Véletlen fraktálok

Diplomamunka

Írta: Beringer Dorottya

Matematikus szak

Témavezető:

Elekes Márton, egyetemi adjunktus
Analízis tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

2011

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A természetben számos helyen előfordulnak fraktálszerű alakzatok. Ilyenek a növények levelei, elágazásai, a vízfolyások, a szárazföldek partvonala. Ezekben az alakzatokban természetes módon előfordulnak kisebb-nagyobb szabálytalanságok. A véletlen fraktálok egyik felhasználási területe, hogy a segítségükkel természetesnek ható alakzatokat, főleg tájképeket hoznak létre.

A dolgozatban bemutatjuk, hogyan lehet az önhasonló halmazok definícióját a véletlen önhasonló halmazokéra kiterjeszteni.

Az F kompakt halmazt önhasonlónak nevezzük, ha vannak olyan $\{S_i : 0 \leq i \leq m-1\}$ kontraktív hasonlóságok, amikre $F = \bigcup_{i=0}^{m-1} S_i(F)$.
Az F halmazt elő lehet állítani úgy, hogy kiindulunk valamilyen E_0 kompakt halmazból, amire igaz, hogy minden $0 \leq i \leq m-1$ esetén $E_0 \supset \bigcup_{i=0}^{m-1} S_i(E_0)$, és E_{k+1}-et úgy kapjuk E_k-ból, hogy minden $S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}(E_0)$ alakú részhalmaza helyett az $S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k} \circ S_{i_{k+1}}(E_0)$ alakú halmazokat vesszük. Az így meghatározott E_k kompakt halmazok fogyó sorozatának metszete F [2, 9.1. Tétel].

Ebbe a konstrukcióba több ponton is belevihetjük a véletlent.
Az egyik lehetséges mód, hogy véletlen hasonlóságokat tekintünk, ekkor az S_i hasonlóság aránya a C_i valószínűségi változó. Ilyen konstrukcióval állítjuk elő a véletlen Cantor-halmazt.
A másik lehetséges változat az, hogy minden $S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}(E_0)$ alakú halmaz helyett véletlen számú $S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_{k+1}}(E_0)$ halmazt vesszük, ezek számának eloszlását jelölje N. Az N valószínűségi változó lehet olyan, hogy az F véletlen önhasonló halmaz pozitív valószínűséggel az üreshalmaz. Ilyen konstrukcióval kapjuk a perkoláció fraktálokat.
A véletlen megjelenhet egyszerre mindkét helyen, egy még általánosabb definíciót adva. A definícióban feltesszük, hogy a konstrukció során újonnan megjelenő valószínűségi változók minden lépésben függetlenek, így olyan halmazokat kapunk, amelyek statisztikusan önhasonlóak. Ez azt jelenti, hogy minden így definiált véletlen halmaz 1 valószínűséggel előállítható olyan hozzá hasonló részhalmazainak egyesítéseként, amelyeknek az eloszlása a hasonlóságtól eltekintve megegyezik a halmazéval.

Egy önhasonló halmaz dimenzióját az alábbi tétel segítségével határozhatjuk meg:
Tétel: [2, 9.3. Tétel],[4, 4.14. Tétel] Legyenek $\{S_i : 0 \leq i \leq m-1\}$ kontraktív hasonlóságok, az S_i hasonlóság arányát jelölje c_i. Legyen F az az egyértelműen meghatározott nem üres, kompakt halmaz, amire $F = \bigcup_{i=0}^{m-1} S_i(F)$. Ha a hasonlóságok teljesítik a nyílt halmaz feltételt, azaz van olyan V nem üres, korlátos nyílt halmaz, amire az $S_0(V), \ldots, S_{m-1}(V)$ halmazok diszjunktak, és mindegyik része V-nek, akkor az F halmaz Hausdorff- és box dimenziója az az s nemnegatív

valós szám, amire $\sum_{i=0}^{m-1} c_i^s = 1$.

Hasonló tétel igaz a véletlen önhasonló halmazokra is. Be fogjuk bizonyítani, hogy az F véletlen önhasonló halmaz $0 \leq q \leq 1$ valószínűséggel az üreshalmaz, ahol q csak az N eloszlásától függ. Ha $q > 0$, és a véletlen hasonlóságokra 1 valószínűséggel teljesül a nyílt halmaz feltétel, akkor az $F \neq \varnothing$ feltétel mellett az F halmaz Hausdorff-dimenziója majdnem biztosan

$$\dim_H F = \min\left\{\alpha : E\Big(\sum_{i=0}^{N-1} C_i^\alpha\Big) \leq 1\right\}.$$

A dolgozat célja a véletlen fraktálok dimenziójáról szóló tételek, és az ezek bizonyítására használt módszerek bemutatása.

Az első fejezetben megvizsgáljuk a Brown-mozgást, aminek a pályája egy statisztikusan önhasonló halmaz, és bebizonyítunk egy tételt a pályájának, és egyet a grafikonjának dimenziójáról [2], [3]. A bizonyítások során a dimenzió alsó becsléséhez egy megfelelően választott véletlen mérték s-energiájáról mutatjuk meg, hogy véges várható értékű, ezt a módszert a következő fejezetben is használni fogjuk.

A második fejezetben definiáljuk a véletlen Cantor-halmazt, és bebizonyítjuk a véletlen önhasonló halmaz dimenziójáról szóló tételt ebben a speciális esetben [2].

A harmadik fejezetben definiáljuk a perkoláció-fraktálokat. A definícióhoz rögzítenünk kell a $d \geq 1$ és $m \geq 2$ egész számokat és a $0 < p < 1$ valószínűséget. A $[0,1]^d \subset \mathbb{R}^d$ egységkockából kiindulva minden lépésben felosztjuk az összes meglévő kockát m^d darab rácskockára, és ezek közül mindegyiket egymástól függetlenül p valószínűséggel megtartjuk, $1-p$ valószínűséggel elhagyjuk. Az F_p perkoláció fraktál azokból a pontokból áll, amiket minden lépésben megtartottunk. Először bebizonyítjuk a véletlen önhasonló halmazok dimenziójáról szóló tételt ebben a speciális esetben is [3], a bizonyítás során felhasználjuk egy halmaz box és Hausdorff-dimenziója közötti egyenlőtlenséget. A fejezet második részében bebizonyítunk két tételt, amely a perkoláció fraktálok összefüggőségéről szól kis, illetve nagy p esetén, majd kimondunk egy általánosabb tételt az összefüggőségükről [2].

A negyedik fejezetben definiáljuk a fafraktálokat, és bebizonyítunk egy tételt, amely kapcsolatot teremt a dimenziójuk és a végtelen fákon lehetséges maximális folyamnagyság között. Definiáljuk a Galton–Watson hálózatokat, amik statisztikusan önhasonló véletlen gráfok súlyozott élekkel, és bebizonyítjuk Falconer tételét az ezeken lehetséges maximális folyamnagyságról. Ezután definiáljuk a véletlen önhasonló halmazoknál általánosabb Galton–Watson fraktálokat, végül a fenti két tétel segítségével bebizonyítjuk a Galton–Watson-fraktálok dimenziójáról szóló tételt [4], aminek speciális eseteként adódik a tétel véletlen önhasonló halmazokra.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Elekes Mártonnak az érdekes témát, a dolgozat alapos átnézését és az elkészítése során nyújtott segítségét.

1. fejezet

A Brown-mozgás

1.1. Alapfogalmak

A dolgozatban $\mathbb{R}^d$-beli véletlen halmazok eloszlását és dimenzióját vizsgáljuk. Az alábbi jelöléseket, definíciókat és tételeket mindegyik fejezetben használjuk.

Egy $A \subset \mathbb{R}^d$ halmaz átmérőjét jelölje $|A| := \sup\{|x-y| : x, y \in A\}$, az A halmaz d dimenziós Lebesgue-mértékét jelölje $\mathcal{L}(A)$.

Először megadjuk a Hausdorff-dimenzió definícióját, és ismertetünk néhány tételt, amelyek nagy segítséget nyújtanak egy halmaz Hausdorff-dimenziójának meghatározásában.

1.1.1 Definíció: (Hausdorff-mérték) Legyen $0 \leq s < \infty$. Tetszőleges $A \subset \mathbb{R}^d$ és $\delta > 0$ esetén legyen

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\Big\{\sum_{i=0}^{\infty} |H_i|^s : H_i \subset \mathbb{R}^d, A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i, |H_i| < \delta\Big\}.$$

Legyen

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$$

az A halmaz s dimenziós Hausdorff-mértéke.

Megmutatható, hogy minden $s \geq 0$ esetén a $\mathcal{H}^s$ halmazfüggvény mérték $\mathbb{R}^d$ Borel-halmazain, ami a végtelen értéket is felveheti [4, 4. fejezet]. Könnyen látható, hogy ha az $A \subset \mathbb{R}^d$ Borel-halmaz Hausdorff-mértéke valamilyen s esetén $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, akkor minden $t < s$ esetén $\mathcal{H}^t(A) = 0$ [4, 4.7. Tétel].

1.1.2 Definíció: (Hausdorff-dimenzió) Az $A \subset \mathbb{R}^d$ halmaz Hausdorff-dimenziója

$$\dim_H A = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) > 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\}$$

$$= \inf\{t : \mathcal{H}^t(A) < \infty\} = \inf\{t : \mathcal{H}^t(A) = 0\}.$$

Az alábbi tételek a Hausforff-dimenzió becslésében nyújtanak segítséget. A tételeknek csak azt a változatát közöljük, amelyet a későbbiekben használni fogunk. Az első két állítás közvetlenül adódik a definícióból.

1.1.3 Állítás: Legyen $A \subset \mathbb{R}^d$ és $s \geq 0$. Ha minden $\varepsilon > 0$ esetén vannak olyan $H_i \subset \mathbb{R}^d$ halmazok, amikre

$$A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i \text{ és } \sum_{i=0}^{\infty} |H_i|^s < \varepsilon,$$

akkor $\mathcal{H}^s(A) = 0$, és ezért $\dim_H A \leq s$.

1.1.4 Állítás: Legyenek $A_i \subset \mathbb{R}^d$, és tegyük fel, hogy minden $i \in \mathbb{N}$ esetén $\dim_H A_i = s$. Ekkor $\dim_H \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = s$.

1.1.5 Tétel: [2, 2.3. Állítás] Legyen $A \subset \mathbb{R}^d$ és legyen $f : A \to \mathbb{R}^m$ Hölder-α függvény, azaz minden $x, y \in A$ esetén teljesüljön

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$$

valamilyen $c > 0$ konstanssal. Ekkor

$$\dim_H \big(f(A)\big) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(A).$$

1.1.6 Állítás: [2, 11.2. Állítás] Legyen az $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ függvény Hölder-α, valamilyen $0 \leq \alpha \leq 1$-val. Ekkor

$$\dim_H(\operatorname{graph} f) \leq 2 - \alpha.$$

1.1.7 Definíció: Legyen μ mérték $\mathbb{R}^d$ Borel-halmazain. A μ mérték s-energiája

$$I_s(\mu) := \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|x - y|^s} \mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y).$$

1.1.8 Tétel: [2, 4.13. Tétel] Legyen $A \subset \mathbb{R}^d$. Ha van olyan nem azonosan nulla μ Borel-mérték A-n, amire $I_s(\mu) < \infty$, akkor $\dim_H A \geq s$.

Szükségünk lesz a valószínűségszámítás jól ismert alapfogalmaira, a bizonyítások szempontjából legfontosabb definíciókat és tételeket gyűjtjük össze az alábbiakban.

Ha mást nem mondunk, akkor a valószínűségi változók az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőről képeznek valamilyen $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ mérhető térbe. A valószínűségi változók közötti egyenlőségek és egyenlőtlenségek 1 valószínűséggel értendők.

1.1.9 Definíció: Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, $\{\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ az $\mathcal{A}$ tetszőleges részrendszerei. Azt mondjuk, hogy az $\{\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ halmazrendszerek függetlenek, ha minden $n \geq 2$ és $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, $B_i \in \mathcal{F}_{\gamma_i}$ esetén $P(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = \prod_{i=1}^{n} P(B_i)$.

1.1.10 Definíció: Azt mondjuk, hogy az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ rendszere független, ha az általuk generált σ-algebrák függetlenek.

1.1.11 Állítás: [1, 4.2. Tétel] Ha az $\{\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ halmazrendszerek függetlenek, és mindegyikük zárt a véges metszet képzésre, akkor az általuk generált σ-algebrák is függetlenek.

1.1.12 Következmény: Ha az $\{\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1\}$ σ-algebrák függetlenek és $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$, akkor a $\sigma\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma_0} \mathcal{F}_\gamma\Big)$ és a $\sigma\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma_1} \mathcal{F}_\gamma\Big)$ σ-algebrák is függetlenek.

1.1.13 Definíció: Legyen X valószínűségi változó, és $A \in \mathcal{B}$ olyan mérhető halmaz, amire $P(X \in A) > 0$. Ekkor az X feltételes eloszlása az A feltétel mellett az a ν valószínűségi mérték $\mathcal{B}$-n, amire minden $B \in \mathcal{B}$ esetén

$$\nu(B) = P(X \in B|A) = \frac{P(X \in A \cap B)}{P(X \in A)}.$$

1.1.14 Definíció: Legyen X valós értékű, véges várható értékű valószínűségi változó, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra. Az X $\mathcal{F}$-re vett feltételes várható értéke az a P-majdnem mindenhol egyértelműen meghatározott $E(X|\mathcal{F}) : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$-mérhető valószínűségi változó, amire minden $B \in \mathcal{F}$ esetén $\int_B E(X|\mathcal{F})\mathrm{d}P = \int_B X\mathrm{d}P$.

Randon–Nikodym deriváltak segítségével megmutatható, hogy a feltételes várható érték valóban létezik, és az alábbi tulajdonságai – amelyekre a későbbiekben szükségünk lesz – a definíció közvetlen következményei, bizonyításaik megtalálhatóak [1]-ben.

1.1.15 Állítás: Legyenek X és Y véges várható értékű valószínűségi változók, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra. Ekkor teljesülnek az alábbiak:

(a) minden $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ esetén $E(c_1X + c_2Y|\mathcal{F}) = c_1E(X|\mathcal{F}) + c_2E(Y|\mathcal{F})$,

(b) $E(E(X|\mathcal{F})) = EX$,

(c) ha X $\mathcal{F}$-mérhető, akkor $E(X|\mathcal{F}) = X$,

(d) ha az X által generált σ-algebra független $\mathcal{F}$-től, akkor $E(X|\mathcal{F}) = EX$,

(e) ha XY véges várható értékű és Y $\mathcal{F}$-mérhető, akkor $E(XY|\mathcal{F}) = YE(X|\mathcal{F})$.

1.1.16 Definíció: Az $(X_k, \mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat martingál, ha

- minden $k \in \mathbb{N}$ esetén X_k valós értékű, véges várható értékű valószínűségi változó,
- $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{A}$ σ-algebrák,
- X_k $\mathcal{F}_k$-mérhető,
- $E(X_{k+1}|\mathcal{F}_k) = X_k$.

1.1.17 Tétel: (Martingál konvergencia) [1, 35.5. Tétel] Ha $(X_k, \mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ martingál és $\sup_{k\in\mathbb{N}} E|X_k| < \infty$, akkor X_k 1 valószínűséggel konvergens.

1.1.18 Tétel: Ha $(X_k, \mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ martingál és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $X_k \geq 0$, akkor X_k 1 valószínűséggel konvergens.

1.1.19 Állítás: [1, 25.12. Tétel következménye] Legyenek X és $X_k\,(k \geq 1)$ valós értékű valószínűségi változók és $p > 1$. Ha $k \to \infty$ esetén $X_k \to X$ 1 valószínűséggel és $\sup_{k\in\mathbb{N}} E|X_k|^p < \infty$, akkor $k \to \infty$ esetén $EX_k \to EX$.

1.2. A Brown-mozgás

A Brown-mozgás, vagy más néven Wiener-folyamat egy olyan valószínűségi változó, ami a $[0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ függvények terébe képez, azaz a Brown-mozgás definíciója megad egy valószínűségi mértéket a $[0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ függvények terén.
A definíciót először $n = 1$ dimenzió esetén adjuk meg, majd ennek segítségével az általános esetben.
Jelölje $N(\mu, \sigma^2)$ a μ várható értékű, σ^2 szórásnégyzetű normális eloszlást.

