).*

Legyen $A_{n,i}$ azon $(x, y) \in A$ pontok halmaza, amelyekre $|A_x| = n$, és y az A_x-beli pontok második koordinátáinak nagyság szerinti rendezésében az i-edik elem ($i = 1, \ldots, n$). Azt az – eredetinél erősebb – állítást fogjuk belátni, hogy vannak olyan $F_1, \ldots, F_n \subset A$ függvénygrafikonok, hogy $A_{n,i} \subset F_i$ minden $i = 1, \ldots, n$-re, továbbá $F_1 \cup \ldots \cup F_n = A$, és mindegyik F_i relatíve Borel A-ban (tehát analitikus).

Ezt az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Az $n = 1$ eset nyilvánvaló. Legyen $n > 1$, és tegyük fel, hogy az állítás igaz $n-1$-re. Az $A_{n,i}$ halmazok analitikusak, ugyanis a

$$C = \{(x, y_1, \ldots, y_n) : (x, y_i) \in A \ \ (i = 1, \ldots, n), \ \ y_1 < \ldots < y_n\}$$

halmaz, mint véges sok analitikus halmaz metszete, analitikus $\mathbf{R}^{n+1}$-ben, és $A_{n,i}$ a C halmaz folytonos képe az $(x, y_1, \ldots, y_n) \mapsto (x, y_i)$ leképezés által.

Legyen $D \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{n-1} A_{n,i}$. Ekkor D analitikus és diszjunkt $A_{n,n}$-től, tehát van olyan B Borel-halmaz, hogy $D \subset B$ és $B \cap A_{n,n} = \emptyset$. Az $A \cap B$ halmaz analitikus és a függőleges szekciói legfeljebb $n-1$ eleműek, ezért az indukciós feltevés szerint léteznek olyan $E_1, \ldots, E_{n-1} \subset A \cap B$ függvénygrafikonok, melyek relatíve Borelek $A \cap B$-ben (így A-ban is), és amelyekre $(A \cap B)_{n,i} \subset E_i$.

Vegyük észre, hogy $A_{n,i} \subset (A \cap B)_{n-1,i} \subset E_i$ minden $i = 1, \ldots, n-1$-re. Ezért az $A \setminus E_1$ halmaz relatíve Borel A-ban, a függőleges szekciói legfeljebb $n-1$ eleműek, és $A_{n,i+1} \subset (A \setminus E_1)_{n-1,i}$ minden $i = 1, \ldots, n-1$ esetén. Ha alkalmazzuk az indukciós feltevést ezúttal $A \setminus E_1$-re, akkor az így kapott függvénygrafikonok E_1-gyel együtt kielégítik a feltételeket.

2. *Tegyük fel, hogy A analitikus függvénygrafikon, azaz létezik $f : H \to \mathbf{R}$ függvény, hogy $\mathrm{Gr}(f) = A$. Ekkor f relatíve Borel-mérhető.*

A $H = \mathrm{pr}_1(A)$ halmaz analitikus $\mathbf{R}$-ben. Azt kell megmutatnunk, hogy az $f = \mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{pr}_1^{-1} : H \to \mathbf{R}$ függvény relatíve Borel-mérhető. Ehhez elegendő belátni, hogy minden $c \in \mathbf{R}$ esetén a $C \stackrel{\text{def}}{=} C(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in A : y > c\}$ halmaz x-tengelyre vett vetülete relatíve Borel H-ban.

A C és $A \setminus C$ halmazok relatíve Borelek A-ban, tehát analitikusak $\mathbf{R}^2$-ben. Emiatt $\mathrm{pr}_1(C)$ és $\mathrm{pr}_1(A \setminus C)$ diszjunkt analitikus halmazok $\mathbf{R}$-ben, így szétválaszthatók Borel-halmazokkal, azaz léteznek $\mathrm{pr}_1(C) \subset B_1 \subset \mathbf{R}$, $\mathrm{pr}_1(A \setminus C) \subset B_2 \subset \mathbf{R}$ diszjunkt Borel-halmazok. Ez pedig azt jelenti, hogy $\mathrm{pr}_1(C)$ és $\mathrm{pr}_1(A \setminus C)$ relatíve Borelek $\mathrm{pr}_1(A) = H$-ban. Pontosan ez kell f relatíve Borel-mérhetőségéhez.

3. *Ha $f : H \to \mathbf{R}$ relatíve Borel-mérhető függvény, akkor létezik $\tilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ Borel-mérhető kiterjesztése.*

Ha ezt bebizonyítjuk, valóban készen leszünk, hiszen – mint már megjegyeztük – egy $\mathbf{R}$-en értelmezett Borel-mérhető függvény grafikonja Borel-halmaz $\mathbf{R}^2$-ben.

Először tegyük fel, hogy f értékkészlete megszámlálható, azaz $f(H) = \{c_1, c_2, \dots\}$. Legyen $H_i \overset{\text{def}}{=} f^{-1}(c_i)$. A H_i halmaz relatíve Borel H-ban minden i-re, tehát léteznek $B_i \subset \mathbf{R}$ Borel-halmazok, hogy $H_i = H \cap B_i$. Az kapott B_i-k nem feltétlenül diszjunktak, de a $C_i \overset{\text{def}}{=} B_i \setminus \bigcup_{j<i} B_j$ Borel-halmazok már azok, és továbbra is $H_i = H \cap C_i$ minden i-re. Az

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} c_i, & \text{ha } x \in C_i \\ 0, & \text{ha } x \notin \bigcup_i C_i \end{cases}$$

függvény nyilvánvalóan olyan, amilyet keresünk.

Most rátérünk az általános esetre. Minden n pozitív egészre definiáljuk a $D_{i,n} \overset{\text{def}}{=} f^{-1}([i/n, (i+1)/n))$, H-ban relatíve Borel-mérhető halmazokat ($i \in \mathbb{Z}$), és a következő, H-n értelmezett megszámlálható értékkészletű relatíve Borel-mérhető függvényt:

$$f_n(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{i}{n} \chi_{D_{i,n}}.$$

A képletben $\chi_{D_{i,n}}$ a $D_{i,n}$ halmaz karakterisztikus függvényét jelöli. Minden n-re létezik f_n-nek Borel-mérhető $\tilde{f}_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kiterjesztése, és az is látható, hogy minden $x \in H$ esetén $|f(x) - \tilde{f}_n(x)| < 1/n$. Könnyen igazolható, hogy az $E \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{R} : \tilde{f}_n(x) \text{ konvergens}\}$ halmaz Borel, továbbá az $\bar{f} \overset{\text{def}}{=} \lim \tilde{f}_n : E \to \mathbf{R}$ Borel-mérhető függvény. Világos, hogy $H \subset E$, és $\bar{f}|_H = f|_H$, így $\tilde{f}$-nak választhatjuk az alábbi függvényt:

$$\tilde{f}(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \bar{f}(x), & \text{ha } x \in E; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

□

1.4. n-pont halmazok és a Kuratowski-Ulam tétel

Ebben az alfejezetben az n-pont halmazokat „kategóriaelméleti” szempontból vizsgáljuk, amin most nem a „szokásos” kategóriaelméletet, hanem a Baire

Kategória Tételhez kapcsolódó témakört értjük. E dolgozat szerzője nem tud arról, hogy az irodalomban szerepelne az n-pont halmazok ilyen irányú megközelítése, ezért itt bebizonyítunk néhány egyszerű állítást.

Először röviden emlékeztetünk néhány fogalomra és tételre, melyek az itteninél általánosabban is tárgyalhatók (lásd [10]). Legyen (X, d) metrikus tér. Egy $Y \subset X$ halmaz

- *sehol sem sűrű*, ha $\bar{Y}$ nem tartalmaz gömböt;
- *első kategóriájú*, ha előáll megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként;
- *második kategóriájú*, ha nem első kategóriájú;
- *reziduális*, ha a komplementere első kategóriájú;
- *Baire tulajdonságú*, ha létezik $U \subset X$ nyílt halmaz, hogy az $Y \Delta U$ szimmetrikus differencia első kategóriájú.

A Baire Kategória Tétel azt mondja ki, hogy ha (X, d) teljes, akkor minden $U \subset X$ nemüres nyílt halmaz második kategóriájú. Könnyen belátható továbbá, hogy első kategóriájú G_δ-halmaz sehol sem sűrű, valamint hogy minden Borel-halmaz Baire tulajdonságú.

1.4.1. Tétel (Kuratowski-Ulam)**.** *Ha X és Y teljes metrikus terek, és $H \subset X \times Y$ sehol sem sűrű, első kategóriájú, reziduális vagy Baire tulajdonságú, akkor első kategóriájú sok $x \in X$ kivételével H_x is rendre sehol sem sűrű, első kategóriájú, reziduális vagy Baire tulajdonságú Y-ban ($H_x = \{y : (x, y) \in H\}$).*

Továbbá ha H Baire tulajdonságú, és első kategóriájú sok $x \in X$ kivételével H_x első kategóriájú, akkor H is első kategóriájú.

1.4.2. Tétel. *Legyen $n \geq 2$, és legyen $H \subset \mathbf{R}^2$ Baire tulajdonságú n-pont halmaz. Ekkor H első kategóriájú.*

Bizonyítás. Mivel H-nak minden függőleges szelete n elemű és így első kategóriájú, a Kuratowski-Ulam tétel szerint H is első kategóriájú. □

1.4.3. Következmény. *Borel n-pont halmaz első kategóriájú.*

1.4.4. Tétel. *Legyen $n \geq 2$, és legyen $H \subset \mathbf{R}^2$ G_δ n-pont halmaz. Ekkor H sehol sem sűrű.*

Bizonyítás. Az 1.4.3. Következmény szerint H első kategóriájú, de G_δ is, így sehol sem sűrű. □

Az 5. fejezetben megmutatjuk, hogy a H-ra tett feltételek valóban szükségesek, ugyanis létezik második kategóriájú n-pont halmaz. Az 1.4.2. Tétel fényében ez a halmaz ráadásul nem is Baire tulajdonságú.

Ha netán az Olvasót csábítaná a gondolat, hogy ha sikerülne belátni, hogy egy n-pont halmaz nem lehet sehol sem sűrű, akkor abból következne, hogy nem létezik G_δ n-pont halmaz, akkor sajnos ki kell hogy ábrándítsuk, ugyanis sehol sem sűrű n-pont halmaz létezését is igazolni fogjuk.

2. fejezet

Általános tudnivalók rektifikálható halmazokról

2.1. A rektifikálhatóság ekvivalens definíciói

2.1.1. Definíció. Egy $H \subset \mathbf{R}^2$ halmazt *görbeszerűnek* vagy *rektifikálhatónak* nevezünk, ha léteznek $f_i : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ $(i = 1, 2, \ldots)$ folytonosan differenciálható leképezések, melyekre

$$\mathcal{H}^1\Big(H \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i([0,1])\Big) = 0.$$

2.1.2. Definíció. Egy $H \subset \mathbf{R}^2$ halmazt *görbementesnek* vagy *teljesen rektifikálhatatlannak* nevezünk, ha bármely folytonosan differenciálható $f : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ leképezés esetén

$$\mathcal{H}^1\Big(H \cap f([0,1])\Big) = 0.$$

A rektifikálhatóságnak számos ekvivalens definíciója van. Sokszor a folytonosan differenciálhatóság (más néven C^1-tulajdonság) helyett a nála gyengébb Lipschitz-folytonosságot követelik meg. Azt, hogy ez a két definíció ekvivalens, sehol sem fogjuk használni, mindig C^1-leképezésekkel fogunk számolni. Az ekvivalencia bizonyításához azonban egy olyan technikai jellegű tétel szükséges, amelyre később is szükségünk lesz, így érdekességképpen erre is kitérünk.

