Piaci alapú árazás

Diplomamunka

Írta: Hutvágner Gábor

Matematikus szak

Témavezető:

Arató Miklós, egyetemi docens

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2011

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Az elmúlt években egyre meghatározóbb szerephez jutott a pénzügyi piacokon a termékek piaci alapú árazásának vizsgálata. A kérdés ezek után az volt, hogy ezeket az árazási eljárásokat lehet-e alkalmazni biztosítási termékek árazására? A dolgozat első szakaszában bemutatok két eljárást, melyek próbálnak megoldást találni erre a kérdésre. Dolgozatom második felében pedig egy életbiztosítási példán keresztül megkísérlem bemutatni ezen eljárások alkalmazását.

Mint látni fogjuk, a pénzügyi piacon megismert technikák alkalmazhatóságának legnagyobb akadálya abban áll, hogy – míg a pénzügyi piac teljes – a biztosítási piac, köszönhetően a véletlen kárkifizetéseknek, nem lesz teljes. Ebből a feltevésből indul ki *Semyon Malamud* és *Eugene Trubowitz*, akiknek *Mario V. Wüthrich*-hel közös munkájának (lásd [4]) ismertetésén alapul a dolgozatom első része.
Eljárásuk alapja egy hasznosság-maximalizációs probléma. Adott hasznosságfüggvény mellett (végig az erő-hasznossági függvényt használom majd – lásd az (1.3) formulát) akarjuk maximalizálni az elvárt hasznosságot a fogyasztási folyamat függvényében.
A fő feladat ezért annak az optimális fogyasztási folyamatnak a meghatározása, amire az elvárt hasznosság maximális lesz. Ennek felírására adunk egy elméleti feltételt az úgynevezett felső fedezeti ár segítségével (lásd 12.Tétel), ez azonban explicit számításokra nem alkalmas. Ezért kulcsfontosságú az az induktív struktúra, amit a 14. szakaszban adunk meg: az induktívan definiált véletlen függvények segítségével már iteratívan megkapható az úgynevezett $\mathbf{X}$ pénzügyi tőke folyamat, aminek segítségével a $\mathbf{c}$ optimális fogyasztási folyamat már explicite számolható (lásd 14.Tétel). Ezután a piac alapú árat (melynek pontos definíciója a 10. illetve 11.Definícióban olvasható) a következőképpen kapjuk meg: meghatározzuk az optimális fogyasztási folyamatot az úgynevezett $\mathbf{w}$ járadékfolyamatra, ami tulajdonképpen a biztosítótársaság biztosítási tevékenységén kívüli, egyéb pénzügyi tevékenységéből származó pénzfolyamata, majd meghatározzuk a $\widetilde{\mathbf{w}}$ módosított járadékfolyamatra is, ami már magában foglalja a $\mathbf{\Pi}$ biztosítási díjáramot és az $\mathbf{Y}$ kárkifizetés-folyamatot. Ezt a $\mathbf{\Pi}$

díjáramot akkor nevezzük piaci alapú díjnak, ha az így kapott optimális fogyasztási folyamatokra kiszámított maximális elvárt hasznosságok egyenlők.
Utoljára még azt is megnézzük, hogyan módosul ez az eljárás, ha bizonyos kölcsönzési korlátozást feltételezünk (aminek hatására az egyszeri díjas szerződés sokkal olcsóbb lesz, mint az éves díjas).

Az első szakasz második felében egy másik eljárást mutatok be: *Mario V. Wüthrich*, *Hans Bühlmann* és *Hansjörg Furrer* eredményét (lásd [7]). Ez az úgynevezett VaPo (árazási portfólió). Ennek lényege, hogy egy biztosítási termék pénzáramát faktorizáljuk: pénzügyi eszközökből álló báziselemek összegére bontjuk fel. Itt első lépésben feltételezzük, hogy a báziselemek együtthatója determinisztikus. Ekkor a biztosítási termék árazása megegyezik a választott replikáló pézügyi portfólió árazásával, amire pedig egy előre választott, úgynevezett számviteli elvet használunk.
Az általános esetben aztán az együtthatókról is feltesszük, hogy sztochasztikusak. Ekkor a VaPo definiálásához a várható értékükkel helyettesítjük őket, így minden az előző lépéshez hasonlóan számolható. Azonban mivel az együtthatók itt már nem determinisztikusak, megjelenik az úgynevezett technikai kockázat. Ennek kompenzálására vezetjük be a VaPo*-ot, ahol a kompenzációt egy sztochasztikus diszkontálás jelenti.

Meg kell még említeni a deflátort. Ez az alapvető fontosságú fogalom mindkét eljárásban nagy szerepet kap a számítások során, ezért mindjárt a dolgozat elején egy teljes szakaszban foglalkozom vele. Definiálásánál a [3] és [7] cikkeket veszem alapul (de megjegyzem, hogy más források, például [1] és [4], többé vagy kevésbé másként definiálják ezt a fogalmat). Az általam is használt definíció alapján a deflátor, mint sztochasztikus folyamat, alkalmas egy pénzáram pénzügyi értékének direkt meghatározására (lásd Riesz reprezentációs tételét). Ennek jobb megértése érdekében erre egy egyszerű példát is konstruáltam.
A szakasz további részében bemutatom a deflátor alapvető tulajdonságait, illetve hogy miként használható a pénzügyi érték későbbi időpontban való meghatározására. Végül pedig megmutatom, hogy az ilyen módon definiált deflátor-fogalom miként kapcsolódik a Malamud-Trubowitz-Wüthrich-féle elmélethez (pontosabban a [4] másképp bevezetett deflátor-fogalmához).

A második és harmadik fejezetben egy-egy konkrét példán kísérelem meg bemutatni a módszerek alkalmazását. Mindkét esetben vegyes életbiztosítást árazok, amit $x = 50$ éves férfiak kötnek $n = 5$ éves időtartamra, és 1 000 000 HUF biztosítási összegre.

1. fejezet

Piaci alapú árazás

1.1. A pénzügyi és a biztosítási piac

1.1.1. A tőkepiaci modell

Rögzítsük le az $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ valószínűségi mezőt, és tekintsük a $\mathcal{B}$ leíró σ-algebrával asszociált $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0,\ldots,T}$ filtrációt. Ekkor az $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ *tőkepiaci modell*hez jutunk.

Tegyük fel továbbá, hogy az $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ rögzített tőkepiacon adott L darab, $\mathcal{F}$-hez adaptált $A_1, \ldots, A_L$ eszköz. Ezekkel kereskedünk, és más eszköz nincs.

Az A_j eszközt két pozitív folyamat karakterizálja:

- *árfolyamat*: $\mathbf{q}_j = (q_{j,0}, \ldots, q_{j,T})$;
- *jutalék-kifizetés folyamat*: $\mathbf{D}_j = (D_{j,0}, \ldots, D_{j,T})$.

Jelölje a $(t, t+1)$ időintervallumban az A_j eszközből birtokolt részvények számát az $x_{j,t}$ valószínűségi változó. (Ez nyilván $\mathcal{F}$-mérhető, hiszen azt fejezi ki, hogy mennyit tartunk a portfólióban az A_j eszközből t^+-ban).
Ekkor egy $\mathcal{F}$-adaptált *portfólió kereskedési stratégia* egy olyan L-dimenziós, $\mathcal{F}$-adaptált

$$\varphi = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_L)$$

folyamat, amelyre $\mathbf{x}_j = (x_{j,0}, \ldots, x_{j,T-1}, 0)$.

Az így kapott φ stratégia által generált $\mathbf{D}_\varphi$ *jutalékfolyamat* a következő:

$$D_{\varphi,t} = \sum_{j=1}^{L} (D_{j,t} + q_{j,t}) x_{j,t-1} - \sum_{j=1}^{L} q_{j,t} x_{j,t} \qquad (t = 1, \ldots, T)$$

ahol a kezdeti befektetés $t = 0$-ban:

$$D_{\varphi,0} = -\sum_{j=1}^{L} q_{j,0} x_{j,0}.$$

(Vagyis $D_{\varphi,t}$ = „a $t-1$-beli befektetés eredménye t-ben” − „a t-beli befektetés ára”.)

1.1.2. A biztosítási piaci modell

Tekintsük most ismét az $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ valószínűségi mezőt. Az $\mathcal{F}$ filtráció azonban most nem lesz elég bő: mivel a biztosítási kárigények nem helyettesíthetők pénzügyi eszközökkel, nem lesznek $\mathcal{F}$-adaptáltak.

Bevezetünk egy bővebb filtrációt: $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t=0,\dots,T}$ a leíró $\mathcal{B}$ σ-algebrán, ami teljesíti a következőket:

(1) $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t \quad (t = 1, \dots, T)$;

(2) $\mathcal{F}_0 = \mathcal{G}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$;

(3) $|\mathcal{G}_T| < \infty$

Ez utóbbi persze csak technikai feltevés, és azonnal következik belőle, hogy ekkor az $\mathcal{F}_t$ filtráció is véges.
Ekkor tehát a $\mathcal{G}$ filtráció már tartalmaz minden pézügyi és biztosítástechnikai információt is. Ezzel az $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ *biztosítási piaci modell*hez jutunk.

Ezek után bevezetjük még az $\mathbf{Y} = (0, Y_1, \dots, Y_T)$ jelölést a biztosítási szerződés *kárkifizetés-folyamat*ára. Erről feltesszük, hogy

(1) $\mathbf{Y}$ legyen $\mathcal{G}$-adaptált, és

(2) $Y_t \geq 0 \quad \forall t.$

Természetesen a biztosító az $\mathbf{Y}$ kárkifizetés-folyamat kompenzálására megkövetel egy bizonyos *díjáram*ot: $\mathbf{\Pi} = (\Pi_t)_{t=0,\dots,T}$. Ennek két alapvető típusával foglalkozunk majd:

- az *egyszeri biztosítási díj* megegyezik a $\underline{\Pi}_0 = (\pi_0, 0, \dots, 0)$ díjárammal, ahol π_0 $\mathcal{G}_0$-mérhető. Tehát egyetlen díjfizetés történik a biztosítási periódus elején.

- az *évenkénti biztosítási díj* megfelel a $\underline{\Pi}_{\text{évi}} = (0, \pi_{\text{évi}}, \dots, \pi_{\text{évi}})$ díjáramnak, ahol $\pi_{\text{évi}}$ $\mathcal{G}_0$-mérhető. Tehát a teljes biztosítási periódus alatt évenként (utólag) fizet egy rögzített $\pi_{\text{évi}}$ összeget.

Meg kell jegyeznünk, hogy eddig a pénzügyi vállalat kitettsége adaptált volt az aggregált $\mathcal{F}$ filtrációhoz, ezért az φ stratégia is $\mathcal{F}$-adaptált volt. Most azonban a vállalat egy $\mathcal{G}$-adaptált $\mathbf{Y}$ kárkifizetés-folyamatnak van kitéve, ezért a biztosítási kockázat fedezésére is $\mathcal{G}$-adaptált stratégiát kell választanunk.

1.1.3. A piacok teljessége

Először idézzük fel a piacok teljességének jól ismert definícióját és ekvivalens megfogalmazásait. Ezek például [5]-ben megtalálhatóak:

1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy piacon* arbitrázs *van, ha* 0 *kezdőtőkével a lejáratkor pozitív valószínűséggel pozitív eredményt érhetünk el, miközben az értékfolyamat egyetlen időpontban sem volt negatív. Azaz ha van olyan φ stratégia, hogy*

$$V_\varphi(0) = 0, \quad V_\varphi(t) \geq 0, \quad \text{és} \quad \mathcal{P}\left(V_\varphi(T) > 0\right) > 0.$$

Egy piacot akkor nevezünk arbitrázsmentes*nek, ha nincs arbitrázs.*

1. Tétel. *A piac pontosan akkor arbitrázsmentes, ha létezik ekvivalens martingál mérték.*

2. Definíció. *Egy piacot akkor nevezünk* teljes*nek, ha tetszőleges valószínűségi változó (determinisztikus indítás mellett) elérhető stratégiával. Vagyis bármely X valószínűségi változóhoz létezik φ* fedezeti stratégia, *azaz olyan φ stratégia, melyre*

$$V_\varphi(T) = X$$

2. Tétel. *Tegyük fel, hogy a piacon létezik ekvivalens martingál mérték. Ekkor a piac pontosan akkor teljes, ha ez a martingál mérték egyértelmű.*

1. Következmény. *Arbitrázsmentes piac pontosan akkor teljes, ha egyértelműen létezik ekvivalens martingál mérték.*

Most pedig [2] alapján egy újabb ekvivalens jellemzését adjuk a piac teljességének a filtráció feszítési számának segítségével.

Tekintsük az $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ véges valószínűségi mezőt az $\mathcal{F}$ filtrációval. Ekkor minden $\mathcal{F}_t$ σ-algebrát azonosítani tudunk az Ω állapottér egy Ω_t partíciójával: a befektetők a t időpontban tudják, hogy a partíció melyik eleme tartalmazza a világ valós állapotát, de ezen kívül semmi mást nem tudnak.
Tegyük fel továbbá, hogy az $\mathcal{M}$ piacon kereskedünk $d + 1$ eszközzel.

3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* Π *árfolyamat* redundáns *(„fölösleget tartalmaz"), ha*

$$\mathcal{P}(\alpha \cdot \Pi_{t+1} = 0 \mid A) = 1$$

valamely nemtriviális α *vektor,* $t < T$*, és* $A \in \Omega_t$ *esetén.*

1. Állítás. *Ha a redundancia fennáll, akkor van olyan* A *esemény a* t *időpontban, amelyre valamely szerződés bevétele az elkövetkező periódusban előáll, mint a többi szerződés bevételeinek lineáris kombinációja.*
Ha nincs ilyen esemény, akkor azt mondjuk, hogy a szerződések nem redundáns*ak.*

4. Definíció. *Minden* $A \in \Omega_t$ *elemre (*$t = 0, 1, \ldots, T-1$*) jelölje* $K_t(A)$ *az* Ω_{t+1}*-beli elemek számát, azon feltétel mellett, hogy* A *teljesül. Ezt a számot nevezzük az* A feszítési számá*nak.*

2. Állítás. *Tegyük fel, hogy az* $\mathcal{M}$ *piac arbitrázsmentes, és a szerződések nem redundánsak. Ekkor*

$$K_t(A) \geq d + 1 \qquad \forall\ A \in \Omega_t,\ \forall\ t = 0, 1, \ldots, T-1.$$

3. Tétel. *Tegyük fel, hogy a szerződések nem redundánsak. Ekkor a piac pontosan akkor teljes, ha*

$$K_t(A) = d + 1 \qquad \forall\ A \in \Omega_t,\ \forall\ t = 0, 1, \ldots, T-1.$$

A tételnek az a tanulsága, hogy a t időpont minden lehetséges A állapotára a befektetőknek elegendő, lineárisan független eszközzel kell rendelkezniük, hogy kifeszítsék a $t+1$ időpontban érvényesülő feltételes teret.

1. Megjegyzés. *A szakasz elején feltettük, hogy* $d + 1$ *eszközzel kereskedünk a piacon. Ezt az alakot azonban nem használtuk ki sem a feszítési szám definíciójában, sem a piac teljességére adott feltételben. Ennek az alaknak a feszítési szám egy másik (ekvivalens) definíciójában van szerepe: a feszítési szám egyenlő a piac martingál-multiplicitása plusz egy. (Erről részletesebben lásd: [1])*
De bármelyik megfogalmazással a piac pontosan akkor teljes, ha a feszítési száma egyenlő az eszközök számával – és minket csak ez érdekel.

1.1.4. Példa: a biztosítási piac nem teljes

Egy nagyon egyszerű példát adunk olyan biztosítási piacra, ami nem teljes. A példából rögtön látszik, hogy általában is, ha teljes piacból indulunk ki, és „túl sok féle" biztosítási követelésünk van, akkor a biztosítási piac nem lesz teljes.

Először bevezetjük a következő pénzpiaci modellt: tegyük fel, hogy a piacon négy eszközzel kereskedünk, jelölje ezeket S_1, S_2, S_3, S_4. Továbbá tegyük fel azt is, hogy minden időpontban ugyanaz a négy állapot lehetséges, ezeket jelölje A_1, A_2, A_3, A_4. Legyenek az eszközeink olyanok, hogy

$$S_i(A_j) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

az értékük a különböző állapotokban. Tehát az eszközeink viselkedjenek indikátorokhoz hasonlóan.
Két dolgot kell megvizsgálnunk:

(1) Ez a modell nem redundáns, hiszen egyik eszköz sem helyettesíthető a többivel semelyik állapotban. Ugyanis

$$\sum_{i=1}^{4} S_i(A_j) = 1 \neq 0$$

(2) A modellben négy eszközzel kereskedünk, tehát $d + 1 = 4$. Másrészről pedig minden időpontban négy lehetséges állapot van, akármelyik állapotban voltunk az előző időpontban. Ezért a filtráció feszítési száma $K_t(A_j) = 4$.
Tehát $K_t(A_j) = d + 1 \qquad \forall t = 0, \ldots, T - 1 \quad \forall j = 1, \ldots, 4.$

Tehát a fenti tétel értelmében ez a pénzpiac teljes.

Most térjünk át a biztosítási piacra. Tegyük fel ezért, hogy egyik eszközünk, S_1 egy biztosítási szerződés. Tegyük fel továbbá, hogy erre a biztosítási szerződésre az A_1 állapotban kétféle biztosítási követelés lehet: jelölje a követeléseket Y_1 és Y_2, illetve ezek állapotát $A_{1,1}$ és $A_{1,2}$.
Ekkor jól látható, hogy a filtráció feszítési száma $K_t(A_1) = 5$, holott továbbra is csak négy eszközzel kereskedünk a piacon. Tehát a biztosítási piac nem lesz teljes.

1.2. Deflátorok

Ebben a szakaszban elsősorban [3] és [7] eredményeire támaszkodunk.

1.2.1. A deflátor bevezetése

Ebben a szakaszban bevezetünk egy fogalmat, a deflátort, ami meghatározó jelentőségű lesz az elmélet további részében.
Ehhez először rögzítsük le az $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ valószínűségi mezőt, és legyen $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0,\ldots,T}$

filtráció σ-algebrák egy növekvő sorozata.
Továbbá tegyük fel, hogy van egy $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_T)$ valószínűségi változó sorozatunk – ún. véletlen pénzáram, ahol X_t a t-beli eredmény, – amire a következő feltevéseket tesszük:

(1) az $\mathbf{X}$ folyamat $\mathcal{F}$-adaptált, azaz X_t $\mathcal{F}_t$-mérhető $\forall t$-re;

(2) $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_T) \in \mathcal{L}^2_{T+1}(\mathcal{P})$.

A második feltétel valójában azt fejezi ki, hogy $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_T)$ minden koordinátájában négyzetesen integrálható. Pontosabban az $\mathcal{L}^2_{T+1}(\mathcal{P})$ egy Hilbert-tér, és $\mathbf{X} \in \mathcal{L}^2_{T+1}(\mathcal{P})$ azt jelenti, hogy

$$\mathrm{E}_{\mathcal{P}}\left(\sum_{t=0}^{n} X_t^2\right) < \infty.$$

Ebből már a várható érték linearitásából következik, hogy $\mathbf{X}$ minden koordinátája négyzetesen integrálható.
Ez a feltétel valójában csak egy technikai feltétel, azért van rá szükség, hogy alkalmazni tudjuk majd Riesz reprezentációs tételét. Ehhez definiáljunk még egy skalárszorzatot a kézenfekvő módon: legyenek $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{L}^2_{T+1}(\mathcal{P})$, ekkor

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \mathrm{E}_{\mathcal{P}}\left(\sum_{t=0}^{T} X_t Y_t\right).$$

Szükségünk lesz még valószínűségi vektorváltozó pozitivitásának a fogalmára. Ehhez az alábbi jelöléseket vezetjük be:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad X_k \geq 0 \ \mathcal{P}\text{-m.m. } \forall k\text{-ra}, \\
&\qquad\ \text{és } \exists k \in \{0, \ldots, T\}, \text{ amire } X_k > 0 \text{ pozitív valószínűséggel.} \\
\mathbf{X} \gg 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad X_k > 0 \ \mathcal{P}\text{-m.m. } \forall k\text{-ra.}
\end{aligned}$$

5. Definíció. *Tekintsük a $Q : \mathcal{L}^2_{T+1}(\mathcal{P}) \to \mathbb{R}$ funkcionált. Tegyük fel, hogy Q*

(1) pozitív, azaz ha $\mathbf{X} > 0$, akkor $Q(\mathbf{X}) > 0$;

(2) folytonos, azaz ha $\mathbf{X}^{(k)} \in \mathcal{L}^2_{T+1}(\mathcal{P})$ egy valószínűségi vektorváltozó-sorozat, melyre $\mathbf{X}^{(k)} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{X}$ $\mathcal{L}^2_{T+1}(\mathcal{P})$-ben, akkor $Q(\mathbf{X}^{(k)}) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} Q(\mathbf{X})$;

(3) lineáris, azaz $\forall$ $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{L}^2_{T+1}(\mathcal{P})$ és $a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$Q(a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}) = a \cdot Q(\mathbf{X}) + b \cdot Q(\mathbf{Y}).$$

Ekkor $Q(\mathbf{X})$-et nevezzük az $\mathbf{X}$ pénzáram pénzügyi érték*ének a 0 időpontban.*

3. Állítás. *A pozitivitási és a linearitási feltétel (amikből egyébként már következik a folytonosság) biztosítja az arbitrázsmentességet.*

4. Tétel (Riesz reprezentációs tétele). *Létezik olyan* $\mathbf{M} \in \mathcal{L}^2_{T+1}(\mathcal{P})$*, hogy minden* $\mathbf{X} \in \mathcal{L}^2_{T+1}(\mathcal{P})$ *esetén:*

$$Q(\mathbf{X}) = \langle \mathbf{X}, \mathbf{M} \rangle = \mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^{n} X_t \cdot M_t \right)$$

6. Definíció. *A fenti tételben szereplő* $\mathbf{M}$ *vektort* deflátor*nak nevezzük.*

5. Tétel. *Tegyük fel, hogy az* $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ *piac arbitrázsmentes és teljes. Ekkor egyértelműen létezik az* $\mathbf{M}$ *pozitív,* $\mathcal{F}$*-adaptált standard deflátorfolyamat, azaz*

(1) $\mathbf{M} \gg 0$

(2) $M_t \quad \mathcal{F}_t$*-adaptált,*

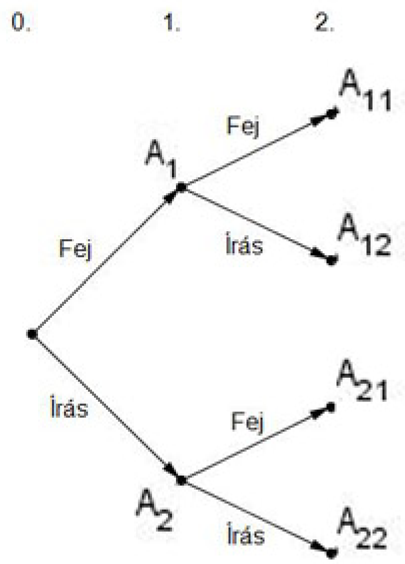
(3) $M_0 \equiv 1$.

Ez utóbbi azt jelenti, hogy a 0 időpontban X_0 determinisztikus értéke mellett Q választható olyannak, hogy $Q\big((X_0, 0 \ldots, 0)\big) = X_0$, vagyis a 0 időpontban a Q funkcionál a névértéket adja.

Az árazás során a megfelelő Q megtalálása helyett elegendő a megfelelő $\mathcal{F}_t$-adaptált $\mathbf{M}$ deflátort megtalálni.

1.2.2. Példa deflátorra

Tekintsük a következő modellt: szabályos érmével dobunk (tehát a fej és az írás valószínűsége egyaránt 1/2), legyen ekkor az eseményfa a következő:



Tehát az állapottér $\Omega = \{A_1, A_2, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}\}$, az időhorizont $T = 2$.

Ekkor $\mathcal{L}_3^2(\mathcal{P}) = \{\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2) \mid \forall t \ \mathtt{E}(X_t^2) < \infty\}$, vagyis $\mathcal{L}_3^2(\mathcal{P})$ Hilbert-tér a következő normával:

$$\mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^{2} X_t^2\right) < \infty$$

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^{2} X_t Y_t\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\|\mathbf{X}\| = \sqrt{\mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^{2} X_t^2\right)}$$

Ekkor Riesz reprezentációs tétele szerint van olyan $\mathbf{M}$ deflátor folyamat, amire tetszőleges $\mathbf{X}$ eszköz ára az alábbi módon számolható:

$$Q(\mathbf{X}) = \langle \mathbf{M}, \mathbf{X} \rangle = \mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^{2} M_t \cdot X_t\right)$$

Ezek után tekintsük azt az $\mathbf{M}$ deflátort, ami a különböző események bekövetkezése mellett az alábbi értékeket veszi fel:

$$\begin{array}{lll} M_0 = 1 & M_1(A_1) = 0,7 & M_2(A_{11}) = 0,7 \\ & M_1(A_2) = 1,2 & M_2(A_{12}) = 0,9 \\ & & M_2(A_{21}) = 1 \\ & & M_2(A_{22}) = 1,3 \end{array}$$

Ekkor a Q árazásra látható, hogy $\mathbf{X} > 0$ esetén nyilván $Q(\mathbf{X}) > 0$, továbbá

$$Q(a \cdot \mathbf{X} + b \cdot \mathbf{Y}) = \mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^{2} M_t \cdot (a\mathbf{X} + b\mathbf{Y})\right) =$$

$$= a \cdot \mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^{2} M_t \cdot X_t\right) + b \cdot \mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^{2} M_t \cdot Y_t\right) = a \cdot Q(\mathbf{X}) + b \cdot Q(\mathbf{Y}).$$

Tehát a Q egy pozitív, lineáris funkcionál. A folytonosság pedig e két tulajdonságból már következik (ld. [7]).

Legyenek most az eszközeink a következők:

$$S^F(0) = S^I(0) = 1$$

$$S^F(t) = \begin{cases} 1 & \text{,ha } F\text{-et dobunk } t\text{-ben} \\ 0 & \text{,ha } I\text{-t dobunk } t\text{-ben} \end{cases}$$

$$S^I(t) = \begin{cases} 1 & \text{,ha } I\text{-t dobunk } t\text{-ben} \\ 0 & \text{,ha } F\text{-et dobunk } t\text{-ben} \end{cases}$$

Az 1.1.4-es Példában láttuk, hogy ezekkel az eszközökkel a piac teljes.