1.2.1 Definíció: (Brown-mozgás) Legyen $\{X(t), t \geq 0\}$ olyan véletlen folyamat, amire az alábbiak teljesülnek:

(a) 1 valószínűséggel $X(0) = 0$,

(b) minden $t \geq 0$ és $h > 0$ esetén az $X(t+h) - X(t)$ növekmény eloszlása $N(0, h)$,

(c) ha $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{2m}$, akkor az $X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_{2m}) - X(t_{2m-1})$ növekmények függetlenek,

(d) a $t \mapsto X(t)$ függvény 1 valószínűséggel folytonos.

Megmutatható, hogy létezik olyan folyamat, amire a fentiek teljesülnek [6, 1.3. Tétel], [1, 37.1. Tétel].
A definícióból látszik, hogy $X(t)$ eloszlása $N(0, t)$, és hogy a folyamat stacionárius növekményű, azaz $X(t + h) - X(t)$ eloszlása minden t esetén ugyanolyan.

1.2.2 Definíció: (d dimenziós Brown-mozgás) Az $\{(X_1(t), \ldots, X_d(t)), t \geq 0\}$ folyamatot d dimenziós Brown-mozgásnak nevezzük, ha minden $1 \leq i \leq d$ esetén $X_i(t)$ 1 dimenziós Brown-mozgás és minden $0 \leq t_1, \ldots, t_d$ esetén az $X_1(t_1), \ldots, X_d(t_d)$ eloszlások függetlenek.

Legyen $X(t) = (X_1(t), \ldots, X_d(t))$ d dimenziós Brown-mozgás. Mivel $X_i(t+h) - X_i(t)$ eloszlása $N(0, h)$, ezért tetszőleges $a_i < b_i$ esetén

$$P(X_i(t+h) - X_i(t) \in [a_i, b_i]) = (2\pi h)^{-\frac{1}{2}} \int_{a_i}^{b_i} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2h}\right) \mathrm{d}x_i.$$

A függetlenség miatt tetszőleges $T = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ tégla esetén

$$P(X(t+h) - X(t) \in T) = \prod_{i=1}^{d} \left((2\pi h)^{-\frac{1}{2}} \int_{a_i}^{b_i} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2h}\right) \mathrm{d}x_i \right)$$

$$= (2\pi h)^{-\frac{d}{2}} \int_T \exp\left(-\frac{|x|^2}{2h}\right) \mathrm{d}x,$$

ahol $x = (x_1, \ldots, x_d)$. Ez az egyenlőség T helyett könnyen láthatóan tetszőleges Borel-halmazra is igaz, így az origó közepű, ρ sugarú gömbre is. Polárkoordinátákra áttérve kapjuk, hogy

$$P(|X(t+h) - X(t)| \leq \rho) = ch^{-\frac{d}{2}} \int_0^{\rho} r^{d-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2h}\right) \mathrm{d}r,$$

ahol $c = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} a_d$, ahol a_d jelöli az d dimenziós egységgömb felszínét.

A fenti integrálok segítségével bebizonyíthatóak az alábbiak:

- A d dimenziós Brown-mozgás izotróp, azaz minden irányban ugyanolyan az eloszlása.
- Ha $0 < \gamma$, akkor $\gamma^{-\frac{1}{2}} X(\gamma t)$ és $X(t)$ eloszlása minden t esetén megegyezik.
- A Brown-mozgás statisztikusan önhasonló, ugyanis az $\{X(t) : 0 \leq t \leq T\}$ és $\{X(t) : 0 \leq t \leq \gamma T\}$ folyamatok a $\gamma^{\frac{1}{2}}$ skálaparamétertől eltekintve ugyanolyan eloszlásúak.

A Brown-mozgás pályája egy véletlen halmaz $\mathbb{R}^d$-ben. Meg fogjuk mutatni, hogy ennek a halmaznak a Hausdorff-dimenziója $d \geq 2$ esetén 1 valószínűséggel 2. A bizonyítás során a dimenzió alsó becslésére használt módszert más véletlen halmazok esetén is alkalmazni fogjuk. A dimenzió felső becsléséhez szükségünk lesz az alábbi állításra:

1.2.3 Állítás: Legyen $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Az $X(t)$ d dimenziós Brown-mozgásra 1 valószínűséggel minden $0 \leq t \leq 1$ esetén teljesül a

$$|X(t+h) - X(t)| \leq c(\lambda)|h|^\lambda \quad (|h| < H_0)$$

Hölder-egyelőtlenség valamilyen $c(\lambda)$ konstanssal és véletlen $0 < H_0$-lal.

BIZONYÍTÁS: Tetszőleges $0 \leq t$ és $0 < h$ esetén

$$P(|X(t+h) - X(t)| > h^\lambda) = ch^{-\frac{d}{2}} \int_{h^\lambda}^{\infty} r^{d-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2h}\right) \mathrm{d}r$$

$$\overset{(1)}{=} c \int_{h^{\lambda-\frac{1}{2}}}^{\infty} u^{d-1} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \mathrm{d}u \overset{(2)}{\leq} c_1 \int_{h^{\lambda-\frac{1}{2}}}^{\infty} \exp(-u) \,\mathrm{d}u$$

$$= c_1 \exp\left(-h^{\lambda-\frac{1}{2}}\right) \leq c_2 h^2.$$

Az (1) egyenlőséget $u = rh^{-\frac{1}{2}}$ helyettesítéssel kapjuk, a (2) egyenlőtlenség az $u^{d-1}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$ és $\exp(-u)$ függvények konvergenciasebességéből következik $u \to \infty$ esetén.

Tekintsük az $[(m-1)2^{-j}, m2^{-j}] \subset [0,2]$ bináris intervallumokat, és legyen $A_k := \{|X(m2^{-j}) - X((m-1)2^{-j})| > 2^{-j\lambda}$ valamilyen $j \geq k$ és $1 \leq m \leq 2^{j+1}$ esetén$\}$. Ekkor a fenti egyenlőtlenség alapján

$$P(A_k) \leq c_2 \sum_{j=k}^{\infty} 2^{j+1} 2^{-2j} = c_2 2^{-k+2},$$

amiből $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$ következik. A Borel-Cantelli lemma alapján

$$P(\text{végtelen sok } j \text{ és } 1 \leq m \leq 2^{j+1} \text{ van, amire } |X(m2^{-j}) - X((m-1)2^{-j})| > 2^{-j\lambda})$$

$$= P(\limsup A_k) = 0,$$

azaz 1 valószínűséggel van olyan N egész szám, hogy minden $j \geq N$ és $1 \leq m \leq 2^{j+1}$ esetén

$$|X(m2^{-j}) - X((m-1)2^{-j})| \leq 2^{-j\lambda}.$$

Legyen $h < H_0 := 2^{-N}$ és $t \in [0,1]$. Ekkor a $[t, t+h] \subset [0,2]$ intervallum (a végpontjaitól eltekintve) felírható megszámlálható sok $[(m-1)2^{-j}, m2^{-j}]$ alakú intervallum uniójaként, ahol $1 \leq m \leq 2^j$ és $2^{-j} \leq h$, az intervallumok belseje diszjunkt, és minden intervallumhossz legfeljebb kétszer fordul elő. Ha k a legkisebb egész, amire $2^{-k} \leq h$, akkor X folytonosságát felhasználva azt kapjuk, hogy 1 valószínűséggel

$$|X(t+h) - X(t)| \leq 2\sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j\lambda} = \frac{2^{-k\lambda}2}{1-2^{-\lambda}} \leq \frac{2h^{\lambda}}{1-2^{-\lambda}}.$$

■

1.2.4 Tétel: Ha $d \geq 2$, akkor az d dimenziós Brown-mozgás pályájának Hausdorff dimenziója 1 valószínűséggel 2.
Azaz az $X\big([0,\infty)\big)$ véletlen halmazra 1 valószínűséggel $\dim_H X\big([0,\infty)\big) = 2$.

Bizonyítás: Az előző állítás szerint minden $\lambda < \frac{1}{2}$ esetén az $X(t)$ függvény 1 valószínűséggel lokálisan Hölder-λ, azaz minden t-nek van olyan U_t környezete, amire az 1.1.5. Állítás szerint $\dim_H X(U_t) \leq \frac{1}{\lambda}\dim_H U_t = \frac{1}{\lambda}$. Ez minden $\lambda < \frac{1}{2}$-re igaz, ezért 1 valószínűséggel minden $t \geq 0$ esetén $\dim_H X(U_t) \leq 2$. Mivel a $[0,\infty)$ halmaz σ-kompakt, ezért vannak olyan $t_i \geq 0$ számok, amikre $[0,\infty) = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_{t_i}$. Az 1.1.4. Állítás alapján ebből következik, hogy $\dim_H X\big([0,\infty)\big) \leq 2$.

Az alsó becsléshez legyen $1 < s < 2$. Rögzítsük t-t és h-t, és legyen

$$p(\rho) := P(|X(t+h) - X(t)| \leq \rho) = ch^{-\frac{d}{2}} \int_0^{\rho} r^{d-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2h}\right) \mathrm{d}r.$$

Ezzel a jelöléssel

$$\begin{aligned} E\big(|X(t+h) - X(t)|^{-s}\big) &= \int_0^{\infty} r^{-s} \mathrm{d}p(r) \\ &= ch^{-\frac{d}{2}} \int_0^{\infty} r^{d-1-s} \exp\left(-\frac{r^2}{2h}\right) \mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2}ch^{-\frac{s}{2}} \int_0^{\infty} w^{\frac{d-s-2}{2}} \exp\left(\frac{-w}{2}\right) \mathrm{d}w = c_1 h^{-\frac{s}{2}}. \end{aligned}$$

A Brown-mozgás segítségével $\mathbb{R}^d$-n természetes módon definiálhatjuk a μ véletlen mértéket: tetszőleges $A \subset \mathbb{R}^d$ esetén legyen $\mu_\omega(A) := \mathcal{L}^1(\{t : 0 \leq t \leq 1, X_\omega(t) \in A\})$, ahol $\mathcal{L}^1$ az 1 dimenziós Lebesgue-mértéket jelöli. Ennek a mértéknek a tartója $X_\omega([0,1])$, és $\mu_\omega(X([0,1])) = 1$.
Mivel $\int g(x)\mathrm{d}\mu_\omega(x) = \int g(X_\omega(t))\mathrm{d}t$ minden g mérhető függvény esetén[1, 16.13. Tétel], ezért

$$E\left(\iint |x-y|^{-s}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)\right) = E\left(\int_0^1\int_0^1 |X(t) - X(u)|^{-s}\mathrm{d}t\mathrm{d}u\right)$$

$$= \int_0^1\int_0^1 E\big(|X(t) - X(u)|^{-s}\big)\mathrm{d}t\mathrm{d}u = \int_0^1\int_0^1 c_1|t-u|^{-\frac{s}{2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}u < \infty.$$

Tehát 1 valószínűséggel $\iint |x-y|^{-s}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) < \infty$, az 1.1.8. Tétel szerint így $\dim_H X([0,1]) \geq s$. Ez minden $1 < s < 2$ esetén igaz, ezért $\dim_H X([0,1]) \geq 2$.

■

1.2.5 Tétel: Az 1 dimenziós Brown-mozgás grafikonjának Hausdorff dimenziója 1 valószínűséggel $1\frac{1}{2}$.

Bizonyítás: A tételt az $X(t)$ véletlen függvény $[0,1]$ feletti grafikonjára bizonyítjuk be. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ és $t \in [0,1]$ esetén az $X(n+t)-X(n)$ függvény eloszlása megegyezik az $X(t)$ függvény eloszlásával, ezért a grafikon minden $[n, n+1]$ alakú intervallum fölötti szakaszának dimenziója ugyanannyi. Ebből az 1.1.4. Állítás alapján következik, hogy $\dim_H(\operatorname{graph} X) = 1\frac{1}{2}$.

A felső becsléshez az 1.2.3 Hölder-egyenlőtlenséget és az 1.1.6 Állítást használjuk. Ezekből azt kapjuk, hogy minden $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ esetén a gráf dimenziója 1 valószínűséggel legfeljebb $2-\lambda$, amiből 1 valószínűséggel a $\dim_H(\operatorname{graph} X) \leq 1\frac{1}{2}$ felső becslés adódik.

Az alsó becsléshez legyen $1 < s < 1\frac{1}{2}$. Ekkor

$$
\begin{aligned}
E\big((|X(t+h)-X(t)|^2+h^2)^{-\frac{s}{2}}\big) &= \int_0^\infty (r^2+h^2)^{-\frac{s}{2}}\mathrm{d}p(r) \\
&= ch^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty (r^2+h^2)^{-\frac{s}{2}}\exp\left(-\frac{r^2}{2h}\right)\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2}c\int_0^\infty (wh+h^2)^{-\frac{s}{2}}w^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{w}{2}\right)\mathrm{d}w \\
&\leq c\left(\int_0^h (h^2)^{-\frac{s}{2}}w^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}w + \int_h^\infty (wh)^{-\frac{s}{2}}w^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}w\right) \\
&= c_1 h^{\frac{1}{2}-s}
\end{aligned}
$$

Definiáljuk $\mathbb{R}^2$-n az alábbi természetes véletlen mértéket, aminek a tartója a Brown-mozgás grafikonja: tetszőleges $A \subset \mathbb{R}^2$ esetén legyen $\mu_\omega(A) := \mathcal{L}(\{0 \leq t \leq 1 : \big(t, X_\omega(t)\big) \in A\})$. Pitagorasz tételét és a fenti egyenlőtlenséget használva kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
&E\left(\iint |x-y|^{-s}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)\right) \\
&= E\left(\int_0^1\int_0^1 \big(|X(t)-X(u)|^2+|t-u|^2\big)^{-\frac{s}{2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}u\right) \\
&= \int_0^1\int_0^1 E\Big(\big(|X(t)-X(u)|^2+|t-u|^2\big)^{-\frac{s}{2}}\Big)\mathrm{d}t\mathrm{d}u \\
&\leq \int_0^1\int_0^1 c_1|t-u|^{\frac{1}{2}-s}\mathrm{d}t\mathrm{d}u < \infty,
\end{aligned}
$$

tehát a μ mérték s-energiája 1 valószínűséggel véges. Ez minden $1 < s < 1\frac{1}{2}$ esetén igaz, ezért a Brown-mozgás grafikonjának a dimenziója 1 valószínűséggel legalább $1\frac{1}{2}$. ■

2. fejezet

A véletlen Cantor-halmaz

A jól ismert triadikus Cantor-halmazt úgy állítjuk elő, hogy a $[0, 1]$ intervallumból kiindulva minden lépésben mindegyik meglévő intervallum helyett annak két részintervallumát vesszük, amelyek egy-egy végpontja megegyezik az eredeti intervalluméval, a hosszuk pedig annak $\frac{1}{3}$ része. Ennek egy általánosítása, ha az arány $\frac{1}{3}$ helyett tetszőleges $0 < a < \frac{1}{2}$ szám.
A véletlen Cantor-halmazt is hasonló konstrukcióval állítjuk elő, azonban az új intervallumok hossza véletlen. Ekkor nem feltétlenül teljesül az a tulajdonság, hogy a részintervallumok és az eredeti intervallum hosszának aránya állandó. Ehelyett most ezeknek az arányoknak az eloszlása fog minden intervallum esetén megegyezni. Megtartjuk azonban azt a tulajdonságot, hogy a két részintervallum diszjunkt.

2.0.6 Definíció: Rögzítsük az a és b valós számokat úgy, hogy $0 < a \leq b < \frac{1}{2}$. Jelölje $\mathcal{I} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{0, 1\}^k$.

Legyenek $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}$ esetén $C_{i_1,\ldots,i_k} : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan valószínűségi változók, amikre a következők teljesülnek:

- 1 valószínűséggel $a \leq C_{i_1,\ldots,i_k} \leq b$,
- $(C_{i_1,\ldots,i_k,0}, C_{i_1,\ldots,i_k,1})$ eloszlása megegyezik (C_0, C_1) eloszlásával,
- ha $(i_1, \ldots, i_k) \neq (j_1, \ldots, j_l)$, akkor a $(C_{i_1,\ldots,i_k,0}, C_{i_1,\ldots,i_k,1})$ és $(C_{j_1,\ldots,j_l,0}, C_{j_1,\ldots,j_l,1})$ valószínűségi változók függetlenek.