2.1.3. Tétel (Whitney kiterjesztési tétele)**.** *Legyen $P \subset \mathbf{R}$ perfekt, kompakt halmaz, és legyen $f : P \to \mathbf{R}$ differenciálható. Az f függvény akkor és csak* *akkor terjeszthető ki* $\mathbf{R}$*-re* C^1*-függvényként, ha* f' *folytonos* P*-n és minden* $\varepsilon > 0$*-hoz van olyan* $\delta > 0$*, hogy* $x, y \in P$*,* $|x-y| \leq \delta$ *esetén*

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)| \leq \varepsilon |y-x|.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az f függvény kiterjeszthető a számegyenesre C^1-függvényként, és jelöljük $\tilde{f}$-mal egy kiterjesztését. Ekkor $\tilde{f}'$ folytonos $\mathbf{R}$-en, így P-n is, de ott megegyezik f'-vel, ezért f' valóban folytonos P-n. Továbbá $\tilde{f}$ egyenletesen folytonos $[\min P, \max P]$-n, tehát minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $x, y \in [\min P, \max P]$, $|x-y| \leq \delta$ esetén $|\tilde{f}'(y) - \tilde{f}'(x)| \leq \varepsilon$. Tehát ha $x, y \in P$, $x < y$ és $|y-x| \leq \delta$, akkor a Lagrange-középértéktétel szerint létezik $\xi \in (x, y)$, hogy $\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) = \tilde{f}'(\xi)(y-x)$, és

$$\begin{aligned}|f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)| &= |\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) - \tilde{f}'(x)(y-x)| = \\ &= |\tilde{f}'(\xi) - \tilde{f}'(x)| \cdot |y-x| \leq \varepsilon |y-x|.\end{aligned}$$

Most rátérünk az elégségesség bizonyítására. Legyen $\min P = a$, $\max P = b$. Belátjuk, hogy ha (c, d) kiegészítő intervalluma P-nek, akkor van olyan folytonos $h : [c, d] \to \mathbf{R}$ függvény, hogy $h(c) = f'(c)$, $h(d) = f'(d)$, $\int_c^d h = f(d) - f(c)$, és

$$\max_{[c,d]} |h - f'(c)| \leq 2 \cdot \max\left(|f'(d) - f'(c)|, \left| \frac{f(d) - f(c)}{d - c} - f'(c) \right| \right).$$

Legyen $m = (f(d) - f(c))/(d - c)$. Ha $h \equiv m$, akkor az $\int_c^d h = f(d) - f(c)$ feltétel teljesül, de h nem feltétlenül folytonos a végpontokban. Ezért az azonosan m függvényt úgy módosítjuk, hogy a $[c, c + \eta]$ intervallumban helyettesítjük egy olyan lineáris függvénnyel, amely $f'(c)$-től m-ig halad, a $[d - \eta, d]$ intervallumban pedig helyettesítjük egy olyan lineáris függvénnyel, amely m-től $f'(d)$-ig halad. Az így kapott h_1 függvényre $\int_c^d h_1$ csak kevéssel tér el $f(d) - f(c)$-től, ha η elég kicsi, ráadásul a h_1 által felvett értékek az $f'(c), f'(d), m$ pontok konvex burkában vannak, így

$$\max_{[c,d]} |h_1 - f'(c)| \leq \max\left(|f'(d) - f'(c)|, \left| \frac{f(d) - f(c)}{d - c} - f'(c) \right| \right).$$

Tehát h_1-hez hozzáadva egy alkalmas kis abszolút értékű, c-ben és d-ben eltűnő függvényt, egy megfelelő h függvényt kapunk.

A P halmaz mindegyik I_i kiegészítő intervallumához készítsünk el egy $h_i : I_i \to \mathbf{R}$ függvényt, mely rendelkezik a fenti tulajdonságokkal. Legyen $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ az f' függvény P-ről való olyan kiterjesztése, amely P mindegyik I_i

kiegészítő intervallumán megegyezik h_i-vel. Belátjuk, hogy g folytonos $[a,b]$-n. Az $[a,b] \setminus P$ halmaz pontjaiban ez nyilvánvaló. Legyen most $x \in P$. Ha x nem baloldali torlódási pont P-ben, akkor g balról folytonos x-ben, hiszen vagy $x = a$, vagy x egy kiegészítő intervallum jobb végpontja. Hasonlóan, ha x nem jobboldali torlódási pont P-ben, akkor g jobbról folytonos x-ben.

Tegyük fel most, hogy x baloldali torlódási pontja P-nek. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és legyen $\delta > 0$ olyan, hogy $y, z \in P$, $|y - z| \leq \delta$ esetén $|f'(y) - f'(z)| \leq \varepsilon$ és $|f(y) - f(z) - f'(z)(y - z)| \leq \varepsilon|y - z|$. Legyen $u \stackrel{\text{def}}{=} \min(P \cap [x - \delta, x]) < x$.

Megmutatjuk, hogy ha $z \in (u, x)$, akkor $|g(z) - g(x)| \leq 3\varepsilon$. Ha $z \in P$, akkor ez nyilvánvaló. Ha $z \notin P$, akkor z egy (c, d) kiegészítő intervallumban van, ahol $u \leq c < d < x$, ezért

$$|g(z) - g(x)| \leq |g(z) - g(c)| + |g(c) - g(x)| = |g(z) - f'(c)| + |f'(c) - f'(x)| <$$
$$\leq 2 \cdot \max\left(|f'(d) - f'(c)|, \left|\frac{f(d) - f(c)}{d - c} - f'(c)\right|\right) + \varepsilon \leq 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Hasonlóan igazolható az is, hogy ha x jobboldali torlódási pont, akkor g jobbról folytonos x-ben.

A kapott g függvény tehát folytonos. Utolsó lépésként azt mutatjuk meg, hogy g-nek az

$$\tilde{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x g + f(a)$$

integrálfüggvénye megegyezik f-fel P pontjaiban. Vegyük észre, hogy az f-re tett feltételekből következik, hogy f Lipschitz, ezért kiterjeszthető $[a,b]$-re Lipschitz függvényként, például a kiegészítő intervallumokon való lineáris kiterjesztéssel. Jelöljük a kiterjesztett függvényt F-fel. Így azonban P pontjaiban elromolhat a differenciálhatóság. Szerencsére ez azonban csak nullmértékű halmazon történhet meg, ugyanis F Lipschitz, így korlátos változású, tehát majdnem minden pontban differenciálható. Azon P-beli pontokban pedig, ahol F is differenciálható, F' meg kell hogy egyezzen f'-vel. (Valójában a differenciálhatóság csak azokban a pontokban romolhat el, amelyek csak egyoldali torlódási pontjai P-nek, mint azt könnyen ellenőrizhetnénk, ilyenből pedig csak megszámlálhatóan sok van.) Tehát $F'(x) = f'(x)$ majdnem minden $x \in P$-re.

Továbbá az F függvény abszolút folytonos (mivel Lipschitz), így minden $u, v \in [a,b]$, $u < v$-re $F(v) - F(u) = \int_u^v F'$.

Vegyünk egy $x \in P$ pontot, melyre $x > a$, és jelöljük $I_i = (c_i, d_i)$-vel P-nek az $[a,x]$-beli kiegészítő intervallumait, h_i-vel pedig az azokon konstruált függvényeket. Ekkor

$$\tilde{f}(x)-f(a)=\int_a^x g=\int_{[a,x]\cap P} g+\int_{[a,x]\setminus P} g=\int_{[a,x]\cap P} f'+\sum_i\int_{I_i} h_i=$$
$$=\int_{[a,x]\cap P} f'+\sum_i(f(d_i)-f(c_i))=\int_{[a,x]\cap P} F'+\sum_i(F(d_i)-F(c_i))=$$
$$=\int_{[a,x]\cap P} F'+\sum_i\int_{c_i}^{d_i} F'=\int_a^x F'=F(x)-F(a)=f(x)-f(a),$$

tehát $\tilde{f}$ valóban kiterjesztése f-nek. □

2.1.4. Tétel. *Ha $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ majdnem mindenütt differenciálható, akkor minden $\varepsilon>0$-ra létezik olyan $F\subset[a,b]$ zárt halmaz, hogy $\lambda([a,b]\setminus F)<\varepsilon$ és $f|_F$ kiterjeszthető $[a,b]$-re C^1-függvényként.*

Bizonyítás. Legyen H azon (a,b)-beli pontok halmaza, amelyekben f differenciálható. A feltétel szerint $\lambda([a,b]\setminus H)=0$. Könnyen látható, hogy f' mérhető H-n. Adott $\eta>0$-ra és n pozitív egészre legyen $H_{\eta,n}$ azon H-beli pontok halmaza, melyekre teljesül, hogy $y\in[a,b]$ és $|y-x|\le 1/n$ esetén $|f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)|\le\eta|y-x|$. Világos, hogy $H_{\eta,1}\subset H_{\eta,2}\subset\ldots$, és $\bigcup_n H_{\eta,n}=H$. Könnyű ellenőrizni, hogy mindegyik $H_{\eta,n}$ halmaz mérhető. Így minden $\gamma>0$-ra van olyan n, hogy a $H_\eta^\gamma\overset{\text{def}}{=}H_{\eta,n}$ halmazra $\lambda(H_\eta^\gamma)>1-\gamma$.

Legyen $\varepsilon>0$ adott, és tekintsük az $A\overset{\text{def}}{=}\bigcap_n H_{1/n}^{\varepsilon/2^n}$ halmazt. Ekkor $\lambda(A)>1-\varepsilon$, és minden $\eta>0$-ra van olyan $\delta>0$, hogy minden $x,y\in A$, $|y-x|\le\delta$ esetén $|f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)|\le\eta|y-x|$. Létezik $K\subset A$ kompakt halmaz, melyre $\lambda(K)>1-\varepsilon$, és létezik $P\subset K$ perfekt halmaz, hogy $\lambda(P)=\lambda(K)$, mert minden zárt halmaz előáll egy perfekt és egy megszámlálható halmaz uniójaként. Ezt a P perfekt halmazt választhatjuk F-nek, ugyanis a 2.1.3. Tétel szerint f kiterjeszthető P-ről C^1-függvényként. □

2.1.5. Állítás. *Mindegy, hogy a rektifikálhatóság definícióját Lipschitz vagy folytonosan differenciálható függvényekkel fogalmazzuk meg, ugyanazok lesznek a görbeszerű halmazok.*

Bizonyítás. Az egyik irány triviális, mert egy C^1-függvény Lipschitz is. A másik irányhoz legyen $H\subset\mathbf{R}^2$ és legyenek $f_i:[0,1]\to\mathbf{R}^2$ Lipschitz függvények, hogy
$$\mathcal{H}^1\Big(H\setminus\bigcup_i f_i([0,1])\Big)=0.$$

Legyen $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbf{N}}$ pozitív számokból álló, nullához tartó sorozat. Jelöljük f_i^1-gyel illetve f_i^2-vel f_i első és második koordináta-függvényét. A 2.1.4. Tétel szerint minden i-re és j-re léteznek $g_{ij}^1, g_{ij}^2 : [0,1] \to \mathbf{R}$ C^1-függvények, hogy $\lambda([g_{ij}^k \neq f_i^k]) < \varepsilon_j$ $(k = 1, 2)$. Ekkor minden i-re és j-re a $g_{ij} = (g_{ij}^1, g_{ij}^2)$ görbére igaz, hogy $\lambda([g_{ij} \neq f_i]) < 2\varepsilon_j$, tehát az $f_i([0,1]) \setminus \bigcup_j g_{ij}([0,1])$ halmaz egy nullmértékű halmaz f_i általi képe, következésképp $\mathcal{H}^1$-nullmértékű, mert f_i Lipschitz (1.2.2. Tétel). A g_{ij} C^1-görbék tehát szintén lefedik H-t $\mathcal{H}^1$-nullhalmaztól eltekintve. □

2.2. C^1-ívek

Még mindig a definícióknál maradva, a következőkben azon fáradozunk, hogy megmutassuk, hogy akkor is ekvivalens definíciót kapunk, ha a rektifikálhatóság definíciójában kikötjük, hogy az f_i görbéknek semelyik pontban se legyen 0 a deriváltjuk, és kölcsönösen egyértelműek legyenek. Az ilyen görbéknek nevet is adunk:

2.2.1. Definíció. Egy C^1-osztályú, kölcsönösen egyértelmű $f : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ leképezést, melyre f' sehol sem 0, *C^1-ívnek* nevezünk.

Mielőtt hozzáfognánk a következő lemmák bizonyításához, megemlítünk néhány, külső mértékekkel kapcsolatos definíciót és egyszerű állítást. Az X téren egy μ külső mértéket *regulárisnak* nevezünk, ha bármely $H \subset X$ halmazhoz van olyan $A \subset X$ μ-mérhető halmaz, hogy $H \subset A$ és $\mu(H) = \mu(A)$. Egyszerűen belátható, hogy ha μ reguláris külső mérték X-en, akkor monoton folytonos, azaz ha $H_1 \subset H_2 \subset \dots$ bővülő X-beli halmazsorozat, akkor

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(H_n).$$

A mi vizsgálatainkban kétféle külső mérték fog szerepelni: a Lebesgue külső mérték a számegyenesen (λ), illetve a lineáris Hausdorff-mérték a síkon $(\mathcal{H}^1)$. Mindkettőről tudjuk, hogy reguláris, ezért monoton folytonos.

Legyenek I és J olyan intervallumok a számegyenesen, hogy I jobb végpontja megegyezik J bal végpontjával. Ha $A \subset I$ és $B \subset J$ nem feltétlenül mérhető halmazok, akkor $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$, hiszen I mérhető, így jól vágja ketté az $A \cup B$ halmazt.

2.2.2. Lemma. *Legyen $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ tetszőleges függvény és legyen $N = \{x \in [0,1] : f'(x) = 0\}$. Ekkor az $f(N)$ halmaz nullmértékű.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Minden n pozitív egészre definiáljuk az alábbi halmazt:

$$N_n \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in N : |f(y) - f(x)| \le \varepsilon |y - x|, \text{ ha } |y - x| \le 1/n\}.$$

Világos, hogy $N_1 \subset N_2 \subset \ldots$, és $\bigcup_n N_n = N$, hiszen N pontjaiban a derivált eltűnik. Tudjuk, hogy $\lambda(N_n) \to \lambda(N)$ és $\lambda(f(N_n)) \to \lambda(f(N))$. Mivel ε tetszőleges volt, elég belátnunk, hogy $\lambda(f(N)) \le \varepsilon$, ehhez pedig azt, hogy $\lambda(f(N_n)) \le \varepsilon$ minden n-re. Rögzítsünk egy n-et.