Számítsuk ki ezen eszközök árát:

$$Q(S^F) = \mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^2 M_t S^F(t)\right) = \sum_A p(A) \sum_{t=0}^2 M_t(A) S^F(t|A) =$$
$$= 1 + 1/2 \cdot (0,7 \cdot 1 + 1,2 \cdot 0) + (1/2)^2 \cdot (0,7 \cdot 1 + 0,9 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1,3 \cdot 0) = 1,775$$

$$Q(S^I) = \mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^2 M_t S^I(t)\right) = \sum_A p(A) \sum_{t=0}^2 M_t(A) S^I(t|A) =$$
$$= 1 + 1/2 \cdot (0,7 \cdot 0 + 1,2 \cdot 1) + (1/2)^2 \cdot (0,7 \cdot 0 + 0,9 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1,3 \cdot 1) = 2,15$$

Legyen most általánosan $\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2)$ olyan pénzáram, amire

$$\begin{array}{lll} X_0 = u_0 & X_1(A_1) = u_1 & X_2(A_{11}) = u_{11} \\ & X_1(A_2) = u_2 & X_2(A_{12}) = u_{12} \\ & & X_2(A_{21}) = u_{21} \\ & & X_2(A_{22}) = u_{22} \end{array}$$

Mivel a piac teljes volt, ezért $\mathbf{X}$ helyettesíthető az S^F és S^I eszközökből összeállított portfólióval:

$$X_0 = u_0 \cdot S^F(0)$$

$$X_1 = u_1 \cdot S^F(1) + u_2 \cdot S^I(1)$$

$$X_2 = \left(u_{11} \cdot S^F(2) + u_{12} \cdot S^I(2)\right) \cdot \chi_{(A_1)} + \left(u_{21} \cdot S^F(2) + u_{22} \cdot S^I(2)\right) \cdot \chi_{(A_2)}$$

Számítsuk ki most az $\mathbf{X}$ árát. Először a definíció alapján, azután – ellenőrzés képpen – a replikáló portfólió ára segítségével:

$$Q(\mathbf{X}) = \mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^2 M_t X_t\right) = \sum_A p(A) \sum_{t=0}^2 M_t(A) X_t(A) =$$
$$= u_0 + 1/2 \cdot (0,7 \cdot u_1 + 1,2 \cdot u_2) + (1/2)^2 \cdot (0,7 \cdot u_{11} + 0,9 \cdot u_{12} + 1 \cdot u_{21} + 1,3 \cdot u_{22})$$

$$Q(\mathbf{X}) = Q\Big(u_0 \cdot S^F(0) + u_1 \cdot S^F(1) + u_2 \cdot S^I(1) + \big(u_{11} \cdot S^F(2) + u_{12} \cdot S^I(2)\big) \cdot \chi_{(A_1)} + $$
$$+ \big(u_{21} \cdot S^F(2) + u_{22} \cdot S^I(2)\big) \cdot \chi_{(A_2)}\Big) =$$

$$= \mathtt{E}\Big(M_0 \cdot u_0 \cdot S^F(0) + M_1 \cdot \underbrace{(u_1 \cdot S^F(1) + u_2 \cdot S^I(1))}_{=:S_{\mathbf{X}}(1)} +$$
$$+ M_2 \cdot \Big(\underbrace{\big(u_{11} \cdot S^F(2) + u_{12} \cdot S^I(2)\big) \cdot \chi_{(A_1)}}_{=:S_{\mathbf{X},A_1}(2)} + \underbrace{\big(u_{21} \cdot S^F(2) + u_{22} \cdot S^I(2)\big) \cdot \chi_{(A_2)}}_{=:S_{\mathbf{X},A_2}(2)}\Big)\Big) =$$

$$= 1 \cdot u_0 \cdot 1 + 1/2 \cdot \big(M_1(A_1) \cdot S_{\mathbf{X}}(1|A_1) + M_1(A_2) \cdot S_{\mathbf{X}}(1|A_2)\big) + (1/2)^2 \cdot \Big(M_2(A_{11}) \cdot \big(S_{\mathbf{X},A_1}(2|A_{11}) + S_{\mathbf{X},A_2}(2|A_{11})\big) + M_2(A_{12}) \cdot \big(S_{\mathbf{X},A_1}(2|A_{12}) + S_{\mathbf{X},A_2}(2|A_{12})\big) + M_2(A_{21}) \cdot \big(S_{\mathbf{X},A_1}(2|A_{21}) + S_{\mathbf{X},A_2}(2|A_{21})\big) + M_2(A_{22}) \cdot \big(S_{\mathbf{X},A_1}(2|A_{22}) + S_{\mathbf{X},A_2}(2|A_{22})\big)\Big) =$$

$$= u_0 + 1/2 \cdot (0,7 \cdot u_1 + 1,2 \cdot u_2) + (1/2)^2 \cdot (0,7 \cdot (u_{11} + 0) + 0,9 \cdot (u_{12} + 0) + 1 \cdot (0 + u_{21}) + 1,3 \cdot (0 + u_{22}) =$$

$$= u_0 + 1/2 \cdot (0,7 \cdot u_1 + 1,2 \cdot u_2) + (1/2)^2 \cdot (0,7 \cdot u_{11} + 0,9 \cdot u_{12} + 1 \cdot u_{21} + 1,3 \cdot u_{22})$$

Tehát a replikáló portfólió ára valóban megegyezik az $\mathbf{X}$ pénzáram árával.

Nézzünk most egy speciális esetet: legyen $\mathbf{X} = Z^{(t)}$ a t időpontban lejáró zérókupon kötvény. Erre nyilván $Z^{(t)} = S^F(t) + S^I(t)$.
Konkrétan:

$$Z^{(1)} = S^F(1) + S^I(1) \quad \Rightarrow$$

$$Q(Z^{(1)}) = Q(S^F(1) + S^I(1)) = \sum_A p(A) \cdot (S^F(1|A)) + Q(S^I(1|A)) \cdot M_1(A) =$$

$$= 1/2 \cdot 1 \cdot M_1(A_1) + 1/2 \cdot 1 \cdot M_1(A_2) = \sum_A p(A) \cdot M_1(A) = \mathtt{E}(M_1)$$

$$Z^{(2)} = S^F(2) + S^I(2) \quad \Rightarrow$$

$$Q(Z^{(2)}) = Q(S^F(2) + S^I(2)) = \sum_A p(A) \cdot (S^F(2|A)) + Q(S^I(2|A)) \cdot M_2(A) =$$

$$= 1/4 \cdot 1 \cdot M_2(A_{11}) + 1/4 \cdot 1 \cdot M_2(A_{12}) + 1/4 \cdot 1 \cdot M_2(A_{21}) + 1/4 \cdot 1 \cdot M_2(A_{22}) =$$

$$= \sum_A p(A) \cdot M_2(A) = \mathtt{E}(M_2)$$

Azt kaptuk végül, hogy a deflátor t időpontbeli várható értéke éppen a t-ben lejáró zérókupon kötvény árával egyenlő.

1.2.3. A deflátor későbbi időpontokban

Eddig az $\mathbf{X}$ pénzáramnak csak a 0 időpontbeli pénzügyi értékével foglalkoztunk. Definiáljuk most az $\mathbf{X}$ árfolyamatát minden $t = 0, \dots, T$-re.

7. Definíció. *Legyen* $\mathbf{X} \in \mathcal{L}^2_{T+1}(\mathcal{P})$. *Az* $\mathbf{X}$ *pénzáram* pénzügyi értéke *a t időpontban a következő:*

$$Q_t(\mathbf{X}) := Q(\mathbf{X}|\mathcal{F}_t) = \frac{1}{M_t} \cdot \mathtt{E}\left(\sum_{k=0}^{T} M_k \cdot \mathbf{X}_k \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

Ez az érték természetesen sztochasztikus a 0-ból nézve, hiszen függ $\mathcal{F}_t$-től.

8. Definíció. *Most tegyük fel, hogy egy biztosítási szerződésünk van, amit az* $\mathbf{X}$ *sztochasztikus pénzáram reprezentál.*
Jelölje $k \leq n$*-re* $\mathbf{X}_{(k)} = (0, \dots, 0, X_k, \dots, X_T)$ *a* $k-1$ *időpont után* hátralevő pénzáram*ot. Ez reprezentálja azt az összeget, amire* $k-1$*-ben tartalékot kell képeznünk, hogy ki tudjuk elégíteni a biztosítási követeléseket.*
Továbbá a $t \leq k-1$ *időpontban így definiáljuk a* tartalék*ot:*

$$R_k^{(t)} = Q(\mathbf{X}_{(k)}|\mathcal{F}_t) = Q_t(\mathbf{X}_{(k)})$$

Tehát $R_k^{(t)}$ *megfelel az* $\mathbf{X}_{(k)}$ *pénzáram feltételes várható pénzügyi értékének a t-ből nézve.*

6. Tétel. *Teljesül a következő rekurzió:*

$$M_{t-1} \cdot R_t^{(t-1)} = \mathtt{E}\left(M_t \cdot \left(R_{t+1}^{(t)} + X_t \right) \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right)$$

1. Lemma. *A deflátorral módosított árfolyamat, azaz* $\left(M_t \cdot Q_t(\mathbf{X})\right)_{t=0,\dots,T}$ *egy* $\mathcal{F}_t$*-martingál a* $\mathcal{P}$*-re nézve.*

7. Tétel. *A martingál-tulajdonságból azonnal következik, hogy*

$$Q_t(\mathbf{X}) = \frac{1}{M_t} \cdot \mathtt{E}\left(M_{t+1} \cdot Q_{t+1}(\mathbf{X}) \middle| \mathcal{F}_t \right) = \mathtt{E}\left(\frac{M_{t+1}}{M_t} \cdot Q_{t+1}(\mathbf{X}) \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

1.2.4. Deflátorok a pénzügyi és a biztosítási piacon

Térjünk most vissza kezdeti modelljeinkhez. Tekintsük tehát az $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ valószínűségi mezőt, és rajta először az $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ pénzpiacot. Feleltessük meg a piacon definiált, illetve a deflátor esetén használt pénzáramainkat a következőképpen:

- az $\mathbf{X}$ pénzáramot feleltessük meg a $\mathbf{D}_j$ jutalék-kifizetés folyamattal, hogy

$$D_{j,t} \leftrightsquigarrow X_{t-1},$$

- ekkor az $R_t^{(t-1)}$ megfelel a $q_{j,t}$ árfolyamatnak.

(Itt $\mathbf{X}$ és $\mathbf{D}_j$ indexe azért tér el eggyel, mert az $\mathbf{X}$ a periódus végi pénzáramot jelöli, míg $\mathbf{D}_j$ a következő periódus elején kifizetett, de az előző periódusra vonatkozó pénzáramot.)
Ezek alapján teljesül a következő:

8. Tétel. *Az $\underline{M} = (M_t)_{t=0,\ldots,T}$ $\mathcal{F}$-adaptált folyamat pontosan akkor deflátora az $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ piacnak, ha*

$$M_t q_{j,t} = \mathtt{E}\Big(M_{t+1}(q_{j,t+1} + D_{j,t+1})\Big|\mathcal{F}_t\Big) \tag{1.1}$$

$\forall j = 1, \ldots, L$ és $\forall t = 0, \ldots, T-1$ esetén.

2. Lemma. *Az $\mathbf{M}$ folyamat pontosan akkor deflátor, ha*

$$\mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^{T} M_t D_{\varphi,t}\right) = 0 \qquad \forall\varphi \text{ stratégiára.}$$

Megfordítva, a $\mathbf{D}$ folyamat pontosan akkor jutalékfolyamat(a egy stratégiának), ha

$$\mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^{T} M_t D_t\right) = 0 \qquad \forall\mathbf{M} \text{ deflátorra.}$$

Azaz a deflátor és a jutalék-folyamat duálisok (a skalárszorzatra vonatkozóan).

1. Feltevés. *A továbbiakban feltesszük, hogy az $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ pénzpiac mindig arbitrázsmentes és teljes. Ekkor korábbiak szerint létezik egy egyértelmű, pozitív, standard deflátorfolyamat.*

Térjünk most rá az $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P})$ fölötti $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ biztosítási piacra. (Emlékeztetünk rá, hogy $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$, és $\mathcal{G}$ véges filtráció az 1.1.2. szakaszban tett feltevéseink szerint.) Legyen $\mathbf{Y}$ egy $\mathcal{F}_{t+1}$-mérhető valószínűségi változó, és tekintsük az $\mathtt{E}\big(\mathbf{Y}\big|\mathcal{F}_t\big)$ feltételes várható értéket. Ez intuitíve azokat a pénzügyi információkat jelenti, amit $\mathbf{Y}$-ból t-ben ismerünk.
Azt szeretnénk, hogy a biztosítási eseményekről szóló tudásunk t-ben semmilyen információt ne hordozzon a $t+1$-beli pénzügyi eseményekről. (Ez a valóságban persze nincs így, a t-beli biztosítási megrázkódtatások befolyásolják a $t+1$-beli pénzpiaci eseményeket. Ezért úgy értjük, hogy az ilyen eseményeket már $\mathcal{F}_t$ is tartalmazza.)
Ezért a következő feltevést tesszük:

2. Feltevés. *Legyen $\mathbf{Y}$ egy $\mathcal{F}_{t+1}$-mérhető valószínűségi változó. Ekkor minden $t = 0, \ldots, T-1$ esetén feltesszük, hogy:*

$$\mathtt{E}\big(\mathbf{Y}\big|\mathcal{F}_t\big) = \mathtt{E}\big(\mathbf{Y}\big|\mathcal{G}_t\big)$$

A feltevés magában foglalja, hogy minden $\mathcal{F}_{t+\tau,\ \tau\geq 1}$-mérhető $\mathbf{Y}$ valószínűségi változóra is $\mathtt{E}\big(\mathbf{Y}\big|\mathcal{F}_t\big) = \mathtt{E}\big(\mathbf{Y}\big|\mathcal{G}_t\big)$.

9. Tétel. *A tett feltevések mellett az $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ piac is arbitrázsmentes, és az M a $\mathcal{G}_t$-re nézve is deflátor lesz, azaz*

$$M_t q_{j,t} = \mathtt{E}\Big(M_{t+1}(q_{j,t+1} + D_{j,t+1})\Big|\mathcal{G}_t\Big) \tag{1.2}$$

$\forall j = 1, \ldots, L$ és $\forall t = 0, \ldots, T-1$ esetén.

Láttuk tehát, hogy ha az $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ piac arbitrázsmentes és teljes, akkor a tett feltevések mellett az $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ piac is arbitrázsmentes. Azonban az 1.1.4. szakaszból tudjuk, hogy az $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ piac (általában) nem teljes.
Nem teljes piacokon pedig nincs egyértelmű ekvivalens martingálmérték sem, ezért végtelen sok $\mathcal{G}$-adaptált deflátorfolyamat létezik. Hogy ezek közül hogyan érdemes választani, ahhoz valamilyen közgazdasági modellre lesz szükságünk: például a utility-elméletre.

1.3. Elvárt hasznosság elmélet

Legyen $\mathbf{c} = (c_t)_{t=0,\ldots,T}$ ún. *fogyasztási folyamat.* A gyakorlatban $\mathbf{c}$ megegyezik a jutalékfolyamattal, amit a vállalat a részvényeseknek fizet.
A vállalat azért kereskedik a piacon, hogy elérje azt az optimális portfólió befektetési stratégiát, ami a lehető legjobban fedezi a részvényesek kockázatát. Ezt determinálja a profit maximalizálása, bizonyos befektetési kényszerek mellett.

Célunk tehát az elvárt, diszkontált hasznosság-függvényt maximalizálni a fogyasztási folyamat szerint. Mi az alábbi elvárt hasznosság-függvényt használjuk:

$$U(\mathbf{c}) = \mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^{T} u_{\rho,\gamma}\right) = \mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^{T} e^{-\rho t} u(c_t)\right) = \mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^{T} e^{-\rho t}\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) \tag{1.3}$$

ahol $\mathbf{c} > 0$, a $\gamma > 0$ a befektető *kockázatkerülése*, $\rho > 0$ pedig a *türelmetlensége.*

Meg kell jegyezni, hogy a fenti eset az ún. *erő-hasznossági függvényt*, $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$-t használja, ami az ún. *konstans relatív kockázatkerülés (CRRA)* hasznosságát adja meg.
Másik lehetőség az *exponenciális hasznossági függvény* lenne, ami az ún. *konstans abszolút kockázatkerülés (CARA)* hasznosságát adná.
Az előbbivel nehezebb számolni, utóbbi a multiplicitása miatt népszerű. De az exponenciális eset – legalábbis ma ez tűnik általánosan elfogadottnak – nem megfelelően írja le a befektető magatartását.

Ebben a szakaszban felírjuk a pénzügyi és biztosítási piac esetén a megfelelő fogyasztási folyamatokat, és ezek mentén maximalizáljuk az $U(\mathbf{c})$ elvárt hasznosságfüggvényt. Azt a $\mathbf{c}$ folyamatot, amire $U(\mathbf{c})$ maximális lesz, *optimális fogyasztási folyamat*nak nevezzük.
Ezek után a fő feladatunk az optimális fogyasztási folyamat meghatározása.

1.3.1. A tőkepiaci modell: maximális elvárt hasznosság és optimális fogyasztás

Tekintsünk egy pénzügyi vállalatot, és tegyük fel, hogy adott a vállalatnak egy $\mathcal{F}$-adaptált exogén folyamata, egy ún. $\mathbf{w} = (w_t)_{t=0,\ldots,T}$ *járadékfolyamat*. Ezt a vállalat eszközökbe fekteti a piacon, majd a befektetések eredményét költi el a saját fogyasztására.
Azaz ha $\mathbf{w}$ a járadékfolyamat, és φ egy kereskedési stratégia, akkor a vállalat *fogyasztási folyamat*át az alábbi módon definiáljuk:

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{w}, \varphi) = \mathbf{c}(0, 0, \mathbf{w}, \varphi) := \mathbf{w} + \mathbf{D}_\varphi.$$

Megjegyezzük, hogy mivel $x_{j,T} = 0$, vagyis az utolsó időpontban minden eszközt eladunk, ezért az utolsó fogyasztás megegyezik a végső vagyonnal.

Adott $\mathbf{w}$ járadékfolyamat mellett a *hasznosság-maximalizációs feladat* tehát nem más, mint maximalizálni az elérhető hasznosságot a $\mathbf{c}(0, 0, \mathbf{w}, \varphi) = \mathbf{w} + \mathbf{D}_\varphi > 0$ fogyasztási folyamat mellett. Konkrétan:

$$U^{\max}\big(\mathbf{w}\big) := \max_\varphi U\big(\mathbf{c}(0, 0, \mathbf{w}, \varphi)\big) = \max_\varphi U\big(\mathbf{w} + \mathbf{D}_\varphi\big) \tag{1.4}$$

Mivel feltettük, hogy az $\mathcal{F}$ filtráció véges, ebből azonnal következik, hogy ez a maximum létezik.

4. Állítás. *Az $U^{\max}\big(\mathbf{w}\big)$ szigorúan növő, konkáv függvény.*

Az állítás miatt a maximális hasznosság elérhetősége, pontosabban az optimális fogyasztási folyamat létezése csak az *időközi vagyon*tól (W) függ, amit a járadékfolyamatból kaphatunk a következőképpen:

$$W = \mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^{T} M_t w_t\right),$$

ahol az $\mathbf{M} = (M_t)_{t=0,\ldots,T}$ deflátorfolyamat az $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ pénzpiac teljessége miatt egyértelműen létezik.

10. Tétel. *Legyen* $\mathbf{w}$ *egy* $\mathcal{F}$*-adaptált járadékfolyamat az* $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ *piacon (amiről ismét hangsúlyozzuk, hogy teljes). Tegyük fel, hogy a hozzá tartozó időközi érték: W pozitív. Ekkor egyértelműen létezik olyan* $\mathcal{F}$*-adaptált* $\mathbf{c}(0, 0, \mathbf{w}, \varphi)$ *fogyasztási folyamat, ami maximalizálja (1.4)-et.*
Ezt a $\mathbf{c}$*-t az* elsőrendű feltétel *meghatározza:*

$$c_t = c_0 e^{-\frac{\rho t}{\gamma}} M_t^{-\frac{1}{\gamma}} \tag{1.5}$$

Így tehát az optimális fogyasztási folyamat explicite számolható, és csak $\mathbf{M}$-től függ.

1.3.2. A biztosítási piaci modell

Most tekintsünk egy biztosítási vállalatot. Ennek – az általános pénzügyi vállalatnál leírtakon kívül – van egy $\mathbf{Y} = (0, Y_1, \dots, Y_T)$ kárkifizetés-folyamata, és ennek a kompenzálására egy $\mathbf{\Pi} = (\Pi_t)_{t=0,\dots,T}$ *díjáram*a. Ekkor a *módosított fogyasztási folyamat*ot az alábbi módon definiáljuk:

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{\Pi}, \mathbf{Y}, \mathbf{w}, \mathbf{D}_\varphi) = \mathbf{w} + \mathbf{\Pi} + \mathbf{D}_\varphi - \mathbf{Y}$$

Itt a tagokat csoportosítva kapjuk, a $\mathbf{w} \mapsto \widetilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} + \mathbf{\Pi} - \mathbf{Y}$ jelölés mellett, az ún. *biztosítási folyamat*ot, amivel

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(\widetilde{\mathbf{w}}, \varphi) = \mathbf{c}(0, 0, \widetilde{\mathbf{w}}, \varphi) := \widetilde{\mathbf{w}} + \mathbf{D}_\varphi.$$

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy mivel az $\mathbf{Y}$ és a $\mathbf{\Pi}$ folyamatok is $\mathcal{G}$-adaptáltak, így $\widetilde{\mathbf{w}}$ is az. Másrészről viszont olyan $\mathcal{G}$-adaptált φ stratégiát választunk, hogy az ár- és a jutalékfolyamat továbbra is $\mathcal{F}$-adaptált maradjon.

A következő két szakaszban a biztosítási piaci modell egy-egy speciális esetét vizsgáljuk meg közelebbről.

1.3.3. Az egyszeri piac-alapú biztosítási díj

Egy $\mathcal{G}$-adaptált φ stratégia és $\mathbf{\Pi}_0$ egyszeri díj a következő $\mathbf{c}(\mathbf{\Pi}_0, \mathbf{Y}, \mathbf{w}, \varphi)$ *fogyasztási folyamat*ot generálja:

$$\begin{aligned} c_0 &= w_0 + D_{\varphi,0} + \pi_0 \\ c_t &= w_t + D_{\varphi,t} - Y_t \quad (t \geq 1) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Mivel azonban a CRRA hasznossági függvényt csak pozitív c_t-k esetén értelmeztük, ezért olyan biztosítási díjat kell megkövetelnünk, ami pozitív fogyasztási folyamatot generál. (Ez éppen azt jelenti, hogy eltekintünk a csőd lehetőségétől.)

Ezt úgy érjük el, hogy a hasznosságot egy *költségvetési kényszer* mellett maximalizáljuk:

$$B(\mathbf{w} + \mathbf{\Pi}_0 - \mathbf{Y}) = \{\mathbf{c} \text{ teljesíti (1.6)-ot, és } \forall c_t > 0\},$$

ekkor

$$U^{\max}(\mathbf{w} + \mathbf{\Pi}_0 - \mathbf{Y}) = \max_{\mathbf{c} \in B(\mathbf{w}+\mathbf{\Pi}_0-\mathbf{Y})} U(\mathbf{c}).$$

(Ehhez persze szükséges, hogy $B(\mathbf{w} + \mathbf{\Pi}_0 - \mathbf{Y})$ ne legyen üres halmaz.)

Most ismét egy kis kitérőt teszünk. Egy fontos fogalmat definiálunk, aminek jelentős szerepe lesz abban, hogy az optimális fogyasztási folyamatot ki tudjuk majd számolni.

9. Definíció. *Tetszőleges* $\mathbf{Z} = (Z_t)_{t=0,\dots,T}$ $\mathcal{G}$*-adaptált folyamat esetén legyen a* felső fedezeti ár *az a legkisebb szám,* $\mathbf{Z}^u$*, amire létezik olyan* φ *stratégia, hogy*

$$\begin{aligned} &\mathbf{Z}^u + D_{\varphi,0} = 0 \\ &D_{\varphi,t} - Z_t \geq 0 \quad (t = 0, \dots, T) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Ekkor a φ *stratégiát* szuper-replikáló*nak hívjuk;* (Z_t) *pedig* replikálható*, ha létezik olyan* φ *stratégia, amire* $D_{\varphi,t} - Z_t \geq 0 \quad \forall t$*.*

A felső fedezeti ár tehát tulajdonképpen nem más, mint a minimális ára az olyan stratégiáknak, amik fedezik a Z_t-nél magasabb veszteségeket.

2. Megjegyzés. *Nemteljes piacon csak szuper-replikáló stratégiáról beszélhetünk. Azonban ha a piac teljes volna, akkor* $D_{\varphi,t} = Y_t$ *miatt találhatnánk replikáló stratégiát.*

Most nézzük, hogyan lehet kiszámítani a felső fedezeti árat:

5. Állítás. *A* $\mathbf{Z}$ $\mathcal{G}$*-adaptált folyamat felső fedezeti árát így kaphatjuk:*

$$Z^u = \max \mathtt{E}\left(\sum_{t=1}^{T} M_t Z_t\right),$$

ahol a maximalizálást az $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ *piac összes pozitív standard* M *deflátor-folyamatára végezzük.*

2. Következmény. *Emlékeztetünk rá, hogy a járadékfolyamat időközi értéke:*

$$W = \mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^{T} M_t w_t\right)$$

Ezért, ha a $\mathbf{w}$ *járadékfolyamat replikálható, akkor*

$$(\mathbf{Z} - \mathbf{w})^u = \mathbf{Z}^u - \mathtt{E}\left(\sum_{t=1}^{T} M_t w_t\right) = \mathbf{Z}^u - W.$$

Térjünk most vissza az elvárt hasznosság-maximalizációs feladathoz.

6. Állítás. *A maximális elvárt hasznosság,* $U^{\max}(\mathbf{w} + \mathbf{\Pi}_0 - \mathbf{Y})$*, pontosan akkor meghatározott, ha*

$$\pi_0 > \mathbf{Y}^u - W.$$

És ekkor a következők teljesülnek: Ha $\gamma > 1$*, akkor*

$$\infty = \lim_{\pi_0 \to \mathbf{Y}^u - W} (1-\gamma) U^{\max}(\mathbf{w} + \mathbf{\Pi}_0 - \mathbf{Y}) > \lim_{\pi_0 \to \infty} (1-\gamma) U^{\max}(\mathbf{w} + \mathbf{\Pi}_0 - \mathbf{Y}) = 0.$$

Ha $\gamma < 1$ *és* $\mathbf{Y}$ *nem replikálható, akkor*

$$0 < \lim_{\pi_0 \to \mathbf{Y}^u - W} U^{\max}(\mathbf{w} + \mathbf{\Pi}_0 - \mathbf{Y}) < \lim_{\pi_0 \to \infty} U^{\max}(\mathbf{w} + \mathbf{\Pi}_0 - \mathbf{Y}) = \infty.$$

10. Definíció. *Rögzítsünk le egy* $\mathcal{G}$*-adaptált* $\mathbf{w}$ *járadékfolyamatot. Ekkor a* $\mathcal{G}_0$*-mérhető* $\mathbf{\Pi}_0$ *egyszeri biztosítási díjat az* $\mathbf{Y}$ *kárkifizetés-folyamat* piac-alapú díj*ának nevezzük, ha*

$$U^{\max}(\mathbf{w} + \mathbf{\Pi}_0 - \mathbf{Y}) = U^{\max}(\mathbf{w}). \tag{1.8}$$

A definíció látszólag visszaadja a hasznosságközömbös díj elvét. Azonban vigyázat! Most nem a hasznosságfüggvények, hanem az optimális kereskedéssel elérhető maximális hasznosságok egyenlőségét tesszük fel.

11. Tétel. *A piac-alapú egyszeri díj,* $\mathbf{\Pi}_0$*, pontosan akkor létezik, ha*

vagy $\gamma < 1$ *és* $\lim_{\pi_0 \to \mathbf{Y}^u - W} U^{\max}(\mathbf{w} + \mathbf{\Pi}_0 - \mathbf{Y}) < U^{\max}(\mathbf{w})$*,*

vagy $\gamma > 1$*.*

Továbbá ha $\mathbf{\Pi}_0$ *létezik, akkor egyértelmű, és az* $\mathbf{Y}$ *kárkifizetés konvex függvénye, amire*

$$\mathbf{Y}^u - W < \pi_0 < \mathbf{Y}^u.$$

Továbbá ha $\mathbf{Y}^{(1)} \le \mathbf{Y}^{(2)}$ *m.m., akkor* $\pi_0(\mathbf{Y}^{(1)}) \le \pi_0(\mathbf{Y}^{(2)})$*.*

3. Megjegyzés. *A* $\gamma > 1$ *esetben a hasznosság mindig negatív az* $(1-\gamma)^{-1}$ *faktornak köszönhetően, továbbá ha* $W \to 0$*, akkor ez tart* $-\infty$*-hez.*
A $\gamma < 1$ *esetben a hasznosság mindig pozitív, és ha a piac teljes, és* $W \to 0$*, akkor a fogyasztás minden szinten konvergál* 0*-hoz.*
Nemteljes piac esetén ez csak akkor teljesül, ha a kárkifizetés-folyamat tökéletesen fedezhető. Máskülönben mindig vannak olyan állapotok, amikor $\mathbf{Y}$ *nem lehet replikálható.*

1.3.4. Az évenkénti piac-alapú biztosítási díj

Egy $\mathcal{G}$-adaptált φ stratégia és $\mathbf{\Pi}_{\text{évi}}$ évenkénti díj a következő $\mathbf{c}(\mathbf{\Pi}_{\text{évi}}, \mathbf{Y}, \mathbf{w}, \varphi)$ *fogyasztási folyamat*ot generálja:

$$\begin{aligned} c_0 &= w_0 + D_{\varphi,0} \\ c_t &= w_t + D_{\varphi,t} + \pi_{\text{évi}} - Y_t \quad (t \geq 1) \end{aligned} \tag{1.9}$$

11. Definíció. *Rögzítsünk le egy $\mathcal{G}$-adaptált $\mathbf{w}$ járadékfolyamatot. Ekkor a $\mathcal{G}_0$-mérhető $\mathbf{\Pi}_{\text{évi}}$ évenkénti biztosítási díjat az $\mathbf{Y}$ kárkifizetés-folyamat* piac-alapú díj*ának nevezzük, ha*

$$U^{\max}(\mathbf{w} + \mathbf{\Pi}_{\text{évi}} - \mathbf{Y}) = U^{\max}(\mathbf{w}). \tag{1.10}$$

Látható, hogy formailag ugyanazt kaptuk, mint az egyszeri biztosítási díj esetében. Nézzük meg, milyen egyéb kapcsolat van még az egyszeri és az éves díj között:

7. Állítás. *Ismét tegyük fel, hogy az $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ pénzpiac teljes. Ekkor*

$$\pi_0 = \pi_{\text{évi}} \cdot \sum_{t=1}^{T} \mathtt{E}(M_t).$$

Az állítás matematikai szempontból igaz, hiszen teljes piacon kockázatsemleges kötvények segítségével tökéletesen át tudjuk vinni a tőkét a különböző időperiódusok között.
A valóságban ez úgy valósulna meg, hogy egy harmadik féltől kölcsönvehetjük a jövőbeli díjnak megfelelő összeget, amíg az esedékes nem lesz. Csakhogy ez nem realisztikus, a gyakorlatban vannak kölcsönzési korlátozások. Megtehetjük viszont, hogy ezeket a korlátozásokat, mint feltételeket, beépítjük a maximalizálási eljárásba. Erre egy későbbi szakaszban még visszatérünk.