Legyenek $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}$ esetén $I_{i_1,\ldots,i_k} \subset [0, 1]$ olyan zárt intervaumok, amikre a következők teljesülnek:

- $I_{i_1,\ldots,i_{k-1}} \supset I_{i_1,\ldots,i_k}$,
- I_0 bal végpontja a 0, I_1 jobb végpontja az 1, és $I_{i_1,\ldots,i_{k-1}}$ és $I_{i_1,\ldots,i_{k-1},0}$ bal végpontja, illetve $I_{i_1,\ldots,i_{k-1}}$ és $I_{i_1,\ldots,i_{k-1},1}$ jobb végpontja megegyezik,
- az intervallumok hossza véletlen, és tejesül rájuk, hogy $|I_{i_1,\ldots,i_k}| = \prod_{j=1}^{k} C_{i_1,\ldots,i_j}$, azaz $k > 1$ esetén $\frac{|I_{i_1,\ldots,i_k}|}{|I_{i_1,\ldots,i_{k-1}}|} = C_{i_1,\ldots,i_k}$.

Legyen $E_0 = [0, 1]$ és $E_k = \bigcup_{\mathbf{i} \in \{0,1\}^k} I_{\mathbf{i}}$.
Legyen $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$, az így meghatározott F véletlen halmazt véletlen Cantor-halmaznak nevezzük.

2.0.7 Megjegyzés: A véletlen Cantor-halmaz statisztikusan önhasonló, azaz tetszőleges $\mathbf{i} \in \mathcal{I}$ esetén F és $F \cap I_{\mathbf{i}}$ eloszlása az $\inf I_{\mathbf{i}}$ eltolás- és az $|I_{\mathbf{i}}|$ skálaparamétertől eltekintve megegyezik.

2.0.8 Tétel: Az F véletlen Cantor-halmaz Hausdorff dimenziója 1 valószínűséggel $\dim F = s$, ahol s az

$$E\left(C_0^s + C_1^s\right) = 1$$

egyenlet megoldása.

Bizonyítás: A bizonyítás során először bevezetjük az X_k $(k \in \mathbb{N})$, majd az X valószínűségi változókat.
Az ezekről bizonyított tulajdonságok segítségével fogjuk F dimenzióját először felülről, majd alulról becsülni.

A $g(t) = E\left(C_0^t + C_1^t\right)$ függvény a Lebesgue-tétel szerint folytonos, szigorúan monoton fogyó, $g(0) = 2$, $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$, ezért egyértelműen létezik olyan $s > 0$, amire $E\left(C_0^s + C_1^s\right) = 1$. Rögzítjük ezt az s-et.
Legyen $X_0 := 1$ és $k \geq 1$ esetén

$$X_k := \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\{0,1\}^k} |I_{i_1,\dots,i_k}|^s.$$

Mivel $|I_{i_1,\dots,i_k}| = \prod_{j=1}^k C_{i_1,\dots,i_j} \leq b^k$, ezért $EX_k \leq 2^k b^{ks} < \infty$.
Legyen $\mathcal{F}_k$ a $\{C_{i_1,\dots,i_j} : (i_1,\dots,i_j) \in \{0,1\}^j, 1 \leq j \leq k\}$ valószínűségi változók által generált σ-algebra. Az X_{k+1} $\mathcal{F}_k$-ra vett feltételes várható értéke

$$\begin{aligned}
E\big(X_{k+1}|\mathcal{F}_k\big) &= \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\{0,1\}^k} E\big(|I_{i_1,\dots,i_k}|^s (C^s_{i_1,\dots,i_k,0} + C^s_{i_1,\dots,i_k,1})|\mathcal{F}_k\big)\\
&\overset{(1)}{=} \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\{0,1\}^k} |I_{i_1,\dots,i_k}|^s E\big(C^s_{i_1,\dots,i_k,0} + C^s_{i_1,\dots,i_k,1}|\mathcal{F}_k\big)\\
&\overset{(2)}{=} \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\{0,1\}^k} |I_{i_1,\dots,i_k}|^s E\big(C^s_{i_1,\dots,i_k,0} + C^s_{i_1,\dots,i_k,1}\big)\\
&\overset{(3)}{=} \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\{0,1\}^k} |I_{i_1,\dots,i_k}|^s E\big(C^s_0 + C^s_1\big) = X_k,
\end{aligned}$$

ezért $(X_k, \mathcal{F}_k)$ martingál. Az (1), illetve a (2) egyenlőség az 1.1.15. Állításban szereplő (e), illetve (d) tulajdonságból, a (3) egyenlőség a $(C_{i_1,\dots,i_k,0}, C_{i_1,\dots,i_k,1})$ és (C_0, C_1) valószínűségi változók azonos eloszlásából következik.

Mivel $X_k \geq 0$, ezért az 1.1.18. Állítás szerint létezik olyan P-majdnem mindenhol egyértelműen meghatározott X valószínűségi változó, hogy $X_k \to X$ 1 valószínűséggel.

2.0.9 Állítás: $EX_k \to EX$.

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy $E(X_k^2)$ korlátos, ehhez először becsüljük X_{k+1}^2 $\mathcal{F}_k$-ra vett feltételes várható értékét:

$$E(X_{k+1}^2|\mathcal{F}_k) = E\Bigg(\Big(\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\{0,1\}^k} |I_{i_1,\ldots,i_k}|^s (C^s_{i_1,\ldots,i_k,0} + C^s_{i_1,\ldots,i_k,1})\Big)^2 \Big| \mathcal{F}_k\Bigg)$$

$$\overset{(1)}{=} \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\{0,1\}^k} |I_{i_1,\ldots,i_k}|^{2s} E\big((C^s_{i_1,\ldots,i_k,0} + C^s_{i_1,\ldots,i_k,1})^2|\mathcal{F}_k\big)$$

$$+ \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\neq(j_1,\ldots,j_k)} 2|I_{i_1,\ldots,i_k}|^s |I_{j_1,\ldots,j_k}|^s E\big((C^s_{i_1,\ldots,i_k,0} + C^s_{i_1,\ldots,i_k,1})(C^s_{j_1,\ldots,j_k,0} + C^s_{j_1,\ldots,j_k,1})|\mathcal{F}_k\big)$$

$$\overset{(2)}{=} \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\{0,1\}^k} |I_{i_1,\ldots,i_k}|^{2s} E\big((C^s_{i_1,\ldots,i_k,0} + C^s_{i_1,\ldots,i_k,1})^2\big)$$

$$+ \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\neq(j_1,\ldots,j_k)} 2|I_{i_1,\ldots,i_k}|^s |I_{j_1,\ldots,j_k}|^s E\big(C^s_{i_1,\ldots,i_k,0} + C^s_{i_1,\ldots,i_k,1}\big) E\big(C^s_{j_1,\ldots,j_k,0} + C^s_{j_1,\ldots,j_k,1}\big)$$

$$\overset{(3)}{<} \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\{0,1\}^k} |I_{i_1,\ldots,i_k}|^{2s}(\lambda+1) + \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\neq(j_1,\ldots,j_k)\in\{0,1\}^k} 2|I_{i_1,\ldots,i_k}|^s |I_{j_1,\ldots,j_k}|^s$$

$$= \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\{0,1\}^k} |I_{i_1,\ldots,i_k}|^{2s}\lambda + X_k^2.$$

Az (1) egyenlőség az 1.1.15. Állításban szereplő (e) tulajdonságból, a (2) egyenlőség az 1.1.15. Állításban szereplő (d) tulajdonságból és $C^s_{i_1,\ldots,i_k,0} + C^s_{i_1,\ldots,i_k,1}$ és $C^s_{j_1,\ldots,j_k,0} + C^s_{j_1,\ldots,j_k,1}$ függetlenségéből adódik. A (3) egyenlőtlenség azért igaz, mert $E(2C^s_{i_1,\ldots,i_k,0}C^s_{i_1,\ldots,i_k,1}) < 1$ és $\lambda := E(C^{2s}_{i_1,\ldots,i_k,0} + C^{2s}_{i_1,\ldots,i_k,1})$, így $E\big((C^s_{i_1,\ldots,i_k,0} + C^s_{i_1,\ldots,i_k,1})^2\big) < \lambda + 1$.

Az X_k^2 várható értékére a fenti egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy

$$E(X_{k+1}^2) \leq E(X_k^2) + E\Big(\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\{0,1\}^k} |I_{i_1,\ldots,i_k}|^{2s}\lambda\Big)$$

$$= E(X_k^2) + \lambda \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\{0,1\}^k} E\Big(\prod_{j=1}^k C^{2s}_{i_1,\ldots,i_j}\Big) \overset{(1)}{=} E(X_k^2) + \lambda \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\{0,1\}^k} \prod_{j=1}^k E(C^{2s}_{i_1,\ldots,i_j})$$

$$\overset{(2)}{=} E(X_k^2) + \lambda \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\{0,1\}^k} \prod_{j=1}^k E(C^{2s}_{i_j}) = E(X_k^2) + \lambda\Big(E(C_0^{2s}) + E(C_1^{2s})\Big)^k$$

$$= E(X_k^2) + \lambda^{k+1},$$

ahol az (1) egyenlőség a $C_{i_1,\ldots,i_j}$-k függetlenségéből adódik, a (2) egyenlőség pedig abból, hogy $C_{i_1,\ldots,i_j}$ eloszlása megegyezik C_{i_j} eloszlásával.

Felhasználva, hogy $\lambda = E(C^{2s}_{i_1,\dots,i_k,0} + C^{2s}_{i_1,\dots,i_k,1}) < 1$, tetszőleges k-ra adódik a következő felső becslés:

$$E(X_k^2) \le E(X_{k-1}^2) + \lambda^k \le \dots \le E(X_0^2) + \sum_{j=1}^{k} \lambda^j \le$$

$$\le 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j =: c < \infty$$

Ez k-tól független felső korlát, tehát $(E(X_k^2))_{k\in\mathbb{N}}$ korlátos. Ebből az 1.1.19. Állítás alapján következik, hogy $EX = \lim_{k\to\infty} EX_k$.

■

2.0.10 Állítás: $P(0 < X < \infty) = 1$.

Bizonyítás: Mivel 1 valószínűséggel $X = \lim_{k\to\infty} X_k \ge 0$ és $EX = \lim_{k\to\infty} EX_k = EX_0 = 1$, ezért $P(0 \le X < \infty) = 1$ és $P(X > 0) > 0$.
Mivel

$$\{X = 0\} = \Big\{ \lim_{k\to\infty} \Big(\sum_{(i_2,\dots,i_k)\in\{0,1\}^{k-1}} |I_{0,i_1,\dots,i_k}|^s \Big) = 0 \Big\} \cap$$

$$\cap \Big\{ \lim_{k\to\infty} \Big(\sum_{(i_2,\dots,i_k)\in\{0,1\}^{k-1}} |I_{1,i_1,\dots,i_k}|^s \Big) = 0 \Big\}$$

és a jobb oldali két esemény független, ezért a statisztikus önhasonlóság miatt $P(X = 0) = P(X = 0)^2$. Ebből $P(X = 0) < 1$ miatt következik, hogy $P(X = 0) = 0$. ■

Az állítás alapján $P(0 < X < \infty) = 1$, az X_k definíciója miatt $P(0 < X_k < \infty) = 1$, ezért léteznek olyan M_1 és M_2 valószínűségi változók, hogy minden k esetén $0 < M_1 \le X_k \le M_2 < \infty$.

A fenti állítások segítségével bebizonyítjuk a tételt.

1) $\dim_H F \le s$:

Legyen $0 < \delta$ tetszőleges. Minden $\mathbf{i} \in \{0,1\}^k$ esetén $|I_{\mathbf{i}}| \le b^k < 2^{-k}$. Ha $k \ge \frac{-\ln\delta}{\ln 2}$, akkor $|I_{\mathbf{i}}| < \delta$, ezért igaz az alábbi felső becslés:

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) \le \sum_{\mathbf{i}\in\{0,1\}^k} |I_{\mathbf{i}}|^s = X_k \le M_2,$$

amiből $\mathcal{H}^s(F) \le M_2 < \infty$, így $\dim_H F \le s$ 1 valószínűséggel.

2) $\dim_H F \ge s$:

Először definiálunk egy véletlen mértéket $\mathbb{R}$-en, aminek a tartója F.
Legyen $\Omega' \subset \Omega$ az az esemény, hogy a

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{(i_{k+1},\dots,i_{k+n})\in\{0,1\}^n} |I_{i_1,\dots,i_{k+n}}|^s \Big)$$

határérték minden $(i_1,\dots,i_k)\in\mathcal{I}$ esetén létezik és pozitív. Mivel

$$\sum_{(i_{k+1},\dots,i_{k+n})\in\{0,1\}^n} |I_{i_1,\dots,i_{k+n}}|^s = |I_{i_1,\dots,i_k}|^s \sum_{(i_{k+1},\dots,i_{k+n})\in\{0,1\}^n} \prod_{j=1}^n C^s_{i_1,\dots,i_{k+j}},$$

és a jobb oldalon álló összeg eloszlása megegyezik X_n eloszlásával, ezért minden rögzített $(i_1,\dots,i_k)\in\mathcal{I}$ esetén a fenti határérték 1 valószínűséggel létezik és pozitív. Az $\mathcal{I}$ halmaz megszámlálható, ezért $P(\Omega')=1$.

Rögzítsünk egy $\omega\in\Omega'$-t.
Jelölje $\mathcal{R}$ az $\overline{\mathcal{R}} := \{I_{\mathbf{i}}(\omega)\cap F(\omega) : \mathbf{i}\in\mathcal{I}\}$ halmaz által generált algebrát $F(\omega)$-án. Mivel bármely két $\overline{\mathcal{R}}$-beli halmaz különbsége előállítható véges sok, diszjunkt $\overline{\mathcal{R}}$-beli halmaz egyesítéseként, ezért $\mathcal{R}$ pontosan az $\overline{\mathcal{R}}$-beli halmazok véges, diszjunkt egyesítéseiből áll.

Legyen

$$\overline{\mu}_\omega(I_{i_1,\dots,i_k}(\omega)\cap F(\omega)) := \lim_{n\to\infty}\Bigg(\sum_{(i_{k+1},\dots,i_{k+n})\in\{0,1\}^n} |I_{i_1,\dots,i_{k+n}}(\omega)|^s\Bigg).$$

Az így meghatározott $\overline{\mu}_\omega$ halmazfüggvény $\overline{\mathcal{R}}$-en additív, és kiterjeszthető $\mathcal{R}$-re is additívan. A kiterjesztés jól definiált, ugyanis egy $\mathcal{R}$-beli halmaz bármely két előállítása esetén van olyan $k\in\mathbb{N}$, hogy az előállításokban szereplő mindegyik halmaz egyértelműen felírható $\{I_{\mathbf{i}}(\omega)\cap F(\omega) : \mathbf{i}\in\{0,1\}^k\}$-beli diszjunkt halmazok egyesítéseként. Az $\mathcal{R}$-beli halmaznak ez a finomabb felbontása egyértelmű, és az ez által meghatározott $\overline{\mu}_\omega$ mérték megegyezik a másik két előállítás által meghatározott mértékkel.
Jelöljük az $\mathcal{R}$-re kiterjesztett függvényt is $\overline{\mu}_\omega$-val.

A $\overline{\mu}_\omega$ halmazfüggvény mérték $\mathcal{R}$-en, ehhez belátjuk, hogy egy $\mathcal{R}$-beli halmaz csak úgy állhat elő ilyenek diszjunkt egyesítéseként, ha az véges egyesítés. Az $I_{\mathbf{i}}$ halmazok definíciója miatt minden $I_{\mathbf{i}}(\omega)\cap F(\omega)$ halmaznak van olyan $U_{\mathbf{i}}$ nyílt környezete, hogy ha $I_{\mathbf{i}}(\omega)\cap I_{\mathbf{j}}(\omega)=\varnothing$, akkor $U_{\mathbf{i}}\cap U_{\mathbf{j}}=\varnothing$. Ha $I_{\mathbf{i}}(\omega)\cap F(\omega)$ az $I_{\mathbf{j}}(\omega)\cap F(\omega)$, $\mathbf{j}\in\mathcal{J}$ diszjunkt halmazok egyesítése, akkor az $U_{\mathbf{j}}$, $\mathbf{j}\in\mathcal{J}$ halmazok az $I_{\mathbf{i}}(\omega)\cap F(\omega)$ kompakt halmaz diszjunkt fedését adják, ezért $\mathcal{J}$ csak véges lehet.