Legyen $I_{i,n} = [(i-1)/n, i/n]$, ha $i = 1, 2, \ldots, n$. Ekkor

$$f(N_n) = \bigcup_{i=1}^{n} f(N_n \cap I_{i,n}),$$

így

$$\lambda(f(N_n)) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda(f(N_n \cap I_{i,n})).$$

Vegyük észre, hogy minden i-re $f|_{N_n \cap I_{i,n}}$ Lipschitz ε konstanssal az N_n halmaz definíciója miatt, így minden i-re $\lambda(f(N_n \cap I_{i,n})) \le \varepsilon \lambda(N_n \cap I_{i,n})$. E lemma előtti megjegyzésünk szerint tehát

$$\lambda(f(N_n)) \le \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \lambda(N_n \cap I_{i,n}) = \varepsilon \lambda(N_n) \le \varepsilon.$$

Ezt akartuk bizonyítani. □

2.2.3. Lemma. *Legyen $f : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ tetszőleges leképezés, és legyen $N = \{x \in [0,1] : f'(x) = (0,0)\}$. Ekkor $\mathcal{H}^1(f(N)) = 0$.*

Bizonyítás. A bizonyítás szó szerint ugyanúgy történik, mint a 2.2.2. Lemmánál. Csupán annyi a különbség, hogy az f függvény most $\mathbf{R}^2$-be képez, és ott a $\mathcal{H}^1$ külső mértéket tekintjük. □

2.2.4. Állítás. *Legyen $f : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ folytonosan differenciálható görbe. Ekkor $f([0,1])$ lefedhető megszámlálható sok C^1-ívvel $\mathcal{H}^1$-nullmértékű halmaztól eltekintve.*

Bizonyítás. Legyen $N \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in [0,1] : f'(x) = (0,0)\}$. Az N halmaz zárt, így $[0,1] \setminus N$ előáll megszámlálható sok diszjunkt intervallum uniójaként, melyeken f-nek sehol sem nulla a deriváltja. Ezeket az intervallumokat esetleg kisebb részekre bontva elérhetjük azt is, hogy $[0,1] \setminus N$ megszámlálható sok olyan intervallum uniója legyen melyeken f kölcsönösen egyértelmű.

Mindegyik ilyen intervallumot megszámlálható sok zárt intervallum uniójaként felírva kapjuk $f([0,1]\setminus N)$ megszámlálható sok C^1-ívvel való fedését. A kimaradó $f(N)$ halmaz a 2.2.3. Tétel szerint $\mathcal{H}^1$-nullmértékű, így készen vagyunk. □

2.2.5. Következmény. *A rektifikálhatóság definíciójában feltehető, hogy a fedő görbék C^1-ívek.*

2.3. C^1-ívek függőleges érintői

2.3.1. Lemma. *Legyen $h : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ C^1-ív, és jelöljük a képét Γ-val. Legyen továbbá $E = \{p \in \Gamma : \Gamma\text{-nak függőleges az érintője } p\text{-ben}\}$. Ekkor $\lambda(\mathrm{pr}_1(E)) = 0$.*

1. Bizonyítás. Legyen $h = (h_1, h_2)$. A Γ görbének a $p = h(x)$ pontban pontosan akkor függőleges az érintője, ha $h_1'(x) = 0$. Az $N \overset{\text{def}}{=} \{x \in [0,1] : h_1'(x) = 0\}$ jelölést bevezetve, világos, hogy $\mathrm{pr}_1(E) = h_1(N)$. A 2.2.2. Tétel pedig pontosan azt mondja, hogy ez nullmértékű. □

Ha ismerjük a kontingens fogalmát, és egy, ebben a témakörben közismert tételt, akkor szinte gondolkodás nélkül kapunk egy másik bizonyítást.

2.3.2. Definíció. Legyen $H \subset \mathbf{R}^2$, $x \in H$. Az

$$\left\{\alpha v : \alpha \geq 0, v \in \mathbf{R}^2, ||v|| = 1, \exists \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H \setminus \{x\} \;\; x_i \to x \text{ és } \frac{x_i - x}{||x_i - x||} \to v\right\}$$

halmazt a H halmaz x pontbeli kontingensének nevezzük, és $\mathrm{cont}_{\mathrm{x}}(H)$-val jelöljük.

2.3.3. Tétel („A kontingenciatétel vetítéses kiegészítése"). *[17, IX. fejezet, 3.7. Tétel] Legyen $H \subset \mathbf{R}^2$, és vezessük be a következő jelöléseket:*

$$A_1 \overset{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \leq 0\} \qquad A_2 \overset{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0\}$$

$$A_3 \overset{\text{def}}{=} \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x = 0\}.$$

Legyen továbbá

$$B = \{x \in H : \mathrm{cont}_x(H) \in \{A_1, A_2, A_3\}\}.$$

Ekkor $\lambda(\mathrm{pr}_1(B)) = 0$.

2. Bizonyítás (2.3.1. Lemma). A Γ görbének minden pontban egyenes a kontingense, és pontosan ott függőleges az érintő, ahol a kontingens a függőleges egyenes, azaz A_3, ahogyan az imént jelöltük. Ezen pontok x-tengelyre vett vetülete a 2.3.3. Tétel szerint valóban nullmértékű. □

A 2.3.1. Lemmára mutatunk egy harmadik bizonyítást is, amely Mauldin cikkében [13] szerepel. Hosszabb ugyan, mint az eddigiek, viszont igen szellemes, ezért az érdekesség és a teljesség kedvéért ezt is közöljük. Ehhez szükségünk lesz a Vitali-fedés fogalmára, és Vitali fedési tételére. Valószínűleg mindkettő közismert, így részletesen nem foglalkozunk velük.

2.3.4. Definíció. Legyen $H \subset \mathbf{R}^n$, és legyen $\mathcal{V}$ zárt halmazokból álló rendszer. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{V}$ *Vitali-fedése* H-nak, ha minden $x \in H$ és minden $\delta > 0$ esetén létezik $F \in \mathcal{V}$, hogy $x \in F$ és $0 < \operatorname{diam}(F) < \delta$.

2.3.5. Definíció. A $\mathcal{V}$ korlátos és mérhető halmazokból álló $\mathbf{R}^n$-beli halmazrendszert *regulárisnak* nevezzük, ha létezik $C > 0$ konstans, hogy minden $V \in \mathcal{V}$ esetén

$$\operatorname{diam}(V)^n \leq C\lambda_n(V).$$

2.3.6. *Megjegyzés.* Az, hogy egy halmazrendszer reguláris, azt jelenti tehát, hogy a benne lévő halmazok „egyenletesen kövérek”, nem laposodhatnak el. Tehát hasonló halmazokból álló rendszer például reguláris, a síkon viszont az összes téglalapból álló rendszer nem az.

2.3.7. Tétel (Vitali fedési tétele). *Legyen $H \subset \mathbf{R}^n$, és legyen $\mathcal{V}$ kompakt halmazokból álló reguláris halmazrendszer, mely Vitali-fedése H-nak. Ekkor létezik $F_1, F_2, \ldots \in \mathcal{V}$ véges vagy megszámlálhatóan végtelen, páronként diszjunkt halmazokból álló sorozat, melyre $\lambda_n(H \setminus \bigcup_i F_i) = 0$.*

2.3.8. *Megjegyzés.* (1) Megjegyezzük, hogy semmivel sem szükséges többet feltenni H-ról. Sokszor mérhető, vagy véges külső mértékű, vagy korlátos H-ra mondják ki a tételt, de ezek egyike sem szükséges.

(2) Mi ennek a tételnek csak azt a speciális esetét fogjuk használni, amikor $n = 1$ és $\mathcal{V}$ intervallumokból álló rendszer. A tételt egyébként pont erre az esetre bizonyította eredetileg Vitali 1908-ban.

3. Bizonyítás (2.3.1. Lemma). Jelöljük L-lel a Γ görbe hosszát, és legyen $V \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{pr}_1(E)$. A V halmaz kompakt, tehát mérhető és véges mértékű. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben $\lambda(V) > 0$. Legyen $M \stackrel{\text{def}}{=} 3L/\lambda(V)$.

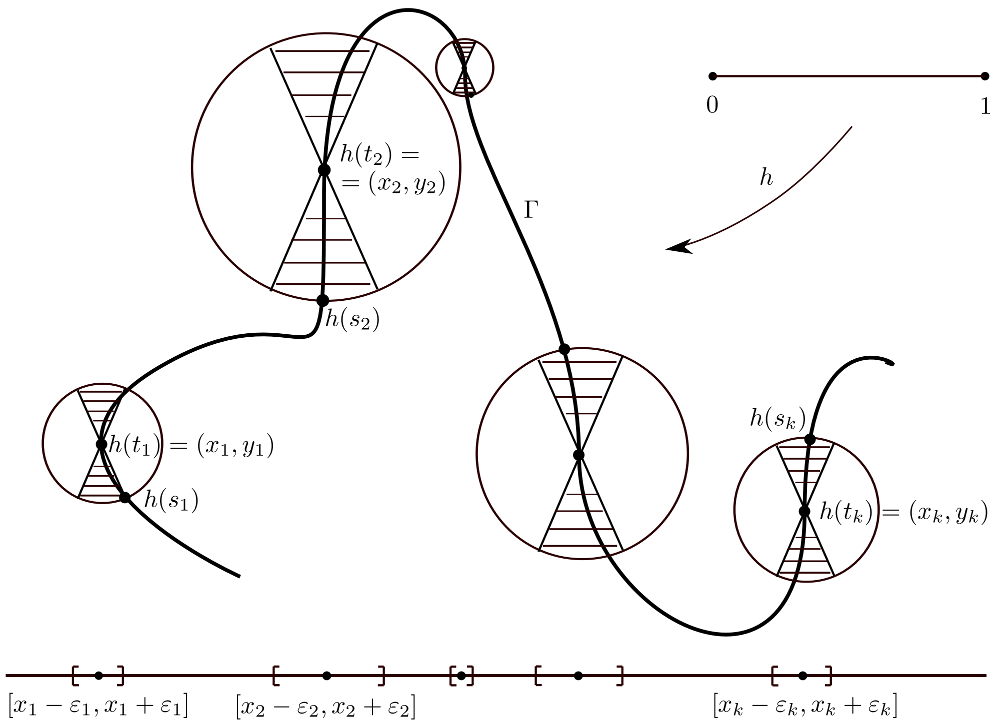
Tekintsük a

$$\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{[x-\varepsilon, x+\varepsilon] : x \in V, \text{ és létezik } y \in \mathbf{R}, \text{ hogy } (x,y) \in \Gamma,$$
$$\Gamma \cap \bar{B}((x,y), \varepsilon\sqrt{1+M^2}) \subset C((x,y),M) \text{ és } \Gamma \cap S((x,y), \varepsilon\sqrt{1+M^2}) \neq \emptyset\}$$

intervallumrendszert, ahol $C((x,y),M)$ azt a kettős kúpot jelöli, melynek csúcsa az (x,y) pont, tengelye a csúcson áthaladó függőleges egyenes, határoló egyenesei a csúcson áthaladó $\pm M$ meredekségű egyenesek, továbbá $S((x,y),\varepsilon\sqrt{1+M^2})$ az (x,y) középpontú, $\varepsilon\sqrt{1+M^2}$ sugarú körvonal, végül $\bar{B}((x,y),\varepsilon\sqrt{1+M^2})$ az (x,y) középpontú, $\varepsilon\sqrt{1+M^2}$ sugarú zárt körlap.

Könnyű ellenőrizni, hogy $\mathcal{V}$ Vitali-fedése V-nek, így Vitali fedési tétele szerint létezik véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok páronként diszjunkt $I_i = [x_i-\varepsilon_i, x_i+\varepsilon_i] \in \mathcal{V}$ intervallum, hogy $\lambda(V \setminus \bigcup_i I_i) = 0$. Ezért $\sum_i \lambda(I_i) \geq \lambda(V)$, tehát van olyan k pozitív egész, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} 2\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda(I_i) > \frac{2}{3}\lambda(V).$$



2.1. ábra.

Minden $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén $I_i \in \mathcal{V}$, így vannak olyan y_i számok, melyek teljesítik a $\mathcal{V}$ definíciójában megfogalmazott feltételeket a megfelelő I_i-re nézve, ezért választhatunk olyan t_i-t és s_i-t, hogy $h(t_i) = (x_i, y_i)$, és $h(s_i) \in S((x_i, y_i), \varepsilon_i\sqrt{1+M^2})$, továbbá h az s_i és t_i közötti intervallumot a

$$C((x_i, y_i), M) \cap \bar{B}((x_i, y_i), \varepsilon_i\sqrt{1+M^2})$$

halmazba képezi (a 2.1. ábrán ezeket a halmazokat jelöltük satírozással). Az s_i és t_i pontok által meghatározott intervallumok páronként diszjunktak, így

$$L \geq \sum_{i=1}^{k} ||h(s_i) - h(t_i)|| = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i\sqrt{1+M^2} > M\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i > M\frac{\lambda(V)}{3} = L,$$

ami ellentmondás, tehát valóban $\lambda(V) = 0$, ahogy állítottuk. □

2.4. Görbeszerű halmazok C^1-grafikonokkal való fedése

A következő tétel azt állítja, hogy egy görbeszerű halmaz nemcsak C^1-ívekkel, hanem C^1-függvények grafikonjaival is viszonylag jól fedhető.

2.4.1. Tétel. *Legyen $H \subset \mathbf{R}^2$ tetszőleges görbeszerű halmaz. Ekkor léteznek $g_i : [a_i, b_i] \to \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ C^1-függvények, hogy*

$$\lambda\Big(\mathrm{pr}_1\Big(H \setminus \bigcup_i \mathrm{Gr}(g_i)\Big)\Big) = 0.$$

Bizonyítás. Legyenek $h_j : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ $(j = 1, 2, \ldots)$ olyan C^1-ívek, hogy $\mathcal{H}^1(H \setminus \bigcup_j \Gamma_j) = 0$, ahol Γ_j jelöli h_j képét. Vetítés során a Hausdorff-mérték nem nő, így $\lambda(\mathrm{pr}_1(H \setminus \bigcup_j \Gamma_j)) = 0$. Ezért elegendő bizonyítani, hogy minden j-re Γ_j-hez találhatók C^1-függvények, melyek grafikonjai azt „jól" fedik, azaz az állításunkat görbeszerű halmaz helyett elég C^1-ívekre bizonyítani.

