Haar-nullhalmazok és a második kategóriájúság konzisztens tükröződése Cantor halmazokon

Diplomamunka

Készítette: *Szládek Zoltán*
matematikus szak

Témavezető: *Elekes Márton*, egyetemi adjunktus
Analízis Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Budapest, 2011

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Elekes Mártonnak a dolgozathoz nyújtott sok segítségét, és a tisztább elképzeléshez vezető útmutatását.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A dolgozat témájának motivációját a Haar-null mértékű halmazok σ-ideáljának vizsgálata, illetve ennek kategória megfelelője adja.

Legyen G Abel lengyel csoport. Egy $X \subset G$ halmaz *Haar-null*, ha létezik $B \supset X$ Borel halmaz és μ valószínűségi Borel mérték, hogy minden $g \in G$-re $\mu(B+g) = 0$. Jelölje a Haar-null halmazok halmazát $\mathcal{N}$.

Ez Christensen definíciója [1], amely azért érdekes, mert lokálisan kompakt csoportokon egybeesik a Haar mérték nullmértékű halmazaival, azaz $X \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \mu_{Haar}(X) = 0$. Ezzel a Haar-nullhalmazok egy általánosítását kapjuk lengyel Abel csoportokon.

David Fremlin fogalmazta meg a kérdést [2], hogy a Haar-null halmazok σ-ideálja az $\mathbb{R}$ valós számok halmazán megegyezik-e a hasonlóan definiált

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \{X \subset \mathbb{R} \mid \exists \mu \text{ valószínűségi Borel mérték, } \forall r \in \mathbb{R}\ \mu(X+r) = 0\}$$

σ-ideállal. Világos, hogy az $\mathbb{R}$-en a Haar mérték megegyezik a Lebesgue mértékkel, tehát a Lebesgue mérték null-halmazaira az $\mathcal{N}$ jelölést használjuk továbbra is. Kiderül, hogy feltételezve CH-t, azaz a kontinuum hipotézis teljesülését, H bővebb halmaz, mint $\mathcal{N}$. Felmerülhetnek a következő kérdések

$$\mu = \mu_{Cantor},\ \exists? X \subset \mathbb{R},\ X \notin \mathcal{N},\ \mu(X+r) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$\forall \mu \text{ szinguláris},\ \exists? X \subset \mathbb{R},\ X \notin \mathcal{N},\ \mu(X+r) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Fremlin választ adott, hogy amennyiben feltesszük CH-t, akkor (1) és (2) is igaz. Nyitott kérdés maradt viszont még, hogy függetlenek-e ZFC-től.

Ezek duálisára való átfogalmazásához megadjuk az első és második kategóriájú, illetve reziduális halmazok fogalmát. Legyen $\mathcal{T}$ egy topologikus tér. Ekkor a következő definíciókat adjuk meg.

Egy $D \subset \mathcal{T}$ halmaz *sűrű*, ha minden I nem üres bázis nyílt halmazra $I \cap D$ nem üres.

Egy $S \subset \mathcal{T}$ halmaz *seholsem sűrű*, ha lezártja $\overline{S}$ nem tartalmaz nem üres nyíltat.

Egy $F \subset \mathcal{T}$ halmaz *első kategóriájú*, ha előáll megszámlálható sok seholsem sűrű halmaz uniójaként.

Egy $X \subset \mathcal{T}$ halmaz *második kategóriájú*, ha nem első kategóriájú.

Egy $R \subset \mathcal{T}$ halmaz *reziduális*, ha R egy első kategóriájú halmaz komplementere.

Könnyen látszik, hogy egy $F \subset \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor első kategóriájú, ha létezik egy F' első kategóriájú F_σ halmaz, hogy $F \subset F'$ teljesül. Ez abból adódik, hogy egy halmaz pontosan akkor seholsem sűrű, ha a lezárása is seholsem sűrű, így ha $F = \bigcup_n S_n$, ahol S_n seholsem sűrű minden $n \in \omega$-ra, akkor $F' = \bigcup_n \overline{S_n}$ jó lesz, hiszen $S_n \subset \overline{S_n}$ minden $n \in \omega$-ra, tehát $F \subset F'$, és F' egy F_σ halmaz. Egyszerű következmény, hogy egy halmaz pontosan akkor reziduális, ha tartalmaz sűrű G_δ-t, ami a komplementerre való áttérésből könnyen látszik.