Az $\mathcal{R}$ halmaz az $F(\omega)$ Borel-halmazainak egy bázisa, ezért a $\overline{\mu}_\omega$ mérték $\mathcal{R}$-ről egyértelműen kiterjeszthető az $F(\omega)$ Borel-halmazaira. Ezt az egyértelmű kiterjesztést jelölje μ_ω.

A μ_ω mértéket terjesszük ki az $\mathbb{R}$ Borel-halmazaira úgy, hogy $\mu_\omega(\mathbb{R}\setminus F(\omega))=0$ legyen, az így kapott μ_ω egy olyan Borel-mérték $\mathbb{R}$-en, aminek a tartója $F(\omega)$.

Ez a definíció 1 valószínűséggel megadja a μ véletlen mértéket az $\mathbb{R}$ Borel-halmazain.

2.0.11 Lemma: Minden $(i_1,\dots,i_{k-1})\in\mathcal{I}$ esetén

$$E\Big(\mu(I_{i_1,\dots,i_{k-1},0})\mu(I_{i_1,\dots,i_{k-1},1})\Big|\mathcal{F}_k\Big) = |I_{i_1,\dots,i_{k-1},0}|^s|I_{i_1,\dots,i_{k-1},1}|^s.$$

Bizonyítás: Rögzítsük $(i_1,\dots,i_{k-1})\in\mathcal{I}$-t és jelölje

$$\mathcal{I}^0_n := \{(i_1,\dots,i_{k+n}) : i_k=0, (i_{k+1},\dots,i_{k+n})\in\{0,1\}^n\} \text{ és}$$

$$\mathcal{I}_n^1 := \{(i_1, \dots, i_{k+n}) : i_k = 1, (i_{k+1}, \dots, i_{k+n}) \in \{0,1\}^n\}.$$

Vezessük be az

$$Y_n^0 := \sum_{(i_1,\dots,i_{k+n})\in\mathcal{I}_n^0} \prod_{j=1}^{n} C^s_{i_1,\dots,i_{k+j}} \text{ és } Y_n^1 := \sum_{(i_1,\dots,i_{k+n})\in\mathcal{I}_n^1} \prod_{j=1}^{n} C^s_{i_1,\dots,i_{k+j}}$$

jelöléseket. Az $(Y_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(Y_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ eloszlások függetlenek, megegyeznek egymással és az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eloszlásával, és mindkettő független az $\mathcal{F}_k$ σ-algebrától.

Ezeket a tulajdonságokat felhasználva a lemma állításában szereplő feltételes várható értékre az adódik, hogy

$$\begin{aligned}
&E\Big(\mu(I_{i_1,\dots,i_{k-1},0} \cap F)\mu(I_{i_1,\dots,i_{k-1},1} \cap F)\Big|\mathcal{F}_k\Big) \\
&= E\Bigg(\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{(i_1,\dots,i_{k+n})\in\mathcal{I}_n^0} |I_{i_1,\dots,i_{k+n}}|^s\Big)\Big(\sum_{(i_1,\dots,i_{k+n})\in\mathcal{I}_n^1} |I_{i_1,\dots,i_{k+n}}|^s\Big)\Big|\mathcal{F}_k\Bigg) \\
&= E\Big(\lim_{n\to\infty}\Big(|I_{i_1,\dots,i_{k-1},0}|^s|I_{i_1,\dots,i_{k-1},1}|^s Y_n^0 Y_n^1\Big)\Big|\mathcal{F}_k\Big) \\
&= E\big(|I_{i_1,\dots,i_{k-1},0}|^s|I_{i_1,\dots,i_{k-1},1}|^s \lim_{n\to\infty} Y_n^0 Y_n^1 |\mathcal{F}_k\big) \\
&\overset{(1)}{=} |I_{i_1,\dots,i_{k-1},0}|^s|I_{i_1,\dots,i_{k-1},1}|^s E\big(\lim_{n\to\infty} Y_n^0 Y_n^1 |\mathcal{F}_k\big) \\
&\overset{(2)}{=} |I_{i_1,\dots,i_{k-1},0}|^s|I_{i_1,\dots,i_{k-1},1}|^s E\big(\lim_{n\to\infty} Y_n^0 Y_n^1\big) \\
&\overset{(3)}{=} |I_{i_1,\dots,i_{k-1},0}|^s|I_{i_1,\dots,i_{k-1},1}|^s E\big(\lim_{n\to\infty} Y_n^0\big) E\big(\lim_{n\to\infty} Y_n^1\big) \\
&\overset{(4)}{=} |I_{i_1,\dots,i_{k-1},0}|^s|I_{i_1,\dots,i_{k-1},1}|^s.
\end{aligned}$$

Az (1) egyenlőség az 1.1.15. Állítás (e) részéből következik. A (2) egyenlőség azért igaz, mert $\lim_{n\to\infty} Y_n^0 Y_n^1$ mérető a $\sigma\big(\{\sigma(C_{\mathbf{i}}) : \mathbf{i} \in \bigcup_{n=1}^\infty(\mathcal{I}_n^0 \cup \mathcal{I}_n^1)\}\big)$ σ-algebrára nézve, ami az 1.1.12. Következmény szerint független $\mathcal{F}_k$-tól. A (3) egyenlőség hasonlóan adódik a $\sigma\big(\bigcup\{\sigma(C_{\mathbf{i}}) : \mathbf{i} \in \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{I}_n^0\}\big)$ és $\sigma\big(\bigcup\{\sigma(C_{\mathbf{i}}) : \mathbf{i} \in \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{I}_n^1\}\big)$ σ-algebrák függetlenségéből. A (4) egyenlőség azért igaz, mert $E(\lim Y_n^0) = E(\lim Y_n^1) = E(\lim X_n) = EX = 1$.

■

Jelölje $x, y \in F$, $x \neq y$ esetén $x \wedge y := I_{i_1,\dots,i_{k-1}}$, ha $x, y \in I_{i_1,\dots,i_{k-1}}$ és $I_{i_1,\dots,i_{k-1},0}$ és $I_{i_1,\dots,i_{k-1},1}$ mindegyike pontosan az egyiket tartalmazza x és y közül.
Legyen $d := 1 - 2b > 0$, ekkor $|x - y| \geq d|x \wedge y|$.
Legyen $0 < t < s$ tetszőleges. A feltételes várható érték tulajdonságait és a fenti lemmát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$E\Big(\int\int_{x\wedge y = I_{i_1,\dots,i_{k-1}}} |x-y|^{-t}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)\Big|\mathcal{F}_k\Big) =$$

$$= E\Big(2\int_{x\in I_{i_1,\dots,i_{k-1},0}}\int_{y\in I_{i_1,\dots,i_{k-1},1}} |x-y|^{-t}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)\Big|\mathcal{F}_k\Big) \leq$$

$$\leq E\Big(2d^{-t}|I_{i_1,\ldots,i_{k-1}}|^{-t}\mu(I_{i_1,\ldots,i_{k-1},0})\mu(I_{i_1,\ldots,i_{k-1},1})\Big|\mathcal{F}_k\Big) =$$

$$= 2d^{-t}|I_{i_1,\ldots,i_{k-1}}|^{-t}E\Big(\mu(I_{i_1,\ldots,i_{k-1},0})\mu(I_{i_1,\ldots,i_{k-1},1})\Big|\mathcal{F}_k\Big)$$

$$= 2d^{-t}|I_{i_1,\ldots,i_{k-1}}|^{-t}|I_{i_1,\ldots,i_{k-1},0}|^{s}|I_{i_1,\ldots,i_{k-1},1}|^{s} \leq 2d^{-t}|I_{i_1,\ldots,i_{k-1}}|^{2s-t}$$

Ezt felhasználva a μ mérték t-energiájának várható értékére a következő felső becslést kapjuk:

$$E(I_t(\mu)) = E\Big(\int_F\int_F |x-y|^{-t}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\mathbf{i}\in\{0,1\}^{k-1}} E\bigg(E\Big(\int\int_{x\wedge y=I_{\mathbf{i}}} |x-y|^{-t}\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)\Big|\mathcal{F}_k\Big)\bigg) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\mathbf{i}\in\{0,1\}^{k-1}} 2d^{-t}E\big(|I_{\mathbf{i}}|^{2s-t}\big) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\mathbf{i}\in\{0,1\}^{k-1}} 2d^{-t}\prod_{j=1}^{k-1}E\big(C^{2s-t}_{i_1,\ldots,i_j}\big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\mathbf{i}\in\{0,1\}^{k-1}} 2d^{-t}\prod_{j=1}^{k-1}E\big(C^{2s-t}_{i_j}\big) = 2d^{-t}\sum_{k=1}^{\infty}E\big(C_0^{2s-t}+C_1^{2s-t}\big)^k.$$

Ez az összeg véges, mert $E\big(C_0^{2s-t}+C_1^{2s-t}\big) < E\big(C_0^{s}+C_1^{s}\big) = 1$.
Tehát $E(I_t(\mu)) < \infty$, ezért 1 valószínűséggel $I_t(\mu) < \infty$. Ebből az 1.1.8. Tétel alapján következik, hogy $\dim_H F \geq t$. Ez igaz minden $t < s$ esetén, ezért 1 valószínűséggel $\dim_H F \geq s$.

■

3. fejezet

Perkoláció-fraktálok

3.1. Perkoláció-fraktálok dimenziója

A perkoláció-fraktál konstrukciójához rögzítenünk kell egy $m \geq 2$ egész számot és egy $0 < p < 1$ valószínűséget. Az $[0,1]^d \subset \mathbb{R}^d$ egységkockát felosztjuk m^d darab $\frac{1}{m}$ rácskockára, és ezek közül mindegyiket egymástól függetlenül p valószínűséggel tartjuk meg. Minden további lépésben a megmaradt kockákat ismét m^d darab rácskockára bontjuk, és ezek mindegyikét egymástól függetlenül p valószínűséggel tartjuk meg. A perkoláció fraktál a minden lépésben megmaradó pontokból áll.
A meglévő kockák helyett minden lépésben hozzá hasonló kockákat veszünk, és ennek a hasonlóságnak az aránya állandó. Most azonban véletlen, hogy mennyi kisebb kocka marad az eredeti helyett.

Nyilvánvaló, hogy pozitív annak a valószínűsége, hogy a perkoláció fraktál az üreshalmaz. Először bebizonyítunk egy tételt arról, hogy mekkora ez a valószínűség.

3.1.1 Definíció: Legyen $m \geq 2$ egész szám, $0 < p < 1$, és jelölje $\mathcal{I}_k := \{0, 1, \ldots, m-1\}^{kd}$, illetve $\mathcal{I} := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}_k$.
Legyenek $C_{\mathbf{i}}$, $\mathbf{i} \in \mathcal{I}$ olyan független, azonos eloszlású valószínűségi változók, amikre $P(C_{\mathbf{i}} = 1) = p$, $P(C_{\mathbf{i}} = 0) = 1 - p$.

Jelölje $x_{i_1,\ldots,i_{kd}} := \left(\sum_{l=1}^{k} \frac{i_{(l-1)d+1}}{m^l}, \ldots, \sum_{l=1}^{k} \frac{i_{ld}}{m^l} \right) \in \mathbb{R}^d$, legyenek $J_{i_1,\ldots,i_{kd}} := x_{i_1,\ldots,i_{kd}} + [0, \frac{1}{m^k}]^d \subset \mathbb{R}^d$ rácskockák, és legyenek

$$N_{i_1,\ldots,i_{kd}} := \begin{cases} \varnothing & \text{ha } \prod_{l=1}^{k} C_{i_1,\ldots,i_{ld}} = 0 \\ J_{i_1,\ldots,i_{kd}} & \text{ha } \prod_{l=1}^{k} C_{i_1,\ldots,i_{ld}} = 1. \end{cases}$$

Legyen $E_0 := [0,1]^d$, $k \geq 1$ esetén pedig $E_k := \bigcup_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_k} N_{\mathbf{i}}$.
Legyen $F_p := \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$. Az így meghatározott F_p véletlen halmazt perkoláció fraktálnak nevezzük.

3.1.2 Megjegyzés: Jelölje $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_{nd}) \in \mathcal{I}$ és $(i_1, \ldots, i_{kd}) \in \mathcal{I}$ esetén

$$N_{i_1,\ldots,i_{kd}}(\mathbf{j}) := \begin{cases} \varnothing & \text{ha } \prod_{l=1}^{k} C_{j_1,\ldots,j_{nd},i_1,\ldots,i_{ld}} = 0 \\ J_{j_1,\ldots,j_{nd},i_1,\ldots,i_{kd}} & \text{ha } \prod_{l=1}^{k} C_{j_1,\ldots,j_{nd},i_1,\ldots,i_{ld}} = 1. \end{cases}$$

Legyen

$$E_k(\mathbf{j}) := \bigcup_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_k} N_{\mathbf{i}}(\mathbf{j}) \text{ és } F_p(\mathbf{j}) := \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k(\mathbf{j}).$$

Az $F_p(\mathbf{j})$ véletlen halmazt úgy kapjuk, hogy az F_p konstrukcióját a $J_\mathbf{j}$ rácskockából kiindulva kezdjük el. Az így definiált halmazokra igazak az alábbiak:

- $\mathbf{j} \in \mathcal{I}_n$ esetén az $F_p(\mathbf{j})$ halmaz eloszlása minden $\mathbf{h} \in \mathcal{I}_l$, $l \leq n$ esetén független $C_\mathbf{h}$-tól,
- $\mathbf{j} \in \mathcal{I}_n$ esetén az $F_p(\mathbf{j})$ halmaz eloszlása az $\frac{1}{m^n}$ skála- és az $x_\mathbf{j}$ eltolásparamétertől eltekintve megegyezik F_p eloszlásával,
- minden $n \geq 1$ esetén $F_p = \bigcup_{\mathbf{j}\in\mathcal{I}_n} \big(F_p(\mathbf{j}) \cap N_\mathbf{j}\big)$.

3.1.3 Tétel: A perkoláció fraktál $q = P(F_p = \varnothing)$ valószínűséggel eltűnik, ahol q a

$$t = (1 - p + pt)^{m^d}$$

egyenlet legkisebb nemnegatív megoldása.

Bizonyítás:
A 3.1.2. Megjegyzés alapján

$$P(F_p = \varnothing) = P\Big(\bigcap_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_1} \{F_p(\mathbf{i}) \cap N_\mathbf{i} = \varnothing\}\Big)$$

$$= P\Big(\bigcap_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_1} \{N_\mathbf{i} = \varnothing \text{ vagy } \big(N_\mathbf{i} = J_\mathbf{i} \text{ és } F_p(\mathbf{i}) = \varnothing\big)\}\Big)$$

$$= \prod_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_1} \big(P(C_\mathbf{i} = 0) + P(C_\mathbf{i} = 1)P(F_p(\mathbf{i}) = \varnothing)\big)$$

$$= \prod_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_1} \big(1 - p + pP(F_p = \varnothing)\big) = f(P(F_p = \varnothing)),$$

azaz $P(F_p = \varnothing)$ megoldása az $f(t) = t$ egyenletnek.
Hasonlóan kapjuk, hogy

$$P(E_k = \varnothing) = \prod_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_1} \Big(P(N_\mathbf{i} = \varnothing) + P\big(N_\mathbf{i} = J_\mathbf{i} \text{ és } E_k(\mathbf{i}) = \varnothing\big)\Big)$$

$$= \prod_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_1} \big(P(C_\mathbf{i} = 0) + P(C_\mathbf{i} = 1)P(E_k(\mathbf{i}) = \varnothing)\big)$$

$$= \prod_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_1} \Big(1 - p + pP(E_{k-1} = \varnothing)\Big) = f\big(P(E_{k-1} = \varnothing)\big),$$

azaz $f(P(E_{k-1} = \varnothing)) = P(E_k = \varnothing)$.
Az E_k események valószínűségeire igaz az is, hogy $0 = P(E_0 = \varnothing) < P(E_1 = \varnothing) < \cdots < P(F_p = \varnothing)$.
Mivel F_p kompakt halmazok fogyó sorozatának metszete, ezért $P(F_p = \varnothing) = P(\bigcup_{k=0}^{\infty}\{E_k = \varnothing\}) = \lim_{k\to\infty} P(E_k = \varnothing)$.