1.3.5. Kockázatsemleges és kockázati díj, arbitrázsmentesség

Ha $\mathbf{Y}$ egy $\mathcal{F}$-adaptált pénzáram volna, akkor az Y jutalékfolyamatú eszköz ára így kapható:

$$\mathtt{E}\left(\sum_{t=1}^{T} M_t Y_t\right),$$

a (Π_t) díjáram diszkontált érte pedig így:

$$\mathtt{E}\left(\sum_{t=1}^{T} M_t \Pi_t\right).$$

Ezt az értéket akkor nevezzük a *„fair" ár*nak, ha

$$\mathtt{E}\left(\sum_{t=1}^{T} M_t \Pi_t\right) = \mathtt{E}\left(\sum_{t=1}^{T} M_t Y_t\right)$$

Most azonban $\mathbf{Y}$ $\mathcal{G}$-adaptált, így a fentit nem tekintjük továbbá az egyértelmű „fair" árnak, hanem a *kockázatmentes „fair" ár*nak hívjuk.
Így tehát a piac-alapú ár = kockázatsemleges biztosítási díj.

De ha a vállalat kockázatkerülő ($\gamma > 0$), akkor további *kockázati díj*at vár el:

Minden $\mathcal{G}$-adaptált $\mathbf{\Pi}$ díjáramra, amire $U^{\max}(\mathbf{w} + \mathbf{\Pi} - \mathbf{Y}) \geq U^{\max}(\mathbf{w})$ teljesül, igaz a következő:

$$\mathtt{E}\left(\sum_{t=1}^{T} \Pi_t M_t\right) \geq \mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^{T} Y_t M_t\right)$$

Azaz a kockázatkerülő esetben az elvárt biztosítási díj nagyobb, mint az $\mathbf{Y}$ várható diszkont értéke. (Ez a kockázati díj függ a kockázatkerülés mértékétől (γ), és más gazdasági paraméterektől.)

1. Példa. *A π_0 statikus díjra:* $\pi_0 \geq \mathtt{E}\Big(\sum_{t=0}^{T} Y_t M_t\Big)$.

Tekintsünk most egy biztosítótársaságot, amit a hasznosságfüggvénye és a járadékfolyamata karakterizál. A vállalat biztosítási szerződéseket ad el $\mathcal{G}$-adaptált $\mathbf{Y} = (Y_t)$ kárkifizetési-folyamatokra, és a szerződésenkénti árra van egy $\pi_0(\mathbf{Y})$ díjelőírása.
A *piaci konzisztencia* azt jelenti, hogy nincs arbitrázslehetőség a közös pénzügyi és biztosítási piacon.

3. Lemma. *Tegyük fel, hogy a $\pi_0(.)$ díjelőírás kielégíti a $\pi_0(\mathbf{Y}) \geq \mathtt{E}\Big[\sum_{t=0}^{T} M_t Y_t\Big]$ egyenlőtlenséget minden $\mathbf{Y}$ kárkifizetés folyamatra. Ekkor a közös pénzügyi és biztosítási piac együttesen arbitrázsmentes.*

12. Definíció. *A $\pi_0(.)$ elvárt díj* piac-kozisztens, *ha*

(1) $\forall\ \mathbf{Y} = (Y_t)$ folyamatra $\mathbf{Y}^u > \pi_0(\mathbf{Y}) \geq \mathtt{E}\Big[\sum_{t=1}^{T} M_t Y_t\Big]$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\mathbf{Y}$ replikálható;

(2) minden replikálható $\mathbf{Z}$ folyamatra és tetszőleges $\mathbf{Y}$ folyamatra

$$\pi_0(\mathbf{Y} + \mathbf{Z}) = \pi_0(\mathbf{Y}) + \pi_0(\mathbf{Z}).$$

1.3.6. Optimális fogyasztási folyamat nemteljes piacokon

Láttuk tehát az 1.3.3. és 1.3.4. szakaszokban, hogy ha az elvárt hasznosság maximalizációs feladat megoldható, azaz létezik optimális fogyasztási folyamat, továbbá teljesül (1.8) illetve (1.10), akkor létezik a piac-alapú biztosítási díj.
Most tehát az a célunk, hogy $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$-n keressünk ilyen optimális fogyasztási folyamatot, ami maximalizálja az elvárt hasznosságot.

Legyen φ egy $\mathcal{G}$-adaptált kereskedési stratégia. (Az ár- és jutalékfolyamatok továbbra is $\mathcal{F}$-adaptáltak!) Továbbá legyen X_t a *pénzügyi tőke* t-ben:

$$X_t = \sum_{j=1}^{L} (D_{j,t} + q_{j,t}) x_{j,t-1}$$

Vezessünk be egy új filtrációt. Legyen $\mathcal{H}_0 = \mathcal{F}_0$, és $\mathcal{H}_t = \sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{G}_{t-1})$. Azaz $\mathcal{H}_t$ az $\mathcal{F}_t$ és $\mathcal{G}_{t-1}$ által generált, ún. *fedezhető filtráció.*
(Pontosabban minden $\mathcal{H}_t$-mérhető kifizetés replikálható egy $\mathcal{G}_{t-1}$-mérhető befektetéssel a $t-1$ időpontban.)

4. Lemma. *A pénzügyi tőke, X_t, $\mathcal{H}_t$-mérhető, és minden $\mathcal{H}_t$-adaptált X_t folyamathoz létezik olyan $\mathcal{G}$-adaptált φ stratégia, hogy X_t pénzügyi tőke folyamat.*
Ekkor a megfelelő jutalékfolyamat kielégíti a következőt:

$$D_{\varphi,t} = \sum_{j=1}^{L} (D_{j,t} + q_{j,t}) x_{j,t-1} - \sum_{j=1}^{L} q_{j,t} x_{j,t} = X_t - \mathtt{E}\left(\frac{M_{t+1}}{M_t} X_{t+1} \middle| \mathcal{G}_t \right).$$

Így már ki tudjuk számítani explicite a felső fedezeti árat:

5. Lemma. *Vezessük be a következő induktív definíciót:*

$$\begin{aligned} Y_{T+1}^{\sup} &= 0 \\ Y_t^{\sup} &= \operatorname{ess\,sup} \Big[Y_t + M_t^{-1} \mathtt{E}\big[Y_{t+1}^{\sup} M_{t+1} \big| \mathcal{G}_t \big] \Big| \mathcal{H}_t \Big] \quad (t \le T) \end{aligned}$$

Ekkor $\mathbf{Y}^u = Y_0^{\sup}$ a felső fedezeti ár.

Még egy fontos segédtételt kell tennünk, mielőtt kimondjuk a szakasz legfontosabb tételét, analógiában a 10.Tétel eredményével.
Ott ha a hasznosságot maximalizáló optimális fogyasztási folyamat nem lett volna szigorúan pozitív, akkor határmegoldásunk van, és az optimális fogyasztási folyamat nem elégítené ki az elsőrendű feltételt.
Pozitív járadékfolyamat mellett tudjuk, hogy a $\max \mathtt{E}\Big[\sum_{t=0}^{T} u(c_t) \Big]$ hasznosság-maximalizációs problémának akkor van egyértelmű, pozitív optimális megoldása, ha az u hasznosság-függvény kielégíti az *Inada-feltételt* a 0-ban:

$$\lim_{c \searrow 0} u'(c) = \infty$$

Nyilván az általunk használt $u = (1-\gamma)^{-1}c^{1-\gamma}$ kielégíti az Inada-feltételt.

6. Lemma. *Létezik olyan $\mathcal{G}$-adaptált $\mathbf{x}$ stratégia, hogy a $\mathbf{c}(\mathbf{w}, \mathbf{x})$ fogyasztási folyamat pontosan akkor pozitív, ha $w_0 > (-\mathbf{w})^u$.*

Most a lemma feltétele teljesül, ha a járadékfolyamat pozitív, ugyanis

$$\mathbf{c}(\mathbf{w}, \varphi + \psi) = \mathbf{c}(\mathbf{w} + \mathbf{D}_\varphi, \psi).$$

12. Tétel. *Tegyük fel, hogy $w_0 > (-\mathbf{w})^u$. Ekkor létezik egyértelmű, $\mathcal{G}$-adaptált, pozitív, optimális fogyasztási folyamat:*

$$c_t = w_t + D_{\varphi,t} = w_t + X_t - \mathtt{E}\left(\frac{M_{t+1}}{M_t}X_{t+1}\middle|\mathcal{G}_t\right) > 0$$

ami maximalizálja $U(\mathbf{c})$-t az $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ piacon.
Ezt a folyamatot az elsőrendű feltétel *meghatározza:*

$$e^{-\rho}\mathtt{E}\Big[c_t^{-\gamma}M_t^{-1}\Big|\mathcal{H}_t\Big] = c_{t-1}^{-\gamma}M_{t-1}^{-1}$$

Látható tehát, hogy az elsőrendű feltétel miatt az $(e^{-\rho t}c_t^{-\gamma}M_t^{-1})_{t=0,\dots,T}$ egy *martingál.*

Emlékezzünk rá, hogy a teljes pénzpiac esetében (a 10.Tételben) a marginális hasznosság $e^{-\rho t}c_t^{-\gamma}$ volt, ami az ottani elsőrendű feltétel szerint egyenlő az M_t-vel.
Most azonban, mivel a piac nem teljes, a befektető nem tudja elérni ezt az azonosságot, hiszen a fogyasztási folyamat nem $\mathcal{F}$-adaptált, míg $\mathbf{M}$ igen.
Viszont a befektető tökéletesen meg tud ismételni bármely eseményt a $\mathcal{H}$ fedezeti filtrációban. Így a marginális hasznosságot tetszőlegesen közel tudja vinni M_t-hez.

Az előző tétel elsőrendű feltételének alkalmazásával igazolható:

13. Tétel.

$$\lim_{\gamma\to\infty} \pi_0 = \mathbf{Y}^u$$

Most már csak egy kérdés van: hogyan lehet ezt az elméletet implementálni a gyakorlatba? Ezzel foglalkozunk a következő két szakaszban.

1.4. Induktív struktúra

A teljes piac esetében az $\mathcal{F}$-adaptált $\mathbf{w}$ járadékfolyamathoz tartozó optimális $\mathcal{F}$-adaptált fogyasztási folyamatot explicite megkaphatjuk a 10.Tételből.

A nemteljes piac esetében egyrészt az $\mathcal{F}$-adaptált $\mathbf{w}$ járadékfolyamatot áttranszformáltuk egy $\widetilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} + \mathbf{\Pi} - \mathbf{Y}$ $\mathcal{G}$-adaptált biztosítási folyamattá, másrészt a $\mathcal{G}$ információi szerint választottunk φ stratégiát.
Így a nemteljes $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ piacon kerestünk optimális fogyasztási folyamatot (miközben $\mathbf{w}$ és az eszközök továbbra is $\mathcal{F}$-adaptáltak maradtak).

A következőkben egy induktív struktúrát adunk meg, aminek a segítségével a nemteljes $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ piacon belül is explicite számolható lesz az optimális fogyasztási folyamat.

Legyen $x \in \mathbb{R}$. Legyen $G_{T+1}(x, \mathbf{w}) \equiv 0$.
Továbbá $t = T, \dots, 1$-re definiáljuk induktívan azt az $F_t(x, \mathbf{w})$ véletlen függvényt, ami $\mathcal{H}_t$-mérhető, és kielégíti a következőt:

$$e^{-\rho}\mathtt{E}\left[\left\{w_t + F_t(x, \mathbf{w}) - G_{t+1}\big(F_t(x, \mathbf{w}), \mathbf{w}\big)\right\}^{-\gamma} M_t^{-1} \middle| \mathcal{H}_t\right] = \big(w_{t-1} + x\big)^{-\gamma} M_{t-1}^{-1},$$

ahol a $\mathcal{G}_{t-1}$-mérhető $G_t(x, \mathbf{w})$ véletlen függvényre:

$$G_t(x, \mathbf{w}) - \mathtt{E}\left[\frac{M_t}{M_{t-1}} F_t\big(x - G_t(x, \mathbf{w}), \mathbf{w}\big) \middle| \mathcal{G}_{t-1}\right] = 0,$$

és ekkor a $\mathcal{H}_t$-mérhető $H_t(x, \mathbf{w})$ véletlen függvény:

$$H_t(x, \mathbf{w}) = F_t\big(x - G_t(x, \mathbf{w}), \mathbf{w}\big).$$

Az F_t és G_t függvények együttesen konvexek $(x, \mathbf{w})$-ben.

8. Állítás. *Tegyük fel, hogy $w_t > 0$ m.m., $\forall\ t = 0, \dots, T$ esetén. Ekkor a fenti véletlen függvények léteznek.*

Bár az F_t és G_t függvények első ránézésre nagyon bonyolultnak tűnnek, nagy előnyük, hogy explicite számolhatók.

14. Tétel (Az optimális fogyasztási folyamat konstruálása). *A $\mathcal{G}$-adaptált $\mathbf{w}$ járadékfolyamat optimális $(X_t)_{t=0,\dots,T}$ pénzügyi tőke folyamata iteratívan kapható:*

$$X_0 = 0, \qquad \text{és} \qquad X_t = H_t\big(X_{t-1}, \mathbf{w}\big) \qquad \forall t = 1, \dots, T$$

Ezután az optimális fogyasztási folyamat a 12. Tételből ismert módon számítható:

$$c_t = w_t + X_t - \mathtt{E}\left(\frac{M_{t+1}}{M_t} X_{t+1} \middle| \mathcal{G}_t\right).$$

Az $(F_t)_t$ és $(G_t)_t$ függvényhalmazok bevezetésével tehát kettéválasztottuk a maximalizációs problémát a 12.Tételre és a 13.Tételre.

Így már ki tudjuk számolni a $\mathbf{\Pi}_0$ biztosítási díjat is. Azt várjuk ugyanis, hogy az elvárt optimális hasznosság ne változzon, ha a járadékfolyamathoz hozzáadjuk az $\mathbf{Y}$ biztosítási követelést. Azaz kiértékeljük az optimális fogyaszási folyamatot először csak a $\mathbf{w}$ járadékfolyamatra, majd a $\widetilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} + \mathbf{\Pi} - \mathbf{Y}$ módosított járadékfolyamatra (ahol most a pénzügyi tőke folyamat: $X_t = H_t\big(X_{t-1}, \mathbf{w} + \mathbf{\Pi}_0 - \mathbf{Y}\big)$). Ezután mindkét esetben kiszámoljuk a maximális hasznosságot az optimális fogyasztási folyamatokra. Ekkor π_0-át az határozza meg, ha az így kapott elvárt hasznosságok egyenlők.

1.5. Kölcsönzési korlátozások

A 7.Állításban azt mondtuk, hogy a diszkontált, $\mathcal{G}_0$-mérhető éves díjak összege egyenlő a π_0 statikus biztosítási díjjal. Ezt – nem túl precízen – azzal indokoltuk, hogy egy harmadik féltől korlátozás nélkül kölcsönözhetjük a jövőbeli díjat annak esedékességéig.
A gyakorlatban azonban vannak – például a szabályozó által felállított – korlátozások a kölcsönre. A következőkben látni fogjuk, hogy ha adott egy bizonyos a küszöb, ameddig kölcsönözhetünk, akkor az éves díjú biztosítási szerződés sokkal drágább lesz, mint az egyszeri díjas.
(Ez azt a szemléletet tükrözi, hogy a szabályozó jobban szereti a vagyonmérlegben a tényleges pénzösszeget látni, mint a jövőbeli követelést.)

Legyen a *kölcsönzési korlátozás* a következő: adott $a \geq 0$ mellett

$$B_a = \left\{ \mathbf{x} \text{ stratégia; } \mathtt{E}\left(\frac{M_{t+1}X_{t+1}}{M_t} \Big| \mathcal{G}_t \right) \geq -a \qquad \forall t = 0, \ldots, T-1 \right\}$$

(Azaz úgy választjuk meg a stratégiát, hogy ne tudjunk túl sokat kölcsönözni.)

A továbbiakban korábbi fogalmak és tételek analogonjait fogalmazzuk meg:

Legyen a $\mathbf{\Pi} = (\Pi_t)_{t=0,\ldots,T}$ díjáram esetén

$$U^{\max,a}(\mathbf{w} + \mathbf{\Pi} - \mathbf{Y}) = \max_{\mathbf{x} \in B_a} U(\mathbf{w} + \mathbf{\Pi} + \mathbf{D_x} - \mathbf{Y})$$

13. Definíció. *Legyen* $\mathbf{\Pi}_0^a = (\pi_0^a, 0, \ldots, 0)$ *a statikus díj a* B_a *korlátozás mellett. Ez tehát egértelmű,* $\mathcal{G}_0$*-mérhető megoldása az* $U^{\max,a}(\mathbf{w} + \mathbf{\Pi}_0^a - \mathbf{Y}) = U^{\max}(\mathbf{w})$*-nek. Ugyanígy legyen* $\mathbf{\Pi}_{\text{évi}}^a = (0, \pi_{\text{évi}}^a, \ldots, \pi_{\text{évi}}^a)$ *a konstans díjáram a* B_a *korlátozás mellett. Ez egyértelmű,* $\mathcal{G}_0$*-mérhető megoldása az* $U^{\max,a}(\mathbf{w} + \mathbf{\Pi}_{\text{évi}}^a - \mathbf{Y}) = U^{\max}(\mathbf{w})$*-nek.*

4. Megjegyzés. *A kölcsönzési korlátozás nélkül* $a = +\infty$, *és* $\pi_0^\infty = \pi_0$, $\pi_{\text{évi}}^\infty = \pi_{\text{évi}}$.

14. Definíció. *Legyen* $\mathbf{Y}$ *a kárkifizetés folyamat. Legyen* $Y_{T+1}^{\sup,a} \equiv 0$, *és definiáljuk induktívan a következő* $\mathcal{H}$*-adaptált folyamatot* $t = 1, \ldots, T+1$*-re:*

$$Y_{t-1}^{\sup,a} = \operatorname{ess\,sup}\left[Y_{t-1} + \max\left\{\mathrm{E}\Big[\frac{M_t}{M_{t-1}} Y_t^{\sup,a}\Big|\mathcal{G}_{t-1}\Big]; -a\right\}\Big|\mathcal{H}_{t-1}\right]$$

9. Állítás. $Y_0^{\sup,a}$ *monoton csökkenő a-ban.*

10. Állítás. $\mathbf{Y}^{u,a} = Y_0^{\sup,a}$ *a* felső fedezeti ár a kölcsönzési korlátozás mellett.

3. Következmény. *Így tehát a* B_a *halmaz pontosan akkor nemüres, ha*

$$w_0 > (-\mathbf{w})^{u,a}.$$

15. Tétel. *Legyen* $\mathbf{w}$ *a járadékfolyamat, és* $\mathbf{Y}$ *a kárkifizetés-folyamat. Ekkor a* $\mathbf{\Pi}_0^a$ piaci alapú statikus díj *pontosan akkor létezik, ha*

vagy $\gamma < 1$ *és* $\lim_{\pi_0 \to (\mathbf{Y}-\mathbf{w})^{u,a} - w_0} U^{\max,a}(\mathbf{w} + \mathbf{\Pi}_0 - \mathbf{Y}) < U^{\max}(\mathbf{w})$,

vagy $\gamma > 1$.

Legyen most $\pi_{\text{évi}}^{\min} = \{\min \pi \ : \ \exists \mathbf{x} \in B_a,$ hogy $\pi - Y_t + w_t + D_{\mathbf{x},t} \geq 0 \ \forall t\}$ *a* minimális éves díj, *ami megfelel* Y *felső fedezetének. Ekkor az előzőhöz hasonlóan a* $\mathbf{\Pi}_{\text{évi}}^a$ piaci alapú éves díj *pontosan akkor létezik, ha*

vagy $\gamma < 1$ *és* $\lim_{\pi_{\text{évi}} \to \pi_{\text{évi}}^{\min}} U^{\max,a}(\mathbf{w} + \mathbf{\Pi}_{\text{évi}} - \mathbf{Y}) < U^{\max}(\mathbf{w})$,

vagy $\gamma > 1$.

11. Állítás. *A* π_0^a *és* $\pi_{\text{évi}}^a$ *monoton csökkenő, konvex függvényei a-nak. Továbbá*

$$\pi_{\text{évi}}^a \sum_{t=1}^{T} \mathrm{E}\big[M_t\big] \geq \pi_0^a \geq \pi_0 = \pi_{\text{évi}} \sum_{t=1}^{T} \mathrm{E}\big[M_t\big] \quad \forall a \in [0, \infty)$$

16. Tétel. *Tegyük fel, hogy a lemma feltétele teljesül, azaz* $w_0 > (-\mathbf{w})^{u,a}$. *Ekkor a* B_a *korlátozás mellett egyértelműen létezik egy nemnegatív,* $\mathcal{G}_t$*-adaptált* $(\lambda_t)_t$ *folyamat, amire*

$$e^{-\rho}\mathrm{E}\Big[c_t^{-\gamma} M_t^{-1}\Big|\mathcal{H}_t\Big] = c_{t-1}^{-\gamma} M_{t-1}^{-1} - \lambda_{t-1} M_{t-1}^{-1}$$

és

$$\lambda_t\Big(M_t^{-1}\mathrm{E}\Big[M_{t+1} X_{t+1}\Big|\mathcal{G}_t\Big] + a\Big) = 0 \qquad \forall t.$$

Konkrétan a marginális hasznosság-folyamat, $e^{-\rho t} c_t^{-\gamma} M_t^{-1}$ *az aggregált deflátorfolyamathoz képest* szuper-martingál.

A következőkben leírunk egy rekurzív konstrukciót (analógiában a kényszer nélküli esettel):

Legyen $\widetilde{G}_{T+1} \equiv 0$.
Továbbá $t \leq T$-re és $\lambda \geq 0$-ra $\widetilde{F}_t(x, \lambda, \mathbf{w})$ legyen egy $\mathcal{H}_t$-adaptált megoldása a következőnek:

$$e^{-\rho}\mathtt{E}\left[\left\{w_t+\widetilde{F}_t(x,\lambda,\mathbf{w})-\widetilde{G}_{t+1}\big(\widetilde{F}_t(x,\lambda,\mathbf{w}),\mathbf{w}\big)\right\}^{-\gamma}M_t^{-1}\middle|\mathcal{H}_t\right]=\left\{\big(w_{t-1}+x\big)^{-\gamma}-\lambda\right\}M_{t-1}^{-1},$$

ahol a $\mathcal{G}_{t-1}$-mérhető $\widetilde{G}_t^{(1)}(x, \mathbf{w})$ véletlen függvényre:

$$\widetilde{G}_t^{(1)}(x,\mathbf{w}) - \mathtt{E}\left[\frac{M_t}{M_{t-1}}\widetilde{F}_t\big(x-\widetilde{G}_t^{(1)}(x,\mathbf{w}),0,\mathbf{w}\big)\middle|\mathcal{G}_{t-1}\right] = 0.$$

Legyen a $\mathcal{G}_{t-1}$-mérhető $\Lambda_t(x)$ véletlen függvény $\widetilde{G}_t^{(1)}(x, \mathbf{w}) < -a$ esetén a következő egyenlet megoldása:

$$\mathtt{E}\left[\frac{M_t}{M_{t-1}}\widetilde{F}_t\big(x+a,\Lambda_t(x),\mathbf{w}\big)\middle|\mathcal{G}_{t-1}\right] = -a,$$

és $\widetilde{G}_t^{(1)}(x, \mathbf{w}) \geq -a$ esetén $\Lambda_t(x) = 0$.
Definiáljuk még a következő $\mathcal{G}_{t-1}$-mérhető véletlen függvényt:

$$\widetilde{G}_t(x,\mathbf{w}) = \begin{cases} \widetilde{G}_t^{(1)}(x,\mathbf{w}) & \text{ha } \widetilde{G}_t^{(1)}(x,\mathbf{w}) \geq -a \\ -a & \text{egyébként} \end{cases}$$

Végül pedig legyen:

$$\widetilde{H}_t(x,\mathbf{w}) = \widetilde{F}_t\big(x-\widetilde{G}_t(x,\mathbf{w}),\Lambda_t(x),\mathbf{w}\big).$$

12. Állítás. *Az $\widetilde{F}_t$ és $\widetilde{G}_t$ véletlen függvények pontosan akkor léteznek, ha*

$$w_0 > (-\mathbf{w})^{u,a}.$$

17. Tétel. (Az optimális fogyasztási folyamat konstrukciója a költségvetési kényszer mellett) *A költségvetési kényszer mellett létezik egy egyértelmű, optimális fogyasztási folyamat.*
Az optimális $(X_t)_{t=0,\ldots,T}$ pénzügyi tőke folyamatot a B_a korlátozás mellett a következő iterációból kapjuk:

$$X_0 = 0, \qquad \text{és} \qquad X_t = \widetilde{H}_t(X_{t-1},\mathbf{w}) \quad \forall t = 1,\ldots,T.$$

1.6. Egy másik megközelítés: a VaPo

Ebben a szakaszban Bühlmann at al. (lásd [7]-ben) egy másik piac-alapú árazási technikáját mutatjuk be.

Továbbra is adott egy $\mathbf{X} = (X_t)_{t=0,\dots,T}$ pénzáram. Ha megfelelő módon választunk egy $\mathcal{U}_t,\ t = 0, \dots, T$ bázist a pénzügyi piacról, akkor az $\mathbf{X}$ pénzáramot faktorizáljuk a következő módon:

$$X_t = \Lambda_t \cdot U_t$$

ahol az U_t valószínűségi változó egy $\mathcal{U}_t$ báziselem értékét jelöli, és ez alapján

$$\Lambda_t = \frac{U_t}{X_t}$$

jelöli az $\mathcal{U}_t$ elemek számát a felbontásban.

Tekintsük most a következő σ-algebrákat:

> $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0,\dots,T}$ jelölje továbbra is a *pénzügyi események filtrációját*,
>
> $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t=0,\dots,T}$ pedig legyen a *biztosítástechnikai események filtrációja.*

Nyilvánvaló, hogy ekkor a $\mathcal{G}$ bővített filtráció (emlékeztetőül, ez volt a *biztosítási piac filtrációja*) előáll a fenti két filtráció generátumaként:

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{T}_t$$

azaz $\mathcal{G}_t$ az a legszűkebb σ-algebra, amely $\mathcal{F}_t$ és $\mathcal{T}_t$ minden halmazát tartalmazza. Másképpen fogalmazva, tekintsük az 1.3.6. szakaszban definiált $\mathcal{H}$ fedezeti filtrációt. Ez azokat a biztosítási követeléseket tartalmazta, amik pénzpiaci folyamatokkal leírhatók. Így $\mathcal{T}$ éppen $\mathcal{G}$ azon biztosítástechnikai kockázatait tartalmazza, melyek $\mathcal{H}$-ból kimaradtak.