Ismert, hogy az első kategóriájú halmazok σ-ideált alkotnak. Általában ezekre úgy gondolunk, mint "kicsi" halmazokra, hasonló módon, mint a nullmértékű halmazok esetében. Eszerint az analógia szerint a második kategóriájú halmazok felelnek meg a pozitív mértékű halmazoknak, míg a reziduális halmazok a teljes mértékűeknek. A szinguláris valószínűségi mértékeknek megfeleltethetjük $\mathbb{R}$-ben a Cantor halmazokat. Adjuk meg ezek alapján (2)-nek megfelelő duális állítást, amely a következő.

Minden $C \subset \mathbb{R}$ Cantor halmazhoz létezik $X \subset \mathbb{R}$ második kategóriájú, hogy minden $r \in \mathbb{R}$ esetén $C \cap (X + r)$ első kategóriájú C-ben. Legyen ψ az a formula, ami ezt fejezi ki. A következő egyszerű transzfinit rekurziós bizonyítás mutatja, hogy CH-t feltéve ψ teljesül.

Legyen C Cantor halmaz adott. Soroljuk fel a valós számok halmazát, azaz $\{r_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1} = \mathbb{R}$. Soroljuk fel az első kategóriájú F_σ halmazokat is, mivel ezek Borelek legfeljebb kontinuum sok van belőlük, tehát legyen ez $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$. Megadunk egy X-et, amely elkerül minden F_σ első kategóriájú halmazt, azaz minden α-ra F_α-hoz létezik $x_\alpha \in X$, hogy $x_\alpha \notin F_\alpha$. Ekkor X második kategóriájú, mivel egyetlen F_σ első kategóriájú halmaz sem tartalmazza. Emellett X-et úgy adjuk meg, hogy minden $r \in \mathbb{R}$-re $C \cap (X + r)$ első kategóriájú legyen C-ben, ami nyilván azonos követelmény azzal, hogy minden $r \in \mathbb{R}$-re $(C - r) \cap X$ első kategóriájú $C - r$-ben.

Ilyen X halmazt a transzfinit rekurzió módszerével adunk meg. Legyen

x_α tetszőleges eleme az

$$U_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \setminus \left(F_\alpha \cup \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta \cup \bigcup_{\beta\leq\alpha} (C - r_\beta) \right)$$

halmaznak. Legyen

$$X_\alpha = \{x_\beta \mid \beta < \alpha\}\,.$$

Azt fogjuk megmutatni, hogy X_{ω_1} jó lesz. Előszöris azt kellene látnunk, hogy U_α minden $\alpha \in \omega_1$-re nem üres. Ennek belátásához használjuk Baire kategória tételét, amely szerint Baire térben egy nyílt halmaz második kategóriájú [3, 8.4. Theorem], ennek köszönhetően nem áll elő megszámlálható sok első kategóriájú halmaz uniójaként. $\mathbb{R}$ és tetszőleges Cantor halmaz is Baire tér, mivel lengyel terek. Ezekben a pontok zártak és seholsem sűrűek, ebből adódóan a megszámlálható halmazok első kategóriájúak bennük. U_α nem üres halmaz, mert egy második kategóriájú halmaz és megszámlálható sok első kategóriájú különbségeként írható fel. Mivel $\mathbb{R}$ nyílt, ezért elegendő megmutatnunk, hogy tetszőleges $\alpha \in \omega_1$-re F_α, X_α és $C - r_\alpha$ első kategóriájúak $\mathbb{R}$-ben. F_α-t így definiáltuk, X_α pedig megszámlálható halmaz, tehát első kategóriájú. Tetszőleges Cantor halmaz seholsem sűrű, mivel a Cantor halmaz zárt és nem tartalmaz nem üres nyíltat. Ezzel azt kaptuk, hogy minden U_α nem üres.