Ha $0 \leq t < P(F_p = \varnothing)$, akkor van olyan $k \geq 1$, hogy $P(E_{k-1} = \varnothing) \leq t < P(E_k = \varnothing)$. Mivel az $f(t)$ függvény szigorúan monoton nő, ezért

$$t < P(E_k = \varnothing) = f(P(E_{k-1} = \varnothing)) \leq f(t),$$

tehát $0 \leq t < P(F_p = \varnothing)$ esetén $t \neq f(t)$, azaz $P(F_p = \varnothing)$ a $t = f(t)$ egyenlet legkisebb nemnegatív megoldása.

■

A perkoláció fraktál dimenziójáról szóló tétel bizonyításához szükségünk lesz a box-dimenzió definíciójára és egy állításra a Hausdorff- és box-dimenzió kapcsolatáról.

3.1.4 Definíció: (Box dimenzió) Legyen $F \subset \mathbb{R}^d$ nem üres, korlátos részhalmaz. Az F halmaz alsó illetve felső box dimenziója

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}, \text{ illetve}$$

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta},$$

ahol $N_\delta(F)$ az F-et fedő, δ sugarú gömbök minimális száma.

Ha $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$, akkor ezt az F halmaz box dimenziójának nevezzük, és $\dim_B F$-fel jelöljük.

Megmutatható, hogy igaz az alábbi:

3.1.5 Állítás: Az $F \subset \mathbb{R}^d$ nem üres, korlátos részhalmaz. Az F halmaz alsó illetve felső box dimenziója

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{k \to 0} \frac{\log N_k(F)}{-\log \delta}, \text{ illetve}$$

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{k \to 0} \frac{\log N_k(F)}{-\log \delta},$$

$N_k(F)$ az F-et metsző, $\frac{1}{m^k}$ oldalú rácskockák száma.

3.1.6 Állítás: Legyen $F \subset \mathbb{R}^d$, ekkor

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F.$$

3.1.7 Tétel: Ha $p \leq \frac{1}{m^d}$, akkor $P(F_p = \varnothing) = 1$.
Ha $\frac{1}{m^d} < p < 1$, akkor $0 < q = P(F_p = \varnothing) < 1$ és $1 - q$ valószínűséggel

$$\dim_H F_p = \dim_B F_p = \frac{\log m^d p}{\log m} = d + \frac{\log p}{\log m}.$$

Bizonyítás: Jelölje $g(t) := f(t) - t$, a 3.1.3. Tétel alapján $q = P(F_p = \varnothing)$ ennek a függvénynek a legkisebb nemnegatív zérushelye. A $g(t)$ függvény folytonos, végtelen sokszor deriválható,

$$g'(t) = m^d p(1 - p + pt)^{m^d - 1} - 1$$

$$g''(t) = m^d(m^d - 1)p^2(1 - p + pt)^{m^d - 2}.$$

Mivel $g''(t) > 0$, ezért $g'(t)$ szigorúan monoton növő.

Ha $p \leq \frac{1}{m^d}$, akkor $g'(1) = m^d p - 1 \leq 0$, ezért $g'(t) < 0$ minden $t < 1$ esetén, azaz a $g(t)$ függvény szigorúan monoton fogyó. Mivel $g(1) = 0$, ezért $t < 1$ esetén $g(t) > 0$.

Ha $p > \frac{1}{m^d}$, akkor $g'(1) = m^d p - 1 > 0$. A $g'(t)$ függvény folytonossága és szigorú monoton csökkenése miatt van olyan $t_0 < 1$, hogy $t \in [t_0, 1] \iff g'(t) \geq 0 \iff g$ monoton növő t-ben. Mivel $g(0) = (1-p)^{m^d} > 0 = g(1)$, ezért $t_0 > 0$ és $g(t_0) < 0$. Mivel a $g(t)$ függvény $[0, t_0)$-on szigorúan monoton fogyó, ezért van pontosan egy $0 < q < t_0$, amire $g(q) = 0$.

A dimenzió becslése során be fogjuk látni, hogy $\overline{\dim}_B F_p \leq d + \frac{\log p}{\log m}$, és hogy $d + \frac{\log p}{\log m} \leq \dim_H F_p$. Ezekből a 3.1.6. Állítás alapján következik, hogy

$$\dim_H F_p = \dim_B F_p = d + \frac{\log p}{\log m}.$$

- $\overline{\dim}_B F_p \leq d + \frac{\log p}{\log m}$:

Jelölje L_k azon $\mathbf{j} \in \mathcal{I}_k$ indexek számát, amikre $J_\mathbf{j} \cap F_p \neq \varnothing$. Ekkor

$$E(L_k) \leq E\Big(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{I}_k} 1_{\{J_\mathbf{j} \cap E_k \neq \varnothing\}}\Big) \leq E\Big(\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_k} \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{I}_k} 1_{\{J_\mathbf{j} \cap N_\mathbf{i} \neq \varnothing\}}\Big)$$

$$\overset{(1)}{\leq} E\Big(3^d \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_k} 1_{\{N_\mathbf{i} \neq \varnothing\}}\Big) = 3^d \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_k} P(N_\mathbf{i} \neq \varnothing) = 3^d m^{kd} p^k.$$

Az (1) egyenlőtlenség abból adódik, hogy minden $\mathbf{i} \in \mathcal{I}_k$ esetén legfeljebb 3^d olyan $\mathbf{j} \in \mathcal{I}_k$ index van, amire $J_\mathbf{j} \cap J_\mathbf{i} \neq \varnothing$.
Legyen $\lambda > m^d p$, ekkor a Markov-egyenlőtlenség alapján azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(L_k \geq \lambda^k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^d (m^d p)^k}{\lambda^k} < \infty.$$

Ebből a Borel–Cantelli lemma alapján következik, hogy

$$P\Big(\limsup_{k \to \infty} \frac{L_k}{\lambda^k} \geq 1\Big) = P(\limsup_{k \to \infty} \{L_k \geq \lambda^k\}) = 0,$$

tehát $\limsup \frac{L_k}{\lambda^k} < 1$ teljesül 1 valószínűséggel. Ebből F_p box-dimenziójára azt kapjuk, hogy

$$\overline{\dim}_B F_p = \limsup_{k \to \infty} \frac{\log L_k}{\log m^k} = \limsup_{k \to \infty} \frac{\log \lambda^k}{\log m^k} \frac{\log L_k}{\log \lambda^k}$$

$$= \limsup_{k \to \infty} \frac{\log \lambda}{\log m} \frac{\log L_k}{\log \lambda^k} < \frac{\log \lambda}{\log m}.$$

Ez az egyenlőtlenség minden $\lambda > m^d p$ esetén igaz, ezért

$$\overline{\dim}_B F_p \leq \frac{\log m^d p}{\log m} = d + \frac{\log p}{\log m}.$$

3.1.8 Lemma: Legyen $G \subset E_0 = [0,1]^d$. Ekkor

$$\dim_H G < \log_m \frac{1}{p} \Rightarrow 1 \text{ valószínűséggel } G \cap F_p = \varnothing.$$

Bizonyítás: Legyen $0 < \varepsilon$ tetszőleges, és legyenek $J_{\mathbf{i}_1}, J_{\mathbf{i}_2}, \dots$ ($\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots \in \mathcal{I}$) olyan kockák, amikre

(a) $\bigcup_{j=1}^{\infty} J_{\mathbf{i}_j} \supset G$ és

(b) $\sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^{\log_m \frac{1}{p}} < \varepsilon$.

Mivel egy U_j kocka oldalának hossza $\frac{|U_j|}{\sqrt{d}}$, ezért

$$P(G \cap F_p \neq \varnothing) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(U_j \cap F_p \neq \varnothing) \leq \sum_{j=1}^{\infty} p^{\log_m \frac{\sqrt{d}}{|U_j|}}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^{-\log_m p} d^{\frac{1}{2}\log_m p} < \varepsilon d^{\frac{1}{2}\log_m p}.$$

Ez minden $0 < \varepsilon$ esetén igaz, ezért 1 valószínűséggel $G \cap F_p = \varnothing$. ■

3.1.9 Lemma: Legyenek F_p és F'_β egymástól független perkoláció fraktálok. Ekkor az $F_p \cap F'_\beta$ véletlen halmaz eloszlása megegyezik $F_{p\beta}$ eloszlásával.

Bizonyítás: Jelölje minden $\mathbf{i} \in \mathcal{I}$ esetén $C^p_{\mathbf{i}}$, $C^\beta_{\mathbf{i}}$, illetve $C^{p\beta}_{\mathbf{i}}$ az F_p, F'_β, illetve $F_{p\beta}$ perkoláció-fraktált generáló valószínűségi változókat. A függetlenség miatt a $\left(C^p_{\mathbf{i}} C^\beta_{\mathbf{i}}\right)_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}}$ és $\left(C^{p\beta}_{\mathbf{i}}\right)_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}}$ eloszlások megegyeznek.
Mivel minden $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}$ esetén $N^p_{\mathbf{i}} \cap N^\beta_{\mathbf{i}} \neq \varnothing \iff \prod_{j=1}^k C^p_{(i_1,\dots,i_j)} C^\beta_{(i_1,\dots,i_j)} = 1$, ezért az $\left(N^p_{\mathbf{i}} \cap N^\beta_{\mathbf{i}}\right)_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}}$ és $\left(N^{p\beta}_{\mathbf{i}}\right)_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}}$ eloszlások is megegyeznek, ezért az $\left(E^p_k \cap E^\beta_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ és az $\left(E^{p\beta}_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eloszlások is, így az $F_p \cap F'_\beta$ véletlen halmaz eloszlása megegyezik $F_{p\beta}$ eloszlásával. ■

- $\dim_H F_p \geq d + \frac{\log p}{\log m}$:

Legyen $\lambda < d + \frac{\log p}{\log m}$. Legyen F_p, illetve F'_β az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, illetve az $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ valószínűségi mezőkön értelmezett perkoláció fraktálok, és legyen $F_p \cap F'_\beta$ az $(\Omega \times \Omega', \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'), P \times P')$ valószínűségi mezőn értelmezett, értelemszerűen definiált véletlen halmaz. Ha $p\beta > \frac{1}{m^d}$, akkor a 3.1.9. Lemma alapján

$$P(F_p \cap F'_\beta \neq \varnothing) = P(F_{p\beta} \neq \varnothing) > 0.$$

Ebből a Fubini-tétel alapján következik, hogy

$$P\Big(\Big\{\omega \in \Omega : P'\big(\big\{F_p(\omega) \cap F'_\beta \neq \varnothing\big\}\big) > 0\Big\}\Big) > 0.$$

A 3.1.8. Lemmát az $F_p(\omega)$ halmazra és az F'_β perkoláció fraktálra alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$P'(F_p(\omega) \cap F'_\beta \neq \varnothing) > 0 \Rightarrow \dim_H F_p(\omega) \geq \log_m \frac{1}{\beta},$$

azaz

$$\big\{\omega\in\Omega : P'(F_p(\omega)\cap F'_\beta\neq\varnothing)>0\big\}\subseteq\big\{\omega\in\Omega : \dim_H F_p(\omega)\geq\log_m\frac{1}{\beta}\big\}.$$

Ebből következik, hogy

$$P\Big(\Big\{\omega\in\Omega : \dim_H F_p(\omega)\geq\log_m\frac{1}{\beta}\Big\}\Big)>0.$$

Ez minden $\beta\in\big(\frac{1}{pm^d},1\big]$ esetén igaz, ezért minden $\lambda=\log_m\frac{1}{\beta}\in\big[0,\frac{\log pm^d}{\log m}\big)$ esetén

$$P\big(\dim_H F_p\geq\lambda\big)>0.$$

A 3.1.2. Megjegyzés alapján azt kapjuk, hogy

$$P\big(\dim_H F_p<\lambda\big)=\prod_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_1}P\big(\dim_H(F_p(\mathbf{i})\cap N_{\mathbf{i}})<\lambda\big)$$

$$=\prod_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_1}\Big(P\big(N_{\mathbf{i}}=\varnothing\big)+P\big(N_{\mathbf{i}}\neq\varnothing \text{ és } \dim_H F_p(\mathbf{i})<\lambda\big)\Big)$$

$$=\prod_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}_1}\Big(P\big(C_{\mathbf{i}}=0\big)+P(C_{\mathbf{i}}=1)P\big(\dim_H F_p(\mathbf{i})<\lambda\big)\Big)$$

$$=\big(1-p+pP(\dim_H F_p<\lambda)\big)^{m^d}=f\big(P(\dim_H F_p<\lambda)\big).$$

Azaz $P(\dim_H F_p<\lambda)$ megoldása az $f(t)=t$ egyenletnek.
A $g(t)=f(t)-t$ függvény $[0,1]$-en szigorúan konvex, ugyanis

$$g''(t)=m^d(m^d-1)p^2(1-p+pt)^{m^d-2}>0.$$

Ebből következik, hogy az $f(t)=t$ egyenletnek a $[0,1]$ intervallumon legfeljebb két megoldása lehet, ezek $P(F_p=\varnothing)$ és 1.

Legyen $0<\lambda<d+\frac{\log p}{\log m}$. Ekkor $P(\dim_H F_p<\lambda)$ az $f(t)=t$ egyenlet 1-nél kisebb megoldása, ezért

$$P(\dim_H F_p<\lambda)=P(F_p=\varnothing).$$

Ez minden $0<\lambda<d+\frac{\log p}{\log m}$ esetén igaz, ezért

$$P\Big(\dim_H F_p<d+\frac{\log p}{\log m}\Big)=P(F_p=\varnothing),$$

és ezért

$$P\Big(\dim_H F_p\geq d+\frac{\log p}{\log m}\Big)=1-P(F_p=\varnothing)=P(F_p\neq\varnothing).$$

■

3.2. Perkoláció-fraktálok összefüggősége

Először azt mutatjuk meg, hogy ha p kicsi, akkor a perkoláció fraktál 1 valószínűséggel teljesen összefüggéstelen. Ez az alábbi tétel következménye:

3.2.1 Állítás: Ha az $F \subset \mathbb{R}^d$ halmaz Hausdorff-dimenziója $\dim_H F < 1$, akkor F teljesen összefüggéstelen, azaz az összefüggőségi komponensei egyeleműek.

BIZONYÍTÁS: Legyen x és y F két tetszőleges, egymástól különböző pontja.
Legyen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(z) := |z - x|$.

$$|f(z) - f(w)| = \big||z - x| - |x - w|\big| \leq |z - w|$$

Tehát f egy Lipschitz-1 függvény, ezért $\dim_H f(F) \leq \dim_H F < 1$.
Legyen $r \notin f(F)$, $0 < r < f(y)$. Ilyen r létezik, mert az $f(F)$ halmaz $\mathbb{R}$ egy $\mathcal{H}^1$ szerint nullmértékű része, ezért a komplementere, $\mathbb{R} \setminus f(F)$ sűrű $\mathbb{R}$-ben.
Ekkor $F = \{z \in F : |z - x| < r\} \cup \{z \in F : |z - x| > r\}$ az F halmaz felbontása két diszjunkt, relatív nyílt részre, amelyek közül az egyik tartalmazza x-et, a másik y-t, tehát x és y különböző összefüggőségi komponensben vannak. ∎

3.2.2 Következmény: Ha $p < \frac{1}{m^{d-1}}$, akkor $\dim F_p = \frac{\log pm^d}{\log m} < 1$ majdnem biztosan, ezért 1 valószínűséggel F_p teljesen összefüggéstelen.

A második tételünkben feltesszük, hogy $d = 2$ és $m = 3$, azaz síkbeli perkoláció-fraktálokkal foglalkozunk. Ha p elég közel van 1-hez, akkor nagy valószínűséggel minden lépés után után a megmaradó halmaz összeköti az egységnégyzet két szemközti oldalát. Ez alatt azt értjük, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $f_k : [0, 1] \to E_k$ út, amire $f_k(0)$ első koordinátája 0, $f_k(1)$ első koordinátája 1.

3.2.3 Tétel: Legyen $d = 2$, $m = 3$. Legyen A_p az az esemény, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén E_k összeköti a $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzet jobb és bal oldalát. Ekkor

$$\lim_{p \to 1} P(A_p) = 1.$$

BIZONYÍTÁS: Legyen először p rögzített.

Legyen $k \geq 1, \mathbf{i} \in \mathcal{I}_k$. Az $N_\mathbf{i}$ négyzetet telinek nevezzük, ha a $\{\mathbf{j} \in \mathcal{I}_1 : N_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \neq \varnothing\}$ halmaz legalább 8 elemű.
Ha $N_\mathbf{i}$ teli, akkor bármely két oldala között vezet út. Ha $N_\mathbf{i}$ és $N_\mathbf{j}$ szomszédos, teli négyzetek, akkor $N_\mathbf{i} \cap N_\mathbf{j} \neq \varnothing$, ezért $N_\mathbf{i} \cup N_\mathbf{j}$ bármely két oldala között vezet $(N_\mathbf{i} \cup N_\mathbf{j}) \cap E_{k+1}$-beli út.