Legyen tehát $h = (\varphi_1, \varphi_2) : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ C^1-ív, és jelöljük Γ-val h képét. Vezessük be a következő jelölést:

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \Gamma : \Gamma\text{-nak függőleges az érintője } p\text{-ben}\}.$$

A 2.3.1. Lemma szerint $\lambda(\mathrm{pr}_1(E)) = 0$, így elég megmutatni, hogy $\Gamma \setminus E$ lefedhető megszámlálható sok C^1-függvény grafikonjával.

Ha $p \in \Gamma \setminus E$, akkor legyen $t_p = h^{-1}(p)$ és $\delta_p > 0$ olyan, hogy $|s - t_p| \leq \delta_p$ esetén a Γ görbe $h(s)$-beli érintőjének meredeksége abszolút értékben legfeljebb $|M_p| + 1$, ahol M_p-vel a $h(t_p)$-beli érintő meredekségét jelöljük. Világos, hogy $\varphi_1'(s) \neq 0$, ha $s \in [t_p - \delta_p, t_p + \delta_p] \stackrel{\text{def}}{=} J_p$. Legyen továbbá $[a_p, b_p] \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1(J_p)$. Az is világos, hogy $\varphi_1|_{J_p}$ C^1-diffeomorfizmus J_p és $[a_p, b_p]$ között. Végül legyen $g_p : [a_p, b_p] \to \mathbf{R}$, $u \mapsto \varphi_2(\varphi_1|_{J_p}^{-1}(u))$ minden $p \in \Gamma \setminus E$-re. Világos, hogy g_p folytonosan differenciálható.

Ezzel megkaptuk a $\Gamma \setminus E$ halmaz C^1-függvények grafikonjai általi fedését. Ebből azért lehet megszámlálható fedést kiválasztani, mert a $\{J_p\}_{p \in \Gamma \setminus E}$ intervallumrendszer uniója a $h^{-1}(\Gamma \setminus E)$ halmaz, ennek a fedésnek tehát létezik $\{J_{p_i}\}_{i \in \mathbf{N}}$ megszámlálható részfedése, és az ezekhez a p_i-khez tartozó g_{p_i} függvények grafikonjai lefedik $\Gamma \setminus E$-t. $\square$

2.4.2. Következmény. *Egy $H \subset \mathbf{R}^2$ görbeszerű halmazt majdnem minden függőleges egyenes megszámlálható sok pontban metsz.*

3. fejezet

Rektifikálhatóság és n-pont halmazok

Az ebben a fejezetben ismertetett eredmények Mauldin nevéhez fűződnek. Nem olyan részletes bizonyításokkal ugyan, mint ebben a fejezetben, de mind megtalálhatók Mauldin cikkében [13].

3.1. Több grafikon elmetszése egy egyenessel

Ha $(u, v) \in \mathbf{R}^2$ és $v \neq 0$, akkor jelölje $T_{(u,v)}$ az (u, v) pontból az x-tengelyre történő vetítést, azaz minden (x, y) pontra, ahol $y \neq v$, legyen $T_{(u,v)}(x, y) = z$ olyan, hogy az (x, y), (u, v) és $(z, 0)$ pontok egy egyenesen vannak. Az, hogy C egy *pozitív kúp*, jelentse azt, hogy létezik $w \in \mathbf{R}$ és egy $0 < \theta < \pi/2$ szög, hogy C azon $p \in \mathbf{R}^2$ pontokból áll, melyekre a $p - (0, w)$ vektor és a pozitív y-tengely által bezárt szög kisebb, mint θ.

3.1.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható, és $|f'(x)| \leq M$ minden $x \in [a, b]$-re. Legyen továbbá $E \subset [a, b]$ Borel, melyre $\lambda(E) > 0$, és jelöljük G-vel f grafikonját. Ekkor minden $0 < \tau < 1$ esetén létezik C pozitív kúp, hogy ha $(u, v) \in C$, akkor $\lambda(T_{(u,v)}(G \cap (E \times \mathbf{R})) \cap [a, b]) > \tau\lambda(E)$.*

Bizonyítás. Ha $v > \max f$, akkor $T_{(u,v)}(x, f(x))$-re képlet is adható:

$$T_{(u,v)}(x, f(x)) = x - f(x)\frac{u - x}{v - f(x)}.$$

Legyen $g_{(u,v)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} T_{(u,v)}(x, f(x))$ minden $x \in [a,b]$-re. Ekkor

$$g'_{(u,v)}(x) = 1 - \frac{f'(x)(u-x)}{v - f(x)} + \frac{f(x)}{v - f(x)} - \frac{f(x)f'(x)(u-x)}{(v-f(x))^2}.$$

Ha $v \to \infty$ miközben $|u/v| \to 0$, akkor $g'_{(u,v)}(x)$ x-ben egyenletesen tart 1-hez. Tehát minden $0 < \varepsilon$-ra létezik C pozitív kúp, hogy $(u,v) \in C$ esetén $1 - \varepsilon < g'_{(u,v)}(x) < 1 + \varepsilon$ minden $x \in [a,b]$-re, speciálisan $g_{(u,v)}$ kölcsönösen egyértelmű. Mivel $v \to \infty$, $|u/v| \to 0$ esetén $g_{(u,v)}(a) \to a$, a derivált becslését is használva, a C kúpról az is feltehető, hogy $(u,v) \in C$ esetén $g_{(u,v)}$ az $[a - (1-\tau)\lambda(E)/4, b + (1-\tau)\lambda(E)/4]$ intervallumba képez.

Még $\lambda(g_{(u,v)}(E))$-re kellene alsó becslést adni. Az integráltranszformáció tételéből következik, hogy

$$\lambda(g_{(u,v)}(E)) = \int_{g_{(u,v)}(E)} 1 = \int_E g'_{(u,v)}(x)dx > \left(\frac{1+\tau}{2}\right)\lambda(E),$$

ha $g'_{(u,v)}(x) > (1+\tau)/2$ minden $x \in [a,b]$-re. Ha az integráltranszformáció tételét csak nyílt E-re ismerjük, okoskodhatunk a következőképpen. A $\mu(B) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(g(B))$ halmazfüggvény értelmes $[a,b]$ Borel-halmazain, mert g – homeomorfizmus lévén – Borelt Borelbe visz, és az is világos, hogy μ mérték a Borel-halmazokon. Nyílt U-kra tudjuk, hogy $\mu(U) = \int_U g'(x)dx$, a Borel-halmazokra való kiterjesztés pedig egyértelmű, tehát $\mu(B) = \int_B g'(x)dx$ fennáll minden B Borel-halmazra is.

Összerakva eddigi eredményeinket, adódik, hogy létezik C pozitív kúp, hogy $(u,v) \in C$ esetén

$$\lambda(T_{(u,v)}(G \cap (E \times \mathbf{R})) \cap [a,b]) = \lambda(g_{(u,v)}(E) \cap [a,b]) > \tau\lambda(E).$$

$\square$

3.1.2. Tétel. *Legyenek $f_i : [c,d] \to \mathbf{R}$ $(i = 1,\ldots,n)$ C^1-függvények, és legyen $E \subset [c,d]$ Borel, melyre $\lambda(E) > 0$. Legyen továbbá $G_i = \mathrm{Gr}(f_i|_E)$ $(i = 1,\ldots,n)$. Ekkor létezik C pozitív kúp, hogy minden $(u,v) \in C$ esetén létezik (u,v)-n átmenő egyenes, mely metszi mindegyik G_i-t.*

Bizonyítás. Legyen az x pont E-nek sűrűségi pontja. Vegyünk egy olyan x középpontú $[a,b]$ intervallumot, amelyre $\lambda(E \cap [a,b]) > \left(\frac{n-1}{n}\right)(b-a)$. A 3.1.1. Tételből következik, hogy létezik C pozitív kúp, hogy minden $(u,v) \in C$-re és minden $i = 1,\ldots,n$-re

$$\lambda(T_{(u,v)}(G_i) \cap [a,b]) > \left(\frac{n-1}{n}\right)(b-a).$$

Tehát ha $(u,v) \in C$, akkor $\bigcap_{i=1}^n T_{(u,v)}(G_i) \cap [a,b] \neq \emptyset$, ez pedig pont azt jelenti, hogy van (u,v)-n áthaladó egyenes, amely mindegyik G_i-t metszi. $\square$

3.2. Görbeszerű n-pont halmazok

3.2.1. Tétel. *Legyen $n \geq 2$ egész. Tegyük fel, hogy a $H \subset \mathbf{R}^2$ halmaz olyan, hogy minden derékszögű koordinátarendszerben létezik egy $[a,b]$ intervallum, léteznek folytonosan differenciálható $f_i : [a,b] \to \mathbf{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ függvények és létezik egy $E \subset [a,b]$ Borel-halmaz úgy, hogy $\lambda(E) > 0$, és az f_i függvények E feletti grafikonjai H-nak páronként diszjunkt részhalmazai. Ekkor H vagy korlátos, vagy van olyan egyenes, amely legalább $n+1$ pontban metszi.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy H-t egyetlen egyenes sem metszi n-nél több pontban. Jelöljük K_r-rel az origó középpontú, r sugarú körvonalat. Vegyünk egy $u \in K_1$ vektort, és tekintsük azt a derékszögű koordináta-rendszert, melynek y-tengelyének pozitív félegyenese u irányába néz. A tételünk feltételei szerint ennek a koordináta-rendszernek az x-tengelyén létezik $[a,b]$ intervallum, azon f_i folytonosan differenciálható függvények, és $E \subset [a,b]$ pozitív mértékű Borel-halmaz, hogy az f_i függvények grafikonjai H-nak páronként diszjunkt részhalmazai.

Mivel feltettük, hogy H-t minden egyenes legfeljebb n pontban metszi, a 3.1.2. Tétel szerint létezik $r_u > 1$ és $0 < \theta_u < \pi/4$, hogy H-nak egyetlen pontja sem esik abba a C_u kúpba, melynek csúcsa $r_u u$, és azon z pontokból áll, melyekre a $z - r_u u$ és u vektorok által bezárt szög kisebb, mint θ_u.

Minden $u \in K_1$-re legyen A_u a K_{r_u+1} körvonalnak azon maximális nyílt részíve, mely C_u-ba esik. Az A_u íveket vetítsük le az origóból a K_1 körvonalra: így kapjuk K_1-nek I_u nyílt ívekből álló fedését. Ebből válasszunk ki $I_{u_1}, \ldots, I_{u_m}$ véges részfedést. Világos, hogy a $K_{\max_i\{r_{u_i}+1\}}$ körvonalat teljes egészében fedik a C_{u_i} kúpok. Ekkor viszont a teljes $\{z \in \mathbf{R}^2 : ||z|| \geq \max_i\{r_{u_i}+1\}\}$ körkülsőt is, H tehát valóban korlátos. $\square$

3.2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $H \subset \mathbf{R}^2$ halmaz $\mathcal{H}^1$-mérhető és görbeszerű, továbbá a $\widetilde{H} \stackrel{\text{def}}{=} \{x : |H_x| \geq n\}$ halmaz pozitív Lebesgue-mértékű. Ekkor létezik $[c,d]$ intervallum, azon folytonosan differenciálható $f_i : [c,d] \to \mathbf{R}$ függvények $(i = 1, \ldots, n)$, és egy $E \subset [c,d]$ pozitív mértékű Borel-halmaz, hogy az f_i függvények E feletti grafikonjai H-nak páronként diszjunkt részhalmazai.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy abból, hogy a H halmaz $\mathcal{H}^1$-mérhető és görbeszerű, már következik, hogy $\widetilde{H}$ Lebesgue-mérhető. Fedjük le H-t $\mathcal{H}^1$-nullhalmaz kivételével megszámlálható sok C^1-görbével, jelöljük őket g_i-vel. A $H_i \stackrel{\text{def}}{=} H \cap g_i([0,1])$ jelöléssel ekkor H felírható $H = N \cup \bigcup_i H_i$ alakban, ahol

$N = H \setminus \bigcup_i H_i$, $\mathcal{H}^1(N) = 0$, és $\mathcal{H}^1(H_i) < \infty$. Mivel a $\mathcal{H}^1$ külső mérték Borel-reguláris, léteznek B_i Borel-halmazok, hogy $H_i \subset B_i$ és $\mathcal{H}^1(H_i) = \mathcal{H}^1(B_i)$, következésképpen – a H_i halmaz $\mathcal{H}^1$-mérhetősége miatt – $\mathcal{H}^1(B_i \setminus H_i) = 0$ minden i-re. Ebből azt kapjuk, hogy $\mathcal{H}^1(H \Delta B) = 0$, ahol Δ a szimmetrikus differenciát jelöli, és $B \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_i B_i$ Borel. Legyen $M \stackrel{\text{def}}{=} H \Delta B$.