3. Feltevés. *A következő feltevéseket tesszük, amik a további lépésekhez alapvető fontosságúak lesznek:*

- *Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ és $\mathcal{T}$ függetlenek.*
- *Tegyük fel azt is, hogy $\mathbf{U} = (U_0, \dots, U_T)$ csak az $\mathcal{F}$-től, $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_0, \dots, \Lambda_T)$ pedig csak a $\mathcal{T}$-től függ.*
- *Továbbá tegyük fel, hogy a deflátor folyamatunk is faktorokra bomlik:*

$$M_t = M_t^{(\mathcal{F})} \cdot M_t^{(\mathcal{T})}$$

ahol $M^{(\mathcal{F})}$ csak $\mathcal{F}$-től, $M_t^{(\mathcal{T})}$ pedig csak $\mathcal{T}$-től függ, és az egyértelműség kedvéért legyen a technikai kockázatok torzításának várható értéke 1, *azaz*

$$\mathtt{E}\left(M_t^{(\mathcal{T})}\right) = 1 \quad \forall t$$

Ezekkel a feltevésekkel sikerült az árazási problémát két független árazási problémára bontani. Ugyanis tekintsük az alábbi átalakítást (emlékezve az $\mathbf{X}$ pénzáram t időpontbeli pénzügyi értékére a 7.Definícióból):

$$\begin{aligned} M_t \cdot Q_t(\mathbf{X}) &= \mathtt{E}\left(\sum_{k=0}^{T} M_k \cdot X_k \middle| \mathcal{G}_t\right) = \\ &= \mathtt{E}\left(\sum_{k=0}^{T} M_k^{(\mathcal{T})} \cdot M_k^{(\mathcal{F})} \cdot \Lambda_k \cdot U_k \middle| \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{T}_t\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{T} \mathtt{E}\left(M_k^{(\mathcal{T})} \cdot \Lambda_k \middle| \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{T}_t\right) \cdot \mathtt{E}\left(M_k^{(\mathcal{F})} \cdot U_k \middle| \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{T}_t\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{T} \mathtt{E}\left(M_k^{(\mathcal{T})} \cdot \Lambda_k \middle| \mathcal{T}_t\right) \cdot \mathtt{E}\left(M_k^{(\mathcal{F})} \cdot U_k \middle| \mathcal{F}_t\right) \end{aligned}$$

ahol a szorzat második tagja az $\mathcal{U}_k$ báziselemek árazását jelenti, míg az első tag a biztosítási szerződés báziselemekkel való fedezésének költségét jelöli. Ez utóbbi független a báziselemek árazásától.

Most definiálni fogjuk az ún. *árazási portfóliót* (*Valuation Portfolio*, VaPo). Ezt két szakaszban tesszük: először feltételezzük, hogy $\boldsymbol{\Lambda}$ determinisztikus, majd a második lépésben feltesszük, hogy az $\mathbf{X}$ pénzáram teljesen sztochasztikus.

1.6.1. A determinisztikus eset

Feltesszük tehát, hogy $\boldsymbol{\Lambda}$ determinisztikus. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben nincs (véletlen) technikai kockázat. Az első két lépésben megkonstruáljuk az árazási portfóliót, majd a harmadik lépésben megadjuk az $\mathbf{X}$ pénzügyi értékét.

(1.) Definiáljuk az $\mathcal{U}_i$ báziselemeket: ezeket a pénzügyi piacról választjuk.

(2.) Meghatározzuk az egyes báziselemek mennyiségét: $\lambda_i(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}$ determinisztikus szám minden $\mathcal{U}_i$ esetén.

Ezek alapján a VaPo($\mathbf{X}$) egy vektor, aminek dimenziója éppen a báziselemek száma, ahol az adott számú pénzügyi báziselemmel replikáljuk a biztosítási kötelezettségeket. Vagy úgy is tekinthetünk rá, mint egy többdimenziós, pozitív, folytonos, lineáris funkcionálra, ami a biztosítási kötelezettségeket egy pénzügyi eszközökből álló replikáló portfólióba képezi:

$$\mathbf{X} \mapsto \mathrm{VaPo}(\mathbf{X}) = \sum_i \lambda_i(\mathbf{X}) \cdot \mathcal{U}_i$$

(3.) Hogy megkapjuk az $\mathbf{X}$ pénzügyi értékét, alkalmazzunk a VaPo($\mathbf{X}$)-re egy $\mathcal{A}$ „számviteli elvet”. Ez szintén egy pozitív, folytonos, lineáris funkcionál. Így ha nincs biztosítástechnikai kockázat, a következőt kapjuk:

$$\mathrm{VaPo}(\mathbf{X}) \mapsto \mathcal{A}\big(\mathrm{VaPo}(\mathbf{X})\big) = \sum_i \lambda_i(\mathbf{X}) \cdot \mathcal{A}(\mathcal{U}_i) =: Q(\mathbf{X})$$

Meg kell jegyezzük, hogy a pozitivitás eléréséhez már a báziselemek választásánál ügyelnünk kell. Hiszen ehhez elengedhetetlen, hogy minden $\mathcal{A}(\mathcal{U}_i) =: U_i > 0$ teljesüljön a szerződés teljes tartama alatt.
A linearitásnak pedig az a következménye, hogy ha egy portfólió egyedi szerződésekből áll, akkor a portfóliót úgy tudjuk árazni, hogy a szerződéseket egyenként árazzuk:

$$Q\left(\sum_m \mathbf{X}^{(m)}\right) = \sum_m \mathcal{A}\big(\mathrm{VaPo}(\mathbf{X}^{(m)})\big)$$

Szükséges még néhány szót ejtenünk az $\mathcal{A}$ „számviteli elvről”. Mint láttuk, ez a funkcionál minden pénzügyi eszközhöz annak értékét rendeli. A kérdés az, honnan kaphatjuk meg ezt az $\mathcal{A}$-t? Valójában az $\mathcal{A}$ választását a konkrét probléma erősen befolyásolja. Erre két példát mutatunk:

- A klasszikus esetben, ha a pénzügyi eszközök értékét egy matematikai modell határozza meg, akkor például egy rögzített kamatrátával diszkontálunk. Ekkor a számviteli elvet jelölje $\mathcal{D}$.
- A modern megközelítés esetén, amikor a pénzügyi eszközöket közgazdasági vagy piaci értékük alapján árazzuk – azaz az áruk lényegében megegyezik a kereskedési értékükkel a pénzügyi piacon, – akkor az ún. közgazdasági számviteli elvet használjuk, és $\mathcal{E}$-vel jelöljük.

1.6.2. A sztochasztikus eset

Ebben a szakaszban a technikai kockázatokat tekintjük. Ezek úgy jelennek meg a modellben, hogy a biztosítási kötelezettségek nem determinisztikusak.

Ekkor a determinisztikus esethez hasonlóan ismét felbontjuk az $\mathbf{X}$ pénzáramot őt leíró pénzügyi eszközök (véletlen) összegére. Azaz legyenek $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_p$ különböző pénzügyi eszközök, amik $\mathcal{T}$-től függetlenek, és Λ_i jelöli az $\mathcal{U}_i$ eszköz (véletlen) mennyiségét. Ekkor

$$\mathbf{X} \mapsto \sum_{i=1}^{p} \Lambda_i(\mathbf{X}) \cdot \mathcal{U}_i$$

vagy a lineáris hozzárendelés következtében az $\mathbf{X}_t = X_t \cdot \mathbf{Z}^{(t)} = (0, \ldots, 0, X_t, 0, \ldots, 0)$ jelölés mellett (ahol $\mathbf{Z}^{(t)}$ a t-ben lejáró zérókupon kötvényt jelöli) így is írható:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_T \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} \Lambda_i(\mathbf{X}_0) \\ \Lambda_i(\mathbf{X}_1) \\ \vdots \\ \Lambda_i(\mathbf{X}_T) \end{pmatrix}^{\top} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{U}_i \\ \mathcal{U}_i \\ \vdots \\ \mathcal{U}_i \end{pmatrix}$$

Ezután szeretnénk megkonstruálni a VaPo-t – a 0 időpontból nézve – a determinisztikushoz hasonló módon. Ehhez azonban ki kell cserélnünk a $\Lambda_i(\mathbf{X}_k)$ véletlen mennyiségeket valamilyen determinisztikus mennyiségre. Végezzük el ezért a következő hozzárendelést:

$$\Lambda_i(\mathbf{X}_k) \mapsto l_{i,k} := \mathtt{E}\left(\Lambda_i(\mathbf{X}_k) \middle| \mathcal{T}_0\right)$$

(Megjegyezzük, hogy ha $\Lambda_i(\mathbf{X}_k)$ maga is determinisztikus, akkor nyilván $\Lambda_i(\mathbf{X}_k) = \lambda_i(\mathbf{X}_k) = l_{i,k}$.)

Ekkor a VaPo-ra az alábbi előállítást kapjuk:

$$\mathrm{VaPo}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} l_{i,0} \\ l_{i,1} \\ \vdots \\ l_{i,T} \end{pmatrix}^{\top} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{U}_i \\ \mathcal{U}_i \\ \vdots \\ \mathcal{U}_i \end{pmatrix}$$

A determinisztikus esetben láttuk, hogy a VaPo adja a biztosítási kötelezettségek legjobb becslését. Most azonban a technikai kockázat torzítást okoz a determinisztikus modellhez képest. Ezt az eltérést valahogy kompenzálni kell (ezt megtehetjük például viszontbiztosítások segítségével). Ekkor a kompenzációval növelt VaPo-t *technikai kockázat ellen védett árazási portfólió*nak nevezzük, és VaPo*-gal jelöljük:

$$\mathrm{VaPo}^*(\mathbf{X}) = \mathrm{VaPo}(\mathbf{X}) + \text{„kompenzáció”}$$

Ahhoz, hogy ezt precízen ki tudjuk fejezni – szintén a 0 időpontból nézve – cseréljük le a $\Lambda_i(\mathbf{X}_k)$ véletlen mennyiségeket a következő (technikai kockázattal terhelt) determinisztikus mennyiségekre:

$$\Lambda_i(\mathbf{X}_k) \mapsto l^*_{i,k} := \mathtt{E}\left(M_k^{(\mathcal{T})} \cdot \Lambda_i(\mathbf{X}_k) \middle| \mathcal{T}_0\right)$$

(Most is megjegyezzük, hogy ha $\Lambda_i(\mathbf{X}_k)$ maga is determinisztikus, akkor nyilván $\Lambda_i(\mathbf{X}_k) = \lambda_i(\mathbf{X}_k) = l_{i,k} = l^*_{i,k}$.)

Ekkor az előzőhöz hasonlóan a VaPo*-ra az alábbi előállítást kapjuk:

$$\mathrm{VaPo}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} l_{i,0}^* \\ l_{i,1}^* \\ \vdots \\ l_{i,T}^* \end{pmatrix}^\top \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{U}_i \\ \mathcal{U}_i \\ \vdots \\ \mathcal{U}_i \end{pmatrix}$$

Ezután az árazás a determinisztikus esetnél látott módon történik: alkalmazzunk $\mathrm{VaPo}^*(\mathbf{X})$-re, pontosabban az $\mathcal{U}_i$-kre egy $\mathcal{A}$ számviteli elvet. Ekkor az $\mathbf{X}$ pénzáram pénzügyi értéke

$$Q(\mathbf{X}) := \mathcal{A}\big(\mathrm{VaPo}^*(\mathbf{X})\big) = \sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} l_{i,0}^* \\ l_{i,1}^* \\ \vdots \\ l_{i,T}^* \end{pmatrix}^\top \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{A}(\mathcal{U}_i) \\ \mathcal{A}(\mathcal{U}_i) \\ \vdots \\ \mathcal{A}(\mathcal{U}_i) \end{pmatrix}$$

2. fejezet

Egy életbiztosítási példa: a VaPo

A konkrét életbiztosítási példában a 2003. évi magyar halandósági táblázatot fogom használni. Ennek a férfiakra vonatkozó táblája (a KSH 2003. évi halandósági táblája alapján):

x	l_x	x	l_x	x	l_x	x	l_x	x	l_x
0	100000								
1	99204	21	98564	41	95159	61	71629	81	22131
2	99146	22	98491	42	94680	62	69676	82	19701
3	99108	23	98411	43	94121	63	67671	83	17360
4	99079	24	98325	44	93477	64	65615	84	15115
5	99066	25	98233	45	92749	65	63502	85	12975
6	99051	26	98136	46	91941	66	61317	86	10953
7	99034	27	98035	47	91063	67	59047	87	9065
8	99016	28	97931	48	90119	68	56691	88	7330
9	98998	29	97825	49	89111	69	54250	89	5766
10	98980	30	97715	50	88039	70	51730	90	4391
11	98964	31	97595	51	86901	71	49139	91	3218
12	98947	32	97463	52	85698	72	46493	92	2254
13	98928	33	97316	53	84434	73	43807	93	1496
14	98904	34	97151	54	83106	74	41093	94	933
15	98872	35	96965	55	81712	75	38359	95	540
16	98836	36	96752	56	80244	76	35613	96	286
17	98794	37	96510	57	78693	77	32727	97	137
18	98746	38	96235	58	77055	78	29941	98	58
19	98691	39	95924	59	75329	79	27250	99	21
20	98631	40	95569	60	73518	80	24647	100	7

Ahogyan már a fenti táblázatban is, a következőkben az életbiztosításban általánosan használt jelöléseket használom majd:

$l_0 = 100000$ fős kezdőnépesség;

$l_x =$ az x évet *túlélők száma*;

$d_x = l_x - l_{x+1}$ az x éves korukban *elhunytak száma*;

$q_x = \frac{d_x}{l_x}$ a *halálozási valószínűség*;

$p_x = 1 - q_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$ a *túlélési valószínűség*;

Most pedig térjünk rá a konkrét példára (ebben a [7] példáját vettem alapul, de magyar halálozási adatokra és magyar eszközökkel számoltam):

Tegyük fel, hogy $x = 50$ éves férfiak kötnek vegyes életbiztosítást 1 000 000 HUF biztosítási összegre, $n = 5$ évre. Jelölje az éves biztosítási díjat $\Pi_t = \Pi$, amit az év elején fizet az ügyfél. Jelölje továbbá az i kamatláb a *minimális garanciát*, $\mathbf{I} = (I_t)_{t=50,\ldots,55}$ pedig egy adott *sztochasztikus indexfolyamatot*, melyre $I_{50} = 1$. (Ez utóbbi lehet tetszőleges pénzügyi eszköz.)
Ekkor a kedvezményezett részére kifizetett *haláleseti összeg* a $t \in \{51, \ldots, 55\}$ időpontban

$$\max\left(I_t, (1+i)^{t-50}\right),$$

és az *elérési összege* I_{55}. Ezek az összegek mindig év végén kerülnek kifizetésre.

Tehát az 50 éves férfiakra a fent vázolt biztosítás $\mathbf{X} = (X_{50}, \ldots, X_{55})$ pénzárama a következőképpen áll elő:

idő	pénzáram	biztosítási díj	haláleseti összeg	elérési összeg
50	X_{50}	$-l_{50} \cdot \Pi$		
51	X_{51}	$-l_{51} \cdot \Pi$	$d_{50} \cdot \max\left(I_{51}, (1+i)^1\right)$	
52	X_{52}	$-l_{52} \cdot \Pi$	$d_{51} \cdot \max\left(I_{52}, (1+i)^2\right)$	
53	X_{53}	$-l_{53} \cdot \Pi$	$d_{52} \cdot \max\left(I_{53}, (1+i)^3\right)$	
54	X_{54}	$-l_{54} \cdot \Pi$	$d_{53} \cdot \max\left(I_{54}, (1+i)^4\right)$	
55	X_{55}		$d_{54} \cdot \max\left(I_{55}, (1+i)^5\right)$	$l_{55} \cdot I_{55}$

A VaPo meghatározásához a determinisztikus esetben szükségünk lesz olyan pénzügyi eszközökre, amikkel a fenti pénzáram biztosítási folyamatai (díjáram, haláleseti összeg, elérési összeg) replikálhatók. Ehhez az alábbi helyettesítések megfelelőek lesznek:

$\boxed{\Pi_t = \Pi \quad \leftrightsquigarrow \quad \Pi \cdot Z^{(t)} \text{ a } t \text{ időpontban}}$,
ahol $Z^{(t)}$ a t-ben lejáró *zérókupon kötvény*;

$\boxed{I_{55} \quad \leftrightsquigarrow \quad \mathbf{I} = (I_t)_{t=50,\dots,55}\big|_{t=55}}$,
ahol $\mathbf{I}$ a fent említett *sztochasztikus indexfolyamat*;

$\boxed{\max\big(I_t, (1+i)^{t-50}\big) \quad \leftrightsquigarrow \quad Put^{(t)}\big(I_t, (1+i)^{t-50}\big) + \mathbf{I} \text{ a } t \text{ időpontban}}$,
ahol $Put^{(t)}$ a t-ben lejáró *Put-opció* $\mathbf{I}$-re.

Ezek az eszközök lesznek a VaPo báziselemei. A helyettesítéseket elvégezve a fenti táblázatból könnyen leolvasható, hogy melyik báziselemből mennyit használtunk, azaz:

	báziselemek		báziselemek száma	
$\mathcal{U}_1$	$Z^{(50)}$	λ_1	$-l_{50} \cdot \Pi$	
$\mathcal{U}_2$	$Z^{(51)}$	λ_2	$-l_{51} \cdot \Pi$	
$\mathcal{U}_3$	$Z^{(52)}$	λ_3	$-l_{52} \cdot \Pi$	
$\mathcal{U}_4$	$Z^{(53)}$	λ_4	$-l_{53} \cdot \Pi$	
$\mathcal{U}_5$	$Z^{(54)}$	λ_5	$-l_{54} \cdot \Pi$	
$\mathcal{U}_6$	$\mathbf{I}$	λ_6	l_{50}	$= d_{50} + \ldots + d_{54} + l_{55}$
$\mathcal{U}_7$	$Put^{(51)}$	λ_7	d_{50}	
$\mathcal{U}_8$	$Put^{(52)}$	λ_8	d_{51}	
$\mathcal{U}_9$	$Put^{(53)}$	λ_9	d_{52}	
$\mathcal{U}_{10}$	$Put^{(54)}$	λ_{10}	d_{53}	
$\mathcal{U}_{11}$	$Put^{(55)}$	λ_{11}	d_{54}	

Ezek után nincs más hátra, mint meghatározni az $\mathbf{X}$ pénzáram pénzügyi értékét, azaz $Q(\mathbf{X})$-et. Ehhez az 1.6.1.-es szakaszban leírtak szerint választanunk kell egy számviteli elvet. Mi most az $\mathcal{E}$ ún. *közgazdasági számviteli elv*et használjuk majd. Ezt úgy vezettük be, mint egy olyan pozitív, lineáris funkcionált, ami a pénzügyi eszközökhöz azok piaci értékét rendeli. Tehát az $\mathbf{X}$ pénzügyi értéke:

$$Q(\mathbf{X}) = \mathcal{E}\big(\mathrm{VaPo}(\mathbf{X})\big) = \sum_{i=1}^{11} \lambda_i \cdot \mathcal{E}(\mathcal{U}_i)$$

A következő lépés tehát, hogy meghatározzuk a báziselemek *piaci érték*ét.

A sztochasztikus index piaci értéke

Az $\mathbf{I}$ sztochasztikus indexnek választhatunk tetszőleges pénzügyi folyamatot. Én a Generali Biztosító pénzpiaci eszközalapját választottam[1], aminek referencia-indexe

[1] https://www.generali.hu/Online_ugyfelszolgalat/Befektetesi_informaciok/Eszkozalapok /PenzpiaciEszkozalap.aspx?ManagedFundID=4

az RMAX index. Ennek az eszközalapnak 2001 és 2006 közötti árfolyamát fogom használni a sztochasztikus index leírására:

I_t	I_{50}	I_{51}	I_{52}	I_{53}	I_{54}	I_{55}
$\mathcal{E}(I_t)$	1	$1,08369$	$1,1691$	$1,24278$	$1,33687$	$1,45926$

A zérókupon kötvény piaci értéke

Jelölje $R(s,t)$ a t-ben lejáró zérókupon kötvény hozamgörbéjét. Tudjuk, hogy a zérókupon kötvény piaci értéke és hozamgörbéje között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$Z_s^{(t)} = e^{-(t-s)\cdot R(s,t)}$$

A zérókupon kötvény hozamgörbéjét az AKK Zrt. honlapjáról[2] vettem (feltéve, hogy az életbiztosítási szerződést 2011-ben kötik, a korábbi $Z^{50} \equiv Z^0$ jelölés mellett):

$R(s,t)$	$t=1$	2	3	4	5
$s=0$	6%	$6,16\%$	$6,37\%$	$6,59\%$	$6,8\%$

Ez alapján a t-ben lejáró zérókupon kötvény piaci értékére

$$\mathcal{E}(Z^{(t)}) = Z_0^{(t)} = e^{-t\cdot R(0,t)}$$

azaz

t	1	2	3	4	5
$\mathcal{E}(Z^{(t)})$	$0,94$	$0,884$	$0,826$	$0,768$	$0,712$

A put-opció piaci értéke

Jól ismert az európai put opcióra a következő árazási formula (ld. például [7]-ben):

$$\mathcal{E}_s\big(Put^{(t)}(\mathbf{I},(1+i)^{t-t_0})\big) = K_s^{(t)} \cdot Z_s^{(t)} \cdot \Phi(-d_2(s,t)) - I_s \cdot \Phi(-d_1(s,t))$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye, $K_s^{(t)} = (1+i)^{t-t_0}$, továbbá

$$d_1(s,t) = \frac{\log(I_s/K_s^{(t)}) + \sigma^2 \cdot (t-s)/2}{\sigma \cdot \sqrt{t-s}},$$

$$d_2(s,t) = d_1(s,t) - \sigma \cdot \sqrt{t-s}$$

Megjegyezzük, hogy – amint fent is láttuk – alkalmas $r > 0$ konstanssal $Z_s^{(t)} = e^{-(t-s)\cdot r}$, amit a put opció előbbi árazási formulájába írva éppen a jól ismert Black-Scholes-formulát kapjuk.

[2] www.akk.hu/object.b61b3232-20b7-49a2-acbb-1df432287ca8.ivy

Ekkor a különböző lejárati idejű put opciók piaci értéke $s = 0$-ban:

$$\mathcal{E}\big(Put^{(t)}(\mathbf{I}, (1+i)^t)\big) =$$

$$= (1+i)^t \cdot Z_0^{(t)} \cdot \Phi\left(-\frac{\log\left(\frac{I_0}{(1+i)^t}\right) - \frac{\sigma^2 \cdot t}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{t}}\right) - I_0 \cdot \Phi\left(-\frac{\log\left(\frac{I_0}{(1+i)^t}\right) + \frac{\sigma^2 \cdot t}{2}}{\sigma \cdot \sqrt{t}}\right)$$

ahol I_0 feltétel szerint 1. Továbbá legyen $i = 4\%$ és $\sigma = 15\%$. Azaz

$$\mathcal{E}\big(Put^{(t)}(\mathbf{I}, (1+i)^t)\big) =$$

$$= 1,04^t \cdot Z_0^{(t)} \cdot \Phi\left(-\frac{t \cdot \log\frac{1}{1,04} - \frac{0,15^2 \cdot t}{2}}{0,15 \cdot \sqrt{t}}\right) - \Phi\left(-\frac{t \cdot \log\frac{1}{1,04} + \frac{0,15^2 \cdot t}{2}}{0,15 \cdot \sqrt{t}}\right) =$$

$$= 1,04^t \cdot Z_0^{(t)} \cdot \Phi\left(0,336 \cdot \sqrt{t}\right) - \Phi\left(0,186 \cdot \sqrt{t}\right)$$

A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének értékeit táblázatból kikeresve kapjuk a következőket:

t	1	2	3	4	5
$\mathcal{E}\big(Put^{(t)}(\mathbf{I}, (1+i)^t)\big)$	$0,047$	$0,052$	$0,043$	$0,028$	$0,011$

Ennek segítségével végre meghatározhatjuk a biztosítási díjat: alkalmazzuk ugyanis az ekvivalencia-elvet, ami azt mondja ki, hogy a bevételek és a kiadások jelenértéke egyezzen meg. Ez most azt jelenti, hogy

$$Q(\mathbf{X}) = 0$$

kell legyen a kezdeti időpontból nézve. Bontsuk ki a formulát:

$Q(\mathbf{X}) = \mathcal{E}\big(\mathrm{VaPo}(\mathbf{X})\big) = \sum_{i=1}^{11} \lambda_i \cdot \mathcal{E}(\mathcal{U}_i) =$
$= -(l_{50} \cdot Z^{(50)} + l_{51} \cdot Z^{(51)} + l_{52} \cdot Z^{(52)} + l_{53} \cdot Z^{(53)} + l_{54} \cdot Z^{(54)}) \cdot \Pi + l_{50} \cdot I_{55} + d_{50} \cdot Put^{(51)} + d_{51} \cdot Put^{(52)} + d_{52} \cdot Put^{(53)} + d_{53} \cdot Put^{(54)} + d_{54} \cdot Put^{(55)} =$
$= -(88039 \cdot 0,94 + 86901 \cdot 0,884 + 85698 \cdot 0,826 + 84434 \cdot 0,768 + 83106 \cdot 0,712) \cdot \Pi + 88039 \cdot 1,45926 + 1138 \cdot 0,047 + 1203 \cdot 0,052 + 1264 \cdot 0,043 + 1328 \cdot 0,028 + 1394 \cdot 0,011 = 0$
$\Downarrow$
$128694,703 = 354380,476 \cdot \Pi$

Tehát a biztosítási díj 1 HUF biztosítási összeg esetén évi

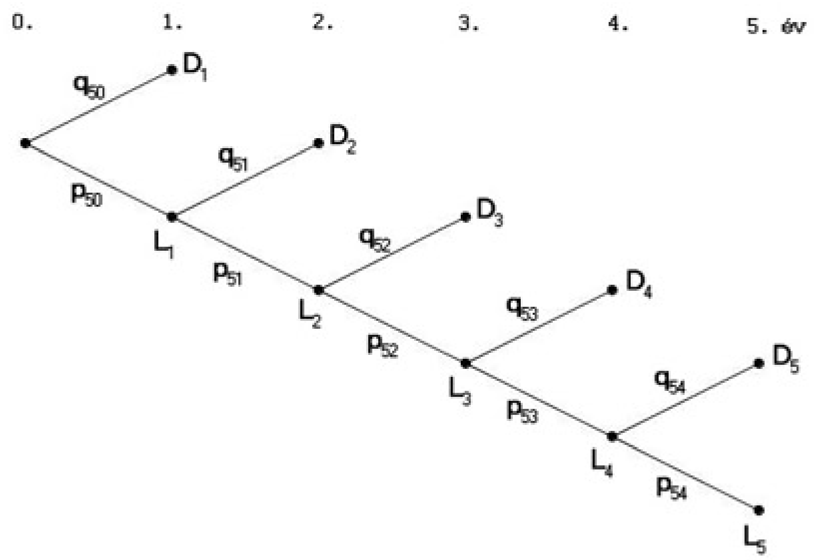
$$\boxed{\Pi = 0,363}$$

Vagyis 1 000 000 HUF esetén $\Pi = 363\,000$.

3. fejezet

Egy életbiztosítási példa még egyszer: az elvárt hasznosság

Tekintsük újra az előbbi példában látott biztosítást. Tegyük fel, hogy $x = 50$ éves férfi köt vegyes életbiztosítást $n = 5$ évre, 1 000 000 HUF biztosítási összegre. Jelölje az egyszeri biztosítási díjat $\Pi_0 = \Pi$, amit az év elején fizet az ügyfél.
Lássuk a biztosítás eseményfáját:



Itt D_i jelöli az *elhalálozás* eseményét az i-edik periódusban, L_i a *túlélés* eseményét. Valamint q_i a *halálozási valószínűség*et, p_i pedig a *túlélés valószínűség*ét. Ezeket az előző példához hasonlóan a 2003. évi magyar férfi halandósági táblából származtatjuk:

x	50	51	52	53	54
$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$	0,987	0,986	0,985	0,984	0,983
$q_x = 1 - p_x$	0,013	0,014	0,015	0,016	0,017

Írjuk fel most a biztosító pénzáramát:

idő	Biztosítási pénzáram		Járadékfolyamat
50	Π_0		$w_0 = 1$
51	$D_1 = 1$	$L_1 = 0$	$w_1 = 0$
52	$D_2 = 1$	$L_2 = 0$	$w_2 = 0$
53	$D_3 = 1$	$L_3 = 0$	$w_3 = 0$
54	$D_4 = 1$	$L_4 = 0$	$w_4 = 0$
55	$D_5 = 1$	$L_5 = 1$	$w_5 = 0$

Emlékeztetünk rá, hogy a *járadékfolyamat* a vállalat egy exogén pénzügyi folyamata, ami a vállalat biztosítási tevékenységén kívüli, pénzpiaci kereskedésből származó pénzáramot jelöl.