Az $N_\mathbf{i}$ négyzetet 2-telinek nevezzük, ha a $\{\mathbf{j} \in \mathcal{I}_1 : N_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \text{ teli}\}$ halmaz legalább 8 elemű.
Ha $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathcal{I}_k$ és $N_\mathbf{i}$ és $N_\mathbf{j}$ szomszédos, 2-teli négyzetek, akkor a $N_\mathbf{i} \cup N_\mathbf{j}$ bármely két oldala között vezet $(N_\mathbf{i} \cup N_\mathbf{j}) \cap E_{k+2}$-beli út.

Hasonlóan, az $N_\mathbf{i}$ négyzetet l-telinek nevezzük, ha a $\{\mathbf{j} \in \mathcal{I}_1 : N_{\mathbf{i},\mathbf{j}}\,(l-1)\text{-teli}\}$ halmaz legalább 8 elemű.
Ha $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathcal{I}_k$ és $N_\mathbf{i}$ és $N_\mathbf{j}$ szomszédos, l-teli négyzetek, akkor a $J_\mathbf{i} \cup J_\mathbf{j}$ bármely két oldala között vezet $(N_\mathbf{i} \cup N_\mathbf{j}) \cap E_{k+l}$-beli út.

Ha E_0 l-teli, akkor van olyan E_l-beli út, ami összeköti E_0 jobb és bal oldalát. Az az esemény, hogy E_0 l-teli, az alábbi három diszjunkt esemény uniója:

1. $\{N_{\mathbf{j}} \neq \varnothing, \mathbf{j} \in \mathcal{I}_1\}$ 9 elemű halmaz és mindegyik eleme $(l-1)$-teli
2. $\{N_{\mathbf{j}} \neq \varnothing, \mathbf{j} \in \mathcal{I}_1\}$ 9 elemű halmaz és az elemei közül pontosan 8 $(l-1)$-teli
3. $\{N_{\mathbf{j}} \neq \varnothing, \mathbf{j} \in \mathcal{I}_1\}$ 8 elemű halmaz és mindegyik eleme $(l-1)$-teli

Jelölje p_l annak a valószínűségét, hogy E_0 l-teli. A statisztikus önhasonlóságot felhasználva a fenti események valószínűségeire kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} p_l &= p^9 p_{l-1}^9 + p^9 9 p_{l-1}^8 (1-p_{l-1}) + 9p^8(1-p)p_{l-1}^8 \\ &= 9p^8 p_{l-1}^8 - 8p^9 p_{l-1}^9 =: f_p(p_{l-1}). \end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg az f_p függvényt.

$$f_p'(t) = 72p^8t^7 - 72p^9t^8 = 72p^8t^7(1-pt),$$

$$f_p''(t) = 72(7p^8t^6 - 8p^9t^7) = 72p^8t^6(7-8pt),$$

ezért az f_p függvény $[0, \frac{1}{p}]$-n szigorúan monoton növő és $[0, \frac{7}{8p}]$-n szigorúan konvex, $[\frac{7}{8p}, \frac{1}{p}]$-n szigorúan konkáv.

Jelölje $r_p := \lim_{l\to\infty} p_l$. Mivel $f_p(t) = 9p^8t^8 - 8p^9t^9$ folytonos függvény, ezért

$$r_p = \lim_{l\to\infty} p_l = \lim_{l\to\infty} f_p(p_{l-1}) = f_p(\lim_{l\to\infty} p_{l-1}) = f_p(r_p),$$

azaz r_p megoldása az $f_p(t) = t$ egyenletnek.
Mivel $1 := p_0 > p_1 > p_2 > \ldots$, ezért ha $r_p < t \leq 1$, akkor van olyan $l \in \mathbb{N}$, hogy $p_l < t \leq p_{l-1}$. Az f_p függvény $[0,1]$-en szigorúan monoton növő, ezért ekkor

$$f_p(t) \leq f_p(p_{l-1}) = p_l < t,$$

tehát $f(t) \neq t$. Ebből következik, hogy r_p az $f_p(t) = t$ egyenlet legnagyobb megoldása $[0,1]$-en.

Mivel $A_p \supseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \{E_0\, l\text{-teli}\}$, ezért

$$1 \geq P(A_p) \geq \lim_{l\to\infty} p_l = r_p.$$

Megmutatjuk, hogy $\lim_{p\to 1} r_p = 1$, ebből következik a tétel állítása.

Vezessük be a $g_p(t) = f_p(t) - t$ jelölést, ennek a függvénynek a legnagyobb zérushelyét keressük $[0,1]$-en.

Először vizsgáljuk meg a g_1 függvényt. A fent kiszámoltak alapján $[\frac{7}{8}, 1]$-en szigorúan konkáv, $g_1'(\frac{7}{8}) > 0 > g_1'(1)$, ezért van pontosan egy $\frac{7}{8} < m_1 < 1$, amire $g_1'(m_1) = 0$, azaz a $g_1|_{[\frac{7}{8},1]}$ függvénynek m_1-ben maximuma van. Mivel $g_1(1) = 0$, ezért $g_1(m_1) > 0$. Mivel $g_1(\frac{7}{8}) < 0$, ezért g_1-nek $[\frac{7}{8}, 1]$-en pontosan két gyöke van, az egyik az 1, a másikat jelölje t_1.

Mivel $f_p(t) = f_1(pt)$ és az f_1 függvény szigorúan monoton növő és folytonos, ezért ha $p < p'$, akkor $f_p(t) < f_{p'}(t)$, és $\lim_{p\to 1} f_p(t) = f_1(t)$. Ezek igazak $f_p(t) - t = g_p(t)$-re is, azaz ha $p < p'$, akkor $g_p(t) < g_{p'}(t)$, és $\lim_{p\to 1} g_p(t) = g_1(t)$ minden $t \in [0,1]$ esetén.

A fentiek miatt van olyan $\varepsilon > 0$, hogy ha $p \in (1-\varepsilon, 1)$, akkor $g_p(m_1) > 0$, és $\frac{7}{8} < \frac{7}{8p} < t_1$. Ekkor $g_p(t_1) < 0$, $g_p(1) < 0$ és g_p szigorúan konkáv $[t_1, 1]$-en, ezért g_p-nek $[t_1, 1]$-en pontosan két zérushelye van, a nagyobbikról tudjuk, hogy r_p, a másikat jelölje t_p. A g_p függvények folytonossága és egyenletes konvergenciája miatt

$$\lim_{p\to 1} t_p = t_1 \text{ és } \lim_{p\to 1} r_p = 1.$$

■

3.2.4 Lemma: Ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén az E_k halmaz összeköti az egységnégyzet jobb és bal oldalát, akkor az F_p perkoláció fraktálnak van olyan összefüggőségi komponense, aminek az egységnégyzet jobb és bal oldalán is van pontja.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás. Ekkor vannak olyan V_0 és V_1 diszjunkt, nyílt halmazok, hogy $F_p \subset V_0 \cup V_1$, és V_0 tartalmazza az egységnégyzet bal, V_1 pedig a jobb oldalát. Mivel az $E_0 \supset E_1 \supset \ldots$ zárt halmazok mindegyike összeköti a négyzet szemközti oldalait, ezért minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $E_k \setminus (V_0 \cup V_1) = G_k \neq \varnothing$. A G_k halmazok zártak, és $G_0 \supset G_1 \supset \ldots$, ezért $\varnothing \neq \bigcap_{k=0}^{\infty} G_k = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k \setminus (V_0 \cup V_1) = F_p \setminus (V_0 \cup V_1)$, ami ellentmondás.

■

3.2.5 Tétel: [2, 15.6. Tétel] Van olyan $\frac{1}{3} \leq p_c < 1$ szám, hogy ha $0 < p < p_c$, akkor F_p 1 valószínűséggel teljesen összefüggéstelen, ha pedig $p_c < p < 1$, akkor F_p-nek pozitív valószínűséggel van olyan összefüggőségi komponense, ami összeköti az egységnégyzet két szemközti oldalát.

4. fejezet

Galton–Watson hálózatok

Ebben a fejezetben az eddigieknél általánosabb véletlen halmazokkal foglalkozunk. A Galton–Watson fraktálokat hasonlóan definiáljuk, mint az eddig bemutatott példákat.
Kiindulunk egy kompakt halmazból, és minden lépésben a meglévő halmazok helyett valahány kompakt részhalmazukat tartjuk meg. Most nem követeljük meg, hogy a megmaradó részhalmazok az eredetihez hasonlóak legyenek, és véletlen a megmaradó részhalmazok száma és nagysága. Az elhelyezkedésükről is csak annyit követelünk meg, hogy a belsejeik diszjunktak legyenek. Azt azonban feltesszük, hogy a megmaradó részhalmazok száma és átmérőiknek az eredetiéhez viszonyított aránya minden halmaz esetén ugyanolyan eloszlású.

A Galton–Watson fraktálok dimenziójának vizsgálatához a fagráfokon definiálható folyamok nyújtanak segítséget.

Az első részben bebizonyítunk egy tételt, ami kapcsolatot teremt a fafraktálok dimenziója és a gráfon lévő maximális folyamnagyság között.

A második részben definiáljuk a Galton–Watson hálózatokat, és bebizonyítunk egy tételt a túlélésük valószínűségéről, majd Falconer tételét a maximális folyamnagyságról.

A harmadik részben az előző tételek segítségével belátjuk a Galton–Watson fraktálok dimenziójáról szóló tételt.

4.1. Fafraktálok dimenziója

Legyen a T irányított gráfban V a csúcsok halmaza, $E \subset V \times V$ az éleké.
A T irányított gráfot fának nevezzük, ha az alábbi tulajdonságokat teljesíti:

- A gráf összefüggő, és nincsen benne kör.
- Pontosan egy olyan $v \in V$ csúcs van, amire nincs olyan u csúcs, hogy $(u, v) \in E$. Ezt a csúcsot a fa gyökerének nevezzük, és ρ-val jelöljük.
- Minden $v \in V \setminus \{\rho\}$ csúcsra pontosan egy olyan u csúcs van, amire $(u, v) \in E$. Ezt az u csúcsot a v csúcs ősének nevezzük és $\bar{v}$-sal jelöljük.
- Azokat az w csúcsokat, amikre $(v, w) \in E$, a v csúcs utódainak nevezzük. Minden csúcsnak véges sok utóda van.

- Az olyan $(v_0, v_1, v_2, \dots)$ sorozatokat, ahol $v_0 = \rho$ és minden $i \geq 1$-re $\bar{v_i} = v_{i-1}$, végtelen ágnak nevezzük. A T fa végtelen ágainak halmazát ∂T-vel jelöljük.
- Minden v csúcsra egyértelműen létezik irányított út ρ-ból v-be, jelölje $|v|$ az ebben az útban szereplő élek számát.

4.1.1 Definíció: Legyen T egy fa. Minden $v \in V$ csúcshoz tartozzon egy $\varnothing \neq K_v \subset \mathbb{R}^d$ kompakt halmaz, amire a következők teljesülnek:

(a) $K_v = \overline{\operatorname{int} K_v}$,

(b) ha $(u, v) \in E$, akkor $K_u \supset K_v$,

(c) ha $\bar{u} = \bar{v}$ és $u \neq v$, akkor $\operatorname{int} K_u \cap \operatorname{int} K_v = \varnothing$,

(d) minden $(v_0, v_1, v_2, \dots) \in \partial T$ végtelen ágra $\lim_{k \to \infty} |K_{v_k}| = 0$,

(e) $c_1 := \inf_{v \neq \rho} \frac{|K_v|}{|K_{\bar{v}}|} > 0$.

(f) $c_2 := \inf_v \frac{\mathcal{L}(\operatorname{int} K_v)}{|K_v|^d} > 0$

Legyen

$$F(T) := \bigcup_{(v_0, v_1, \dots) \in \partial T} \bigcap_{k=1}^{\infty} K_{v_k}.$$

Az $F(T)$ halmazt a T fához és $\{K_v : v \in V\}$ halmazrendszerhez tartozó fafraktálnak nevezzük.

4.1.2 Definíció: Legyen adva a T fagráf élein egy $G : E \to [0, \infty)$ kapacitásfüggvény. A $\Theta : E \to [0, c]$ függvényt c nagyságú folyamnak nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá:

- $$\sum_{w : \bar{w} = \rho} \Theta(\rho, w) = c,$$
- minden $v \neq \rho$ csúcsra
$$\sum_{w : \bar{w} = v} \Theta(v, w) = \Theta(\bar{v}, v),$$
- minden $e \in E$ csúcsra $\Theta(e) \leq G(e)$.

4.1.3 Definíció: A $\Pi \subset E$ halmazt vágásnak nevezzük, ha minden $(v_0, v_1, \dots) \in \partial T$ végtelen ágban van olyan v_i csúcs, amire $(v_{i-1}, v_i) \in \Pi$.

4.1.4 Tétel: [6, 12.36. Tétel] A T fagráfon a G kapacitásfüggvény mellett

$$\sup \big\{ c : \text{létezik } c \text{ nagyságú folyam } T\text{-n} \big\} = \inf \Big\{ \sum_{e \in \Pi} G(e) : \Pi \text{ vágás} \Big\}.$$

4.1.5 Tétel: Legyen $F(T)$ a $T = (V, E)$ fához és $\{K_v : v \in V\}$ halmazrendszerhez tartozó fafraktál.
Minden $s \geq 0$ esetén legyen $G_s((\bar{v}, v)) = \frac{|K_v|^s}{|K_\rho|^s}$ kapacitásfüggvény. Legyen

$$A := \left\{ s : \inf_{\Pi \text{ vágás}} \sum_{e \in \Pi} G_s(e) = 0 \right\} \text{ és}$$

$$B := \big\{ s : \text{létezik a } G_s \text{ kapacitásfüggvényhez pozitív nagyságú folyam} \big\}.$$

Ekkor

$$\dim_H F(T) = \inf A = \sup B.$$

Bizonyítás:

- $\inf A = \sup B$:

Ha $t > s$, akkor minden $e \in E$ él esetén $G_t(e) \leq G_s(e)$, ezért minden Π vágás esetén $\sum_{e \in \Pi} G_t(e) \leq \sum_{e \in \Pi} G_s(e)$, így ha $s \in A$, akkor $t \in A$.
Tehát ha $s > \inf A$, akkor $\inf_{\Pi \text{ vágás}} \sum_{e \in \Pi} G_s(e) = 0$, ha pedig $s < \inf A$, akkor $\inf_{\Pi \text{ vágás}} \sum_{e \in \Pi} G_s(e) > 0$.
Ezekből a 4.1.4. Tétel alapján következik, hogy ha $s > \inf A$, akkor a gráfon nincs pozitív nagyságú folyam, azaz $s \notin B$, ha pedig $s < \inf A$, akkor a gráfon van pozitív nagyságú folyam, azaz $s \in B$.

- $\dim_H F(T) \leq \inf A$:

Ha Π egy vágás, akkor a $\{K_v : (\bar{v}, v) \in \Pi\}$ halmazok lefedik $F(T)$-t, ugyanis minden $x \in F(T)$ ponthoz van olyan $(v_0, v_1, \dots)$ végtelen ág, hogy $\bigcap_{k=0}^{\infty} K_{v_k} = \{x\}$.
Ha $s \in A$, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan Π vágás, hogy a hozzá tartozó $\{K_v : (\bar{v}, v) \in \Pi\}$ halmazokból álló fedésre

$$\sum_{v:(\bar{v},v) \in \Pi} |K_v|^s = \sum_{(\bar{v},v) \in \Pi} |K_\rho|^s G_s((\bar{v}, v)) < |K_\rho|^s \varepsilon.$$

Ebből következik, hogy az $F(T)$ halmaz s dimenziós Hausdorff mértéke $\mathcal{H}^s(F(T)) = 0$, így $\dim_H F(T) \leq s$. Ez minden $s \in A$ esetén igaz, ezért $\dim_H F(T) \leq \inf A$.