Világos, hogy X-nek van eleme minden F_α-n kívül, tehát második kategóriájú. Kell még, hogy tetszőleges $r \in \mathbb{R}$ esetén $(C - r) \cap X$ első kategóriájú $C - r$-ben. Létezik $\alpha \in \omega_1$, hogy $r = r_\alpha$. Ekkor $(C - r_\alpha) \cap X$ megegyezik a $(C - r_\alpha) \cap X_\alpha$ halmazzal. Ez amiatt igaz, mert $\beta > \alpha$ esetén x_β nem eleme $C - r_\alpha$-nak, ugyanis $U_\beta \cap (C - r_\alpha) = \emptyset$ és $x_\beta \in U_\beta$. X_α viszont egy megszámlálható halmaz, tehát $(C - r_\alpha) \cap X$ első kategóriájú $C - r_\alpha$-ban, amit szerettünk volna, tehát CH mellett valóban teljesül ψ.

Elekes Márton és Steprāns belátták, hogy konzisztens a ψ formula tagadásának hozzávétele ZFC-hez [4], tehát ψ független ZFC-től. Ezt a tételt nem bizonyítjuk, mi az állításnak csak egy gyengített formájával foglalkozunk. A ψ formula tagadása szerint létezik $C \subset \mathbb{R}$ Cantor halmaz, hogy minden $X \subset \mathbb{R}$ második kategóriájú halmazhoz létezik $r \in \mathbb{R}$, amelyekre $C \cap (X + r)$ második kategóriájú C-ben.

A gyengített állítás, amivel mi fogunk foglalkozni, a következőt mondja ki. Minden $X \subset \mathbb{R}$ második kategóriájú halmazhoz létezik C Cantor halmaz, hogy $X \cap C$ második kategóriájú C-ben.

Ennek konzisztenciáját korábban Bartoszyńszki egy egészen más megközelítésből már bizonyította [5], megint más irányból ugyanerre az eredményre jutottak Burke és Miller [6].

1. fejezet

Technikai bevezetés

A bizonyítás során szükségünk lesz néhány fogalomra és ismert tételre, amelyeket megpróbálunk röviden összefoglalni. A dolgozatban ismertnek tekintjük a forszolás fogalmát és módszerét, ezért erre külön nem térünk ki bizonyítások formájában, csupán néhány fontosabb, a bizonyítás során is gyakrabban hivatkozott állítást fogunk összegyűjteni.

1.1. A valós számok reprezentációja

A kérdéskör, amivel foglalkozunk a valós számok halmáról fogalmaz meg állításokat, mi mégis egy másik halmazon fogunk dolgozni. Mivel első és második kategóriájú halmazokról szólnak az állításaink, ezért esetünkben is használhatjuk, azt az egyébként is szokásos technikát, hogy a valós számok helyett az irracionális számok halmazán, pontosabban egy ezzel homeomorf téren bizonyítjuk az állításokat. Szemléletesen is világosnak tűnik, hogy egy megszámlálható, első kategóriájú halmaz elhagyása nem befolyásolja nagy mértékben az első vagy második kategóriájú halmazokra vonatkozó állításokat.

1.1.1. Állítás. *Az irracionális számok halmaza homeomorf az ω^ω halmazzal, ahol ω^ω természetes topológiáját vesszük, azaz ω-án vesszük a diszkrét topológiát, és megszámlálható sok példányának szorzata adja a természetes topológiát.*

Az állítást nem igazoljuk, [3, 3.4 (ii)] szerint elfogadottnak tekintjük. Vizsgáljuk meg az ω^ω halmaz néhány tulajdonságát. A halmaz elemeire gondolhatunk úgy, mint ω értékű végtelen sorozatokra, vagy $\omega \to \omega$ függvényekre.