A $\widetilde{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{x : |B_x| \geq n\}$ halmaz analitikus, hiszen a

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^{n+1} : (x, y_i) \in B \ \ (i = 1, \dots, n), \ \ y_1 < \dots < y_n\}$$

halmaz Borel $\mathbf{R}^{n+1}$-ben, $\widetilde{B}$ pedig ennek folytonos képe az első koordinátára való vetítés által. A $\widetilde{B}$ halmaz tehát mérhető, így $\widetilde{H}$ is, hiszen $\widetilde{B} \Delta \widetilde{H} \subset \mathrm{pr}_1(B \Delta H) = \mathrm{pr}_1(M)$, utóbbi pedig nullhalmaz. Vegyük észre, hogy az $Y \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{B} \setminus \mathrm{pr}_1(M) = \widetilde{H} \setminus \mathrm{pr}_1(M)$ pontosan azon $x \in \mathbf{R}$ pontok halmaza, melyekre $B_x = H_x$, és $|B_x| = |H_x| \geq n$. Azt is tudjuk, hogy Y mérhető és $\lambda(Y) = \lambda(\widetilde{B}) = \lambda(\widetilde{H}) > 0$.

Vegyünk egy $D \subset Y$ pozitív mértékű Borel-halmazt, és legyen $B' \stackrel{\text{def}}{=} B \cap (D \times \mathbf{R})$, mely szintén Borel. A következő állításunk az, hogy létezik egy $T \subset D$ pozitív mértékű kompakt halmaz, és léteznek $k_i : T \to \mathbf{R}$ folytonos függvények ($i = 1, \dots, n$), hogy ezek G_i grafikonjai B'-nek (így H-nak is) páronként diszjunkt részhalmazai. A Jankov-von Neumann uniformizációs tétel [9, 18.1. Tétel] azt mondja ki, hogy a sík minden A analitikus részhalmazához van olyan $f : \mathrm{pr}_1(A) \to \mathbf{R}$ függvény, mely mérhető az analitikus halmazok által generált σ-algebra szerint, és a grafikonja A-nak részhalmaza. Tehát, mivel a B' halmaz analitikus (sőt Borel), létezik olyan $g : D \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre $\mathrm{Gr}(g) \subset B'$, és amely mérhető az analitikus függvények által generált σ-algebrára. Speciálisan Lebesgue-mérhető. Luzin tételét g-re alkalmazva kapjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik $K_1 \subset D$ kompakt halmaz és $h_1 : K_1 \to \mathbf{R}$ folytonos függvény, hogy $\lambda(D \setminus K_1) < \varepsilon$, és $g|_{K_1} = h_1$.

Ezután tekintsük B' helyett a $B' \setminus \mathrm{Gr}(h_1)$, szintén Borel-halmazt, melynek D feletti szeletei legalább $n-1$ eleműek, és az előző gondolatmenet ismétlésével válasszunk olyan $K_2 \subset D$ kompakt halmazt és $h_2 : K_2 \to \mathbf{R}$ folytonos függvényt, hogy $\lambda(D \setminus K_2) < \varepsilon$, és $\mathrm{Gr}(h_2) \subset B' \setminus \mathrm{Gr}(h_1)$. Az eljárást folytatva kapunk $K_1, \dots, K_n \subset D$ kompakt halmazokat és $h_i : K_i \to \mathbf{R}$ folytonos függvényeket, hogy $\lambda(D \setminus K_i) < \varepsilon$ minden $i = 1, \dots, n$-re, és a h_i függvények grafikonjai B' páronként diszjunkt részhalmazai. Ha $\varepsilon < \lambda(D)/n$, akkor $\lambda(K_1 \cap \dots \cap K_n) > 0$, így $T \stackrel{\text{def}}{=} K_1 \cap \dots \cap K_n$ és $k_i \stackrel{\text{def}}{=} h_i|_T$ jó választás, azaz $T \subset \widetilde{H}$ pozitív mértékű kompakt halmaz és $k_i : T \to \mathbf{R}$ folytonos függvények, melyekre a k_i függvények G_i grafikonjai H-nak páronként diszjunkt részhalmazai ($i = 1, \dots, n$).

Nyilvánvalóan mindegyik G_i görbeszerű, hiszen a görbeszerű H halmaznak a részhalmazai, ezért a 2.4.1. Tétel szerint minden $i = 1, \ldots, n$-re léteznek $g_{ij} : [a_{ij}, b_{ij}] \to \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvények, hogy

$$\lambda\Big(\mathrm{pr}_1\big(G_i \setminus \bigcup_j \mathrm{Gr}(g_{ij})\big)\Big) = 0.$$

Mindegyik G_i kompakt, így $G_i \cap \mathrm{Gr}(g_{ij})$ is az. Jelöljük a $\mathrm{pr}_1(G_i \cap \mathrm{Gr}(g_{ij}))$ halmazt E_{ij}-vel. Ezzel a jelöléssel tehát minden i-re $\lambda(T \setminus \bigcup_j E_{ij}) = 0$. Ebből, valamint abból, hogy az E_{ij}-knek m. m. pontja sűrűségi pont, következik, hogy rögzített i-re m. m. $x \in T$-hez létezik j, hogy x sűrűségi pontja E_{ij}-nek. Következésképpen létezik $x \in T$, és léteznek $j_1, \ldots, j_n$ indexek, hogy x sűrűségi pontja E_{ij_i}-nek minden $i = 1, \ldots, n$ esetén.

A $\bigcap_{i=1}^n [a_{ij_i}, b_{ij_i}]$ intervallumot választhatjuk $[c, d]$ intervallumnak, $g_{ij_i}|_{[c,d]}$-t f_i-nek, a $[c, d] \cap \bigcap_{i=1}^n E_{ij_i}$ halmazt pedig E-nek. Már csak azt kell belátnunk, hogy $\lambda(E) > 0$, de ez következik abból, hogy x sűrűségi pontja E_{ij_i}-nek minden i-re.

Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

A 3.2.1. és 3.2.2. Tétel közvetlen következménye az alábbi tétel:

3.2.3. Tétel. *Legyen $n \geq 2$ egész, és legyen $H \subset \mathbf{R}^2$ n-pont halmaz. Ekkor H nem lehet $\mathcal{H}^1$-mérhető görbeszerű halmaz.*

3.3. Egy érdekes sejtés

Mauldin észrevette, hogy a következő geometriai mértékelméleti sejtés (lásd [12, 258. oldal]) szoros kapcsolatban van az n-pont halmazok témakörével.

(P2) *Minden síkbeli görbementes kompakt 1-halmazhoz van olyan egyenes, amely azt legalább 3 pontban metszi.*

Nehéz megmondani, hogy mennyire megalapozott a sejtés. Mindenesetre ha igaz lenne, az azzal a rendkívül érdekes következménnyel járna, hogy nem létezik Borel 2-pont halmaz, amint azt hamarosan belátjuk. Ennek a sejtésnek van egy általánosabb változata is:

(Pn) *Minden síkbeli görbementes kompakt 1-halmazhoz van olyan egyenes, amely azt legalább $n + 1$ pontban metszi.*

A következő tétel egy klasszikus vetítési tétel, nem bizonyítjuk.

3.3.1. Tétel. *[6, 84. oldal] Legyen $B \subset \mathbf{R}^2$ görbeszerű Borel-halmaz, melyre $\mathcal{H}^1(B) > 0$. Ekkor legfeljebb egy kivételével minden origón áthaladó W egyenes esetén $\lambda(\mathrm{pr}_W(B)) > 0$, ahol pr_W a W egyenesre való merőleges vetítést jelöli.*

Megjegyezzük még azt a közismert tényt, hogy tetszőleges, nem feltétlenül $\mathcal{H}^1$-mérhető, de véges külső mértékű $H \subset \mathbf{R}^2$ felbontható egy görbeszerű és egy görbementes halmaz diszjunkt uniójára, sőt, a felbontás $\mathcal{H}^1$-nullhalmaztól eltekintve egyértelmű [12, 15.6. Tétel]. Ha H Borel, akkor a görbeszerű és a görbementes komponens is vehető Borelnek.

3.3.2. Tétel. *Legyen $n \geq 2$, és tegyük fel, hogy $(\mathrm{P}n)$ igaz. Legyen $A \subset \mathbf{R}^2$ analitikus, továbbá tegyük fel, hogy $\mathcal{H}^1(A) > 0$, és minden egyenes legfeljebb n pontban metszi A-t. Ekkor A felírható*

$$A = N \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

alakban, ahol minden E_i görbeszerű kompakt 1-halmaz és $\mathcal{H}^1(N) = 0$. Speciálisan A görbeszerű.

Bizonyítás. Világos, hogy minden $E \subset A$ kompakt 1-halmaz görbeszerű. Egy ilyen E ugyanis felbomlik egy görbeszerű és egy görbementes Borel-halmaz uniójára. Ha a görbementes komponens nem lenne $\mathcal{H}^1$-nullmértékű, akkor azt $(\mathrm{P}n)$ szerint több, mint n pontban metszené egy egyenes, de ez nem fordulhat elő.

Ha a tétel állítása nem lenne igaz, akkor – az 1.2.1. Tételt használva – transzfinit rekurzióval konstruálhatnánk több, mint megszámlálható sok E_α $(\alpha < \omega_1)$ páronként diszjunkt A-ban fekvő kompakt 1-halmazt. Tudjuk, hogy E_α görbeszerű, tehát a 3.3.1. Tétel szerint egy kivételével minden W origón áthaladó egyenesre $\lambda(\mathrm{pr}_W(E_\alpha)) > 0$.

Vegyünk két különböző origón áthaladó egyenest, W_1-et és W_2-t. Ha megszámlálhatóan sok α kivételével $\lambda(\mathrm{pr}_{W_1}(E_\alpha)) = 0$, akkor ez a több mint megszámlálhatóan sok kivételes α W_2-re nézve már nem lehet kivételes. Tehát létezik olyan W origón áthaladó egyenes, hogy $\lambda(\mathrm{pr}_W(E_\alpha)) > 0$ áll fenn megszámlálhatónál több α-ra. Feltehető, hogy ez az egyenes az x-tengely, a pr_W jelölés helyett pedig használhatjuk a már megszokott pr_1-et.

Azt állítjuk, hogy elég nagy K egész esetén megszámlálhatónál több α-ra $\lambda(\mathrm{pr}_1(E_\alpha) \cap [-K, K]) > 0$. Valóban,

$$\{\alpha : \lambda(\mathrm{pr}_1(E_\alpha)) > 0\} = \bigcup_{K=1}^{\infty} \{\alpha : \lambda(\mathrm{pr}_1(E_\alpha \cap [-K, K])) > 0\},$$

így, mivel a bal oldal nem megszámlálható, a jobb oldalon álló halmazok között is van nem megszámlálható. Sőt, hasonlóan belátható, hogy létezik $c > 0$, hogy megszámlálhatónál több α-ra $\lambda(\mathrm{pr}_1(E_\alpha) \cap [-K, K]) > c$.

Világos, hogy ekkor létezik $x \in [-K, K]$, hogy $x \in \mathrm{pr}_1(E_\alpha)$ n-nél több α-ra teljesül. Következésképpen az x-en áthaladó függőleges egyenes A-t n-nél több pontban metszi, ami ellentmondás. $\square$

A 3.2.3. és 3.3.2. Tételekből azonnal következik az alábbi tétel:

3.3.3. Tétel. *Legyen $n \geq 2$. Ha (Pn) igaz, akkor nem létezik analitikus n-pont halmaz.*

4. fejezet

F_σ-halmazok

4.1. Ívek 2-pont halmazokban

A bevezetésben említettük, hogy ívek létezését 2-pont halmazokban először Larman [11] vizsgálta, azzal a motivációval, hogy megmutassa, hogy nem létezik n-pont halmaz, mely F_σ. Hogy pontosan mit értünk *ív* alatt, arról még nem beszéltünk.

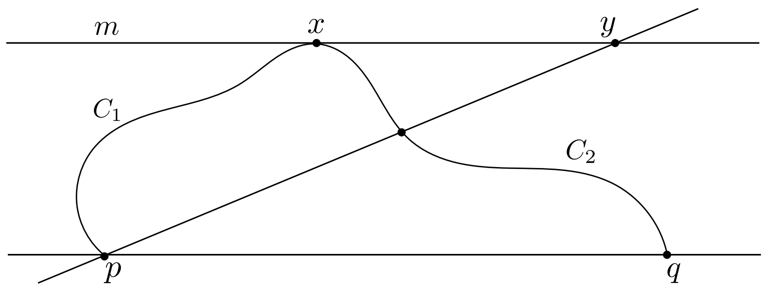
4.1.1. Definíció. Egy $C \subset \mathbf{R}^2$ halmazt *ívnek* nevezünk, ha homeomorf a $[0,1]$ intervallummal.

Egy C ívnek értelemszerűen definiáljuk a végpontjait és a belső pontjait: egy $x \in C$ pont belső pont, ha $C \setminus \{x\}$ nem összefüggő, és végpont, ha összefüggő. Ha x és y a síknak két különböző pontja, akkor $L(x,y)$-nal jelöljük az x-en és y-on áthaladó egyenest. A síkban egy egyenes komplementere két komponensre esik szét. Azt mondjuk, hogy két pont az egyenesnek ugyanazon az oldalán van, ha ugyanabban a komponensben vannak.

Bevezetésképpen adunk egy egyszerű bizonyítást arra, hogy egy 2-pont halmaz nem tartalmazhat ívet.