- $\dim_H F(T) \geq \inf A$:

Legyen $s > \dim_H F(T)$ tetszőleges.
Minden $0 < \varepsilon < |K_\rho|^s$ esetén van olyan $\{H_i : i \in I\}$ fedése $F(T)$-nek, amire $\sum_{i \in I} |H_i|^s < \varepsilon$. Ekkor minden $i \in I$ esetén $|H_i| < \varepsilon^{\frac{1}{s}} < |K_\rho|$.
Rögzítsük a fedést, és $i \in I$ esetén legyen

$$\mathcal{Q}_i := \{v \in V : |K_v| \leq |H_i| < |K_{\bar{v}}| \text{ és } K_v \cap H_i \cap F(T) \neq \varnothing\}.$$

Mivel minden $(v_0, v_1, \dots)$ végtelen ág esetén $\lim_{k \to \infty} |K_{v_k}| = 0$ és $|H_i| < |K_\rho|$, ezért van az ágban pontosan egy olyan v csúcs, amire $|K_v| \leq |H_i| < |K_{\bar{v}}|$. Ha a végtelen ág olyan, hogy $\bigcap_{k=0}^{\infty} K_{v_k} = \{x\} \subset H_i \cap F(T)$, akkor van az ágban pontosan egy olyan v csúcs, amire $v \in \mathcal{Q}_i$, ezért a $\{K_v : v \in \mathcal{Q}_i\}$ halmazrendszer fedése $H_i \cap F(T)$-nek.

Ha v és w a T gráf két csúcsa, akkor $\operatorname{int} K_v \cap \operatorname{int} K_w \neq \emptyset$ pontosan akkor, ha $K_v \subset K_w$ vagy $K_w \subset K_v$, azaz ha van olyan ág a fában, amin a v és a w csúcs is rajta van. Mivel a $\mathcal{Q}_i$ halmaz minden végtelen ágból legfeljebb egy csúcsot tartalmaz, ezért az $\{\operatorname{int} K_v : v \in \mathcal{Q}_i\}$ halmazrendszer tagjai diszjunktak.

Megmutatjuk, hogy a $\mathcal{Q}_i$ halmaz véges. Jelölje β_d a d dimenziós egységgömb térfogatát, ekkor

$$\beta_d 2^d |H_i|^d \overset{(1)}{\geq} \mathcal{L}^d(U_{|H_i|}(H_i)) \overset{(2)}{\geq} \sum_{v \in \mathcal{Q}_i} \mathcal{L}^d(\operatorname{int} K_v)$$

$$\overset{(3)}{\geq} c_2 \sum_{v \in \mathcal{Q}_i} |K_v|^d \overset{(4)}{\geq} c_2 c_1^d \sum_{v \in \mathcal{Q}_i} |H_i|^d,$$

amiből a $\mathcal{Q}_i$ halmaz elemszámára az $|H_i|$-től független $r := \frac{\beta_d 2^d}{c_2 c_1^d}$ felső becslés adódik. A fenti egyenlőtlenségek a következők miatt igazak:

(1) az H_i halmaz $|H_i|$ sugarú nyílt környezete belefoglalható egy $2|H_i|$ sugarú gömbbe;

(2) $U_{|H_i|}(H_i) \supset \bigcup_{v \in \mathcal{Q}_i} \operatorname{int} K_v$, és a jobb oldal diszjunkt halmazok egyesítése;

(3) a 4.1.1. Definíció (f) pontjából következik;

(4) a 4.1.1. Definíció (e) pontja alapján $|K_v| \geq c_1 |K_{\bar{v}}| > c_1 |H_i|$.

Jelölje $\mathcal{Q} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{Q}_i$, ekkor a $\{K_v : v \in \mathcal{Q}\}$ halmazrendszer az $F(T)$ egy fedése. Minden végtelen ágban van olyan v csúcs, amire $v \in \mathcal{Q}$, ezért a $\Pi := \{(\bar{v}, v) : v \in \mathcal{Q}\}$ halmaz egy vágás. A Π vágáshoz tartozó G_s kapacitásokra

$$|K_\rho|^s \sum_{e \in \Pi} G_s(e) = \sum_{v \in \mathcal{Q}} |K_v|^s \leq \sum_{i \in I} \sum_{v \in \mathcal{Q}_i} |K_v|^s$$

$$\leq \sum_{i \in I} \sum_{v \in \mathcal{Q}_i} |H_i|^s \leq \sum_{i \in I} r |H_i|^s < r\varepsilon.$$

Tehát $s \in A$, mert tetszőleges $0 < \varepsilon < |K_\rho|^s$ esetén van olyan Π vágás, amire

$$\sum_{e \in \Pi} G_s(e) < \frac{r}{|K_\rho|^s} \varepsilon.$$

Ez minden $s > \dim_H F(T)$ esetén igaz, ezért $\dim_H F(T) \geq \inf A$.

■

4.1.6 Megjegyzés: A K_v halmazok helyzetéről csak azt tettük fel, hogy a megfelelő halmazok belsejei diszjunktak, illetve a megfelelő halmazok tartalmazzák egymást. Ezen feltételek teljesülése esetén az $F(T)$ fafraktál dimenziója nem függ a K_v halmazok elhelyezkedésének további tulajdonságaitól, hiszen a tétel minden esetben ugyanazt a dimenziót adja.

4.2. Galton–Watson hálózatok

A Galton–Watson hálózatok olyan véletlen fagráfok, amelyekben a csúcsok utódainak száma véletlen, de minden csúcsra azonos eloszlású.

4.2.1 Definíció: Jelölje $\mathcal{I}_k := \mathbb{N}^k$ és $\mathcal{I} := \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{I}_k$.

Legyenek $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}$ esetén $X_{i_1,\dots,i_k} = (N_{i_1,\dots,i_k}, A_{i_1,\dots,i_k,0}, A_{i_1,\dots,i_k,1}, \dots)$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, amikre $N_{i_1,\dots,i_k} \in \mathbb{N}$ és minden $0 < A_{i_1,\dots,i_{k+1}} < 1$.

Legyen $T = (V, E)$ az a véletlen fagráf, amire

$$V = \left\{v_{i_1,\dots,i_k} : \text{ minden } 1 \le j \le k \text{ esetén } i_j < N_{i_1,\dots,i_{j-1}}\right\},$$

$$E = \left\{e_{i_1,\dots,i_k} = (v_{i_1,\dots,i_{k-1}}, v_{i_1,\dots,i_k}) : v_{i_1,\dots,i_k} \in V \setminus \{v_\varnothing\}\right\}.$$

A $\rho := v_\varnothing$ csúcsot nevezzük a fa gyökerének. Jelölje $N := N_\varnothing$ és minden $v \neq \rho$ csúcs esetén $\bar{v}$ jelölje a v ősét, azaz azt az egyetlen csúcsot, amire $(\bar{v}, v) \in E$.

Legyen G az alábbi kapacitásfüggvény az éleken:

$$G(e_{i_1,\dots,i_k}) := \prod_{j=1}^{k} A_{i_1,\dots,i_j}.$$

Az így definiált T véletlen fagráfot az $X = (N, A_0, A_1, \dots)$ valószínűségi változó által generált Galton–Watson hálózatnak nevezzük.

4.2.2 Megjegyzés: Jelölje $v \in V$ esetén $T(v)$ a T gráf v gyökerű részfáját. A Galton–Watson hálózatok statisztikusan önhasonlók, mert a $\{v \in V\}$ feltétel mellett $T(v)$ feltételes eloszlása megegyezik T eloszlásával.

4.2.3 Definíció: Az $X = (N, A_0, A_1, \dots)$ valószínűségi változó által generált T fagráf esetén kihalásnak nevezzük azt az eseményt, hogy a gráf véges, túlélésnek nevezzük azt az eseményt, hogy a gráf végtelen.

4.2.4 Tétel: (A túlélés valószínűsége) Az $X = (N, A_0, A_1, \dots)$ által generált T Galton–Watson hálózat túlélésének valószínűsége $P(T \text{ végtelen}) = 1 - P(T \text{ véges}) = 1 - q$, ahol q az

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) t^n = t$$

egyenlet legkisebb nemnegatív megoldása.

Bizonyítás: Az $N_{\mathbf{i}}$-k függetlenségét, azonos eloszlását és a T fa statisztikus önhasonlógát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$P(T \text{ véges}) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n \text{ és minden } j < n \text{ esetén } T(v_j) \text{ véges})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \prod_{j=0}^{n-1} P\big(T(v_j) \text{ véges} | N = n\big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)P(T \text{ véges})^n = f\big(P(T \text{ véges})\big).$$

Tehát $P(T \text{ véges})$ megoldása az $f(t) = t$ egyenletnek.

Ha $P(N = 0) = 1$, akkor a fa 1 valószínűséggel véges és $f(t) = 1$ minden t esetén, tehát a tétel igaz. Ha $P(N = 0) = 0$, akkor a fa 1 valószínűséggel végtelen és $f(0) = 0$, tehát a tétel ekkor is igaz.

Legyen $0 < P(N = 0) < 1$.

Legyen E_k az az esemény, hogy a T fában a gyökérből induló utak legfeljebb k hosszúak, azaz minden $v \in V$ csúcsra $|v| \le k$.

Az E_k események valószínűségeire igaz, hogy $0 < P(E_0) < P(E_1) < \dots$, és hogy

$$P(E_k) = \sum_{n=0}^{\infty} P\Big(\{N=n\} \cap \bigcap_{i=0}^{n-1} E_{k-1}(v_i)\Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \prod_{i=0}^{n-1} P\big(E_{k-1}(v_i) | N=n\big)$$

$$\overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)P(E_{k-1})^n = f\big(P(E_{k-1})\big),$$

ahol $E_{k-1}(v_i)$ azt az eseményt jelöli, hogy a v_i gyökerű részfában minden v csúcsra $|v| \le k-1$. Az (1) egyenlőség a Galton–Watson hálózat statisztikus önhasonlósága miatt igaz.

Mivel a fa minden csúcsából véges sok él indul ki, ezért a König lemma miatt $\{T \text{ véges}\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$, és ezért $P(T \text{ véges}) = \lim_{k\to\infty} P(E_k)$.

Ha $0 \le t < P(T \text{ véges})$, akkor van olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $P(E_{k-1}) \le t < P(E_k)$. Az $f(t)$ függvény szigorúan monoton nő, ezért

$$t < P(E_k) = f(P(E_{k-1})) \le f(t).$$

Tehát $0 \le t < P(T \text{ véges})$ esetén $t \ne f(t)$, azaz $P(T \text{ véges})$ a $t = f(t)$ egyenlet legkisebb nemnegatív megoldása.

■

Az alábbi lemma az $f(t) = t$ egyenlet megoldásainak számát írja le, amire a későbbiekben többször is szükségünk lesz.

4.2.5 Lemma: Legyen N nemnegatív egész értékű valószínűségi változó, és jelölje

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)t^n.$$

Az $f(t) = t$ egyenletnek $[0, 1]$-en

(a) minden $0 \le t \le 1$ megoldása, ha $P(N = 1) = 1$,

(b) az 1 az egyetlen megoldása, ha $EN \le 1$ és $P(N = 1) < 1$,

(c) pontosan két megoldása van, q és 1, ha $EN > 1$. Ha $P(N = 0) = 0$, akkor $q = 0$, ha $P(N = 0) > 0$, akkor $0 < q < 1$.

Bizonyítás: A lemma (a) része nyilvánvaló.

Ha $EN < \infty$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} P(N = n)nt^n$ hatványsor $[0,1]$-en egyenletesen konvergens, ezért az $f(t)$ függvény $[0,1]$-en folytonos és folytonosan deriválható (0-ban illetve 1-ben a deriváltat jobbról illetve balról értelmezzük).
Legyen $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(t) - t$. Az $f(t) = t$ egyenlet $[0,1]$-beli megoldásai megegyeznek a $g(t)$ függvény zérushelyeivel.

Tetszőleges N esetén

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) = 1,$$

ezért az 1 megoldása az $f(t) = t$ egyenletnek és $g(1) = 0$.

- (b) rész bizonyítása:

Ha $EN < 1$, akkor $0 \le t \le 1$ esetén a következő egyenlőtlenségek teljesülnek:

$$1 > EN = \sum_{n=1}^{\infty} nP(N = n) = f'(1) \ge \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n)nt^{n-1} = f'(t)$$

$$\Rightarrow 0 > EN - 1 = g'(1) \ge g'(t).$$

Ha $EN = 1$ és $P(N = 1) < 1$, akkor $P(N \ge 2) > 0$, ezért $0 \le t < 1$ esetén

$$1 = EN = \sum_{n=1}^{\infty} nP(N = n) = f'(1) > \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n)nt^{n-1} = f'(t)$$

$$\Rightarrow 0 = EN - 1 = g'(1) > g'(t).$$

Mindkét esetben azt kapjuk, hogy a $g(t)$ függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért az 1 az egyetlen zérushelye.

- (c) rész bizonyítása:

Legyen $1 < EN < \infty$.
Ekkor $P(N \ge 2) > 0$, ezért a $g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n)nt^{n-1} - 1$ függvény szigorúan monoton növő. Mivel $0 < EN - 1 = g'(1)$, ezért van olyan $0 \le t_0 < 1$, hogy $t \in [t_0, 1] \iff g'(t) \ge 0$. Ebből következik, hogy a g függvény a $[0, t_0]$ intervallumon szigorúan monoton fogyó, a $[t_0, 1]$ intervallumon szigorúan monoton növő, és mivel $g(1) = 0$, ezért $g(t_0) < 0$.
Mivel $g(0) = P(N = 0) \ge 0$, ezért a $g(t)$ függvénynek van pontosan egy zérushelye a $[0, t_0)$ intervallumon, jelölje ezt q. Ha $f(0) = P(N = 0) = 0$, akkor $q = 0$, ha $f(0) = P(N = 0) > 0$, akkor $0 < q < 1$.

Legyen $EN = \infty$.
Ekkor van olyan $n_0 \ge 2$, hogy

$$\sum_{n=1}^{n_0-1} P(N = n)n + P(N \ge n_0)n_0 > 1.$$

Legyen N_0 olyan valószínűségi változó, amire $n < n_0$ esetén $P(N_0 = n) = P(N = n)$ és $P(N_0 = n_0) = P(N \ge n_0)$, és legyen $f_0(t) = \sum_{n=0}^{n_0} P(N_0 = n)t^n$. Ekkor minden

$0 \le t \le 1$ esetén $f(t) \le f_0(t)$ és $f(0) = f_0(0)$.
Mivel $1 < EN_0 < \infty$, ezért N_0-ra és az $f_0(t)$ függvényre alkalmazhatjuk a bizonyítás előző részét. A fenti egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy a $g(t)$ függvénynek pontosan két gyöke van, q és 1. Ha $P(N = 0) = 0$, akkor $q = 0$, ha pedig $P(N = 0) > 0$, akkor $0 < q < 1$.

■

A 4.2.4. Tételből és a 4.2.5. Lemmából adódik az alábbi állítás:

4.2.6 Állítás: Legyen T az $X = (N, A_0, A_1, \dots)$ valószínűségi változó által generált véletlen fa, és tegyük fel, hogy $P(N = 1) \neq 1$. Ekkor

$$1 - q = P(\text{túlélés}) > 0 \iff EN > 1.$$

4.2.7 Definíció: Fák egy $\mathcal{A}$ halmazát (tulajdonságát) erősen öröklődőnek nevezzük, ha a következők teljesülnek rá:

- minden véges fa $\mathcal{A}$-beli,
- ha a T fa $\mathcal{A}$-beli és v a T egy csúcsa, akkor a $T(v)$ részfa is $\mathcal{A}$-ban van,
- ha a T fa minden $\bar{v} = \rho$ csúcsa esetén a $T(v)$ részfa $\mathcal{A}$-beli, akkor T is $\mathcal{A}$-beli.

4.2.8 Megjegyzés: Az $\mathcal{A} = \{T \text{ fa} : T\text{-n nincs pozitív nagyságú folyam}\}$ tulajdonság erősen öröklődő.

4.2.9 Tétel: (Galton–Watson 0-1-törvény) Egy Galton–Watson hálózatban minden erősen öröklődő $\mathcal{A}$ tulajdonságnak a valószínűsége q vagy 1. Pontosabban, ha $P(T \text{ végtelen}) > 0$, akkor $P(T \in \mathcal{A}| \text{ túlélés}) \in \{0, 1\}$.