Az ω^ω halmazon adódik egy természetes metrika is, amely a szorzattopológiával ekvivalens topológiát definiál. Ez a következő, legyen d_i az i-ik ω halmazon a diszkrét metrika, és ekkor tetszőleges $x, y \in \omega^\omega$ elemekre a

$$d(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i\in\omega} \frac{d_i\left(x_i, y_i\right)}{2^i}$$

adja a természetes metrikát. A szorzattér topológiájának egy bázisát a következők segítségével adjuk majd meg. Tekintsük az $\omega^{<\omega}$ halmazt, amely az ω értékű véges sorozatok halmaza. Természetesen ezekre is gondolhatunk úgy, mint valamely $n \in \omega$-ra egy $n \to \omega$ függvényre. Legyen például $\sigma \in \omega^{<\omega}$ egy n hosszúságú sorozat, σ hosszát jelölje $|\sigma|$. Ebben az esetben $\sigma(n)$ már nincs értelmezve, ugyanis a halmazelméletben használatos felírást követjük, amely szerint n az az n-elemű halmaz, amely a nála kisebbeket tartalmazza.

Adjuk meg a $\prec$ kiterjesztési relációt, azaz σ, $\tau \in \omega^{<\omega}$ elemekre $\sigma \prec \tau$ pontosan akkor, ha $\tau|_{|\sigma|} = \sigma$. A relációt kiterjeszthetjük $\omega^{<\omega}$-beli és ω^ω-beli elemek közötti relációra is. Legyen $\sigma \in \omega^{<\omega}$ és $r \in \omega^\omega$, és legyen $\sigma \prec r$ pontosan akkor, ha $r|_{|\sigma|} = \sigma$, azaz r végtelen sorozat a σ véges sorozattal kezdődik.

Minden $\sigma \in \omega^{<\omega}$-ra a

$$[\sigma] \stackrel{\text{def}}{=} \{r \in \omega^\omega \mid \sigma \prec r\}$$

halmazok nem üresek, és egy bázisát adják ω^ω topológiájának. Könnyen látszik az is, hogy ezek valójában nyílt-zárt halmazok, ennek ellenőrzését az olvasóra bízzuk.

Szükségünk lesz arra, hogy a nyílt sűrű halmazokat ω^ω-ban kódoljuk valamilyen formában. Tegyük ezt az $f : \omega^{<\omega} \to \omega^{<\omega}$ alakú függvényekkel, ahol egy U nyílt sűrű halmazhoz legyen

$$f(\sigma) \succeq \sigma \qquad (\sigma \in \omega^{<\omega})$$

olyan, hogy $[\sigma]$-ban kiválaszt egy $[f(\sigma)]$ maximális bázis nyíltat, amely része U-nak. Ilyen természetesen mindig van, hiszen U nyílt sűrű, tehát $[\sigma] \cap U$ nem üres nyílt, és a bázis nyílt halmazaink struktúrája a tartalmazásra nézve olyan, mint $\omega^{<\omega}$, tehát jólfundált. Ekkor f-et U kódjának nevezzük, és valójában

$$U = \bigcup_{\sigma\in\omega^{<\omega}} [f(\sigma)]$$

is teljesül. Ha f egy nyílt sűrű halmaz kódja, akkor az U_f halmaz jelentse az f által kódolt nyílt sűrű halmazt, azaz

$$U_f = \bigcup_{\sigma\in\omega^{<\omega}} [f(\sigma)]$$

Világos, hogy ekkor U_f kódjának választható f.

Adjuk még meg a konkatenálás fogalmát, amely egy $\omega^{<\omega}$-beli sorozat bővítése, tulajdonképpen a sorozathoz való hozzáfűzést jelent. Általában egy elemmel bővítünk, azaz egy n hosszúságú $\sigma \in \omega^{<\omega}$ és $k \in \omega$ esetén legyen $\sigma^\frown k$ az az $\omega^{<\omega}$-beli elem, amelyre $\sigma \prec \sigma^\frown k$, $\left|\sigma^\frown k\right| = n+1$ és $\sigma^\frown k(n) = k$.

Mivel az ω^ω halmaz homeomorf az irracionális számok halmazával, a bizonyítás során ω^ω elemeire úgy fogunk gondolni, mint valós számokra, és gyakran így is hivatkozunk rájuk.

1.2. Analitikus halmazok

Az analitikus halmazoknak nagyon sok ekvivalens felírása ismert. Nekünk erre nem lesz szükségünk, viszont a teljesség kedvéért megadjuk a definícióját, és két állítást, amit a bizonyításunk során használni fogunk.

1.2.1. Definíció. *Lengyel tér*nek nevezzük a teljes, szeparábilis, metrikus tereket.

Ez alapján $\mathbb{R}$ és ω^ω is lengyel terek.