Szükségünk lesz továbbá egy M *deflátorfolyamat*ra. Definiáljuk ezt úgy, hogy a fenti események bekövetkezése mellett az alábbi értékeket vegye fel:

definíció szerint $M_0 \equiv 0$, továbbá

$M_1(D_1) = 1,2$ $M_2(D_2) = 1,3$ $M_3(D_3) = 1,35$ $M_4(D_4) = 1,5$ $M_5(D_5) = 1,7$

$M_1(L_1) = 1$ $M_2(L_2) = 1,05$ $M_3(L_3) = 1,2$ $M_4(L_4) = 1,4$ $M_5(L_5) = 1,6$

A Π_0 díjkövetelést a 10.Definíció értelmében akkor nevezzük piac alapú díjnak, ha a (2.8) egyenlőség teljesül, azaz

$$U^{\max}(\mathbf{w} + \mathbf{\Pi}_0 - \mathbf{Y}) = U^{\max}(\mathbf{w}),$$

ahol az $U^{\max}$ maximális elvárt hasznosság a (2.3) formulával definiált hasznosságfüggvény kiértékelve az optimális fogyasztási folyamatra. Az tehát most a feladatunk, hogy meghatározzuk az optimális fogyasztási folyamatot.

Az *optimális fogyasztási folyamat*ot a 12.Tételben meghatározott módon számolhatjuk ki:

$$c_t = w_t + X_t - \mathtt{E}\left(\frac{M_{t+1}}{M_t} X_{t+1} \middle| \mathcal{G}_t\right)$$

feltéve, hogy $w_0 > (-\mathbf{w})^u$, ahol a jobb oldal az 5.Lemma szerint rekurzív módon (az adott esetben triviálisan) számolható. Most tehát $w_0 = 1 > -1 = (-\mathbf{w})^u$, a feltétel teljesül, így tehát létezik, és a fenti felírással kapható az egyértelmű, $\mathcal{G}$-adaptált, pozitív optimális fogyasztási folyamat.

Az még a kérdés, hogy a felírásban szereplő $\mathbf{X}$ *pénzügyi tőke* folyamatot hogyan kaphatjuk meg. A definíció alapján sajnos nem tudunk számolni. De éppen ezért definiáltuk a 2.4-es szakaszban az induktív struktúrát, melynek segítségével $\mathbf{X}$ már explicite számolható.

A pénzügyi tőke folyamat meghatározása

A pénzügyi tőke folyamat iteratívan számolható a 14.Tételben leírtak szerint:

$$X_0 = 0, \qquad \text{és} \qquad X_t = H_t\big(X_{t-1}, \mathbf{w}\big) \qquad \forall t = 1, \dots, T$$

Itt emlékezzünk az induktív struktúránk definíciójára:

$$H_t(x, \mathbf{w}) = F_t\big(x - G_t(x, \mathbf{w}), \mathbf{w}\big) \tag{3.1}$$

$$e^{-\rho}\mathtt{E}\bigg[\Big\{w_t + F_t(x, \mathbf{w}) - G_{t+1}\big(F_t(x, \mathbf{w}), \mathbf{w}\big)\Big\}^{-\gamma} M_t^{-1} \bigg| \mathcal{H}_t\bigg] = \big(w_{t-1} + x\big)^{-\gamma} M_{t-1}^{-1} \tag{3.2}$$

$$G_t(x, \mathbf{w}) - \mathtt{E}\Big[\frac{M_t}{M_{t-1}} F_t\big(x - G_t(x, \mathbf{w}), \mathbf{w}\big)\Big| \mathcal{G}_{t-1}\Big] = 0 \tag{3.3}$$

$$G_{T+1}(x, \mathbf{w}) \equiv 0 \tag{3.4}$$

ahol az F_t és H_t véletlen függvények $\mathcal{H}_t$-mérhetők, a G_t véletlen függvény $\mathcal{G}_{t-1} \subset \mathcal{H}_t = \sigma(\mathcal{G}_{t-1}, \mathcal{F}_t)$-mérhető, továbbá a w_t és M_t folyamatok $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{H}_t$-mérhetők.

Az alábbiakban a jelölések egyszerüsítése érdekében elhagyom a második változó kiírását, de hangsúlyozom, hogy a függvények $\mathbf{w}$-től is függnek.
A konkrét feladatban most $T = 5$, így a fentiek értelmében $G_6(x) = 0$. Válasszuk a befektető kockázatkerülését $\gamma = 1/2$-nek, türelmetlenségét pedig $\rho = 1$-nek.
Első lépésként határozzuk meg $F_5(x)$-et. Ezt a (4.2) egyenlőségből kaphatjuk, felhasználva, hogy mind w_5, mind F_5 $\mathcal{H}_5$-mérhetők:

$$e^{-\rho} \cdot (w_5 + F_5(x))^{-\gamma} \cdot \mathtt{E}\left(M_5^{-1} | \mathcal{H}_5\right) = (w_4 + x)^{-\gamma} \cdot M_4^{-1}$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$F_5(x) = \frac{w_4 + x}{e^{\rho/\gamma}} \mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_5}\bigg|\mathcal{H}_5\right)^{1/\gamma} - w_5$$

Most helyettesítsünk x helyére $x - G_5(x)$-et (és használjuk, hogy $w_4 = w_5 = 0$). Ekkor

$$F_5\left(x - G_5(x)\right) = \frac{x - G_5(x)}{e^{\rho/\gamma}} \mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_5}\bigg|\mathcal{H}_5\right)^{1/\gamma}$$

Ezt beírva (4.3)-ba, kihasználva, hogy G_5 mérhető $\mathcal{G}_4$-re, majd átrendezve azt kapjuk, hogy

$$G_5(x) = \frac{\mathtt{E}\left(\frac{M_5}{M_4}\,\mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_5}\Big|\mathcal{H}_5\right)^{1/\gamma} x \bigg| \mathcal{G}_4\right)}{e^{\rho/\gamma} + \mathtt{E}\left(\frac{M_5}{M_4}\,\mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_5}\Big|\mathcal{H}_5\right)^{1/\gamma} \bigg| \mathcal{G}_4\right)} = \frac{\mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_5}\Big|\mathcal{H}_5\right)^{1/\gamma} \mathtt{E}\left(\frac{M_5}{M_4} x \Big| \mathcal{G}_4\right)}{e^{\rho/\gamma} + \mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_5}\Big|\mathcal{H}_5\right)^{1/\gamma} \mathtt{E}\left(\frac{M_5}{M_4}\Big|\mathcal{G}_4\right)}$$

Most a konkrét értékeket beírva elvégezzük a numerikus számításokat:

$$\mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_5}\middle|\mathcal{H}_5\right) = 0,983 \cdot \frac{1,4}{1,7} + 0,017 \cdot \frac{1,4}{1,6} = 0,8244$$

$$\mathtt{E}\left(\frac{M_5}{M_4}\middle|\mathcal{G}_4\right) = 0,983 \cdot \frac{1,7}{1,4} + 0,017 \cdot \frac{1,6}{1,4} = 1,21$$

$$\frac{\mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_5}\middle|\mathcal{H}_5\right)^{1/\gamma}}{e^{\rho/\gamma} + \mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_5}\middle|\mathcal{H}_5\right)^{1/\gamma}\mathtt{E}\left(\frac{M_5}{M_4}\middle|\mathcal{G}_4\right)} = \frac{0,8244^2}{e^2 + 0,8244^2 \cdot 1,21} = 0,083$$

Ekkor tehát a következőt kapjuk:

$$\boxed{H_5(x) = 0,092 \cdot \left(x - 0,083 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_5}{M_4}x\middle|\mathcal{G}_4\right)\right)}$$

Ezek után folytassuk a rekurziót, és határozzuk meg F_4-et. Most ismét a (4.2)-es egyenlőséghez térünk vissza. Felhasználva a G_5-re kapott eredményünket, továbbá, hogy $w_4 = w_3 = 0$, majd átrendezve azt kapjuk, hogy

$$F_4(x) = \frac{x}{e^{\rho/\gamma}}\mathtt{E}\left(\frac{M_3}{M_4}\middle|\mathcal{H}_4\right)^{1/\gamma} \cdot \frac{1}{1 - 0,083 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_5}{M_4}|\mathcal{G}_4\right)}$$

Most x helyére $x - G_4(x)$-et helyettesítve, és elvégezve a numerikus számításokat, a következő egyenlőséget kapjuk:

$$F_4\left(x - G_4(x)\right) = 0,096 \cdot \left(x - G_4(x)\right)$$

A korábbiakhoz hasonlóan ezt ismét írjuk be a (4.3)-as egyenlőségbe, használjuk fel, hogy G_4 mérhető $\mathcal{G}_3$-ra, majd átrendezve az egyenlőséget, megkapjuk G_4-et:

$$G_4(x) = \frac{0,096 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_3} \cdot x\middle|\mathcal{G}_3\right)}{1 + 0,096 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_3}\middle|\mathcal{G}_3\right)} = 0,086 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_3} \cdot x\middle|\mathcal{G}_3\right)$$

elvégezve a numerikus számításokat is.
Ekkor már meg tudjuk határozni H_4-et is:

$$\boxed{H_4(x) = 0,096 \cdot \left(x - 0,086 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_3}x\middle|\mathcal{G}_3\right)\right)}$$

Még tovább folytatva a rekurziót – most már csak az eredményeket kiírva, – a következőket kapjuk:

$$F_3(x) = \frac{x}{e^{\rho/\gamma}}\mathtt{E}\left(\frac{M_2}{M_3}\middle|\mathcal{H}_3\right)^{1/\gamma} \cdot \frac{1}{1 - 0,086 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_3}|\mathcal{G}_3\right)} = 0,092 \cdot x$$

$$F_3\left(x - G_3(x)\right) = 0,092 \cdot \left(x - G_3(x)\right)$$

$$G_3(x) = \frac{0,092 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_3}{M_2} \cdot x\middle|\mathcal{G}_2\right)}{1 + 0,092 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_3}{M_2}\middle|\mathcal{G}_2\right)} = 0,082 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_3}{M_2} \cdot x\middle|\mathcal{G}_2\right)$$

$$\boxed{H_3(x) = 0,092 \cdot \left(x - 0,082 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_3}{M_2}x\middle|\mathcal{G}_2\right)\right)}$$

$$F_2(x)=\frac{x}{e^{\rho/\gamma}}\mathtt{E}\left(\frac{M_1}{M_2}\Big|\mathcal{H}_2\right)^{1/\gamma}\cdot\frac{1}{1-0,082\cdot\mathtt{E}\left(\frac{M_3}{M_2}|\mathcal{G}_2\right)}=0,091\cdot x$$

$$F_2\left(x-G_2(x)\right)=0,091\cdot(x-G_2(x))$$

$$G_2(x)=\frac{0,091\cdot\mathtt{E}\left(\frac{M_2}{M_1}\cdot x\Big|\mathcal{G}_1\right)}{1+0,091\cdot\mathtt{E}\left(\frac{M_2}{M_1}\Big|\mathcal{G}_1\right)}=0,081\cdot\mathtt{E}\left(\frac{M_2}{M_1}\cdot x\Big|\mathcal{G}_1\right)$$

$$\boxed{H_2(x)=0,091\cdot\Big(x-0,081\cdot\mathtt{E}\left(\tfrac{M_2}{M_1}x\Big|\mathcal{G}_1\right)\Big)}$$

$$F_1(x)=\frac{1+x}{e^{\rho/\gamma}}\mathtt{E}\left(\frac{M_0}{M_1}\Big|\mathcal{H}_1\right)^{1/\gamma}\cdot\frac{1}{1-0,081\cdot\mathtt{E}\left(\frac{M_2}{M_1}|\mathcal{G}_1\right)}=0,106\cdot(1+x)$$

$$F_1\left(x-G_1(x)\right)=0,106\cdot(1+x-G_1(x))$$

$$G_1(x)=\frac{0,106\cdot\mathtt{E}\left(\frac{M_1}{M_0}\cdot(1+x)\Big|\mathcal{G}_0\right)}{1+0,106\cdot\mathtt{E}\left(\frac{M_1}{M_0}\Big|\mathcal{G}_0\right)}=\frac{0,106\cdot\mathtt{E}\left(\frac{M_1}{M_0}\Big|\mathcal{G}_0\right)}{1+0,106\cdot\mathtt{E}\left(\frac{M_1}{M_0}\Big|\mathcal{G}_0\right)}+\frac{0,106\cdot\mathtt{E}\left(\frac{M_1}{M_0}\cdot x\Big|\mathcal{G}_0\right)}{1+0,106\cdot\mathtt{E}\left(\frac{M_1}{M_0}\Big|\mathcal{G}_0\right)}=$$

$$=0,173+0,088\cdot\mathtt{E}\left(\frac{M_1}{M_0}\cdot x\Big|\mathcal{G}_0\right)$$

$$\boxed{H_1(x)=0,106\cdot\Big(1,173+x-0,088\cdot\mathtt{E}\left(\tfrac{M_1}{M_0}x\Big|\mathcal{G}_0\right)\Big)}$$

Ezzel megkaptuk azokat a függvényeket, melyek segítségével meghatározhatjuk a piaci tőke folyamatot. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az utolsó formula kicsit különbözik a megelőzőektől, ami annak köszönhető, hogy $w_0 = 1 \neq 0$ volt (míg most a járadékfolyamat későbbi értékeit azonosan nullának választottuk). Ez kritikus feltétel (ahogyan fent, sőt már a 12.Tételben is láthattuk), ha ugyanis $\mathbf{w}$ azonosan 0 volna, akkor a pénzügyi tőke folyamatunk is azonosan 0 lenne.

Írjuk fel tehát most a rekurziót a pénzügyi tőke folyamatra. Emlékeztetünk rá, hogy $X_0 = 0$ volt feltétel szerint. Ekkor

$$X_t = H_t\big(X_{t-1},\mathbf{w}\big)$$

segítségével

$$\begin{aligned}X_1=H_1(X_0)\;&=0,106\cdot\Big(1,173+0-0,088\cdot\mathtt{E}\left(\tfrac{M_1}{M_0}\cdot 0\Big|\mathcal{G}_0\right)\Big)=\\&=0,106\cdot 1,173=0,124\\X_2=H_2(X_1)\;&=0,091\cdot\Big(0,124-0,081\cdot 0,124\cdot\mathtt{E}\left(\tfrac{M_2}{M_1}\Big|\mathcal{G}_1\right)\Big)=\\&=0,011-0,001\cdot(0,986\cdot\tfrac{1,3}{1}+0,014\cdot\tfrac{1,05}{1})=0,01\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_3 = H_3(X_2) &= 0,092 \cdot \left(0,01 - 0,082 \cdot 0,01 \cdot \mathtt{E}\left(\tfrac{M_3}{M_2}\Big|\mathcal{G}_2\right)\right) = \\
&= 0,001 - 0,0001 \cdot (0,985 \cdot \tfrac{1,35}{1,05} + 0,015 \cdot \tfrac{1,2}{1,05}) = 0,001 \\
X_4 = H_4(X_3) &= 0,096 \cdot \left(0,001 - 0,086 \cdot 0,001 \cdot \mathtt{E}\left(\tfrac{M_4}{M_3}\Big|\mathcal{G}_3\right)\right) = \\
&= 0,0001 - 0,00001 \cdot (0,984 \cdot \tfrac{1,5}{1,2} + 0,016 \cdot \tfrac{1,4}{1,2}) = 0,0001 \\
X_5 = H_5(X_4) &= 0,092 \cdot \left(0,0001 - 0,083 \cdot 0,0001 \cdot \mathtt{E}\left(\tfrac{M_5}{M_4}\Big|\mathcal{G}_4\right)\right) = \\
&= 0,00001 - 0,000001 \cdot (0,983 \cdot \tfrac{1,7}{1,4} + 0,017 \cdot \tfrac{1,6}{1,4}) = 0,00001
\end{aligned}$$

Tehát a pénzügyi tőke folyamat a következő:

X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	0, 124	0, 01	0, 001	0, 0001	0, 00001

(Itt nagyon kicsi értékeket kaptunk, aminek oka valószínűleg az, hogy a járadékfolyamatot a $t > 0$ időpontokban 0-nak választottuk.)

Az optimális fogyasztási folyamat meghatározása

Tudjuk a 12.Tétel alapján, hogy az optimális fogyasztási folyamat a következő formula segítségével számolható:

$$c_t = w_t + X_t - \mathtt{E}\left(\frac{M_{t+1}}{M_t} X_{t+1} \Big| \mathcal{G}_t\right)$$

Innen már mindent ismerünk, úgyhogy nincs más hátra, mint a numerikus számolás.

$$c_0 = 1 + 0 - 0,124 \cdot (0,987 \cdot \tfrac{1,2}{1} + 0,013 \cdot \tfrac{1}{1}) = 0,85$$

$$c_1 = 0 + 0,124 - 0,01 \cdot (0,986 \cdot \tfrac{1,3}{1} + 0,014 \cdot \tfrac{1,05}{1}) = 0,11$$

$$c_2 = 0 + 0,01 - 0,001 \cdot (0,985 \cdot \tfrac{1,35}{1,05} + 0,015 \cdot \tfrac{1,2}{1,05}) = 0,01$$

$$c_3 = 0 + 0,001 - 0,0001 \cdot (0,984 \cdot \tfrac{1,5}{1,2} + 0,016 \cdot \tfrac{1,4}{1,2}) = 0,001$$

$$c_4 = 0 + 0,0001 - 0,00001 \cdot (0,983 \cdot \tfrac{1,7}{1,4} + 0,017 \cdot \tfrac{1,6}{1,4}) = 0,0001$$

$$c_5 = 0 + 0,00001 - 0$$

Tehát a pénzügyi tőke folyamat a következő:

c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
0, 85	0, 11	0, 01	0, 001	0, 0001	0, 00001

A módosított pénzügyi tőke folyamat meghatározása

Ahogy a példa elején már említettük, azt szeretnénk, hogy az elvárt maximális hasznosság ne változzon, ha a járadékfolyamathoz a biztosítási pénzáramot is hozzáadjuk. Legyen ezért a módosított járadékfolyamat a következő:

$$\widetilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} + \mathbf{\Pi} - \mathbf{Y}$$

ahol tehát $\mathbf{\Pi} = (\Pi_0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{Y}$ pedig a biztosítási kifizetések (D és L) által alkotott sztochasztikus folyamat. Így tehát a módosított járadékfolyamatra a következő értékeket kapjuk:

$\widetilde{w}_0$	$\widetilde{w}_1$	$\widetilde{w}_2$	$\widetilde{w}_3$	$\widetilde{w}_4$	$\widetilde{w}_5$
$1+\Pi_0$	-1	-1	-1	-1	-1
	ha a halálozási ágon vagyunk				
	és 0 egyébként				

Számoljuk ki most ezzel a járadékfolyamattal – először az induktív struktúrát, majd annak segítségével – a módosított pénzügyi tőke folyamatot. Az előzőhöz hasonlóan kezdjük F_5-tel.

$$e^{-\rho} \cdot (\widetilde{w}_5 + F_5(x))^{-\gamma} \cdot \mathrm{E}\left(M_5^{-1} | \mathcal{H}_5\right) = (\widetilde{w}_4 + x)^{-\gamma} \cdot M_4^{-1}$$

Itt $\widetilde{w}_5 = -1$, viszont $\widetilde{w}_4 = 0$, hiszen ha a halálozási ágon lennénk a 4. időpontban, akkor ott a kifizetéssel megszűnne a biztosítási szerződés, és nem lenne értelmes az 5. időpontról beszélni. Most az egyenletet átrendezve kapjuk, hogy

$$F_5(x) = \frac{x}{e^{\rho/\gamma}} \mathrm{E}\left(\frac{M_4}{M_5}\middle|\mathcal{H}_5\right)^{1/\gamma} + 1$$

Most helyettesítsünk x helyére $x - G_5(x)$-et. Ekkor

$$F_5\left(x - G_5(x)\right) = \frac{x - G_5(x)}{e^{\rho/\gamma}} \mathrm{E}\left(\frac{M_4}{M_5}\middle|\mathcal{H}_5\right)^{1/\gamma} + 1$$

Ezt beírva (4.3)-ba, kihasználva, hogy G_5 mérhető $\mathcal{G}_4$-re, majd átrendezve azt kapjuk, hogy

$$G_5(x) = \frac{\mathrm{E}\left(\frac{M_4}{M_5}\middle|\mathcal{H}_5\right)^{1/\gamma} \mathrm{E}\left(\frac{M_5}{M_4}x\middle|\mathcal{G}_4\right) + e^{\rho/\gamma} \cdot \mathrm{E}\left(\frac{M_5}{M_4}\middle|\mathcal{G}_4\right)}{e^{\rho/\gamma} + \mathrm{E}\left(\frac{M_4}{M_5}\middle|\mathcal{H}_5\right)^{1/\gamma} \mathrm{E}\left(\frac{M_5}{M_4}\middle|\mathcal{G}_4\right)} = 0,083 \cdot \mathrm{E}\left(\frac{M_5}{M_4}x\middle|\mathcal{G}_4\right) + 1,09$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$\boxed{H_5(x) = 0,092 \cdot \left(x - 0,083 \cdot \mathrm{E}\left(\tfrac{M_5}{M_4}x\middle|\mathcal{G}_4\right)\right) + 0,9}$$

Ezután az előzőekhez hasonló módon rendre a következőket kapjuk:

$$F_4(x) = \left\{ \frac{x}{e^{\rho/\gamma}} \mathtt{E} \left(\frac{M_3}{M_4} \middle| \mathcal{H}_4 \right)^{1/\gamma} + 2,09 \right\} \cdot \frac{1}{1 - 0,083 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_5}{M_4}\middle|\mathcal{G}_4\right)} = 0,096 \cdot x + 2,32$$

$$F_4\left(x - G_4(x)\right) = 0,096 \cdot \left(x - G_4(x)\right) + 2,32$$

$$G_4(x) = \frac{0,096 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_3}x\middle|\mathcal{G}_3\right) + 0,096 \cdot 2,32 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_3}\middle|\mathcal{G}_3\right)}{1 + 0,096 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_3}\middle|\mathcal{G}_3\right)} = 0,086 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_3}x\middle|\mathcal{G}_3\right) + 0,25$$

$$\boxed{H_4(x) = 0,096 \cdot \left(x - 0,086 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_3}x\middle|\mathcal{G}_3\right)\right) + 2,3}$$

$$F_3(x) = \left\{ \frac{x}{e^{\rho/\gamma}} \mathtt{E} \left(\frac{M_2}{M_3} \middle| \mathcal{H}_3 \right)^{1/\gamma} + 1,25 \right\} \cdot \frac{1}{1 - 0,086 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_3}\middle|\mathcal{G}_3\right)} = 0,092 \cdot x + 1,4$$

$$F_3\left(x - G_3(x)\right) = 0,091 \cdot \left(x - G_3(x)\right) + 1,4$$

$$G_3(x) = \frac{0,092 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_3}{M_2}x\middle|\mathcal{G}_2\right) + 0,092 \cdot 1,4 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_3}{M_2}\middle|\mathcal{G}_2\right)}{1 + 0,092 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_3}{M_2}\middle|\mathcal{G}_2\right)} = 0,082 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_3}{M_2}x\middle|\mathcal{G}_2\right) + 0,15$$

$$\boxed{H_3(x) = 0,092 \cdot \left(x - 0,082 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_3}{M_2}x\middle|\mathcal{G}_2\right)\right) + 1,39}$$

$$F_2(x) = \left\{ \frac{x}{e^{\rho/\gamma}} \mathtt{E} \left(\frac{M_1}{M_2} \middle| \mathcal{H}_2 \right)^{1/\gamma} + 1,15 \right\} \cdot \frac{1}{1 - 0,082 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_3}{M_2}\middle|\mathcal{G}_2\right)} = 0,091 \cdot x + 1,28$$

$$F_2\left(x - G_2(x)\right) = 0,091 \cdot \left(x - G_2(x)\right) + 1,28$$

$$G_2(x) = \frac{0,091 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_2}{M_1}x\middle|\mathcal{G}_1\right) + 0,091 \cdot 1,28 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_2}{M_1}\middle|\mathcal{G}_1\right)}{1 + 0,091 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_2}{M_1}\middle|\mathcal{G}_1\right)} = 0,081 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_2}{M_1}x\middle|\mathcal{G}_1\right) + 0,135$$

$$\boxed{H_2(x) = 0,091 \cdot \left(x - 0,081 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_2}{M_1}x\middle|\mathcal{G}_1\right)\right) + 1,27}$$

$$F_1(x) = \left\{ \frac{1 + \Pi_0 + x}{e^{\rho/\gamma}} \mathtt{E} \left(\frac{M_0}{M_1} \middle| \mathcal{H}_1 \right)^{1/\gamma} + 1,135 \right\} \cdot \frac{1}{1 - 0,081 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_2}{M_1}\middle|\mathcal{G}_1\right)} =$$

$$= 0,106 \cdot (1 + \Pi_0 + x) + 1,27$$

$$F_1\left(x - G_1(x)\right) = 0,106 \cdot \left(1 + \Pi_0 + x - G_1(x)\right) + 1,27$$

$$G_1(x) = \frac{0,106 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_1}{M_0}(1 + \Pi_0 + x)\middle|\mathcal{G}_0\right) + 0,106 \cdot 1,27 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_1}{M_0}\middle|\mathcal{G}_0\right)}{1 + 0,106 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_1}{M_0}\middle|\mathcal{G}_0\right)} =$$

$$= 0,088 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_1}{M_0}(1 + \Pi_0 + x)\middle|\mathcal{G}_0\right) + 0,13$$

$$\boxed{H_1(x) = 0,106 \cdot \left(x - 0,088 \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_1}{M_0}(1 + \Pi_0 + x)\middle|\mathcal{G}_0\right)\right) + 1,26}$$

Most ismét az előző esethez hasonló módon számoljuk ki az **X** módosított pénzügyi tőke folyamatot. Azt persze ismét feltesszük, hogy $X_0 = 0$, és így elkezdhetjük a rekurziót:

$$X_1 = H_1(X_0) = 0,106 \cdot \left(0 - 0,088 \cdot (1 + \Pi_0 + 0) \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_1}{M_0}\Big|\mathcal{G}_0\right)\right) + 1,26 =$$
$$= 0,106 \cdot (-0,088) \cdot (1 + \Pi_0) \cdot 1,1974 + 1,26 = 1,25 - 0,01 \cdot \Pi_0$$
$$X_2 = H_2(X_1) =$$
$$= 0,091 \cdot \left(1,25 - 0,01 \cdot \Pi_0 - 0,081 \cdot (1,25 - 0,01 \cdot \Pi_0) \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_2}{M_1}\Big|\mathcal{G}_1\right)\right) + 1,27 =$$
$$= 1,37 - 0,001 \cdot \Pi_0$$
$$X_3 = H_3(X_2) =$$
$$= 0,092 \cdot \left(1,37 - 0,001 \cdot \Pi_0 - 0,082 \cdot (1,37 - 0,001 \cdot \Pi_0) \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_3}{M_2}\Big|\mathcal{G}_2\right)\right) + 1,39 =$$
$$= 1,5 - 0,0001 \cdot \Pi_0$$
$$X_4 = H_4(X_3) =$$
$$= 0,096 \cdot \left(1,5 - 0,0001 \cdot \Pi_0 - 0,086 \cdot (1,5 - 0,0001 \cdot \Pi_0) \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_4}{M_3}\Big|\mathcal{G}_3\right)\right) + 2,3 =$$
$$= 2,43 - 0,00001 \cdot \Pi_0$$
$$X_5 = H_5(X_4) =$$
$$= 0,092 \cdot \left(2,43 - 0,00001 \cdot \Pi_0 - 0,083 \cdot (2,43 - 0,00001 \cdot \Pi_0) \cdot \mathtt{E}\left(\frac{M_5}{M_4}\Big|\mathcal{G}_4\right)\right) + 0,9 =$$
$$= 1,1 - 0,000001 \cdot \Pi_0$$