4.1.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $H \subset \mathbf{R}^2$ halmazt minden egyenes legalább két pontban metszi, és H tartalmaz egy C ívet. Ekkor van olyan egyenes, ami H-t legalább három pontban metszi.*

Bizonyítás. Legyen $f : [0,1] \to C$ homeomorfizmus, és legyen $p = f(0)$ és $q = f(1)$ a C ív két végpontja. Ha $C \subset L(p,q)$, akkor nincs mit bizonyítani, egyébként pedig legyen x a C ívnek $L(p,q)$-tól (egyik) legtávolabb eső pontja, és legyen m az x-en áthaladó, $L(p,q)$-val párhuzamos egyenes



4.1. ábra.

(4.1. ábra). Könnyen ellenőrizhető, hogy ha az m egyenes x-en kívül még egy pontban metszené C-t, akkor egy m-mel párhuzamos, $L(p,q)$-hoz kicsit közelebbi egyenesnek legalább négy közös pontja lenne C-vel. Feltehetjük tehát, hogy $m \cap C = \{x\}$.

Azt is tudjuk, hogy m-nek van x-en kívül még egy közös pontja H-val, nevezzük ezt a pontot y-nak. A C ívnek p és x közötti részét jelöljük C_1-gyel, a q és x közötti részét C_2-vel. Ha y az $\{x+t(p-q) : t > 0\}$ félegyenesen van, akkor $L(y,q)$ metszi C_1-et, ha pedig az $\{x+t(p-q) : t < 0\}$ félegyenesen van, akkor $L(y,p)$ metszi C_2-t. Mindkét esetben találtunk tehát egy egyenest, amely legalább három pontban metszi C-t. $\square$

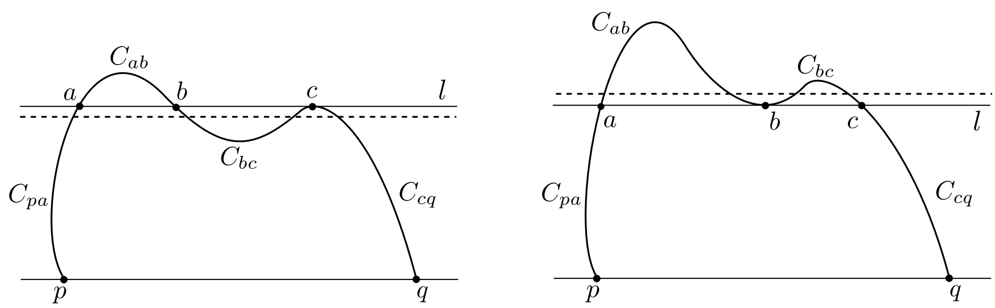
4.1.3. Következmény. *Egy 2-pont halmaz nem tartalmazhat ívet.*

4.2. Ívek 3-pont halmazokban

Nem sokkal nehezebb az sem, hogy egy 3-pont halmaz sem tartalmazhat ívet. Először egy segédtételt bizonyítunk.

4.2.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy a C ív végpontjai, p és q egy l egyenesnek ugyanarra az oldalára esnek, és l legalább három pontban metszi C-t. Ekkor van olyan egyenes, ami C-t legalább négy pontban metszi.*

Bizonyítás. Először is feltehetjük, hogy l pontosan 3 pontban metszi C-t, legyenek ezek a, b és c (4.2. ábra). Legyen $f : [0,1] \to C$ homeomorfizmus, hogy $p = f(0)$, $a = f(x_a)$, $b = f(x_b)$, $c = f(x_c)$ és $q = f(1)$. Feltehető, hogy $x_a < x_b < x_c$. A C ívnek ez az öt pontja négy nyílt részívre bontja C-t, jelöljük ezeket rendre C_{pa}, C_{ab}, C_{bc}, C_{cq}-val. Jelöljük az l egyenes komplementerét alkotó két félsík komponenst F_1-gyel és F_2-vel, és tegyük fel, hogy $p, q \in F_1$.



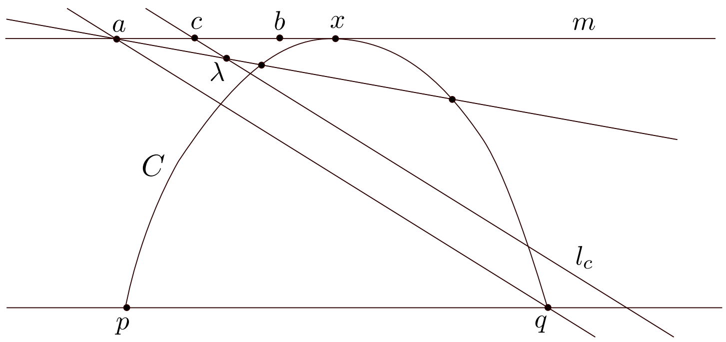
4.2. ábra.

Világos, hogy $C_{pa} \subset F_1$ és $C_{cq} \subset F_1$. Ha C_{ab} és C_{bc} közül az legalább az egyik F_1-be esik, akkor egy l-lel párhuzamos, p-hez kicsit közelebbi egyenes, ha pedig C_{ab} és C_{bc} is F_2-be esik, akkor pedig egy p-től kicsit távolabbi egyenes metszi C-t legalább négy pontban. □

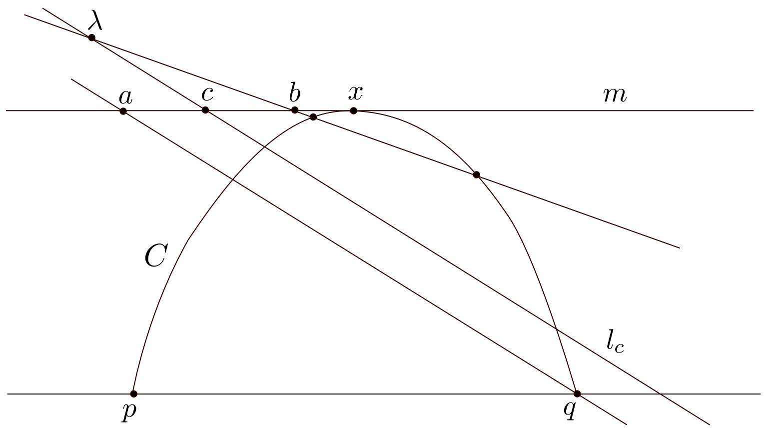
4.2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $H \subset \mathbf{R}^2$ halmazt minden egyenes legalább három pontban metszi, és H tartalmaz egy C ívet. Ekkor van olyan egyenes, amely H-t legalább négy pontban metszi.*

Bizonyítás. Legyen f, p, q, x és m, mint a 4.1.2. Tétel bizonyításában, és megint kizárhatjuk azt az esetet, amikor $C \subset L(p,q)$. Feltehetjük, hogy $p = (0,0)$, $q = (1,0)$, így ha $x = (x_1, x_2)$, akkor $m = \mathbf{R} \times \{x_2\}$. Legyen $a = (a_1, x_2)$ és $b = (b_1, x_2)$ két másik m-en fekvő pontja H-nak, és tegyük fel, hogy $a_1 < b_1$. Két esetet különböztetünk meg:

1. Az m egyenesen x-nek ugyanazon az oldalán van a és b is. Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy $b_1 < x_1$. Legyen $c \in (a_1, b_1) \times \{x_2\}$ és jelölje l_c a c-n áthaladó, $L(a,q)$-val párhuzamos egyenest. A 4.2.1. Lemma szerint feltehetjük, hogy l_c legfeljebb két pontban metszi C-t, így létezik $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in l_c \cap (H \setminus C)$. Ezen az eseten belül is három eset van:
   (a) $\lambda_2 < x_2$. Ekkor az $L(a,\lambda)$ egyenes elválasztja x-et p-től és q-tól, ezért a-n és λ-n kívül még két C-beli pontot is tartalmaz (4.3. ábra).
   (b) $\lambda_2 = x_2$. Ekkor m-en találtunk négy H-beli pontot.
   (c) $\lambda_2 > x_2$. Ebben az esetben a $L(b,\lambda)$ egyenes választja el x-et p-től és q-tól, ezért most $L(b,\lambda)$ metszi H-t legalább négy pontban (4.4. ábra).



4.3. ábra.

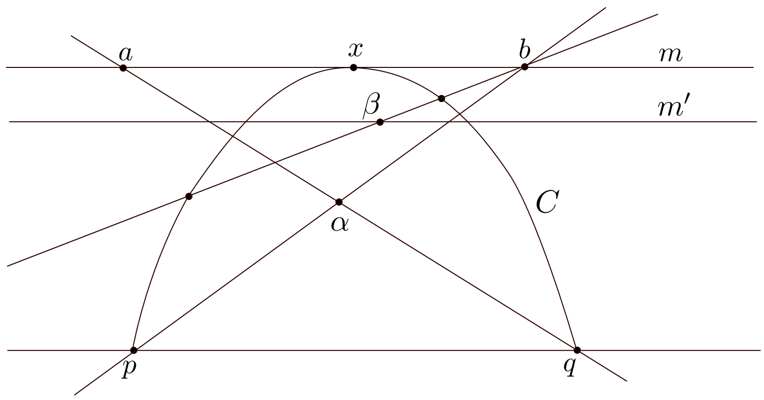


4.4. ábra.

2. $a_1 < x_1 < b_1$. Az $L(a,q)$ és $L(b,p)$ egyenesek metszéspontja (nevezzük α-nak) az x-tengely és az m egyenes közti sávban fekszik (4.5. ábra). Legyen m' egy olyan, m-mel párhuzamos egyenes, mely szigorúan α és m között van. A 4.2.1. Lemma szerint feltehetjük, hogy m' legfeljebb két pontban metszi C-t, és így létezik $\beta \in m' \cap (H \setminus C)$. Szimmetriaokok miatt feltehető, hogy β és x az $L(p,b)$ egyenesnek ugyanarra az oldalára esik. Ekkor viszont az $L(\beta, b)$ egyenes elválasztja x-et p-től és q-tól, ezért C-t is metszi legalább két pontban. Megint megvan a négy pont.

Megmutattuk tehát, hogy bármely esetben van olyan egyenes, amely legalább négy pontban metszi H-t. $\square$

4.2.3. Következmény. *Egy 3-pont halmaz nem tartalmazhat ívet.*



4.5. ábra.

4.3. Ívek F_σ-halmazokban

A következő lépés annak bizonyítása, hogy ha egy n-pont halmaz F_σ, akkor tartalmaz ívet. A most következő tételekhez bevezetünk néhány jelölést. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített pozitív valós szám, $H \subset \mathbf{R}^2$ tetszőleges halmaz, és $n \in \mathbf{N}$. Legyen

$$P_n^\varepsilon(H) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{R} : |H_x| = n, \text{ és} \\ \text{ha } (x,a),(x,b) \in H, a \neq b, \text{ akkor } |a-b| \geq \varepsilon\}.$$

Az $y_i : P_n^\varepsilon(H) \to \mathbf{R}$ $(1 \leq i \leq n)$ függvényeket a következőképpen definiáljuk: az y_i függvények grafikonjainak uniója legyen $(P_n^\varepsilon(H) \times \mathbf{R}) \cap H$, és minden $x \in P_n^\varepsilon(H)$ esetén legyen $y_1(x) < y_2(x) < \ldots < y_n(x)$. Vegyük észre, hogy $P_n^\varepsilon(H)$ definíciója miatt $y_{i+1}(x) \geq y_i(x) + \varepsilon$ minden $i = 1, \ldots, n-1$-re.

4.3.1. Lemma. *Legyen $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbf{N}$, és legyen $F \subset \mathbf{R}^2$ olyan kompakt halmaz, melyet minden függőleges egyenes legfeljebb n pontban metsz. Ekkor $P_n^\varepsilon(F)$ kompakt, és $y_i : P_n^\varepsilon(F) \to \mathbf{R}$ folytonos minden $i = 1, \ldots, n$ esetén.*

Bizonyítás. Az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$, akkor a $P_1^\varepsilon(F)$ halmaz F-nek az x-tengelyre vett merőleges vetülete, így kompakt. Másrészt legyen $x \in P_1^\varepsilon(F)$, és $(x_m)_{m\in\mathbf{N}}$ olyan, $P_1^\varepsilon(F)$-ben haladó sorozat, mely x-hez konvergál. Az $(y_1(x_m))_{m\in\mathbf{N}}$ sorozat korlátos F korlátossága miatt, így $\limsup_{m\to\infty} y_1(x_m) = a$ és $\liminf_{m\to\infty} y_1(x_m) = b$ véges. Mivel F zárt is, (x,a) és (x,b) is eleme F-nek, ami csak úgy lehet, hogy $a = b$, és ez éppen azt jelenti, hogy y_i folytonos az x pontban. Az $n = 1$ esettel tehát készen vagyunk.