1.2.2. Definíció. Legyen X egy lengyel tér és $A \subset X$. Az A halmaz *analitikus*, ha létezik Y lengyel tér és $f : Y \to X$ folytonos függvény, hogy $f(Y) = A$.

1.2.3. Állítás. *Legyenek X és Y lengyel terek, és $B \subset X \times Y$ Borel a szorzattéren. Ekkor a $proj_X(B)$, a B halmaz első koordinátára vett vetülete analitikus X-ben.*

Az állítást nem bizonyítjuk, [3, 14.3] szerint elfogadottnak tekintjük.

Mivel a következő állításban szereplő *Baire tulajdonság*ra [3, 8.21. Definition] éppen csak érintőlegesen van szükségünk, ezért a definícióját most nem közöljük.

1.2.4. Állítás. *Legyen X lengyel tér és $A \subset X$. Ha A analitikus és második kategóriájú, akkor reziduális egy nem üres nyílt halmazban, azaz létezik $I \subset X$ nem üres nyílt halmaz, hogy $A \cap I$ reziduális I-ben.*

Bizonyítás. Legyen X lengyel tér és $A \subset X$. Ha A analitikus, akkor Baire tulajdonságú [3, 29.5. Theorem]. Emellett, ha A Baire tulajdonságú és második kategóriájú, akkor reziduális egy nem üres nyílt halmazban [3, 8.26. Proposition]. Ezeket az állításokat a hivatkozások alapján, bizonyítás nélkül elfogadottnak tekintjük, így készen vagyunk. □

1.3. ZFC modellek, forszolás

Zermelo-Fraenkel féle halmazelméleti axiómarendszerben (ZF) dolgozunk, kiegészítve a kiválasztási axiómával (AC), azaz feltesszük ezeknek, tehát ZFC konzisztenciáját, ami azt jelenti, hogy a rendszer ellentmondásmentes, azaz van olyan modell, amely teljesíti az axiómarendszert. A leszálló Löwenheim-Skolem tétel értelmében, ha létezik modellje a halmazelméletnek, akkor létezik megszámlálható elemi részmodellje is. Ilyen megszámlálható modellből kiindulva bizonyítjuk állításainkat a forszolás segítségével. Mindig feltesszük, hogy a kiinduló modell egy megszámlálható tranzitív ZFC modell, amiből a forszolással egy új modellt hozunk létre, amely szintén egy tranzitív ZFC modell.

A forszolás során mindig egy úgynevezett kényszerképzettel dolgozunk, amely egy olyan $(\mathbb{P}, \leq)$ részbenrendezett halmaz, amelynek van legnagyobb eleme, és nincsen minimális eleme. Az egyértelmű legnagyobb elemet $\mathbb{1}$-el jelöljük. $\mathbb{P}$ elemeit feltételeknek nevezzük, és $p, q \in \mathbb{P}$, $p \leq q$ esetén azt mondjuk, hogy p kiterjeszti q-t. Kompatibilisnek nevezünk két elemet, ha van közös kiterjesztésük, inkompatibilisnek, ha nincs.

Egy $D \subset \mathbb{P}$ halmaz *sűrű*, ha minden $p \in \mathbb{P}$-re létezik $q \leq p$, hogy $q \in D$. Azt mondjuk, hogy egy $E \subset \mathbb{P}$ halmaz *sűrű* $p \in \mathbb{P}$ *alatt*, ha minden $p' \leq p$ esetén létezik $q \leq p'$, hogy $q \in E$.

Egy $D \subset \mathbb{P}$ halmaz *nyílt*, ha $p \in D$ esetén minden $q \leq p$-re $q \in D$.

Egy $A \subset \mathbb{P}$ halmaz *antilánc*, ha A elemei páronként inkompatibilis elemek.