Tehát a pénzügyi tőke folyamat a következő:

X_0	0
X_1	$1,25 - 0,01 \cdot \Pi_0$
X_2	$1,37 - 0,001 \cdot \Pi_0$
X_3	$1,5 - 0,0001 \cdot \Pi_0$
X_4	$2,43 - 0,00001 \cdot \Pi_0$
X_5	$1,1 - 0,000001 \cdot \Pi_0$

A módosított optimális fogyasztási folyamat meghatározása

Ismét a 12.Tételhez nyúlunk vissza, ami szerint az optimális fogyasztási folyamat a következő formula segítségével számolható:

$$c_t = \widetilde{w}_t + X_t - \mathtt{E}\left(\frac{M_{t+1}}{M_t} X_{t+1} \Big| \mathcal{G}_t\right)$$

Írjuk fel az egyes időpontokban:

$$c_0 = 1 + \Pi_0 - 0 + 0 - (1,25 - 0,01 \cdot \Pi_0) \cdot (0,987 \cdot \tfrac{1,2}{1} + 0,013 \cdot \tfrac{1}{1})$$
$$= 1,012 \cdot \Pi_0 - 0,5$$

$$c_1 = 0+0+Y_1+(1,25-0,01\cdot\Pi_0)-(1,37-0,001\cdot\Pi_0)\cdot(0,986\cdot\tfrac{1,3}{1}+0,014\cdot\tfrac{1,05}{1})$$
$$= Y_1 - 0,01\cdot\Pi_0 - 0,53$$
$$c_2 = 0+0+Y_2+(1,37-0,001\cdot\Pi_0)-(1,5-0,0001\cdot\Pi_0)\cdot(0,985\cdot\tfrac{1,35}{1,05}+0,015\cdot\tfrac{1,2}{1,05})$$
$$= Y_2 - 0,001\cdot\Pi_0 - 0,56$$
$$c_3 = 0+0+Y_3+(1,5-0,0001\cdot\Pi_0)-(2,43-0,00001\cdot\Pi_0)\cdot(0,984\cdot\tfrac{1,5}{1,2}+0,016\cdot\tfrac{1,4}{1,2})$$
$$= Y_3 - 0,0001\cdot\Pi_0 - 0,53$$
$$c_4 = 0+0+Y_4+(2,43-0,00001\cdot\Pi_0)-(1,1-0,000001\cdot\Pi_0)\cdot(0,983\cdot\tfrac{1,7}{1,4}+0,017\cdot\tfrac{1,6}{1,4})$$
$$= Y_4 - 0,00001\cdot\Pi_0 + 1,1$$
$$c_5 = 0+0+Y_5+(1,1-0,000001\cdot\Pi_0)-0$$

A piac alapú ár meghatározása

Tudjuk, hogy a Π_0 pontosan akkor piac alapú ár, ha teljesül a (2.8)-as egyenlőség, azaz a maximális elvárt hasznosság megegyezik az optimális fogyasztási folyamatra és a módosított optimális fogyasztási folyamatra.
Számoljuk most ki ezeket. Emlékeztetünk rá, hogy mi az ún. erő-hasznossági függvényt használjuk, azaz

$$U(\mathbf{c}) = \mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^{T} e^{-\rho t}\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)$$

Nézzük először az optimális fogyasztási folyamatra:

$$U(\mathbf{c}) = \mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^{T} e^{-\rho t}\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) = \sum_{t=0}^{5} e^{-t}\frac{c_t^{1/2}}{1/2} =$$
$$= 2\cdot\left(\frac{\sqrt{0,85}}{e^0}+\frac{\sqrt{0,11}}{e^1}+\frac{\sqrt{0,01}}{e^2}+\frac{\sqrt{0,001}}{e^3}+\frac{\sqrt{0,0001}}{e^4}+\frac{\sqrt{0,00001}}{e^5}\right) =$$
$$= \boxed{2,13}$$

Most pedig nézzük a módosított optimális fogyasztási folyamatra:

$$U(\mathbf{c}) = \mathtt{E}\left(\sum_{t=0}^{T} e^{-\rho t}\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) = \sum_{t=0}^{5} \frac{e^{-t}}{1/2}\mathtt{E}\left(c_t^{1/2}\right) =$$
$$= 2\cdot\left(\frac{\sqrt{1,012\cdot\Pi_0-0,5}}{e^0}+\frac{\sqrt{\mathtt{E}(Y_1)-0,01\cdot\Pi_0-0,53}}{e^1}+\right.$$
$$+\frac{\sqrt{\mathtt{E}(Y_2)-0,001\cdot\Pi_0-0,56}}{e^2}+\frac{\sqrt{\mathtt{E}(Y_3)-0,0001\cdot\Pi_0-0,53}}{e^3}+$$
$$\left.+\frac{\sqrt{\mathtt{E}(Y_4)-0,00001\cdot\Pi_0+1,1}}{e^4}+\frac{\sqrt{\mathtt{E}(Y_5)-0,000001\cdot\Pi_0+1,1}}{e^5}\right)$$

Itt $\mathtt{E}(Y_i) = p_i \cdot L_i + q_i \cdot D_i$, konkrétan:

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
$0,987$	$0,986$	$0,985$	$0,984$	1

Most már nincs más hátra, tegyük egyenlővé a két formulát, és oldjuk meg az egyenlőséget Π_0-ra. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\boxed{\Pi_0 = 0,923}$$

Vagyis 1 000 000 HUF biztosítási összegre az egyszeri biztosítási díj $\Pi_0 = 923\,000$ HUF. Ez az érték reális, ha figyelembe vesszük ρ és γ választását. Ugyanis $\gamma = 1/2$ meglehetősen alacsony kockázatkerülést jelen, más szóval a biztosítónak nagy a kockázattűrése. $\rho = 1$ pedig azt jelenti, hogy a biztósítónak viszonylag magas a türelmetlensége.

Összegzés

A dolgozat első fejezetében egy átfogó bemutatását adtam két olyan árazási eljárásnak, melyek valamilyen formában a pénzügyi piacon alapulnak. Ehhez először meghatároztam, mit értek majd pénzügyi illetve biztosítási piacon, és egy egyszerű példán azt is megmutattam, hogy ez utóbbi sajnos legtöbbször nem teljes. Ezután definiáltam – [7] terminológiáját követve – a deflátor folyamatot, és fő tulajdonságait. Emelett egy példán keresztül megmutattam, hogyan használható pénzáramok pénzügyi értékének meghatározására.

Az első árazási technika bemutatása [4]-en alapult. Ebben az esetben a kulcs egy hasznosság maximalizációs probléma megoldása, azon belül is a maximális elvárt hasznosságot adó optimális fogyasztási folyamat meghatározása volt. A piac alapú ár az a $\mathbf{\Pi}$ pénzáram, amire a maximális hasznosság invariáns, pontosabban amire a $\mathbf{w}$ járadékfolyamatra, és a $\widetilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} + \mathbf{\Pi} - \mathbf{Y}$ módosított járadékfolyamatra kapott optimális fogyasztási folyamatok esetén kiszámított maximális elvárt hasznosságok egyenlők.

A második árazási technika bemutatása [7]-en alapult. Itt a biztosítási pénzáramot pénzügyi eszközökkel replikáltuk. Determinisztikus együtthatók esetén ezt neveztük VaPo-nak, sztochasztikus együtthatók esetén pedig az együtthatókat várható értékükkel helyettesítve definiáltuk a VaPo-t. Ilyenkor a biztosítási termék ára nem más, mint a VaPo ára, azaz a pénzügyi eszközök árának lineáris kombinációja. A pénzügyi eszközök árát egy számviteli elv segítségével számíthatjuk ki.

A dolgozat második fejezetében egy életbiztosítási példán keresztül mutattam be a VaPo alkalmazását az árazásban. A példa [7] alapján készült: az éves biztosítási díjat zérókupon kötvénnyel, az elérési kifizetést egy sztochasztikus indexszel, a haláleseti kifizetést pedig egy put-opció és az előbbi sztochasztikus index segítségével helyettesítettem. De a számításokhoz magyar halálozási táblát használtam, sztochasztikus indexnek a Generali Biztosító pénzpiaci eszközalapját választottam, a zérókupon

kötvény hozamgörbéjét pedig az AKK Zrt. honlapjáról vettem.
Ezután a közgazdasági számviteli elvet használtam, ami azt jelenti, hogy a pénzügyi eszközök árának a piaci értéküket feleltettem meg. A számítások elvégzése után így már könnyen megkapható volt a Π biztosítási díj értéke.
Meg kell azonban jegyeznem, hogy az eljárás általában nehezebben kivitelezhető, mint ebben a konkrét esetben. A fő problémát ugyanis mindjárt az elején a pénzügyi eszközökből álló bázis kiválasztása okozza, ami [7] szerint nem életbiztosítási szerződésekre már nehéz feladat.

A dolgozat harmadik fejezetében ismét egy életbiztosítási példát használtam az elvárt maximális hasznosságon alapuló piac alapú ár meghatározásának bemutatására. Ehhez megadtam egy $\mathbf{w}$ járadékfolyamatot és egy $\mathbf{M}$ deflátorfolymatot. Ezután az induktív struktúra segítségével kiszámoltam mind az eredeti, mind pedig a módosított járadékfolyamat esetén a pénzügyi tőke folyamatot, majd ezek alapján az optimális fogyasztási folyamatokat.
Összehasonlítva az előző eljárással, elmondható, hogy a számolás sokkal hosszadalmasabb (főleg, ha hosszú lejáratú szerződésről van szó). Viszont nagy könnyebbség, hogy a járadékfolyamat, a deflátorfolyamat, és a biztosítási kárkifizetés-folyamat ismeretében szinte automatikusan számolható, nincs szükség az előbb említett bázisválasztásra, ami nem életbiztosítás esetén a nehézséget okozhatná.

4. fejezet

Kiegészítő fejezet matematika tanári szakhoz:

Életbiztosítás árazása középiskolában

4.1. Bevezetés

A biztosítási termékek árazása a biztosítónál az aktuárius, más szóval a biztosítási matematikus feladata. Azonban manapság egyre nagyobb igény van a társadalom felől, hogy bizonyos gyakorlati kérdések a mindennapi ember számára is érthetőek, számolhatóak legyenek. Ilyen kérdés többek között a kamat, illetve a pénz jelenértékének számítása. Ekkor pedig – mint látni fogjuk – csak a halandósági táblák ismerete és egy kis valószínűségszámítás választ el minket attól, hogy egyszerű életbiztosítások díját mi magunk is képesek legyünk meghatározni.

Nem megvalósíthatatlan tehát az ötlet, hogy egyszerű pénzügyi és biztosítási kérdésekről már középiskolában beszéljünk. És nem is példa nélküli, hiszen a kamatos kamat számítás mindenki számára jól ismert alkalmazása a százalékszámításnak. De biztosítási alkalmazás már ritkábban fordul elő, főleg olyan direkt formában, mint ahogy az *Szászné Simon Judit: Aktuáriusi számítások* ([14]) című írásában a Fazekas Mihály Gyakorlógimnázium[1] matematika portálján olvasható. Ezt a munkát tekintem dolgozatom kiindulási pontjának.

[1] Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium

Az alábbiakban először egy kitekintést adok, hogy a feladat: egy életbiztosítás árazása középiskolában, mint oktatási egység, milyen oktatási koncepció keretében valósulhatna meg. Röviden ismertetem ezeket a pedagógiai nézeteket. Ezután megkeresem a feladat kapcsolódási pontjait a mai tantervek oktatási tartalmaival, és hogy ezen tantervek alapján a tanulók milyen előismerettel rendelkeznek. Feleleveníten azokat a szükséges előismereteket, amik nélkülözhetetlenek a téma feldolgozása szempontjából. Ezután egy konkrét óravázlatot ismertetek, ami alapján úgy gondolom, a feladat középiskolában tanítható lehetne.

4.2. Oktatási koncepciók

Ambrus András – Bevezetés a matematikadidaktikába című jegyzetében – öt oktatási koncepciót különböztet meg. Ezek a realisztikus, a projektorientált, a tudományorientált, az empirikus és a mechanisztikus matematikaoktatás.
Ezek az irányzatok viszonylag könnyen elkülöníthetők egymástól főbb jellemzőik alapján. De természetesen a gyakorlatban egyikkel sem találkozhatunk tisztán. Hanem a tanár oktatási attitűdje, a diákok viszonyulása, az iskola pedagógiai programja befolyásolják, és a megvalósuló oktatási stílus a főbb irányzatokból tartalmaz elemeket több-kevesebb mértékben.

De mégis melyik oktatási koncepcióba illeszthető leginkább az életbiztosítás árazási feladat? Tekintve, hogy ez egy „valós életből vett alkalmazás”, kézenfekvő tekinteni a következőket:
Az *alkalmazásorientáció* a 80-as években erősödött meg, mintegy ellenpontként a megelőző évtized túlzottan formalizáló matematikaoktatására (New Math). Ma már kissé árnyaltabb a kép. Dienes Zoltán így fogalmaz ([10]-ben):
„Matematikán tehát valóságos strukturális összefüggéseket fogok érteni [...] Matematikatanuláson ilyen összefüggések megértését fogom érteni, szimbolizálásukkal együtt, és annak a képességnek a megszerzését, hogy az eredményül kapott fogalmakat a világban felmerülő valóságos helyzetekre alkalmazzuk.”
A másik, ami eszünkbe juthat, a manapság a kompetencia alapú oktatás miatt (is) egyre jobban terjedő *valóságközeli matematika*, amiről Ambrus Gabriella így ír ([9]-ben):
„Az oktatás jó hagyományainak megtartása mellett keresni kell azokat a lehetőségeket, amelyek ezeket kiegészítik, továbbfejlesztik, hogy a fiatalok valóban alkalmazásképes ismeretek birtokába juthassanak. [De] bármennyire is életszerű egy feladat, azért [...] a valóságos világ túl összetett ahhoz, hogy ezt az iskolában teljes bonyolultságá-

ban vizsgáljuk."
Ahogy látni fogjuk, esetünkben mindkét nézetről szó van. A kamatos kamat, és a jelenérték számítás olyan egyszerű eszközök, amik egyrészt segítséget nyújtanak a százalékszámítás elmélyítésében, másrészt kiváló, gyakran és jól használható alkalmazását adják a matematikának.
Az életbiztosításokhoz azonban szükségünk lesz egy nem (csak) matematikai fogalomrendszerre: a demográfiai adatok megértésére. Ezt csak részben nevezhetjük alkalmazásnak, ebben az esetben legalább ilyen jelentős az interdiszciplinaritás. Erre még később visszatérünk.

A matematikaoktatás főbb irányvonalai közül a realisztikus és a projektorientált matematikaoktatás a legmegfelelőbb a valóságközeli matematika tanórán történő megvalósításához. Természetesen a többi irányzat is alkalmas lehet rá kisebb mértékben, mi most mégis csak e kettővel foglalkozunk részletesebben.

4.2.1. A realisztikus matematikaoktatás

Szinte mindenkivel, aki valaha tanított matematikát, előfordulhatott, hogy valamelyik diákot hallotta így kifakadni: *„Ennek semmi értelme! Minek tanuljam meg?"* Valóban, a matematika néha tényleg „l'art pour l'art"-nak tűnhet a tanulók szemében, amitől a motivációjuk jelentősen csökkenhet. Szükség van rá tehát, hogy valamiképpen motiváljuk őket, hogy megmutassuk nekik a matematika hasznosságát. Ezért a realisztikus matematikaoktatás kezdeményezője, a holland Hans Feudenthal szerint olyan problémákból, feladatokból kell kiindulni, amik a tanulók számára érdekesek, jelentősek, ezáltal motiválóak. Másrészt viszont elvezetnek a matematikai ismeretekhez. Azonban ez nem jelent feltétlenül valóságból vett feladatot, csupán azt, hogy a feladat a diák számára jelentéssel bír.

Azonban a motiváción kívül más is indokolja, hogy a tanulókhoz közeli, konkrét, jól ismert példákból induljunk ki. Ebben az esetben ugyanis a megoldás során a tanulók aktivizálni tudják hétköznapi ismereteiket. Így a kialakítandó matematikai fogalmat hozzá tudják kötni a tapasztalathoz, az jelentéssel bíró, értelmes lesz a számukra. Ennek hiányában ugyanis az új ismeret csak értelem nélküli, bemagolt tananyag lesz.

Most [8] alapján tekintsük végig a realisztikus matematikaoktatás didaktikai alapelveit:

Kontextusba helyezés: A valódi kontextusokból kiindulva, a lényeges szempontokat kiemelve a tanulók összegyűjtik azokat az intuitív fogalmakat, melyek később alapjai lesznek az elméletnek. Fontos, hogy az adott kontextus nem csak kiindulási pontja, hanem alkalmazási területe is legyen az elsajátítandó fogalomnak.

Fokozatos matematizálás: Két irányú matematizálás történik:

- *Horizontális matematizálás*: a kontextusban rejlő matematikai probléma azonosítása. Sematizálás, összefüggések felfedezése.
- *Vertikális matematizálás*: az összefüggések bizonyítása, a modellek finomítása. Általánosítás. Az elmélet megalkotása.

Irányított (újra) felfedezés: Fontos elv, hogy a tanulás ne a kész rendszer másolata legyen, hanem irányított (újra) felfedezés. A tanulók a matematikai összefüggéseket a valóságból vett problémák megoldása révén saját maguk fedezik fel. (Vö.: konstruktivista pedagógia.)

Szociális interakciók: Mivel mindenki maga konstruálja a megoldást, így egy problémára sok, egymástól eltérő megoldást is kaphatunk. A diákok konfrontálódnak a többiek megoldásával, megtanulják értékelni a saját és mások munkáját. Ez segít felfedezni megoldásuk előnyeit, hibáit.

Absztrakció: Az új fogalmat a meglevő ismeretrendszerbe illesztve egyes tanulók észreveszik a globális összefüggéseket, esetleg a formalizációra is képesek lesznek. Ez azonban nem mindenkinél következik be.

4.2.2. A projektorientált matematikaoktatás

Valójában a csoportmunka alapú oktatásszervezés egyik módszeréről, a projektmódszerről van szó. Bár kétségkívül sokkal komplexebb, mint egy szokásos pedagógiai módszer.

A munka menete, hogy a tanulók csoportokat alakítanak, kiválasztanak egy témát (célszerű, hogy ne a tanár jelölje ki – persze ő vetheti fel a lehetőségeket), amit meghatározott idő alatt feldolgoznak, és előre egyeztetett formában bemutatják az eredményeket.

A módszer lényege, hogy nem annyira a szaktárgy előírt ismeretanyagára, sokkal inkább a tanulók érdeklődésére fókuszál. Jellemzően valamely, a tanulók környezetében felvetődő problémát állít a középpontba. Továbbá gyakori a tantárgyi integráció, azaz a probléma megoldásához több tantárgy ismeretanyaga is szükséges.

Fontos eleme a módszernek a nagy fokú tanulói autonómia. A tanár nem irányít, hanem a háttérbe vonul, és onnan segít, ha szükség van rá. A beszámoló is az egész közösség előtt történik, a tanár a munka értékelését is az egész csoporttal együtt beszéli meg. Jellemző a projekt végén a csoport önreflexiója.

Látható tehát, hogy a módszer kiválóan alkalmas hétköznapi problémák felvetésére, mint például a hitelek, kamatok, biztosítások. Sőt, életbiztosítások esetén a projektmódszer még egy lehetőséggel szolgál: ez a tantárgyi integráció. Ahogy korábban már írtam, a demográfiai fogalmak, diagramok értelmezése nem csak matematikai feladat. Jellemzően ugyan matematikaórán is előkerül, a statisztika témakörében, de ezen kívül fontos eleme a földrajz, a társadalomismeret, az állampolgári ismeretek, és a történelem tantárgyaknak is.
A dolgozatban nem mutatok példát egy demográfiai témát feldolgozó projekt összeállítására (tekintettel arra, hogy nincs tapasztalatom ezen tantárgyak együttműködési lehetőségeiről). De hangsúlyozom, hogy ha mód van rá, érdemes lehet a később részletezett óravázlatom előtt, vagy azzal párhuzamosan egy ilyen projekt-munka elkészítése.

4.3. A téma elhelyezése a tantervekben

4.3.1. Nemzeti Alaptanterv (NAT)

A Nemzeti Alaptanterv egy szabályozó típusú, úgynevezett magtanterv. A jelenleg hatályos, 2007-ben kiadott verziójában nem a gyerekekkel szembeni követelményeket, hanem az iskola fejlesztési feladatait fogalmazza meg. Bevezetésre kerültek benne a kulcskompetenciák, amiket a NAT általánosan így határoz meg:
„A kulcskompetenciák azok a kompetenciák, amelyekre minden egyénnek szüksége van személyes boldogulásához és fejlődéséhez, az aktív állampolgári léthez, a társadalmi beilleszkedéshez és a munkához."
A kompetenciák nem egymástól függetlenek, összefonódnak. Sőt, a fejlesztési feladatokkal is egymásra épülnek. Több olyan kompetencia van, például a kreativitás, problémamegoldó képesség, stb., amiket mindegyik kulcskompetencia tartalmazza.

A *matematikai kompetencia* egyike a kilenc kulcskompetenciáknak. Erről így ír a NAT:
„A matematikai kompetencia a matematikai gondolkodás fejlesztésének és alkalmazásának képessége, felkészítve ezzel az egyént a mindennapok problémáinak megoldá-

sára is. A kompetenciában és annak alakulásában a folyamatok és a tevékenységek éppúgy fontosak, mint az ismeretek. A matematikai kompetencia - eltérő mértékben - felöleli a matematikai gondolkodásmódhoz kapcsolódó képességek alakulását, használatát, a matematikai modellek alkalmazását (képletek, modellek, struktúrák, grafikonok/táblázatok), valamint a törekvést ezek alkalmazására."

A Nat a matematika műveltségterületen a következő fejlesztési területeket emeli ki (külön jelzem a jelen feladathoz kapcsolódó fejlesztési egységeket, amiket a NAT-ból idézek, és ahol szükséges, röviden utalok arra is, hogy ezek miként jelennek meg a dolgozat témájaként megjelölt árazási feladat során):

1. Tájékozódás térben, időben és a világ mennyiségi viszonyaiban:

   - A múlt, jelen, jövő megértése adott időpillanatban.
   - A múlt, jelen, jövő mint folytonosan változó fogalmak.
   - Folyamat mozzanatainak időbeli elrendezése.

   A feladatban direkt módon megjelenik az idő: a kamatozás illetve a jelenérték számításánál. Továbbá az életbiztosítás díját is a „jelenből nézve" határozzuk meg, míg a kifizetés a jövőben lesz aktuális.

2. Megismerés (tapasztalatszerzés, képzelet, emlékezés, gondolkodás, ismeretek rendszerezése, ismerethordozók használata):

   - Változó helyzetek, időben lejátszódó történések megfigyelése; a változás kiemelésének tudása (analízis); az időbeliség tudatosítása.
   - Matematikai modellek választása, keresése, készítése, értelmezése adott szituációkhoz.
   - Statisztikai diagramok értelmezése.
   - Matematikai modellek megértése; átkódolás más modellbe.
   - A valószínűségi gondolkodás fejlesztése. A statisztikai gondolkodás fejlesztése.
   - Megismert gondolatmenet panelként való felhasználása új folyamatban.
   - Táblázatok használata.

3. Ismeretek alkalmazása:

   - Friss vagy felfrissített ismeretek, információk, felismerések közvetlen alkalmazása.

- Ismeretek alkalmazása az újabb ismeretek megszerzésében.
- Ismeretek alkalmazása a gyakorlati életben és más tantárgyak keretében (pl. százalék, kamatos kamat, stb.).

4. Problémakezelés és -megoldás:

   - Szituációban, történetben megfogalmazott, olvasott probléma megértése.
   - A problémához illeszthető matematikai modell választása, keresése, alkotása.
   - Megoldás a matematikai modellen belül.
   - Az eredmény összevetése a feltételekkel, az előre vetített eredménnyel, a valósággal.

5. Alkotás és kreativitás: alkotás öntevékenyen, saját tervek szerint; alkotások adott feltételeknek megfelelően; átstrukturálás:

   - Elnevezések, megállapodások, jelölések értése, kezelése.
   - Sejtések megfogalmazása; divergens gondolkodás.

6. Akarati, érzelmi, önfejlesztő képességek és együttéléssel kapcsolatos értékek (kommunikáció, együttműködés, motiváltság, önismeret, önértékelés, reflektálás, önszabályozás):

   - A világ megismerésének igénye.
   - A matematika értékeinek és eredményeinek megismerésére való igény.

   Ez a fejlesztési szempont szorosan nem kapcsolódik a témához, viszont az itt fel nem sorolt kompetenciák (például közös munka, vitakészség, önismeret, stb.) is nagy jelentőséggel bírnak. Ezek természetesen meg kell, hogy jelenjenek az óraszervezésben.

7. A matematika épülésének elvei:

   - Modellek alkotása a matematikán belül; matematikán kívüli problémák modellezése.

4.3.2. Kerettantervek

A kerettantervek és a helyi tantervek – a NAT-hoz hasonlóan – szintén szabályozó típusú, úgynevezett szűkebb értelemben vett tantervek. A helyi tantervek általában valamelyik kerettantervet veszik alapul, ezért én itt most csak ez utóbbival foglalkozom részletesebben.
Általános jellemzőjük, hogy három alappillérük a célok (azaz a tantárgy tanításának elvi alapjai), a követelmények (a tanulók elé állított, mérhető teljesítménykritériumok) és a tananyag. Felépítésükben évfolyamonként tagolódnak. Megadják az óraszámot, ezen kívül tartalmazhatnak megfontolásokat a módszerekre, az értékelésre, az eszközökre (pl. tankönyv), de ezek nem részletesek.

A [11] kerettantervek által megfogalmazott célok közül egyet emelek ki, ezzel is hangsúlyozva a választott feladat időszerűségét, és az oktatási folyamatba való illeszthetőségét:
„A matematika a maga hagyományos és modern eszközeivel segítséget ad a természettudományok, az informatika, a technikai, a humán műveltségterületek, szakközépiskolákban a választott szakma ismeretanyagának tanulmányozásához, a mindennapi problémák értelmezéséhez, leírásához és kezeléséhez, gazdasági, pénzügyi kérdések áttekintéséhez, helyes döntések meghozatalához."

Most röviden áttekintem, hogy miként alakul a kerettanterv által előírt tananyag a választott feladat szempontjából.

Fejlesztési feladatok, tevékenységek	**Tartalom**	**A továbbhaladás feltételei**
	6. évfolyam	
	Számtan, algebra	
Egyenes és fordított arányosság felismerése gyakorlati jellegű feladatokban és a természettudományos tárgyakban. A következtetési képesség fejlesztése.	Egyenes és fordított arányosság. A százalék fogalma, alap, százalékláb, százalékérték. Egyszerű százalékszámítás arányos következtetéssel.	A mindennapi életben felmerülő egyszerű, konkrét arányossági feladatok megoldása következtetéssel.

7. évfolyam

Számtan, algebra

Következtetési képesség fejlesztése összetettebb feladatokban.	Arány, aránypár, arányos osztás gyakorlati esetekben. Százalékszámítási és egyszerű kamatszámítási feladatok.	Egyenes és fordított arányosság felismerése és alkalmazása egyszerű konkrét feladatokban. Egyszerű százalékszámítási feladatok.

8. évfolyam

Összefüggések, függvények, sorozatok

	Sorozatok és vizsgálatuk (mértani sorozat).	

9. évfolyam

Számtan, algebra

Algoritmikus gondolkodás és a gyakorlati problémák modellezése, értő szövegolvasás.	Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása. Egyenletrendszerre vezető szöveges feladatok, százalékszámítás, kamatszámítás. Gazdaságosság, veszteség, nyereség elemzése a feladatok kapcsán.	Egyszerű egyenletrendszerek biztos megoldása. A százalékszámítás alkalmazása a gyakorlatban.

Valószínűségszámítás, statisztika

A statisztikai adatok helyes értelmezése. Képi információ és a matematikai tartalom kapcsolata.	Statisztikai adatok és ábrázolásuk (kördiagram, oszlopdiagram stb.), számtani közép, medián, módusz; szórás. Környezetvédelmi, népesedési, fogyasztásról szóló adatok szerepeltetése.	Számsokaság számtani közepének kiszámítása, a középső érték (medián) és a leggyakoribb érték (módusz) ismerete. Kördiagram, oszlopdiagram adatainak értelmezése.