Tegyük fel most, hogy az állítás igaz valamely $n \geq 1$-re, és vegyünk egy F kompakt halmazt, amelyet minden függőleges egyenes legfeljebb $n+1$ pontban metsz. Legyen $(x_m)_{m\in\mathbf{N}}$ egy $G \stackrel{\text{def}}{=} P^\varepsilon_{n+1}(F)$-ben haladó sorozat, mely konvergál egy $x \in \mathbf{R}$ ponthoz. Legyen továbbá $\liminf_{m\to\infty} y_{n+1}(x_m) = b$. Vegyük észre, hogy $(x, b) \in F$. Az $(x_m)_{m\in\mathbf{N}}$ sorozatnak létezik olyan $(x_{m_j})_{j\in\mathbf{N}}$ részsorozata, hogy

$$|y_{n+1}(x_{m_j}) - b| < \varepsilon/2$$

teljesül minden $j \in \mathbf{N}$-re, és

$$\lim_{j\to\infty} y_{n+1}(x_{m_j}) = b.$$

Definiáljuk a következő kompakt halmazt:

$$F' \stackrel{\text{def}}{=} F \cap \big((\{x\} \cup \{x_{m_j} : j \in \mathbf{N}\}) \times (-\infty, b - \varepsilon/2]\big).$$

Mivel

$$b - \varepsilon/2 < y_{n+1}(x_{m_j}) < b + \varepsilon/2,$$

minden $j \in \mathbf{N}$-re, $(x_{m_j}, y_{n+1}(x_{m_j})) \notin F'$, de $(x_{m_j}, y_n(x_{m_j})) \in F'$. Következésképpen minden $j \in \mathbf{N}$-re $\left|F'_{x_{m_j}}\right| = n$, amiből azt kapjuk, hogy $x_{m_j} \in P^\varepsilon_n(F')$. Vegyük észre, hogy $(x, b) \in F \setminus F'$, így $|F'_x| \leq n$, tehát F'-nek minden függőleges szelete legfeljebb n elemű. Ezért alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, miszerint $P^\varepsilon_n(F')$ kompakt, és emiatt $x \in P^\varepsilon_n(F')$. Ugyancsak az indukciós feltevés szerint

$$\lim_{j\to\infty} y_n(x_{m_j}) = y_n(x),$$

így

$$b - y_n(x) \geq \varepsilon,$$

hiszen minden j-re $y_{n+1}(x_{m_j}) - y_n(x_{m_j}) \geq \varepsilon$ és $\lim_{j\to\infty} y_{n+1}(x_{m_j}) = b$. Következésképpen $x \in G$. Ezzel megmutattuk, hogy G kompakt.

(G kompaktságát elegánsabban úgy is bizonyíthattuk volna, hogy tekintjük a

$$\{(x, y_1, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+2} : x \in \mathbf{R}, (x, y_i) \in F \text{ minden } i = 1, \ldots, n+1\text{-re}$$
$$\text{és } y_{i+1} - y_i \geq \varepsilon \text{ minden } i = 1, \ldots, n\text{-re}\}$$

halmazt, mely zárt, mert csupa zárt feltétellel adtuk meg, és korlátos is, tehát kompakt, a G halmaz pedig pont ennek a kompakt halmaznak az első koordinátára vett vetülete. Azonban a fentiekhez hasonló okoskodásra akkor is szükség lenne az y_i függvények folytonosságának igazolásához.)

Legyen $\limsup_{m\to\infty} y_{n+1}(x_m) = a$, és tegyük fel, hogy $a > b$. Ekkor (x,a) és (x,b) is eleme F-nek, továbbá $a > b > y_n(x) > \ldots > y_1(x)$, ami ellentmond annak, hogy F-nek minden függőleges szelete legfeljebb $n+1$ elemű. Ezért $a = b$, tehát y_{n+1} folytonos.

Tekintsük az

$$F'' \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \in (G \times \mathbf{R}) \cap F : y \leq y_{n+1}(x) - \varepsilon\}$$

halmazt, amely y_{n+1} folytonosságából következően kompakt. Világos, hogy F'' kielégíti az éppen bizonyítandó lemma feltételeit n-re, továbbá $P_n^\varepsilon(F'') = P_{n+1}^\varepsilon(F') = G$ és az F'-re illetve F''-re definiált $y_1, \ldots, y_n$ függvények egybeesnek. Az indukciós feltevés szerint tehát $y_1, \ldots, y_n$ is folytonosak, és készen vagyunk. □

4.3.2. Tétel. *Legyen H a síknak egy F_σ-részhalmaza, és legyen $n \in \mathbf{N}$ olyan, hogy H-nak minden függőleges szelete pontosan n elemű. Ekkor létezik olyan nemelfajuló $[a,b]$ intervallum, és léteznek az $[a,b]$ intervallumon értelmezett $f_1 < f_2 < \ldots < f_n$ folytonos függvények úgy, hogy H tartalmazza mindegyik f_i-nek a grafikonját. Speciálisan H tartalmaz ívet.*

Bizonyítás. Legyen $H = \bigcup_{i=1}^\infty F_i$, ahol $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$, és mindegyik F_i kompakt. Minden $i \in \mathbf{N}$-re definiáljuk a következő halmazt:

$$H_i \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{R} : |(F_i)_x| = n, \text{ és ha } (x,a),(x,b) \in F_i, a \neq b, \\ \text{akkor } |a-b| \geq 1/i\}.$$

A 4.3.1. Lemma szerint H_i kompakt minden $i \in \mathbf{N}$ esetén. Vegyük észre, hogy $\bigcup_{i=1}^\infty H_i = \mathbf{R}$, így a Baire Kategória Tétel szerint létezik $i_0 \in \mathbf{N}$, hogy H_{i_0} tartalmaz egy nemelfajuló $[a,b]$ intervallumot. Megint a 4.3.1. Lemma szerint a H_{i_0}-hoz tartozó $y_k|_{[a,b]}$ függvények folytonosak $(1 \leq k \leq n)$, és ezen függvények grafikonjai H-ban fekszenek. □

4.3.3. Tétel. *Egy n-pont halmaz nem lehet F_σ, ha $n = 2, 3$.*

Bizonyítás. Használjuk a 4.1.3. és a 4.2.3. Következményeket, és a 4.3.2. Tételt. □

4.3.4. *Megjegyzés.* A 4.2.2. Tétel bizonyítása Bouhjar, Dijkstra és van Mill nevéhez fűződik [4]. Ugyanebben a cikkben szerepel a 4.3.1. Lemma és a 4.3.2. Tétel is, de a szerzők megjegyzik, hogy a bizonyítás nem tőlük, hanem Mauldintól származik.

4.4. Nem létezik n-pont halmaz, amely F_σ

Ha $n \geq 4$, akkor a fenti módszerrel nem lehet belátni, hogy egy n-pont halmaz nem lehet F_σ, ugyanis már egy 4-pont halmaz is tartalmazhat ívet, mint azt az 5. fejezetben majd belátjuk. Tehát más módszert kell keresnünk.

Az az igazság, hogy – egyáltalán nem nyilvánvaló, de – tulajdonképpen már minden részlet a rendelkezésünkre áll ahhoz, hogy egy bizonyítást összerakjunk. Mivel az eddig tárgyalt eredményeken kívül gyakorlatilag semmilyen új tétel vagy lemma nem szükséges, Mauldin, Bouhjar és Dijkstra ezt a bizonyítást egy – bevezetéssel és hivatkozásokkal együtt – másfél oldalas cikkben közölte [5]. Íme a bizonyítás:

4.4.1. Tétel. *Legyen $n \geq 2$. Ekkor nem létezik n-pont halmaz, mely a síknak F_σ-részhalmaza.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy A egy F_σ n-pont halmaz. Vegyünk egy tetszőleges derékszögű koordinátarendszert a síkon. A 4.3.2. Tétel szerint létezik egy nemelfajuló $[a, b]$ intervallum, és léteznek $[a, b]$ intervallumon értelmezett $f_1 < f_2 < \ldots < f_n$ folytonos függvények úgy, hogy ezen függvények G_i grafikonjai A-nak részhalmazai. A G_i halmazokat mindegyik vízszintes egyenes legfeljebb n pontban metszi, ezért a Banach Indikátrix Tétel [8, 17.17. Tétel] szerint az f_i függvények korlátos változásúak. (Konkrétan f_i teljes változása legfeljebb $n(M - m)$, ahol m és M az f_i minimumát és maximumát jelöli. Valójában olyan speciális esetben alkalmazzunk a Banach Indikátrix Tételt, hogy az állításunk a teljes változás definícióját felírva gyakorlatilag azonnal látszik.) A 2.1.4. Tétel szerint léteznek g_i folytonosan differenciálható függvények, és létezik egy $C \subset [a, b]$ pozitív mértékű kompakt halmaz, hogy $f_i|_C = g_i|_C$ minden i-re. Mivel ilyen tulajdonságú C halmaz és g_i függvények minden koordinátarendszerben léteznek, a 3.2.1. Tétel szerint az A halmaz vagy korlátos vagy van olyan egyenes, mely legalább $n + 1$ pontban metszi. Egy n-pont halmaz viszont egyik tulajdonsággal sem rendelkezhet. □

5. fejezet

Ellenpéldák, konstrukciók

5.1. 2-dimenziós n-pont halmaz létezése

Az 1.2.4. Tételben megmutattuk, hogy egy analitikus n-pont halmaz Hausdorff-dimenziója 1. Általánosságban azonban ez nem igaz.

5.1.1. Tétel. *Ha $n \geq 2$, akkor létezik H n-pont halmaz, melyre* $\dim(H) = 2$, *sőt* $\mathcal{H}^2(H) > 0$.

Bizonyítás. Az 1.1.2. Állítás bizonyításának módosításával, transzfinit rekurzióval konstruálunk ilyen halmazt. Legyen κ megint a legkisebb kontinuum számosságú rendszám, és vegyük a sík egyeneseinek egy $\{l_\alpha : \alpha < \kappa\}$ jólrendezését. Továbbá készítsük el a sík Borel $\mathcal{H}^2$-nullhalmazainak (azaz a síkbeli Lebesgue-mérték szerint nullmértékű Borel-halmazoknak) egy $\{B_\alpha : 0 < \alpha < \kappa\}$ felsorolását.

Minden α-ra definiálunk egy kontinuumnál kisebb számosságú H_α halmazt. Legyen $H_0 = \emptyset$. Ha $\alpha = \beta + 1$, akkor H'_α legyen H_β és néhány l_α-n fekvő pont egyesítése, ahol a véges sok hozzávett pontot l_α-n úgy választjuk meg, hogy egyikük se essen olyan – l_α-tól különböző – egyenesre, melyen H_β-nak legalább 2 pontja van. Annyi pontot választunk, hogy $|H'_\alpha \cap l_\alpha| = n$ legyen. Azt, hogy ezt meg lehet csinálni, már láttuk az 1.1.2. Állítás bizonyításában.

H'_α-ból úgy kapjuk H_α-t, hogy hozzáveszünk egy B_α-n kívüli pontot, hogy H_α-ra még mindig igaz legyen, hogy minden egyenes legfeljebb n pontban metszi. Ahhoz, hogy ez lehetséges, azt kell megmutatni, hogy a H'_α-beli pontpárok által meghatározott (kontinuumnál kevesebb) egyenes nem fedheti le B_α komplementerét.

Van olyan irány, mely nincs a H'_α-beli pontpárok által meghatározott irányok között, pontosabban van olyan egyenes, mellyel párhuzamos egyenesek mindegyike legfeljebb egy pontban metszi H'_α-t. Alkalmazva ebben az irányban a Fubini-tételt a B_α halmazra, az adódik, hogy van ilyen irányú egyenes, melynek B_α-val vett metszete $\mathcal{H}^1$-nullmértékű (sőt, majdnem mindegyik egyenes ilyen). Elég tehát azt igazolnunk, hogy a számegyenesen egy pozitív Lebesgue-mértékű Borel-halmaz kontinuum számosságú. Ez pedig következik abból, hogy egy ilyen halmaz tartalmaz pozitív mértékű zárt halmazt is, ami – mint a számegyenes minden nem megszámlálható zárt részhalmaza – felírható egy megszámlálható és egy nemüres perfekt, következésképpen kontinuum számosságú halmaz egyesítéseként.

Ha α limeszrendszám, akkor ugyanezt csináljuk, miután vettük az α-nál kisebb indexű halmazok egyesítését. Végül legyen

$$H = \bigcup_{\beta<\kappa} H_\beta.$$

Csak az szorul némi magyarázatra, hogy $\mathcal{H}^2(H) > 0$. Ha ugyanis $\mathcal{H}^2(H) = 0$ lenne, akkor $\mathcal{H}^2$ Borel-regularitása szerint létezne B Borel-halmaz, melyre $H \subset B$ és $\mathcal{H}^2(B) = 0$. Ez viszont lehetetlen, mert B is szerepelt a B_α-k között, tehát H-nak van B-n kívüli pontja. $\square$

A fejezet további részében szereplő tételek bizonyítására gyakorlatilag ugyanez a recept működik (jólrendezzük az egyeneseket, és megfelelő módon minden lépésben beválasztunk néhány új pontot). Ezért ezentúl nem fogjuk ennyire kirészletezni a bizonyításokat, csak a lényeges elemekről beszélünk.

5.2. Halmazok kiterjesztése n-pont halmazzá

5.2.1. Tétel. *Legyen $n \geq 2$, $k \geq n+2$, és legyen $H \subset \mathbf{R}^2$ olyan halmaz, melyet minden egyenes legfeljebb n pontban metsz. Ekkor létezik $\widetilde{H}$ k-pont halmaz, melyre $H \subset \widetilde{H}$.*

Bizonyítás. Mint mondtuk, a bizonyítás szinte szó szerint ugyanúgy történik, mint az n-pont halmazok létezésének bizonyításánál, az 1.1.2. Állításban. Csak annyit jegyzünk meg, hogy azon múlik a bizonyítás, hogy minden lépésben kontinuumnál kevesebb egyenes lesz, amely k pontban metszi az aktuális halmazunkat, így azon az egyenesen, amelyen éppen új pontokat választunk, mindig kontinuumnál kevesebb tiltott pont lesz. $\square$

5.2.2. *Megjegyzés.* A tétel nem igaz $k = n + 1$-re. Ha ugyanis H egy n-pont halmaz, $\widetilde{H}$ egy $n+1$-halmaz, melyre $H \subset \widetilde{H}$, akkor $\widetilde{H} \setminus H$ egy 1-pont halmaz, de ilyen nyilvánvalóan nem létezik.