Tegyük fel, hogy V egy megszámlálható modell, és $(\mathbb{P}, \leq) \in V$, ezt röviden $\mathbb{P} \in V$-vel szoktuk jelölni. Ekkor a $G \subset \mathbb{P}$ halmaz V-$\mathbb{P}$-*generikus filter*, vagy röviden *generikus filter*, ha

$$\mathbb{1} \in G, \tag{1.1}$$

$$p \in G,\ q \geq p \Rightarrow q \in G, \tag{1.2}$$

$$p, q \in G \Rightarrow \exists r \in G,\ r \leq p, q, \tag{1.3}$$

$$\text{valahányszor } D \subset \mathbb{P} \text{ sűrű és } D \in V, \text{ akkor } D \cap G \neq \emptyset. \tag{1.4}$$

Ha V megszámlálható modell és $\mathbb{P} \in V$ kényszerképzet, akkor könnyen belátható, hogy létezik G generikus filter.

Ha adott egy V megszámlálható modell és $\mathbb{P} \in V$ kényszerképzet, akkor $\tau \in V$ név, ha minden eleme $\langle p, \sigma \rangle$ rendezett pár, ahol $p \in \mathbb{P}$ és σ név. Ha $\langle p, \sigma \rangle \in \tau$, akkor σ rangja a kumulatív hierarchia szerint kisebb, mint τ-nak, így a nevek fenti, rekurzív definíciója értelmes. Ekkor a V-beli nevek $V^{\mathbb{P}}$

osztályt alkotnak, azaz létezik egy olyan V-beli formula, amely eldönti, hogy valami név, vagy sem.

Legyen V megszámlálható modell, $\mathbb{P} \in V$ kényszerképzet és G generikus filter. Ha $\tau \in V^{\mathbb{P}}$ név, akkor

$$\tau^G = \left\{ \varrho^G \mid \exists \langle p, \varrho \rangle \in \tau,\ p \in G \right\}$$

a τ név kiértékelése a G generikus filter szerint. Ekkor

$$V[G] = \left\{ \tau^G \mid \tau \in V^{\mathbb{P}} \right\}$$

a V modell G-vel való bővítése, amely az eleme relációval szintén ZFC modellt alkot, ez lesz az új, forszolt modellünk. Valóban tekinthetjük a V bővítésének, ugyanis minden $x \in V$ elemhez létezik $\check{x} \in V^{\mathbb{P}}$ név, hogy $\check{x}^G = x$. Ilyen az $\check{x} = \{\langle \mathbb{1}, \check{y} \rangle \mid y \in x\}$ definícióval előállított név, ami valóban V-ben van. Gyakran emiatt a könnyű azonosíthatóság miatt elhagyjuk az átírást, és $x \in V$ elemhez tartozó $\check{x} \in V^{\mathbb{P}}$ név helyett egyszerűen x-et írunk. Emellett létezik a $\dot{G} = \{\langle p, \check{p} \rangle \mid p \in \mathbb{P}\}$ név, a G generikus filter kanonikus neve, amelyre $\dot{G}$ kiértékelése maga a G halmaz. Tehát valóban gondolhatunk $V[G]$-re úgy, mint V-nek G-vel való bővítése.

1.3.1. Definíció. Legyen $p \in \mathbb{P}$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ formula, ahol φ szabad változói az $\{x_1, \ldots, x_n\}$ halmazban vannak, és $\tau_1, \ldots, \tau_n \in V^{\mathbb{P}}$ nevek, ekkor azt mondjuk, hogy p *forszolja* $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$-t, jelölésben

$$p \Vdash \text{"}\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\text{"},$$

ha

(a) $p \Vdash \text{"}\tau_1 = \tau_2\text{"}$, ha minden $\langle s_1, \pi_1 \rangle \in \tau_1$-re

$$\{q \leq p \mid q \leq s_1 \to \exists \langle s_2, \pi_2 \rangle \in \tau_2,\ \text{amire } q \leq s_2,\ q \Vdash \text{"}\pi_1 = \pi_2\text{"}\}$$

halmaz sűrű p alatt, és minden $\langle s_2, \pi_2 \rangle \in \tau_2$-re

$$\{q \leq p \mid q \leq s_2 \to \exists \langle s_1, \pi_1 \rangle \in \tau_1,\ \text{amire } q \leq s_1,\ q \Vdash \text{"}\pi_2 = \pi_1\text{"}\}$$

halmaz sűrű p alatt.