10. évfolyam

Valószínűségszámítás, statisztika

A valós helyzetek értelmezése, megértése és értékelése. Kísérletek elvégzése és számítógépes modellezése.	Valószínűségi kísérletek. A valószínűség szemléletes fogalma, kiszámítása egyszerű esetekben.	Egyszerű problémák megoldása a klasszikus valószínűségi modell alapján.

11. évfolyam

Valószínűségszámítás, statisztika

Modellalkotásra nevelés.	Relatív gyakoriság. A valószínűség klasszikus modellje.	A relatív gyakoriság és a valószínűség közötti szemléletes kapcsolat ismerete, egyszerű valószínűségi feladatok megoldása.

12. évfolyam

Függvények, sorozatok

A matematika alkalmazása a gyakorlati életben. Matematikatörténeti feladatok. Egyszerű gazdaságossági problémák áttekintése.	A sorozat fogalma. Számtani és mértani sorozat, az n. tag, az első n elem összege. Kamatoskamatszámítás.	Számtani és mértani sorozat esetén az n-dik tag, és az első n elem összegének kiszámítása feladatokban. Kamatoskamat-számítás alkalmazása egyszerű gyakorlati feladatokban.

Ez alapján úgy gondolom, hogy az alábbiakban részletesebben vázolt életbiztosítás árazási feladat legkorábban 10. osztályban, de 11. osztályban már mindenképpen elmondható. Mint látható, a kerettanterv alkotói szerint is 12. osztályban lehet egyszerű gazdasági problémákkal is foglalkozni. Én ehhez a gondolathoz kapcsolódva egy 12. osztályos óratervet írok le a dolgozatomban.

A következő szakaszban a szükséges elméleti háttérrel foglalkozom.

4.4. Szükséges előismeretek

4.4.1. Százalékszámítás

A *százalék* valójában századrészt jelent. Jelölése: %.
Az eredeti mennyiséget, a teljes egészet 100%-nak mondjuk, és *alap*nak (vagy *összeg*nek) nevezzük. Azt a számot, ahány százalékról van szó, *százalékláb*nak, az alap valahány százalékát pedig *százalékérték*nek nevezzük.
Ez alapján a következő egyszerű összefüggés írható fel:

$$\text{százalékérték} = \frac{\text{alap} \cdot \text{százaléksláb}}{100}.$$

Ebből azonnal látszik, hogy százalékszámítás esetén háromféle alapfeladat írható fel:

- Adott alapból és adott százaléklábból a százalékérték kiszámítása.
- Adott alapból és adott százalékértékből a százalékláb kiszámítása.
- Adott százaléklábból és adott százalékértékből az alap kiszámítása.

4.4.2. Mértani sorozat

A *mértani* (vagy *geometriai*) *sorozat* olyan $(a_n)_{n=1,\ldots}$ számsorozat, amelyben a második tagtól kezdve minden tag az őt megelőző q-szorosa. Másképpen megfogalmazva, ha $a_1 \neq 0$ és $q \neq 0$, akkor mértani sorozatnak azt a sorozatot nevezzük, melyben az egymást követő tagok *hányadosa* (vagy *kvóciense*) állandó – ezt a hányadost jelöljük q-val.
Nyilvánvaló, hogy

- ha $q = 0$, akkor a sorozat a második tagtól kezdve azonosan 0;
- ha $q = 1$, akkor a sorozat minden tagja egyenlő lesz a_1-gyel;
- ha $q > 0$, akkor a sorozat minden tagja azonos előjelű, ha $q < 0$, akkor pedig váltakozó előjelűek a tagok;
- ha $a_1 > 0$ és $q > 1$, akkor a sorozat szigorúan monoton növekedő, míg ha $0 < q < 1$, akkor a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

Állítás. Pozitív tagokból álló mértani sorozatban bármely három egymás után álló tag közül a középső a két szélső mértani közepe. Sőt általában is, bármely tag a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő tagok mértani közepe.

Állítás. Váltakozó előjelű tagokból álló mértani sorozatban bármely három egymás után álló tag közül a középső négyzete egyenlő a két szélső szorzatával. Sőt általában is, bármely tag négyzete egyenlő a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő tagok szorzatával.

Állítás (Az n-edik tag meghatározása). Ha a mértani sorozat első tagja a_1, és hányadosa q, akkor az n-edik tagok a következőképpen kaphatjuk meg:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Tétel (Az első n tag összege). Ha a mértani sorozat első tagja a_1, és hányadosa $q \neq 1$, akkor az első n tag összegét a következőképpen kaphatjuk meg:

$$S_n := a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

4.4.3. Valószínűségszámítás: klasszikus valószínűségi modell

Legyen A egy *véletlen esemény*. Végezzük el ugyanazt a kísérletet azonos körülmények között n-szer. Ha ekkor az A esemény k-szor következett be (és nyilván $n-k$-szor nem következett be), akkor a k számot az A esemény *gyakoriságá*nak, a $\frac{k}{n}$ számot pedig a *relatív gyakoriságá*nak nevezzük.
Megfigyelhetjük, hogy a kísérletek számának növelésével a relatív gyakoriság ingadozása csökken. Azt a számot, amit az n növelésével a relatív gyakoriság egyre jobban megközelít, szemléletesen az A esemény *valószínűségé*nek nevezzük.
Egy kísérlet lehetséges kimeneteleit *elemi esemény*eknek nevezzük. Az elemi események halmaza az *eseménytér*, a kísérlet eseményei az eseménytér részhalmazai.
*Lehetetlen esemény*nek nevezzük azt az eseményt, ami nem következhet be, *biztos esemény*nek pedig azt, ami biztosan bekövetkezik.

Definíció. *Klasszikus valószínűségi modell*nek nevezzük azt az esetet, amikor véges sok, egyenlően valószínű elemi eseményünk van. Ebben a modellben *kedvező*nek nevezzük azokat az elemi eseményeket, amik a vizsgált esemény bekövetkezését eredményezik. (Azaz az előbbi fogalmakkal azokat az elemi eseményeket, amik elemei az eseménytér vizsgált eseményünkhöz tartozó részhalmazának.) Ilyenkor a vizsgált A esemény valószínűsége a következőképpen számolható:

$$\mathcal{P}(A) := \frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi esemény száma}}$$

Definíció. Legyenek A és B véletlen események. Ekkor

- az A esemény *komplementer eseménye* $\overline{A}$, ami pontosan akkor következik be, ha A nem következik be;
- az A és B *események összege* $A+B$, ami pontosan akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik bekövetkezik;
- az A és B *események különbsége* $A-B$, ami pontosan akkor következik be, ha A bekövetkezik, de B nem következik be;
- az A és B *események szorzata* $A \cdot B$, ami pontosan akkor következik be, ha A és B is bekövetkezik.
- Azt mondjuk, hogy A és B *kizáró események*, ha szorzatuk a lehetetlen esemény.

Állítás. A valószínűség tulajdonságai:

- Tetszőleges A esemény esetén $0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1$,
  és nyilván a lehetetlen esemény valószínűsége 0, a biztos eseményé pedig 1.
- Ha A és B kizáró események, akkor $\mathcal{P}(A+B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$,
  általában pedig $\mathcal{P}(A+B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cdot B)$.
- Tetszőleges A eseményre $\mathcal{P}(\overline{A}) = 1 - \mathcal{P}(A)$.

Definíció. Tetszőleges A és B esemény esetén tekintsük az A esemény bekövetkezésének valószínűségét, ha tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezett. Ezt az A esemény B feltételre vonatkozó *feltételes valószínűség*ének nevezzük, és így számolhatjuk:

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cdot B)}{\mathcal{P}(B)},$$

vagy ekvivalens alakban

$$\mathcal{P}(A \cdot B) = \mathcal{P}(A|B) \cdot \mathcal{P}(B).$$

Definíció. Azt mondjuk, hogy az A és B események egymástól *függetlenek*, ha

$$\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(A).$$

Ekkor a fenti szorzási szabály így egyszerűsödik:

$$\mathcal{P}(A \cdot B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B).$$

Definíció. Egy X diszkrét, véges valószínűségi változó, értékei legyenek $x_1, x_2, \ldots,$ x_n, és az X valószínűségi változó az x_i-t p_i valószínűséggel vegye fel. Ekkor az X valószínűségi változó *várható érték*e:

$$\mathtt{E}(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$

*szórásnégyzet*e pedig a várható értéktől való várható négyzetes eltérés, azaz

$$D^2(X) = \mathtt{E}\Big(\big(X - \mathtt{E}(X)\big)^2\Big)$$

4.5. Életbiztosítás árazása középiskolában

Ebben a szakaszban egy hét órából álló óratervet írok le, ami egy lehetőség a középiskolában életbiztosítás árazási feladat bevezetésére. Azzal a feltevéssel élek, hogy a diákok 12. osztályosak, vagy legalábbis rendelkeznek az előző szakaszban részletezett előismeretekkel. Bár a fontosabb fogalmakat átismételjük, ezeket nem olyan alapossággal tesszük, mintha most tanítanám meg a tanulóknak ezeket az anyagrészeket. Így tehát elképzelhető ez az anyagrész a törzsanyagba építve, mint kiegészítő fejezet, de elképzelhető a tanórától függetlenül, például szakkör formájában is.

4.5.1. Első óra - A kamat

A ráhangolódást segítő bevezető feladattal kezjük az órát. Mivel most elsődleges célunk a korábbi, százalékszámítással kapcsolatos ismeretek aktiválása, ezért tekintsünk egy egyszerű arányos feladatot.

1. feladat Egy könyv ára eredetileg 3500 Forint volt. Most lecsökkentik az árát a 3/5-öd részére. Mennyi az új ár? Mekkora az árcsökkenés? Fogalmazd meg százalékok segítségével is!

Megoldás A könyv új ára $3500 \cdot 3/5 = 2100$ forint. A megtakarítás $3500 - 2100 = 1400$ Forint. (Vagy másképpen az eredeti ár $1 - 3/5 = 2/5$ része, azaz $3500 \cdot 2/5 = 1400$ Forint.)
Százalékokkal megfogalmazva: az új ár az eredeti $\frac{2100}{3500} \cdot 100 = \frac{3}{5} \cdot 100 = 60\%$-a, a megtakarítás $\frac{2}{5} \cdot 100 = 40\%$ (vagy másképpen $100\% - 60\% = 40\%$).

Ez valóban egy igen egyszerű feladat, mégis lehetőséget ad rá, hogy a százalékról tanultakat átismételjük. A feladat megbeszélése közben érdemes közösen felírni a százalékszámításra tanult formulá(ka)t, hogy ezt rögzítsük.

2. feladat Egy ruha ára eredetileg 8400 Forint volt. Ezt először megemelték 25%-kal, majd később az új árat 40%-kal csökkentették. Mennyi az új ár? Ez az eredeti ár hány százaléka? Hogyan tudnál erre a kérdésre válaszolni anélkül, hogy kiszámolnád az új árat?

Megoldás A ruha ára az áremelés után $8400 \cdot 1,25 = 10500$ Forint. Ezt csökkentik, így a végleges ár $10500 \cdot 0,6 = 6300$ Forint. Ez az eredeti ár $\frac{6300}{8400} \cdot 100 = 75\%$-a. Ezt onnan is láthatjuk, hogy az árváltozás összesen $1,25 \cdot 0,6 = 0,75$-szörös.

Ez egy összetettebb feladat volt, ami arra adott lehetőséget, hogy tudatosítsuk, ha a változás százalékos alakban adott, bizony oda kell figyelni, mi is az aktuális százaláláb alapja. A feladat másik hozadéka pedig, hogy iterált százalékszámításnál a százalékok összeszorzódnak.

Ha mindenkinek kellőképpen világos már a százalékszámítás, akkor rá is térhetünk a kamat fogalmára.

Definíció. A *kamat* mindig egy pénzösszeg, amit a bérbevevő fizet a bérbeadónak a kölcsön névértéke alapján. A *kamatláb* a kamat névértékre vetített százalékos formája, azaz

$$\text{kamatláb} = \frac{\text{kamat}}{\text{tőke}} \cdot 100$$

Érdemes ilyenkor beszélni a gyerekekkel arról, hogy vajon miért van szükség a kamatra. Nem szükséges feltétlenül fórumot szervezni, bár ezt is megtehetjük. Ha a gyerekek kellőképpen motiváltak (esetleg előző órán feladtuk, hogy nézzenek utána befektetések és hitelek kamatainak), akkor biztosan lesz egy-két jó ötletük.
Egyszerűen megfogalmazva arról van szó, hogy a bérbeadó a pénzösszeg kölcsönadásával elveszíti a lehetőséget, hogy azt befektesse. Ennek kompenzálására fizeti a bérbevevő a kamatot. De nyilván más helyes gondolatok is vannak, ezt mindig tartsuk szem előtt! (Például a kamatnak kell fedeznie a bérbeadás költségeit, stb.)

A fenti formulából azonnal látszik, hogy a kamattal „úgy kell számolni, mint a százalékkal”. Valóban, éppen erről van szó. Ezért is olyan népszerű gyakorlati példa, hogy minden érettségiben van egy kamatszámító feladat. Nézzünk mi is néhány feladatot.

3. feladat Egy banki hirdetésben azt látjuk, hogy egy éves lekötés esetén évi 10%-os kamatot fizet. Ha úgy döntünk, hogy lekötünk 500000 Forintot, mennyi pénzünk lesz egy év múlva?
Ha most ugyanez a bank két éves lekötés esetén évi 11%-os kamatot fizet, és inkább itt kötjük le az 500000 Forintot, mennyi pénzünk lesz két év múlva?

Ha ez problémát jelenthet, esetleg érdemes rákérdezni, mindenki érti-e, hogy a 10%-os kamat azt jelenti, hogy a kamatláb 10%. (Ez a szóhasználatbeli kettősség talán zavaró lehet, viszont a hétköznapi szövegekben is így használjuk. Ezért érdemes rávezetni a gyerekeket, hogy a szövegkörnyezet alapján kiderül, milyen értelemben használjuk a kamat szót.)

Megoldás Az első esetben egy év múlva $500000 \cdot 1,1 = 550000$ Forintunk lesz. A második esetben egy év után $500000 \cdot 1,11 = 555000$ Forintunk, majd a második év végén $555000 \cdot 1,11 = 616050$ Forintunk lesz.
Másik megoldás, hogy kiszámoljuk az éves kamatot, majd hozzáadjuk a tőkéhez. A második esetben ezzel az új tőkével számolunk tovább.

Most viszonylag könnyen tudtunk számolni, de kérdezzük meg a gyerekeket, mi lett volna, ha nem kettő, hanem mondjuk húsz évre kötöttük volna le a pénzünket. Ha ugyanezt a gondolatmenetet követjük, akkor húsz szorzást (vagy húsz szorzást és húsz összeadást) kéne elvégeznünk. Hogyan lehetne ezt egyszerűbben? Biztosan lesz olyan, aki emlékszik a 2. feladatra. Az alapján ugyanis a következőt kapjuk (a kamatlábat tizedestört alakba írva, és i-vel jelölve):

$$V_n = \Big(\dots \underbrace{\big(\underbrace{V_0 \cdot (1+i)}_{V_1} \big) \cdot (1+i)}_{V_2} \dots \Big) \cdot (1+i) = V_0 \cdot (1+i)^n$$

Ezt az összefüggést nevezzük *kamatos kamat*nak. Érdemes megemlíteni (bár ezt most nem fogjuk kihasználni), hogy ez tulajdonképpen egy mértani sorozat, melynek kezdőeleme V_0, a kezdőtőke, és hányadosa $q = (1+i)$.
Ez alapján már könnyen meg tudjuk oldani a következő feladatokat.

4. feladat 100000 Forintot szeretnénk befektetni 10 évre. Az alábbi lehetőségek közül választhatunk:
1) lekötjük évi 8%-os kamatra;
2) betesszük évi 15%-os kamatra, ami kétévente 3%-kal csökken;
3) minden évben fix 10000 Forintot kamatozik.
Melyik lehetőséget válasszuk?

Megoldás Az első esetben a tizedik év végén $100000 \cdot 1,08^{10} = 215893$ Forintot kapunk kézhez. A második esetben $100000 \cdot 1,15^2 \cdot 1,12^2 \cdot 1,09^2 \cdot 1,06^2 \cdot 1,03^2 = 234948$ Forintot, míg a harmadik esetben $100000 + 10 \cdot 10000 = 200000$ Forintot kapunk. Ezek alapján a második lehetőség éri meg a legjobban.

5. feladat Egy évre szeretnénk lekötni a pénzünket. Melyik a legelőnyösebb?

1) Ha a pénzt évi 21%-os kamatra tesszük be, és évenként tőkésítenek.
2) Ha a pénzt évi 20%-os kamatra tesszük be, és félévenként tőkésítenek.
3) Ha a pénzt évi $19,5$%-os kamatra tesszük be, és havonta tőkésítenek.
4) Ha a pénzt évi 20%-os kamatra tesszük be, és naponta tőkésítenek.

Megoldás Az első esetben a pénzünk $1,21$-szeresét kapjuk kézhez egy év után. A második esetben $(1+\frac{0,2}{2})^2 = 1,21$-szeresét, a harmadik esetben $(1+\frac{0,195}{12})^{12} = 1,213$-szeresét, míg a negyedik esetben $(1+\frac{0,2}{365})^{365} = 1,221$-szeresét kapjuk. Ez alapján a negyedik eset a legelőnyösebb.

Ez utóbbi feladatnak két tanulsága van. Az egyik, hogy ha nem ismerjük a tőkét, akkor is meg tudjuk mondani, melyik lehetőség hozama nagyobb. A másik pedig, hogyan kell áttérni éves kamatról más időszakú kamatlábakra.

4.5.2. Második óra - Gyűjtés és törlesztés

Az előző alkalommal megtanultuk a kamatos kamatra vonatkozó formulát. A mostani alkalommal hasonló, de kicsit bonyolultabb feladatokat nézünk.

1. feladat Egy bank évi 12%-os kamatot ad. Mi három éven keresztül, minden év elején beteszünk a bankba 100000 Forintot. Mennyi pénzünk lesz a harmadik év végén?

Megoldás Az első év végén $100000 \cdot 1,12 = 112000$ Forintunk lesz. Most beteszünk ehhez még 100000-et, így a második év elején 212000 Forintunk van a bankban. Ez kamatozik, év végére $212000 \cdot 1,12 = 237440$ Forintunk lesz. Harmadik év elején megint berakunk 100000-et, így a 337440 Forint kamatozik tovább. A harmadik év végére 377932 Forintunk lesz.

Megint hasonló eset áll fenn, mint a kamatos kamat esetében. Három évre ez még könnyen számolható, de mi lenne, ha húsz évig gyűjtenénk a pénzt a bankban. Jó volna megint találni valami egyszerűbb formulát, amivel könnyen lehet számolni. Írjuk fel ezért általánosabban: jelölje S_n az n-edik év végére összegyűlt pénzt (majd mindjárt meglátjuk, miért ezt a jelölést választottam), és legyen az évente befizetett összeg V, ekkor

$$\begin{aligned}
S_1 &= V \cdot (1+i) \\
S_2 &= \big(V + V \cdot (1+i)\big) \cdot (1+i) = V \cdot (1+i) + V \cdot (1+i)^2 \\
S_3 &= \Big(V + \big(V + V \cdot (1+i)\big) \cdot (1+i)\Big) \cdot (1+i) = V \cdot (1+i) + V \cdot (1+i)^2 + V \cdot (1+i)^3 \\
&\vdots \\
S_n &= V \cdot (1+i) + V \cdot (1+i)^2 + V \cdot (1+i)^3 + \ldots + V \cdot (1+i)^n
\end{aligned}$$

Nos, ez már legalább egy világos formula, de ettől még n darab hatványozást kell elvégezni benne, ami nagy n-re továbbra is nehézkessé teszi a számolást. Észrevehetjük azonban, hogy az összeg tagjai most éppen egy $V \cdot (1+i)$ kezdőtagú, és $(1+i)$ hányadosú mértani sorozat egymást követő elemei. Arról pedig tudjuk (ha nem, akkor röviden ismételjük át), hogy mértani sorozat első n tagjának összege így számolható:

$$S_n := a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Ez alapján a fenti összeget is zárt alakra hozhatjuk. Ezt nevezzük *gyűjtőjáradék*nak.

$$S_n = V \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

2. feladat Elhatároztuk, hogy autót vásárolunk, ezért takarékoskodni szeretnénk. Egy bankba tesszük a pénzünket, minden év elején ugyanannyit. A bank évi 11% kamatot fizet. Mennyi pénzt tegyünk évente a bankba, ha öt év múlva szeretnénk megvenni egy 3100000 Forint értékű autót?
És ha csak évi 250000 Forintot tudunk betenni a bankba, akkor mennyi idő alatt jön össze az autó ára?

Megoldás Írjuk fel a gyűjtőjáradék formuláját: $3100000 = V \cdot 1,11 \cdot \frac{1,11^5 - 1}{0,11}$. Ezt átrendezve kapjuk, hogy $V = 448440$ Forintot kéne évente betenni a bankba.
A második kérdéshez ismét írjuk fel a gyűjtőjáradék formuláját: $3100000 = 250000 \cdot 1,11 \cdot \frac{1,11^n - 1}{0,11}$. Ezt átrendezve kapjuk, hogy $1,11^n = 2,23$. Innen mindkét oldal logaritmusát véve kapjuk, hogy $n = 7,68$, tehát legalább 8 évig kéne takarékoskodnunk.

Eddig mindig olyan esetet néztünk, amikor mi „adtunk kölcsön” a banknak, ezért mi kaptuk a kamatot. Most nézzünk egy olyan esetet, amikor a bank ad kölcsönt, és nekünk kell törleszteni.

3. feladat 1000000 Forint hitelt vettünk fel, évi 20%-os kamatra. Az első két évben 350000 Forintot törlesztettünk vissza évente. (Ez azt jelenti, hogy az első két év végén törlesztettünk.) Mennyi tartozásunk maradt még?

Megoldás Első év végén $1000000 \cdot 1,2 = 1200000$ Forint tartozásunk volt, ebből fizettünk vissza 350000 Forintot, így maradt 850000 Forint tartozásunk. Ez a kamattal együtt a második év végére $850000 \cdot 1,2 = 1020000$ Forintra nőtt, amiből ismét törlesztettünk 350000 Forintot. Tehát most (a második év végén) még 670000 Forint hiteltartozásunk van.

Az eddigiek alapján gyaníthatjuk, hogy most is fel lehet írni a számolást egy zárt formulában. Próbáljuk meg felírni általánosan. Jelölje T_n az n-edik év végén megmaradó tartozásunkat, t a felvett hitel összegét, a pedig az éves törlesztőrészletet. (Nyilván $a < t$.) Ekkor

$$\begin{aligned}
T_0 &= t \\
T_1 &= t \cdot (1+i) - a \\
T_2 &= \big(t \cdot (1+i) - a\big) \cdot (1+i) - a = t \cdot (1+i)^2 - a \cdot (1+i) - a \\
&\vdots \\
T_n &= t \cdot (1+i)^n - a \cdot (1+i)^{n-1} - \ldots - a \cdot (1+i) - a
\end{aligned}$$

Megint észrevehetjük (nagy valószínűséggel ezt már a gyerekek maguktól is észreveszik), hogy az első tagot nem tekintve megint egy mértani sorozat első n tagjának az összege áll itt. A mértani sorozat első tagja $-a$, hányadosa $(1+i)$. Ekkor az ismert összegképlet szerint

$$T_n = t \cdot (1+i)^n - a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

4. feladat 1000000 Forint hitelt vettünk fel, évi 20%-os kamatra. Mennyi a törlesztőrészlet, ha a futamidő 20 év?

Illetve mennyi idő alatt tudjuk visszatörleszteni a hitelt, ha évi 350000 Forintot törlesztünk?

Megoldás Ilyenkor természetesen úgy tekintjük, hogy abban az évben, mikor teljesen visszafizettük a hitelt, $T_n = 0$ lesz.

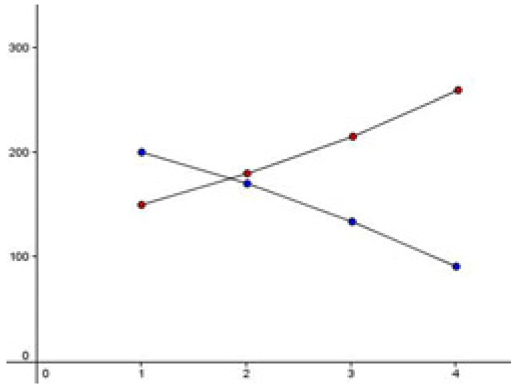
Írjuk fel tehát a formulát, most először $T_{20} = 0$-ra: $0 = 1000000 \cdot 1,2^{20} - a \cdot \frac{1,2^{20}-1}{0,2}$. Ezt átrendezve azt kapjuk, hogy $a = 205357$ Forint a törlesztőrészlet.

A második kérdés esetén ismét írjuk fel a formulát $T_n = 0$-ra (most n a kérdés). Ekkor $0 = 1000000 \cdot 1,2^n - 350000 \cdot \frac{1,2^n-1}{0,2}$. Átrendezve kapjuk, hogy $750000 \cdot 1,2^n = 1750000$, azaz $n = 4,65$, vagyis 350000 Forint törlesztőrészlet mellett öt év alatt fizetnénk vissza a teljes kölcsönt.

Óra végén, ha marad idő, még egy érdekes feladatot megbeszélhetünk.

5. feladat (szorgalmi) 1000000 Forint hitelt vettünk fel, évi 20%-os kamatra. Ha évi 350000 Forintot törlesztünk, az előbb láttuk, hogy 5 év alatt fizetnénk vissza a hitelt. Azt viszont láttuk a 3. feladatban, hogy az első évben alig csökkent a hiteltartozás, mert a törlesztőrészlet nagy része a kamat kiegyenlítésére fordítódott. Vajon mikortól kezdve fordítódik nagyobb része a törlesztőrészletnek a tőke csökkentésére, mint a kamatra? Először tippelj! Utána ábrázold két grafikonon, hogy az n-edik évben a törlesztés hogyan oszlik meg!

Megoldás



4.5.3. Harmadik óra - Jelenérték-számítás

Térjünk most vissza újra a kamatos kamat számításhoz. Azt már említettük, hogy a kamatnak köze van az időhöz: a kamatos kamat pedig azt jelenti, hogy egy ma egységnyi értékű pénz n idő elteltével mennyit fog érni. Ezért ezt a pénz *jövőértékének* is nevezik. Tehát egy X pénzösszeg n év múlva i kamatláb mellett

$$Y = X \cdot (1+i)^n$$

összeget fog érni. Ez alapján könnyen látható, hogy egy jövőbeli Y értékű kifizetéshez most

$$X = \frac{Y}{(1+i)^n}$$

összeget kell félretenni. Ezt nevezzük a jövőbeli Y összeg *jelenértékének*, ami tehát azt fejezi ki, hogy jövőbeli egy egység értékű pénz ma hány egységet ér.

Bevezetünk még egy új jelölést. Legyen

$$\nu = \frac{1}{(1+i)}.$$

Ezt az i kamatlábhoz tartozó *diszkonttényezőnek* hívják. Ezzel a jelöléssel a fenti összefüggés így írható:

$$X = Y \cdot \nu^n,$$

ezért azt is mondjuk, hogy az Y pénzösszeget *diszkontáljuk*, így kapjuk meg a jelenértékét.

Nézzünk most néhány feladatot ezen új fogalmak alkalmazására.

1. feladat Hitelt vettünk fel, t Forintot, n éves futamidőre, i%-os kamatra. Írjuk fel a törlesztésre vonatkozó eredeti formulát, és próbáljuk megfogalmazni a jelenérték segítségével! Értelmezzük az eredményt!