5.2.3. *Megjegyzés.* A tétel Bouhjar, Dijkstra és van Mill észrevétele [4].

5.2.4. Következmény. *Minden $k \geq 4$ esetén létezik k-pont halmaz, mely tartalmaz kört.*

5.3. Sűrű és sehol sem sűrű n-pont halmaz létezése

5.3.1. Tétel. *Legyen $n \geq 2$. Ekkor létezik n-pont halmaz, amely sűrű a síkon.*

Bizonyítás. Gyakorlatilag ugyanazt kell csinálni, mint az 5.1.1. bizonyításában. Kontinuum sok nemüres nyílt halmaz van, vegyük ezek egy jólrendezését. Minden lépésben vegyünk be annyi pontot az aktuális egyenesről, amennyi hiányzik ahhoz, hogy n legyen rajta, majd vegyünk be még egy olyan pontot is, amely benne az aktuális nyílt halmazban, de a bevételével nem keletkezik olyan egyenes, amelyen n-nél több pont lesz. Ezt azért tehetjük meg, mert egy nemüres nyílt halmazt nem fedhet le kontinuumnál kevesebb egyenes.

Valóban, legyen U nemüres nyílt halmaz, és legyen L kontinuumnál kevesebb egyenesből álló halmaz. Vegyünk egy olyan l egyenest, amely nem párhuzamos az L-beli egyenesek egyikével sem, és U-val van közös pontja. Az $l \cap U$ metszet kontinuum számosságú, továbbá l minden L-beli egyenest pontosan egy pontban metsz, ezért $l \cap U$-ban valóban lesz olyan pont, amilyet kerestünk. $\square$

Az 1.4.4. Tételben beláttuk, hogy egy G_δ n-pont halmaz sehol sem sűrű. Felmerül a kérdés, hogy létezhet-e egyáltalán sehol sem sűrű n-pont halmaz. Sajnos igen.

5.3.2. Tétel. *Legyen $n \geq 2$. Ekkor létezik sehol sem sűrű n-pont halmaz.*

Bizonyítás. Az eddigi tételekben mindig úgy irányítottuk a transzfinit rekurziót, hogy a halmazunk kifelé terjeszkedjen: legyen nagy a dimenziója, legyen sűrű, vagy éppen előírtunk egy halmazt, amelyet tartalmaznia kell. Most ennek pont a fordítottját csináljuk: úgy tartjuk kordában a halmazunkat, hogy csak a sík egy részhalmazából engedünk pontokat választani.

Jelöljük C-vel a Cantor-halmazt. A Cantor-halmaz sehol sem sűrű $\mathbf{R}$-ben, tehát a $C\times\mathbf{R}$ halmaz sehol sem sűrű $\mathbf{R}^2$-ben. Az $\mathbf{R}\times C$ halmaz is sehol sem sűrű, így az uniójuk, $D \stackrel{\text{def}}{=} (C\times\mathbf{R})\cup(\mathbf{R}\times C)$ is az. Elegendő belátni, hogy D tartalmaz n-pont halmazt.

A szokásos transzfinit rekurziós építkezést folytatjuk, azzal a megkötéssel, hogy csak D-ből választhatunk pontot. Ez valóban működik, hiszen D-nek megvan az a szerencsés tulajdonsága, hogy minden egyenest kontinuum számosságú halmazban metsz. □

5.4. $\mathcal{H}^1$-mérhető és görbeszerű n-pont halmazok

A 3.2.3. Tétel szerint nem létezik $\mathcal{H}^1$-mérhető görbeszerű n-pont halmaz. Jogosan merül fel a kérdés, hogy szükséges-e a tételben feltenni a $\mathcal{H}^1$-mérhetőséget. A választ nem tudjuk. A 3.2.3. Tétel ismertetett bizonyítása részben a 3.2.2. Tételre épül, ott viszont egyáltalán nem látszik, hogy hogyan lehetne megszabadulni a $\mathcal{H}^1$-mérhetőség feltételétől.

Másrészt görbeszerű n-pont halmazt konstruálni sem tűnik egyszerűnek. Nyilvánvaló, hogy minden görbeszerű halmaz belefoglalható egy F_σ görbeszerű halmazba $\mathcal{H}^1$-nullhalmaztól eltekintve. Logikusnak tűnik tehát egy olyan transzfinit rekurzióval próbálkozni, amely mindig csak egy rögzített, „elég nagy" görbeszerű halmazból választ pontokat. A 2.4.2. Következmény viszont éppen azt állítja, hogy nincs olyan „nagy" görbeszerű halmaz, amellyel a szokásos recept működik: alig van olyan egyenes, amely megszámlálhatónál több pontban metsz egy görbeszerű halmazt.

Természetesen merül fel az a kérdés is, hogy létezik-e $\mathcal{H}^1$-mérhető n-pont halmaz. Erre a kérdésre sem ismerjük a választ, de annyit legalább tudunk, hogy konzisztens $\mathcal{H}^1$-mérhető halmaz létezése. Miller [15] ugyanis bebizonyította, hogy ha a $V = L$ axióma igaz, akkor létezik koanalitikus n-pont halmaz. Laczkovich Miklós ötlete alapján mutatunk egy ennél jóval egyszerűbb bizonyítást arra, hogy $\mathcal{H}^1$-mérhető halmaz létezése konzisztens.

5.4.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy a $H\subset\mathbf{R}^2$ halmazt minden $B\subset\mathbf{R}^2$ véges lineáris mértékű Borel-halmaz nulla lineáris mértékű halmazban metszi. Ekkor a H halmaz $\mathcal{H}^1$-mérhető.*

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy H minden halmazt „jól vág ketté", azaz hogy minden $A\subset\mathbf{R}^2$ halmazra $\mathcal{H}^1(A)=\mathcal{H}^1(A\cap H)+\mathcal{H}^1(A\setminus H)$. A bal oldal mindig legfeljebb akkora, mint a jobb oldal, ezért elég csak a fordított irányú egyenlőtlenséggel foglalkozni. Ez $\mathcal{H}^1(A) = \infty$ esetén nyilván fennáll, ezért feltehető, hogy $\mathcal{H}^1(A) < \infty$.

Legyen B az a A halmaz Borel burka, azaz olyan, hogy $\mathcal{H}^1(B) = \mathcal{H}^1(A)$. A feltételünk szerint $\mathcal{H}^1(B \cap H) = 0$, ezért az is igaz, hogy $\mathcal{H}^1(A \cap H) = 0$. Ebből pedig

$$\mathcal{H}^1(A) \geq \mathcal{H}^1(A \setminus H) = \mathcal{H}^1(A \setminus H) + \mathcal{H}^1(A \cap H).$$

Ezt akartuk bizonyítani. □

5.4.2. Tétel. *Legyen $n \geq 2$, és tegyük fel, hogy kontinuumnál kevesebb nulla lineáris mértékű halmaz egyesítése is nulla lineáris mértékű. (Ez következménye például a kontinuum hipotézisnek.) Ekkor létezik $\mathcal{H}^1$-mérhető n-pont halmaz.*

Bizonyítás. Az 5.4.1. Lemma szerint elég megmutatni, hogy létezik olyan n-pont halmaz, melyet minden véges lineáris mértékű Borel-halmaz nullmértékűben metsz.

Legyen κ a legkisebb kontinuum számosságú rendszám, és legyen $\{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$ a sík véges lineáris mértékű Borel-halmazainak egy κ típusú jólrendezése. A H_α halmazokat válasszuk a következőképpen. Álljon az R_α halmaz azon $\beta < \alpha$ rendszámokból, melyekre $l_\alpha \cap B_\beta$ nulla lineáris mértékű. A feltételünk szerint $l_\alpha \cap \bigcup_{\beta \in R_\alpha} B_\beta$ is nullmértékű, tehát az α-adik lépésben az új pontokat választhatjuk az $l_\alpha \setminus \bigcup_{\beta \in R_\alpha} B_\beta$ halmazból.

Belátjuk, hogy az így konstruált halmaz mindegyik B_β halmazt nullmértékűben metszi. A konstrukció első β lépésében kiválasztott pontok halmaza összesen is csak nullmértékű (mert kontinuumnál kisebb számosságú). Másrészt azon $\alpha > \beta$ rendszámok halmaza, amelyekre az α-adik lépésben választottunk pontot B_β-ból, csak megszámlálható. Ez világos abból, hogy B_β véges mértékű, minden ilyen α-ra $l_\alpha \cap B_\beta$ pozitív mértékű, és az $l_\alpha \cap B_\beta$ halmazok közül bármely kettőnek a metszete legfeljebb egyelemű (tehát nullmértékű). □

5.5. Második kategóriájú n-pont halmaz létezése

5.5.1. Tétel. *Legyen $n \geq 2$. Ekkor létezik második kategóriájú n-pont halmaz.*

Bizonyítás. Egy halmaz pontosan akkor első kategóriájú, ha tartalmazza egy első kategóriájú F_σ-halmaz, ugyanis sehol sem sűrű halmaz lezártja is sehol sem sűrű. Elég tehát egy olyan n-pont halmazt konstruálni, amely kilóg minden első kategóriájú F_σ-halmazból.

A konstrukció az 5.1.1. és 5.3.1. Tételek bizonyításának mintájára történik. Csak annyit kell megmutatnunk, hogy egy első kategóriájú F_σ-halmaz komplementerét nem fedheti le kontinuumnál kevesebb egyenes.

Legyen tehát G egy reziduális G_δ-halmaz a síkon és legyen L kontinuumnál kevesebb egyenesből álló halmaz. Válasszunk egy l egyenest, amely nem párhuzamos egyik L-beli egyenessel sem. A Kuratowski-Ulam tétel (1.4.1. Tétel) szerint létezik olyan olyan l-lel párhuzamos m egyenes, melyre $m \cap G$ reziduális G_δ-részhalmaza m-nek. Az m egyenest minden L-beli egyenes pontosan egy pontban metszi, ezért elegendő azt megmutatni, hogy egy $\mathbf{R}$-beli reziduális G_δ-halmaz kontinuum számosságú.

Ismeretes, hogy teljes metrikus tér G_δ altere homeomorf egy teljes metrikus térrel ([10], I. rész, 5.8. Tétel), valamint hogy egy nem megszámlálható lengyel tér kontinuum számosságú, ugyanis tartalmaz a Cantor-halmazzal homeomorf példányt ([10], I. rész, 6.4. Tétel). Ebből a két tételből adódik az állításunk. $\square$

5.5.2. *Megjegyzés.* Mint már korábban említettük, a Kuratowski-Ulam tétel szerint egy második kategóriájú n-pont halmaz nem lehet Baire tulajdonságú.

Irodalomjegyzék

[1] F. BAGEMIHL, „A theorem on intersections of prescribed cardinality", *Ann. of Math.* **55** (1952) 34-37.

[2] F. BAGEMIHL és P. ERDŐS, „Intersections of prescribed power, type or measure", *Fund. Math.* **41** (1957) 57-67.

[3] V. J. BASTON és F. A. BOSTOCK, „On a theorem of Larman", *J. London Math. Soc. (2)* **5** (1972) 715-718.

[4] K. BOUHJAR, J. J. DIJKSTRA, és J. VAN MILL, „Three-point sets", *Topology Appl.* **112** (2001) 215-227.

[5] K. BOUHJAR, J. J. DIJKSTRA, és R. D. MAULDIN, „No n-point set is σ-compact", *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2001), 621-622.

[6] K. J. FALCONER, *The Geometry of Fractal Sets* (Cambridge University Press, 1990).

[7] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory* (Springer-Verlag, 1969).

[8] E. HEWITT és K. STROMBERG, *Real and Abstract Analysis* (Springer-Verlag, 1965).

[9] A. S. KECHRIS, *Classical descriptive set theory* (Graduate Texts in Mathematics 156, Springer-Verlag, 1995)

[10] LACZKOVICH MIKLÓS, *Valós függvénytan (egyetemi jegyzet)* (ELTE, Budapest, 1995).

[11] D. G. LARMAN, „A problem of incidence", *J. London Math. Soc.* **43** (1968) 407-409.

[12] P. MATTILA, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces* (Cambridge University Press, 1995).

[13] R. D. Mauldin, „On sets which meet each line in exactly two points”, *Bull. London Math. Soc.* **30** (1998) 397-403.

[14] S. Mazurkiewicz, „O pewnej mnogości płaskiej, która ma z każda prosta dwa i tylko dwa punkty wspólne” (Lengyel), *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et Lettres de Varsovie* **7** (1914) 382-384; Francia ford.: „Sur un ensemble plan qui a avec chaque droite deux et seulement deux points communs”, *Traveaux de Topologie et es Applications* (Szerk.: K. Borsuk *et al.*, PWN, Varsó, 1969) 46-47.

[15] A. Miller, „Infinite combinatorics and definability”, *Ann. Pure Appl. Logic* **41** (1989) 179-203.

[16] C. A. Rogers, *Hausdorff Measures* (Cambridge University Press, 1970).

[17] S. Saks, *Theory of the Integral* (Dover, New York, 1964).

[18] W. Sierpiński, „Une généralisation des théorèmes de S. Mazurkiewicz et F. Bagemihl”, *Fund. Math.* **40** (1953) 1-2.