(b) $p \Vdash \text{"}\tau_1 \in \tau_2\text{"}$, ha

$$\{q \leq p \mid \exists \langle s, \pi \rangle \in \tau_2,\ q \leq s,\ q \Vdash \text{"}\pi = \tau_1\text{"}\}$$

halmaz sűrű p alatt.

(c) $p \Vdash$ "$\varphi \wedge \psi$", ha $p \Vdash$ "φ" és $p \Vdash$ "ψ"

(d) $p \Vdash$ "$\neg\varphi$", ha nem létezik $q \leq p$, hogy $q \Vdash$ "φ"

(e) $p \Vdash$ "$\exists x \varphi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n)$", ha

$$\left\{q \leq p \mid \exists \sigma \in V^{\mathbb{P}},\ q \Vdash \text{"}\varphi(\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n)\text{"}\right\}$$

halmaz sűrű p alatt.

Bár a forszolást ismertnek tekintjük, azért adtuk most meg a definícióját, mert a bizonyításaink során gyakran használjuk, különös tekintettel a (c), (d) és (e) pontokra, a leírtakat. A továbbiakban bizonyítás nélkül közlünk néhány állítást, amelyeket szintén gyakran fogunk használni, akár hivatkozás nélkül is.

1.3.2. Állítás. *Pontosan akkor teljesül $p \Vdash$ "φ", ha minden $q \leq p$-re $q \Vdash$ "φ".*

1.3.3. Lemma. *(Igazságlemma)*

Ha V megszámlálható ZFC modell, $\mathbb{P} \in V$ kényszerképzet, G generikus filter, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ formula és $\tau_1, \ldots, \tau_n \in V^{\mathbb{P}}$ nevek, akkor a következő teljesül:

$$\exists p \in G,\ p \Vdash \text{"}\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\text{"} \Leftrightarrow V[G] \models \varphi\left(\tau_1^G, \ldots, \tau_n^G\right).$$

Az igazságlemma alapján megadható egy, a forszolás korábbi definíciójával ekvivalens, definíció.

1.3.4. Definíció. A $p \Vdash$ "$\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$", ha minden G generikus filterre, ha $p \in G$, akkor $V[G] \models \varphi\left(\tau_1^G, \ldots, \tau_n^G\right)$.

1.3.5. Állítás. *$V[G] \models ZFC$*

1.3.6. Állítás. *Ha $\alpha \in V$ és $V \models \alpha$ rendszám, akkor $V[G] \models \alpha$ rendszám.*

1.3.7. Állítás. *$V[G]$-ben nem keletkezik új rendszám.*

Emellett viszont fontos megjegyeznünk, hogy forszolás során a számosságok változhatnak, azaz előfordulhat, ahogy majd mi is látni fogjuk, hogy a V más rendszámokat gondol számosságnak, mint $V[G]$. Ez ω-ra nem vonatkozik, mert ilyen értelemben ω univerzális, ω minden megszámlálható ZFC modellnek eleme, de a többi számosságra talán érdemes úgy gondolni, mint egy számosságellenőrző formulát kielégítő elemére a modellnek. Az adott formula minden modellben kielégíthető, de különböző modellekben különböző rendszámok tartozhatnak hozzá. Ebből adódóan bevezetünk egy jelölést, hogy adott esetben meg tudjuk különböztetni az azonosan definiált, de különböző modellekhez tartozó halmazokat.

Legyen V egy ZFC modell, és X egy φ formula által definiálható halmaz, azaz $ZFC \vdash \exists! Y \varphi(Y)$. Ekkor azt a V-beli halmazt, amelyre $V \models \varphi(X)$, jelölje X^V.

Ilyen X lehet például az ω_1 rendszám. Ha tekintjük a V "világot", mint ZFC modellt, és nézzük ennek egy tranzitív V' megszámlálható elemi részmodelljét, akkor tudjuk, hogy V'-ben is értelmes ω_1 rendszámról beszélni, de ez nyilván nem egyezhet meg a V-beli ω_1-el, így megkülönböztetjük az ${\omega_1}^{V'}$ és az ${\omega_1}^{V}$ rendszámokat. Ekkor ${\omega_1}^{V'}$ V'-ben számosság, de V-ben csak egy rendszám.