Bizonyítás: Legyen T az $X = (N, A_0, A_1, \dots)$ által generált Galton–Watson hálózat.
A definíció miatt minden erősen öröklődő $\mathcal{A}$ tulajdonság esetén $\{T \in \mathcal{A}\} = \{\text{minden } \bar{v} = \rho \text{ csúcs esetén } T(v) \in \mathcal{A}\}$, amiből a Galton–Watson hálózat statisztikus önhasonlósága miatt azt kapjuk, hogy

$$P(T \in \mathcal{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} P\big(N = n \text{ és minden } i < n \text{ esetén } T(v_i) \in \mathcal{A}\big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \prod_{i=0}^{n-1} P\big(T(v_i) \in \mathcal{A} | N = n\big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) P(T \in \mathcal{A})^n = f(P(T \in \mathcal{A})),$$

tehát $P(T \in \mathcal{A})$ megoldása az $f(t) = t$ egyenletnek, ezért a 4.2.5. Lemma alapján $P(T \in \mathcal{A}) = q$ vagy 1.

Mivel $\{T \text{ véges}\} \subseteq \{T \in \mathcal{A}\}$, ezért $\{T \notin \mathcal{A}\} \subseteq \{T \text{ végtelen}\}$, és $P(T \notin \mathcal{A}|T \text{ végtelen}) = \frac{1-q}{1-q}$ vagy $\frac{0}{1-q}$, amiből következik a tétel állítása.

A $P(N = 1) = 1$ esetben a fenti egyenlet semmitmondó, de ekkor a fagráf 1 valószínűséggel egyetlen végtelen ágból áll, azaz majdnem biztosan meghatározott.
■

4.2.10 Tétel: (Falconer) Legyen T az $Y = (N, B_0, B_1, \dots)$ valószínűségi változó által generált Galton–Watson hálózat, és tegyük fel hogy $P\Big(\sum_{i=0}^{N-1} B_i = 1\Big) < 1$. Legyen $e_{i_1,\dots,i_k} \in E$ esetén

$$G(e_{i_1,\dots,i_k}) := \prod_{j=1}^{k} B(e_{i_1,\dots,i_j})$$

kapacitásfüggvény, és jelölje

$$\gamma := E\Big(\sum_{i=0}^{N-1} B_i\Big).$$

1. Ha $\gamma \le 1$, akkor 1 valószínűséggel nincs pozitív nagyságú folyam a gráfon.
2. Ha $\gamma > 1$, akkor a túlélésen majdnem biztosan van pozitív nagyságú folyam.

4.2.11 Megjegyzés: Ha $P\Big(\sum_{i=0}^{N-1} B_i = 1\Big) = 1$, akkor 1 valószínűséggel van pozitív nagyságú folyam a gráfon, ugyanis a $G(e)$ függvény egy 1 nagyságú folyam.

Bizonyítás: 1. Tegyük fel, hogy $\gamma \le 1$.
Tetszőleges $j \le N$ esetén tekintsük a v_j gyökerű $T(v_j)$ részfát, élein a $G_j(e) := \frac{G(e)}{B_j}$ kapacitásokkal. Legyen $\Theta(v_j)$ az ebben a részfában lehetséges maximális folyamnagyság. Jelölje $\Theta := \Theta(\rho)$, ekkor

$$\Theta = \sum_{j=0}^{N-1} \Big(B_j \wedge \big(B_j \Theta(v_j)\big)\Big) = \sum_{j=0}^{N-1} B_j\big(1 \wedge \Theta(v_j)\big).$$

Ez alapján Θ várható értékére azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
E\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} E(\Theta 1_{\{N=n\}}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1} E\Big(B_j\big(1 \wedge \Theta(v_j)\big)1_{\{N=n\}}\Big) \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1} E\big(B_j 1_{\{N=n\}}\big)E\big(1 \wedge \Theta(v_j)\big) \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1} E\big(B_j 1_{\{N=n\}}\big)E\big(1 \wedge \Theta\big) \\
&= E\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1} B_j 1_{\{N=n\}}\Big)E\big(1 \wedge \Theta\big) = \gamma E\big(1 \wedge \Theta\big).
\end{aligned}$$

Az (1) egyenlőség azért igaz, mert a $T(v_j)$ részfa minden e éle esetén $G_j(e)$ független B_j-től és N-től, így $\Theta(v_j)$ is független B_j-től és N-től. A (2) egyenlőség a Galton–Watson hálózat statisztikus önhasonlóságából következik.

A fenti egyenlőség alapján azt kapjuk, hogy $E\Theta = \gamma E(1 \wedge \Theta) \le E(1 \wedge \Theta)$. Ebből következik, hogy $\Theta \le 1$ teljesül 1 valószínűséggel, és így $E(1 \wedge \Theta) = E\Theta$.

Legyen $\gamma < 1$, ekkor a fenti egyenlőség azt adja, hogy $E\Theta = \gamma E\Theta$, amiből $E\Theta = 0$ következik, azaz 1 valószínűséggel nincs pozitív nagyságú folyam a gráfon.

Legyen $\gamma = 1$. Jelölje

$$\|\Theta\| := \inf\big\{a : P(\Theta > a) = 0\big\},$$

az eddigiek alapján $0 \le \|\Theta\| \le 1$.
Ha $\|\Theta\| > 0$, akkor tetszőleges $0 < b_1 < \|\Theta\| < b_2$ esetén

$$0 = P\big(\Theta > b_2\big) = P\Big(\sum_{j=0}^{N-1} B_j \Theta(v_j) > b_2\Big)$$

$$\ge P\Big(\sum_{j=0}^{N-1} B_j > \frac{b_2}{b_1} \text{ és minden } \Theta(v_j) > b_1\Big)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) P\Big(\sum_{j=0}^{n-1} B_j > \frac{b_2}{b_1} \text{ és minden } \Theta(v_j) > b_1 \big| N = n\Big)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(N = n) P\Big(\sum_{j=0}^{n-1} B_j > \frac{b_2}{b_1} \Big| N = n\Big) \prod_{j=0}^{n-1} P\big(\Theta(v_j) > b_1\big)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\Big(N = n, \sum_{j=0}^{n} B_j > \frac{b_2}{b_1}\Big) P\big(\Theta > b_1\big)^n.$$

Mivel $P(\Theta > b_1) > 0$, ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big(N = n, \sum_{j=0}^{n} B_j > \frac{b_2}{b_1}\Big) = P\Big(\sum_{j=0}^{N-1} B_j > \frac{b_2}{b_1}\Big) = 0.$$

Ez minden $\frac{b_2}{b_1}$ esetén igaz, amiből következik, hogy $P(\sum_{j=0}^{N-1} B_j > 1) = 0$. Mivel $\gamma = 1$, ezért ez csak úgy lehetséges, ha $P\big(\sum_{j=0}^{N-1} B_j = 1\big) = 1$, ami a tétel feltétele által kizárt eset.
Tehát $\|\Theta\| = 0$, amiből következik, hogy $P(\Theta = 0) = 1$, azaz 1 valószínűséggel nincs pozitív nagyságú folyam a gráfon.

2. Tegyük fel, hogy $\gamma > 1$.
Legyen először T egy rögzített determinisztikus fa, az élein a $B(e)$ súlyokkal. Bevezetjük $e \in E$ esetén az X_e független valószínűségi változókat, amikre $P(X_e = 1) = B(e)$ és $P(X_e = 0) = 1 - B(e)$.
Szemléletesen a fenti definíció azt jelenti, hogy egy él "nyitva van", ha $X_e = 1$, egyébként pedig "zárva van". A T^* részfa azokat a "nyitott" éleket tartalmazza, amikhez vezet út a gyökértől "nyitott" éleken keresztül.
Jelölje a T fából származtatott T^* fa túlélésének valószínűségét $Q(T) := P(T^* \text{ végtelen})$.
Minden $e_{i_1,\dots,i_k} \in E$ él esetén

$$G(e_{i_1,\dots,i_k}) = \prod_{j=1}^{k} B(e_{i_1,\dots,i_j}) = \prod_{j=1}^{k} P(X_{e_{i_1,\dots,i_j}} = 1)$$

$$= P\Big(\prod_{j=1}^{k} X_{e_{i_1,\dots,i_j}} = 1\Big) = P\big(e_{i_1,\dots,i_k} \in T^*\big),$$

ezért a T fa minden Π vágása esetén

$$\sum_{e\in\Pi} G(e) = \sum_{e\in\Pi} P\big(e \in T^*\big)$$

$$\geq P\big(e \in T^* \text{ valamilyen } e \in \Pi \text{ esetén }\big) \geq P(T^* \text{ végtelen}).$$

Jelölje $\Theta(T)$ a T fában a maximális folyamnagyságot. A fenti egyenlőtlenségből a 4.1.4. Tétel alapján következik, hogy

$$\Theta(T) \geq P(T^* \text{ végtelen}) = Q(T).$$

Legyen most T a tételben szereplő Galton–Watson hálózat, amit a fenti módon a T^* véletlen fára módosítunk. Az így kapott T^* véletlen fa szintén egy Galton–Watson hálózat, amelyben minden élhez az 1 súly tartozik.
A T^* fában a gyökérből kiinduló élek számának várható értéke

$$E\Big(\sum_{i=0}^{N-1} 1_{\{e_i\in T^*\}}\Big) = E\Big(\sum_{i=0}^{N-1} X_{e_i}\Big) = E\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} X_{e_i} 1_{\{N=n\}}\Big)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} E\big(X_{e_i} 1_{\{N=n\}}\big) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} E\big(B(e_i) 1_{\{N=n\}}\big)$$

$$= E\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} B(e_i) 1_{\{N=n\}}\Big) = E\Big(\sum_{i=0}^{N-1} B(e_i)\Big) = \gamma.$$

Mivel $\gamma > 1$, ezért a 4.2.6. Állítás alapján a T^* Galton–Watson hálózat túlélésének valószínűsége

$$0 < P(T^* \text{ végtelen}) = E(Q(T)).$$

Ebből következik, hogy $Q(T) > 0$ pozitív valószínűséggel, így $\Theta(T) > 0$ is pozitív valószínűségű, azaz $P(\Theta(T) = 0) < 1$. A 4.2.9. Galton–Watson 0-1 törvény szerint $P(\Theta(T) = 0|\text{túlélés}) = 0$, tehát a túlélésen majdnem biztosan létezik pozitív nagyságú folyam. ■

4.3. Galton–Watson fraktálok

4.3.1 Definíció: Legyen T az $X = (N, A_0, A_1, \dots)$ valószínűségi változó által generált Galton–Watson hálózat. A gráf minden v csúcsához tartozzon egy véletlen $K_v \subset \mathbb{R}^d$ kompakt halmaz, amikre az alábbiak 1 valószínűséggel teljesülnek:

(a) $K_v = \overline{\operatorname{int} K_v}$,

(b) ha $(u, v) \in E$, akkor $K_u \supset K_v$,

(c) ha $\bar{u} = \bar{v}$, akkor $\operatorname{int} K_u \cap \operatorname{int} K_v = \varnothing$,

(d) minden $(v_0, v_1, v_2, \dots) \in \partial T$ végtelen ágra $\lim_{n\to\infty} |K_{v_n}| = 0$,

(e) minden $v_{i_1,\dots,i_{k+1}}$ csúcs esetén $\frac{|K_{v_{i_1,\dots,i_{k+1}}}|}{|K_{v_{i_1,\dots,i_k}}|} = A_{i_1,\dots,i_{k+1}}$,

(f) $c_2 := \inf_v \frac{\mathcal{L}(\operatorname{int} K_v)}{|K_v|^d} > 0$.

A $\{K_v : v \in V\}$ halmazrendszer által meghatározott $F(T)$ véletlen fafraktált a T hálózathoz tartozó Galton–Watson fraktálnak nevezzük.

4.3.2 Tétel: (A Galton–Watson fraktál dimenziója) Legyen T az $X = (N, A_0, A_1, \dots)$ valószínűségi változó által generált Galton–Watson hálózat, a csúcsokhoz tartozzanak a $\{K_v : v \in V\}$ kompakt halmazok és legyen $F(T)$ az így generált véletlen fafraktál. Tegyük fel, hogy minden $i \in \mathbb{N}$ esetén 1 valószínűséggel teljesül $A_i > a$ valamilyen $a > 0$ konstanssal. Ekkor a túlélésen majdnem biztosan

$$\dim_H F(T) = \min\Big\{\alpha : E\Big(\sum_{i=0}^{N-1} A_i^\alpha\Big) \le 1\Big\}.$$

Bizonyítás: Először megmutatjuk, hogy N korlátos. A tételben szereplő feltétel és a Galton–Watson fraktál definíciójában szereplő tulajdonságok alapján

$$Na^d \le \sum_{i=0}^{N-1} A_i^d = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{|K_{v_i}|^d}{|K_\rho|^d} \le \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\mathcal{L}(\operatorname{int} K_{v_i})}{c_2|K_\rho|^d} \le \frac{\mathcal{L}(\operatorname{int} K_\rho)}{c_2|K_\rho|^d}.$$

Ebből következik, hogy 1 valószínűséggel $N \le \frac{\mathcal{L}(\operatorname{int} K_\rho)}{a^d c_2 |K_\rho|^d}$, ezért EN véges.

Ha $EN < 1$, akkor $P(\text{túlélés}) = 0$.

Legyen $EN \ge 1$. Az $f(t) = E\Big(\sum_{i=0}^{N-1} A_i^t\Big)$ függvény folytonos, szigorúan monoton fogyó, $\lim_{t\to 0} f(t) = EN$ és $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Ezekből következik, hogy létezik

$$0 \le \beta := \min\Big\{\alpha : E\Big(\sum_{i=0}^{N-1} A_i^\alpha\Big) \le 1\Big\} < \infty.$$

Jelölje minden $e_{i_1,\dots,i_k}$ él esetén

$$G_\alpha(e_{i_1,\dots,i_k}) = \prod_{j=1}^{k} A_{i_1,\dots,i_j}^\alpha = \frac{|K_{v_{i_1,\dots,i_k}}|^\alpha}{|K_\rho|^\alpha}.$$

Ha $\alpha > \beta$, akkor $E\Big(\sum_{i=0}^{N-1} A_i^\alpha\Big) < 1$ és $P\Big(\sum_{i=0}^{N-1} A_i^\alpha = 1\Big) < 1$. Ekkor a 4.2.10. Tétel szerint a T gráfon a G_α kapacitásfüggvény mellett 1 valószínűséggel nincs pozitív nagyságú folyam, ezért a 4.1.5. Tétel alapján az $F(T)$ véletlen fafraktál dimenziójára majdnem biztosan teljesül, hogy $\dim_H F(T) \le \alpha$.

Ha $\alpha < \beta$, azaz $E\Big(\sum_{i=0}^{N-1} A_i^\alpha\Big) > 1$, akkor $EN > 1$, ezért $P(T \text{ végtelen}) > 0$. Ekkor a 4.2.10. Tétel szerint a G_α kapacitásfüggvény mellett a túlélésen majdnem biztosan van pozitív nagyságú folyam, ezért a 4.1.5. Tétel alapján a túlélésen majdnem biztosan $\dim_H F(T) \ge \alpha$.

A fentiekből következik, hogy $\dim_H F(T) = \beta$.

■

4.3.3 Megjegyzés: Ha a T Galton–Watson hálózathoz tartozó véletlen halmazok olyanok, hogy minden $v \in V$ esetén K_v hasonoló K_ρ-hoz, akkor az általuk generált Galton–Watson fraktál egy véletlen önhasonló halmaz, ezért statisztikusan önhasonló. Ha az A_i arányokra fennáll, hogy mindegyik 1 valószínűséggel nagyobb valamilyen $a > 0$ konstansnál, akkor az így meghatározott $F(T)$ véletlen önhasonló halmaz dimenziójára teljesül a 4.3.2. Tétel állítása.

Irodalomjegyzék

[1] P. Billingsley: *Probability and Measure.* Third Edition. John Wiley & Sons, 1995.

[2] K. Falconer: *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications.* Second Edition. John Wiley & Sons, 2003.

[3] D. Khoshnevisan: *From Fractals and Probability to Lévy Processes and Stochastic PDEs.* Progress in Probability, Vol. 61, 111–141 Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland, 2009.

[4] P. Mattila: *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics No. 44, Cambridge University Press, 1995.

[5] P. Mörters: *Five Lectures on Hausdorff Dimension, Random Trees and Brownian Motion.* Material zur Winterschule des Graduiertenkollegs "Stochastische Prozesse und probabilistische Analisys", Stralsund, April 2003.

[6] P. Mörters and Y. Peres: *Brownian motion.* Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics No. 30, Cambridge University Press, 2010.