Megoldás Írjuk fel tehát a formulát. Megint $T_n = 0$, ezért a formula a következő alakba írható:

$$t \cdot (1+i)^n = a \cdot (1+i)^{n-1} + \ldots + a \cdot (1+i) + a$$

Most mindkét oldalt $(1+i)^n$-nel leosztva kapjuk, hogy

$$t = \frac{a}{(1+i)} + \ldots + \frac{a}{(1+i)^n} = a \cdot \nu + \ldots + a \cdot \nu^n.$$

Ezzel tehát sikerült a formulát a jelenérték segítségével felírni. Mit is jelent ez most? A bal oldalon áll a t, ez a hitelösszeg nagysága, aminek értéke a jelenben értendő. A jobb oldalon áll a törlesztőrészlet a különböző időpontokban diszkontálva. Az egyenlőség azt az alapvető gondolatot tükrözi, hogy nem szeretnénk többet visszafizetni, mint amennyit kölcsönvettünk. Ez azonban az idő múlása miatt nem megvalósítható (hiszen a kamatozás miatt a hitelösszeg értéke nő), de azt azért elvárhatjuk, hogy jelenértékben ne kelljen többet visszafizetni a kölcsönnél.

Ez egy nehezebb feladat. Egy teljesen új szemléletet jelenít meg, amit nagyon fontos, hogy a tanulók megértsenek. Ezért annyi időt szánjuk a megbeszélésre, amennyit csak kell.
A feladat fontosabb mondanivalója az, hogy a két oldal jelenértékben egyezzen meg. Erre szánjunk több időt. Azt is megtehetjük, hogy a formulát – rövid egyéni gondolkodás után – közösen vezessük le, és inkább arra ösztönözzük a diákokat, hogy az új formula jelentését próbálják megfejteni.

2. feladat Hitelt vettünk fel, 500000 Forintot, 15%-os kamatra. Úgy szeretnénk visszatörleszteni, hogy három alkalommal: a hitelfelvételt követő második, negyedik és hatodik évben fizetünk vissza három egyenlő összeget. Jelenértékes megfontolással határozzuk meg, mekkora legyen ez az összeg.

Megoldás Az előbb megbeszéltek szerint azt szeretnénk, hogy jelenértékben ugyanannyit fizessünk vissza, mint amennyit kölcsönvettünk. Ez azt jelenti, hogy a három törlesztőrészletet diszkontálva, összegük éppen a hitelösszeget kell, hogy adja. Vagyis

$$t = a \cdot \nu^2 + a \cdot \nu^4 + a \cdot \nu^6$$

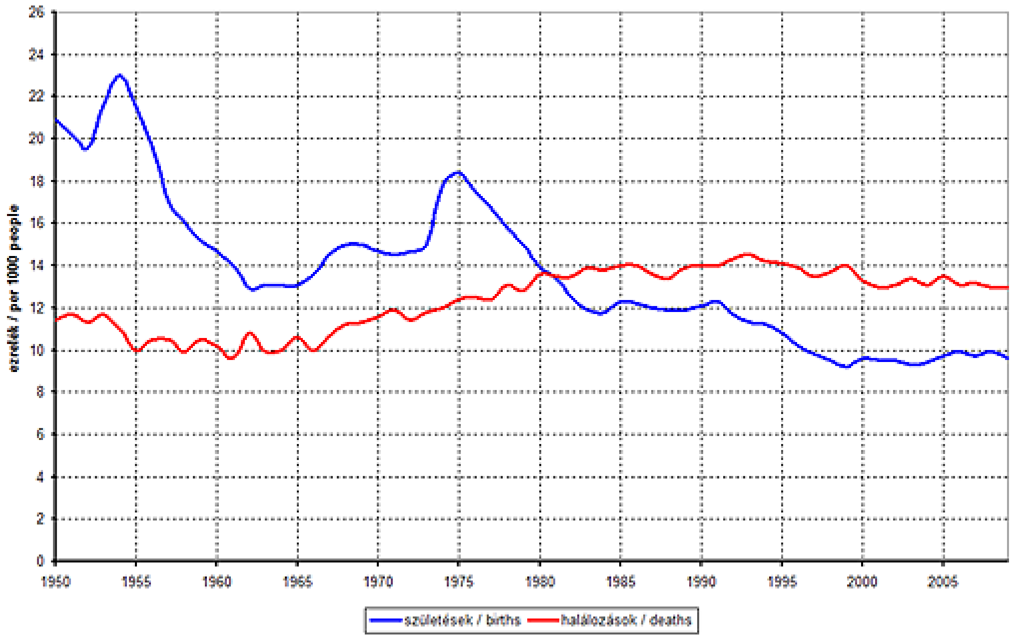
Innen fejezzük ki a-t: $a = t/(\nu^2 + \nu^4 + \nu^6) = 284090$.
Ezzel tehát meghatároztuk a törlesztőrészlet nagyságát.

4.5.4. Negyedik óra - Demográfiai alapfogalmak

Ahogy a 4.2.2.fejezetben már említettem, ebben a témakörben a tantárgyi integráció is szerepet kaphat. Szervezhetjük tehát úgy az órát, hogy – ha közös projektmunkára nincs is lehetőségünk – a különböző tantárgyak kapcsolódó tartalmait megvizsgáljuk matematikai szemszögből. Akár a gyerekek is felkészülhetnek egy-egy kapcsolódó terület bemutatására.

Tehát az óra első fele olyan demográfiai témákkal telik, mint a népesség, népsűrűség, korfa (ezen belül az öregedő és fiatalodó társadalmak), nemzetiségek, stb.

Például a következő feladatok adhatók (de a gyerekek is hozhatnak grafikonokat, diagramokat, és azokat is elemezhetjük):



1. feladat A fenti diagram[2] a születések és a halálozások számának változását mutatja 1000 főre vetítve, 1950 és 2008 között.

1) Foglaljuk táblázatba 1950-től 5 évenként a születési és halálozási arányszámokat!

2) Minden adatpár esetén számítsuk ki, hogy a születések száma hány százaléka a halálozások számának!

3) Körülbelül hány százalékkal nőtt a halálozások száma 1960 és 1990 között?

4) Melyik időszakban (ötéves szakasz) volt a legnagyobb arányú a születések csökkenése?

5) Röviden foglaljuk össze a konklúziókat!

[2]Forrás: Wikimedia Commons

Térjünk most rá az életbiztosításhoz szükséges demográfiai adatok, a halálozási adatok tanulmányozására. Ezt a 2003. évi magyar halandósági táblázat alapján tesszük meg. Ennek a férfiakra vonatkozó táblája (a KSH 2003. évi halandósági táblája alapján):

x	l_x	x	l_x	x	l_x	x	l_x	x	l_x
0	100000								
1	99204	21	98564	41	95159	61	71629	81	22131
2	99146	22	98491	42	94680	62	69676	82	19701
3	99108	23	98411	43	94121	63	67671	83	17360
4	99079	24	98325	44	93477	64	65615	84	15115
5	99066	25	98233	45	92749	65	63502	85	12975
6	99051	26	98136	46	91941	66	61317	86	10953
7	99034	27	98035	47	91063	67	59047	87	9065
8	99016	28	97931	48	90119	68	56691	88	7330
9	98998	29	97825	49	89111	69	54250	89	5766
10	98980	30	97715	50	88039	70	51730	90	4391
11	98964	31	97595	51	86901	71	49139	91	3218
12	98947	32	97463	52	85698	72	46493	92	2254
13	98928	33	97316	53	84434	73	43807	93	1496
14	98904	34	97151	54	83106	74	41093	94	933
15	98872	35	96965	55	81712	75	38359	95	540
16	98836	36	96752	56	80244	76	35613	96	286
17	98794	37	96510	57	78693	77	32727	97	137
18	98746	38	96235	58	77055	78	29941	98	58
19	98691	39	95924	59	75329	79	27250	99	21
20	98631	40	95569	60	73518	80	24647	100	7

A halandósági táblák tartalmazzák, hogy 100000 főre vetítve hányan érik meg az adott kort. A fenti táblázatban x jelöli az egyének életkorát, l_x pedig azt mondja meg, hogy hányan vannak életben a 100000 főből x éves korukban.

A halandósági táblák gyakran tartalmaznak még egyéb adatokat is, mint például az adott korban elhunytak száma, a halálozási- és túlélési-valószínűség, stb. De ezeket mind ki tudjuk számolni, ezért számunkra ez az egyszerűsített táblázat megfelelő lesz.

Ezekre a következő általánosan használt jelöléseket vezetjük be: q_x annak a valószínűsége, hogy az x éves egyén meghal az $x + 1$ életéve előtt; p_x pedig annak, hogy túlél, azaz hogy az x éves egyén megéli az $x + 1$-edik születésnapját; d_x jelöli az x éveskoruk és $x + 1$ éves koruk között elhunytak számát.

2. feladat Határozzuk meg a következő halandósági mérőszámokat!

$$l_{50},\ l_{51},\ d_{50},\ p_{50},\ q_{50}$$

Megoldás Az azonnal leolvasható a táblázatból, hogy $l_{50} = 88039$ és $l_{51} = 86901$. Tehát tudjuk, hogy hány férfi élt a populációból 50 éves korában, és hányan éltek 51 éves korukban. Azonnal adódik, hogy e két szám különbsége megadja azoknak a férfiaknak a számát, akik 50 és 51 éves koruk között hunytak el. Tehát $d_{50} = 88039 - 86901 = 1138$.

Kérdés, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy egy 50 éves férfi nem éri meg az 51 éves kort. A klasszikus valószínűségi modell szerint ezt úgy számolhatjuk ki, hogy a jelentős (kissé morbid lenne, de a terminológia szerint „kedvező") esetek számát elosztjuk az összes eset számával, azaz az 50 és 51 éves koruk között elhunytak számát elosztjuk az 50 éves korukban még élők számával. Vagyis: $q_{50} = 1138/88039 = 0,013$. Mivel a túlélés ennek komplementer eseménye, azonnal adódik, hogy $p_{50} = 1 - 0,013 = 0,987$.

Próbáljuk meg általánosan felírni az itt kapott összefüggéseket. Ez alapján a következők igazak:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$
$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$
$$p_x = 1 - q_x = \frac{l_x - l_x + l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Vezessük be a következő jelöléseket: jelölje $q_{x,n}$ annak a valószínűségét, hogy egy x korú férfi n éven belül meghal, és hasonlóan $p_{x,n}$ annak a valószínűségét, hogy egy x korú férfi megéri az $x + n$ évet. Ekkor nyilván $q_x = q_{x,1}$ és $p_x = p_{x,1}$.

3. feladat Határozzuk meg a következő halandósági mérőszámokat!

$$l_{50},\ l_{51},\ l_{52},\ d_{50},\ d_{51},\ p_{50,2},\ q_{50,2}$$

Megoldás Az előbbihez hasonlóan $l_{50} = 88039$, $l_{51} = 86901$, $l_{52} = 85698$, továbbá $d_{50} = 88039 - 86901 = 1138$ és $d_{51} = 86901 - 85698 = 1203$.

A halálozási valószínűséget ismét klasszikus valószínűségi modellel számoljuk. A jelentős esetek az 50 és 52 között elhunytak száma, ami nyilván egyenlő az 50 és 51 között elhunytak és az 51 és 52 között elhunytak számának összegével. Az összes eset az 50 éves korukban még életben levők száma. Azaz $q_{50,2} = (1138 + 1203)/88039 = 0,027$, és ekkor $p_{50,2} = 1 - q_{50,2} = 0,973$.

Írjuk fel megint általánosan:

$$q_{x,n} = \frac{d_x + \ldots + d_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x},$$

kihasználva, hogy a számlálóban levő összeg teleszkópos összeg. Továbbá

$$p_{x,n} = 1 - q_{x,n} = \frac{l_x - l_x + l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{x+n}}{l_x}.$$

4. feladat Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy 50 éves férfi megéri a 60-adik életévét, de az utána következő három évben meghal?

Megoldás Ezt feltételes valószínűséggel írjuk fel: jelölje A :=„50 és 60 éves kora között nem hal meg" és B :=„60 és 63 éves kora között meghal". Ekkor

$$\mathcal{P}(A \cdot B) = \mathcal{P}(B|A) \cdot \mathcal{P}(A) = q_{60,3} \cdot p_{50,10} = \frac{l_{60} - l_{63}}{l_{60}} \cdot \frac{l_{60}}{l_{50}} = \frac{l_{60} - l_{63}}{l_{50}} =$$

$$= \frac{73518 - 67671}{88039} = 0,066$$

4.5.5. Ötödik óra - Életbiztosítások I.

Az előző órákon előkészítettük, így végre eljutottunk oda, hogy életbiztosításokkal foglalkozzunk. Először szükséges, hogy röviden beszélgessünk a biztosításokról: alapvetően kétféle biztosítást különböztetünk meg, az élet és a nem-élet biztosítást. Mi most csak az előbbiekkel foglalkozunk. Ennek egyik oka, hogy az életbiztosítás úgynevezett összegbiztosítás (azaz a biztosítási összeg előre meghatározott, nem úgy, mint a kárbiztosításoknál, ahol a biztosítási összeg a kár nagysága, vagy annak bizonyos része). Továbbá életbiztosítás esetén a „káresemény" bekövetkezése (a biztosított halála vagy túlélése) a halandósági tábla alapján viszonylag könnyen számolható.

A számolás megkönnyítése érdekében feltesszük, hogy a szerződés fordulópontja megegyezik a naptári év fordulópontjával. Továbbá egyszeri biztosítási díjat feltételezünk, ami az év elején folyik be a biztosítóhoz, a biztosítási összegek pedig az év végén kerülnek kifizetésre.
(Most nettó biztosítási díjat számolunk, a bruttó díjban a különböző költségeket is figyelembe kéne venni, de ezzel most nem foglalkozunk.)

Életbiztosításból is többféle konstrukció lehetséges. Mi most a haláleseti, az elérési és a vegyes életbiztosítással foglalkozunk majd.

- *Haláleseti életbiztosítás*nak hívjuk azt a biztosítást, amelyben a kedvezményezett személy megkapja a biztosítási összeget (amelyre a szerződés szólt), ha a biztosítási tartam alatt a biztosított meghal, de kifizetés nélkül szűnik meg, ha a biztosított megéri a tartam végét.
- *Elérési életbiztosítás* alatt olyan biztosítást értünk, amelynél a biztosított megkapja a biztosítási összeget (amelyre a szerződés szólt), ha megéri a biztosítási tartam végét, de kifizetés nélkül szűnik meg, ha a tartam alatt a biztosított meghal.
- A *vegyes életbiztosítás* egy kockázati és egy elérési biztosítás együttese, tehát ha a biztosított a tartam alatt meghal, akkor a haláleset után, ha nem, akkor a tartam végén fizeti ki a biztosítási összeget. Ez az egyik leggyakoribb biztosítástípus. (Gondolkodjunk el rajta, miért!)

A feladatunk egy konkrét biztosítás árazása lesz. Ez azt jelenti, hogy egy adott x korú személy köt adott S biztosítási összegre[3], adott n éves időtartamra egy életbiztosítást. (Megkülönböztetjük majd, milyen típusút.) A cél a biztosítás Π egyszeri díjának a meghatározása.
Azaz szeretnénk meghatározni azt a Π pénzösszeget, amit most hajlandóak vagyunk fizetni, hogy cserébe a jövőben a biztosítási esemény bekövetkezése (tehát halál vagy túlélés) esetén megkapjuk a biztosítási összeget.
Ehhez hasonlót már láttunk két órával ezelőtt: akkor azt a pénzösszeget határoztuk meg (törlesztőrészlet), amit a jövőben fizettünk, cserébe egy mostani összegért. Ott a jelenértékek egyenlőségének elvéből indultunk ki. Célszerű volna most is ilyen módon okoskodni. Csakhogy akkor determinisztikus (előre meghatározott idejű és nagyságú) kifizetéseink voltak. Most azonban csak a kifizetés nagysága van meghatározva. A kifizetések ideje a véletlentől függ (hiszen nem tudhatjuk előre, hogy valaki túlél-e, vagy meghal, s ez utóbbi esetben sem tudhatjuk, mikor). Ez azért probléma, mert a diszkontálás felírásakor nem tudnánk, milyen kitevővel diszkontáljunk.
A megoldás a következő elv:

Definíció. A díjkalkuláció alapelve az *ekvivalencia-elv*:

$$\boxed{\text{bevételek várható értékének jelenértéke} = \text{kiadások várható értékének jelenértéke}}$$

Elsőként határozzuk meg a haláleseti életbiztosítás egyszeri díját:

[3] Általában feltesszük, hogy a biztosítási összeg= 1. Ha erre kiszámítjuk a biztosítási díjat, akkor az S biztosítási összegre annak S-szerese lesz a díj.

1. feladat Egy $x = 50$ éves férfi haláleseti biztosítást köt $S = 1$ biztosítási összegre, $n = 1$ év időtartamra. A kamatláb $i = 2\%$. Mennyi a biztosítás díja?

Megoldás Az ekvivalencia-elv alapján írjuk fel a bevételek és a kiadások várható értékének jelenértékét:

- Bevétel: a Π biztosítási díj. Ennek várható értéke (mivel konstans) önmaga, és mivel a jelen pillanatban kerül befizetésre, jelenértéke is önmaga. Tehát az egyenlőség egyik oldalán Π áll.
- Kiadás: az S biztosítási összeg, ha a biztosított meghal, és semmi, ha nem hal meg. Ennek várható értéke: $q_{50} \cdot S + p_{50} \cdot 0$, vagyis q_{50}. Ennek jelenértéke: $q_{50} \cdot \nu$.

Tehát $\Pi = q_{50} \cdot \nu = \frac{d_{50}}{l_{50}} \cdot \frac{1}{1+i} = 0,013 \cdot \frac{1}{1,02} = 0,012745$.
Vagyis ha $S = 1000000$ Forint biztosítási összegre kötné a biztosítást, akkor az egyszeri díj $\Pi = 12745$ Forint.

2. feladat Írjuk fel általános esetben a formulát egy x éves egyén n évre, $S = 1$ biztosítási összegre kötött haláleseti biztosításának egyszeri díjára!

Megoldás Kövessük az előző gondolatmenetet: a bal oldalon az egyszeri biztosítási díj áll. A jobb oldalt fel kell bontani, hogy a biztosított meghal az első évben; nem hal meg az első, de meghal a második évben; stb.; végül hogy túléli az n évet. Ekkor a valószínűségeket az előző óra 4. feladata alapján feltételes valószínűséggel számolva, majd a megfelelő diszkonttényezőkkel beszorozva kapjuk az egyenlőséget:

$$\Pi_{x,n} = \frac{d_x}{l_x}\nu + \frac{d_{x+1}}{l_x}\nu^2 + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{l_x}\nu^n.$$

4.5.6. Hatodik óra - Életbiztosítások II.

Előző órán felírtuk az életbiztosítások árazásának kulcsát: az ekvivalencia-elvet. Segítségével kiszámoltuk a haláleseti életbiztosítás egyszeri díjának általános képletét. Most óra elején röviden ismételjük át az ekvivalencia-elvet, valamint az elérési és a vegyes életbiztosítás definícióját. Ezeknek a díját fogjuk meghatározni ezen az órán.

Elsőként határozzuk meg az elérési életbiztosítás egyszeri díját:

1. feladat Egy $x = 50$ éves férfi elérési biztosítást köt $S = 1$ biztosítási összegre, $n = 1$ év időtartamra. A kamatláb $i = 2\%$. Mennyi a biztosítás díja?

Megoldás Az ekvivalencia-elv alapján írjuk fel a bevételek és a kiadások várható értékének jelenértékét:

- Bevétel: a Π biztosítási díj. Ennek várható értéke (mivel konstans) önmaga, és mivel a jelen pillanatban kerül befizetésre, jelenértéke is önmaga. Tehát az egyenlőség egyik oldalán Π áll.
- Kiadás: az S biztosítási összeg, ha a biztosított nem hal meg, és semmi, ha meghal. Ennek várható értéke: $q_{50} \cdot 0 + p_{50} \cdot S$, vagyis p_{50}. Ennek jelenértéke: $p_{50} \cdot \nu$.

Tehát $\Pi = p_{50} \cdot \nu = \frac{l_{51}}{l_{50}} \cdot \frac{1}{1+i} = 0,987 \cdot \frac{1}{1,02} = 0,967647$.
Vagyis ha $S = 1000000$ Forint biztosítási összegre kötné a biztosítást, akkor az egyszeri díj $\Pi = 967647$ Forint. (Gondolkodjunk el rajta, miért van az, hogy az ugyanilyen paraméterű haláleseti biztosítás jóval olcsóbb volt, mint az elérési!)

2. feladat Írjuk fel általános esetben a formulát egy x éves egyén n évre, $S = 1$ biztosítási összegre kötött elérési biztosításának egyszeri díjára!

Megoldás Kövessük az előző gondolatmenetet: a bal oldalon az egyszeri biztosítási díj áll. A jobb oldalon csak akkor történik kifizetés, ha a biztosított túléli az n évet. Ennek a valószínűségét klasszikus valószínűségi modellel számolhatjuk: l_{x+n}/l_x. Ezt a megfelelő diszkonttényezőkkel beszorozva kapjuk az egyenlőséget:

$$\Pi_{x,n} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \nu^n.$$

Most pedig határozzuk meg a vegyes életbiztosítás egyszeri díját:

3. feladat Egy $x = 50$ éves férfi vegyes biztosítást köt $S = 1$ biztosítási összegre, $n = 1$ év időtartamra. A kamatláb $i = 2\%$. Mennyi a biztosítás díja?

Megoldás Az ekvivalencia-elv alapján írjuk fel a bevételek és a kiadások várható értékének jelenértékét:

- Bevétel: a Π biztosítási díj. Ennek várható értéke (mivel konstans) önmaga, és mivel a jelen pillanatban kerül befizetésre, jelenértéke is önmaga. Tehát az egyenlőség egyik oldalán Π áll.
- Kiadás: az S biztosítási összeg, ha a biztosított nem hal meg, és szintén S, ha meghal. Ennek várható értéke: $q_{50} \cdot S + p_{50} \cdot S$, vagyis $q_{50} + p_{50} = 1$. Ennek jelenértéke: ν.

Tehát $\Pi = \nu = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1{,}02} = 0{,}980392$.

Vagyis ha $S = 1000000$ Forint biztosítási összegre kötné a biztosítást, akkor az egyszeri díj $\Pi = 980392$ Forint.

Akár már itt észrevehetjük, hogy ez nem más, mint a haláleseti és a vegyes életbiztosítás díjának összege. De ha a gyerekek maguktól nem mondják, akkor előbb oldjuk meg a következő feladatot.

4. feladat Írjuk fel általános esetben a formulát egy x éves egyén n évre, $S = 1$ biztosítási összegre kötött vegyes biztosításának egyszeri díjára!

Megoldás Itt ugyanazt a gondolatmenetet járjuk végig, mint az előző két általános esetben. Ezek alapján a következőt kapjuk:

$$\Pi_{x,n} = \frac{d_x}{l_x}\nu + \frac{d_{x+1}}{l_x}\nu^2 + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{l_x}\nu^n + \frac{l_{x+n}}{l_x}\nu^n.$$

Itt már világosan látszik, hogy a vegyes életbiztosítás díja egyenlő a megfelelő haláleseti és elérési biztosítások díjának összegével. (Gondolkodjunk el rajta, miért!)

További lehetőségek a vizsgálatokra, ha marad időnk, vagy érdeklődés mutatkozik: nézzük meg, hogyan változnak a biztosítások díjai, ha változtatjuk az i technikai kamatot! Látni fogjuk, hogy a kamatláb növekedése a díj csökkenését eredményezi. Ezért van az, hogy a teljesíthetetlen ígéretek megelőzése érdekében a szabályozó maximalizálja a technikai kamat mértékét.

4.6. Összegzés

Szakdolgozatom e kiegészítő fejezetében az életbiztosítás árazási feladattal foglalkoztam a közoktatás szemszögéből. Ez a feladat nem középiskolai feladat, említését sem találjuk a középiskolai anyagokban (az egy Szászné Simon Judit-írást kivéve). Én mégis kísérletet tettem, hogy megmutassam, ez a téma nemcsak, hogy kapcsolatban áll a középiskolai matematika anyaggal, de tanítható is lenne ott.

A fejezet első részében bemutattam két matematikaoktatási koncepciót – a realisztikus, és a projektorientált matematikaoktatást, – amelyek szemléletéhez leginkább közel áll egy ilyen téma oktatása. Ezután megmutattam, hogy a feladatnak (előismereteivel együtt) tényleges kapcsolódási pontjai vannak egyrészt a NAT általános fejlesztési céljaival, másrészt a Kerettantervek konkrét tananyagbeli javaslataival.

A fejezet középső részében a téma tárgyalásához szükséges matematikai tartalmakat elevenítettem fel. Ezután a fejezet utolsó részében rátérhettem egy olyan óraterv kidolgozására, ami egy lehetőség lenne a probléma középiskolában történő oktatására. Itt törekedtem – a fokozatosság elvét szem előtt tartva – a meglevő ismeretekre építkezni, és hat óra alatt eljutni a diákokkal arra a szintre, hogy képesek legyenek egyszerű életbiztosítások nettó egyszeri díjának meghatározására.

Összességében azt gondolom, hogy a téma valóban tanítható lenne középiskolában – akár a tanmenet részeként, akár külön tanítási egységként, például egy szakkör keretében. Hasznos volna abból a szempontból, mert szinte végig olyan aktuális, hétköznapi, gazdasági témákat tárgyal, amik érdekelhetik a tanulókat, ezáltal motiválva őket. Másrészt a társadalom részéről igény mutatkozik az ilyen típusú, használható tudás tanítására.
De ezen kívül az általános matematikai célok sem sikkadnak el, hiszen a gyakorlati problémák megoldása közben a korábban megtanult elméletet mélyítik el a tanulók. Utolsó szempontként pedig még azt is megemlítem, hogy a téma, és konkrétan a biztosítási feladat kapcsán egy olyan területtel – a biztosítási matematika területével – kerülnek érintőlegesen kapcsolatba a diákok, amiről egyébként nagyon kevés esélyük van hallani. Ez pedig nem csak a tájékozottságukat növeli, de néhányukban talán kedvet ébreszt arra, hogy később e témával foglalkozzanak.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Arató Miklósnak, aki ezt az érdekes témát – a piaci alapú árazást – a figyelmembe ajánlotta. Nagyon nagy segítséget jelentett, hogy hozzáférést biztosított a téma nehezebben hozzáférhető irodalmához is.
Külön köszönettel tartozom neki azért, amiért elfogadta, hogy integrált dolgozatot készülök írni, és elvállalta a tanárszakos rész vezetését is, amikor senki más.

Irodalomjegyzék

[1] D. Duffie: *Stochastic Equilibria: Existence, Spanning Number, and the 'No Expected Financial Gain from Trade' Hypothesis*. Econometrica, 1986.

[2] N. M. Bingham, R. Kiesel: *Risk–Neutral Valuation*. Springer, 2000.

[3] H. Bingham, F. Delbaen, P. Embrechts, A. N. Shiryaev: *On Esscher Transforms in Discrete Finance Models*. Astin Bulletin, 1998.

[4] S. Malamud, E. Trubowitz, M. V. Wüthrich: *Market Consistent Pricing of Insurance Products*. Astin Bulletin, 2008.

[5] S. E. Shreve: *Stochastic Calculus for Finance I-II*. Springer, 2004.

[6] M. V. Wüthrich: *Indifference Pricing of Insurance Products*. Sydney Financial Mathematics Workshop, 2007.

[7] M. V. Wüthrich, H. Bühlmann, H. Furrer: *Market–Consistent Actuarial Valuation*. Springer, 2007.

---

[8] Ambrus András: *Bevezetés a matematikadidaktikába*. ELTE Eötvös Kiadó, 1995.

[9] Ambrus Gabriella: *Valóságközeli matematika 5-10. évfolyam*. suliNova Közoktatás-fejlesztési és Pedagógus-továbbképzési Kht.

[10] Dienes Zoltán: *Építsük fel a matematikát*. SHL Hungary Kft., 1999.

[11] Gábos Adél, Halmos Mária: *Készüljünk az érettségire matematikából közép-, emelt szinten*. Műszaki Könyvkiadó, 2005.

[12] *Kerettantervek*
http://www.nefmi.gov.hu/kozoktatas/tantervek/kerettantervek
(Utolsó elérés ideje: 2011. május. 23.)

[13] *Nemzeti Alaptanterv (NAT)*
http://www.okm.gov.hu/letolt/kozokt/nat_070926.pdf
(Utolsó elérés ideje: 2011. május. 23.)

[14] Pálfalvi Józsefné: *Matematika didaktikusan.* Typotex Kiadó, 2000.

[15] Szászné Simon Judit: *Aktuáriusi számítások.*
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Simon_Judit/Akt/akt.html
(Utolsó elérés ideje: 2011. május 23.)