Amennyiben egyértelmű, hogy melyik modellben vett értelmezését tekintjük egy halmaznak, eltekintünk ettől a jelöléstől.

A következő állítás mutatja, hogy tetszőleges forszolás esetén az első kategóriájú halmazok első kategóriájúak maradnak.

1.3.8. Állítás. *Ha $X \subset \omega^\omega$ adott halmaz, és $V \models X$ első kategóriájú, akkor $V[G] \models X$ első kategóriájú.*

Bizonyítás. Egy első kategóriájú halmaz mindig befoglalható egy F_σ első kategóriájú halmazba, ami másképp megfogalmazva azt jelenti, hogy diszjunkt egy sűrű G_δ halmaztól. Tetszőleges sűrű G_δ halmaz pedig felírható, mint megszámlálható sok sűrű nyílt halmaz metszete. Abból, hogy $V \models X$ első kategóriájú, tudjuk, hogy létezik $\{f_n\}_{n\in\omega}$ sorozat nyílt sűrű halmazok kódjaival, hogy

$$X \subset (\omega^\omega)^V \setminus \bigcap_{n\in\omega} U_{f_n}^V.$$

Azt fogjuk megmutatni, hogy a sűrű nyílt halmazok metszeteinek komplementereként kódolt F_σ halmaz a G-vel való bővítés során növekszik, következésképpen $V[G]$-ben továbbra is tartalmazza X-et, és a kódolásnak köszönhetően első kategóriájú F_σ, tehát X első kategóriájú.

Elegendő látni, hogy

$$\left[(\omega^\omega)^{V[G]} \setminus \bigcap_{n\in\omega} U_{f_n}^{V[G]}\right] \cap (\omega^\omega)^V = (\omega^\omega)^V \setminus \bigcap_{n\in\omega} U_{f_n}^V,$$

hiszen ekkor az említett halmaz $V[G]$-ben bővebb, mint V-ben. Lépésről lépésre mutatjuk meg, hogy ez teljesül.

$$[\sigma]^{V[G]} \cap (\omega^\omega)^V = [\sigma]^V$$

ugyanis $[\sigma]^V = \left\{ r \in (\omega^\omega)^V \mid \sigma \prec r \right\}$. Ebből adódóan

$$U_f^{V[G]} \cap (\omega^\omega)^V = \left(\bigcup_{\sigma \in \omega^{<\omega}} [f(\sigma)]^{V[G]} \right) \cap (\omega^\omega)^V =$$

$$= \bigcup_{\sigma \in \omega^{<\omega}} \left([f(\sigma)]^{V[G]} \cap (\omega^\omega)^V \right) = \bigcup_{\sigma \in \omega^{<\omega}} [f(\sigma)]^V = U_f^V.$$

Ekkor nyilván

$$\left(\bigcap_{n \in \omega} U_{f_n}^{V[G]} \right) \cap (\omega^\omega)^V = \bigcap_{n \in \omega} \left(U_{f_n}^{V[G]} \cap (\omega^\omega)^V \right) = \bigcap_{n \in \omega} U_{f_n}^V$$

is teljesül. Emellett $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ tetszőleges A, B, C halmazokra teljesül, ezért valóban

$$X \subset \left[(\omega^\omega)^V \setminus \bigcap_{n \in \omega} U_{f_n}^V \right] \subset \left[(\omega^\omega)^{V[G]} \setminus \bigcap_{n \in \omega} U_{f_n}^{V[G]} \right],$$

így látható, hogy X egy $V[G]$-beli első kategóriájú F_σ halmaz része, tehát $V[G] \models X$ első kategóriájú. $\square$

1.3.9. Definíció. Legyen $\mathbb{P} \in V$ kényszerképzet, és $\mathbb{1}_\mathbb{P} \Vdash$ "$\dot{\mathbb{Q}}$ kényszerképzet". Definiáljuk a $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$-ot. Legyen $(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$, ha $p \in \mathbb{P}$ és $\mathbb{1}_\mathbb{P} \Vdash$ "$\dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}$". Vezessünk be $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$-on egy részbenrendezést, azaz $(p, \dot{q}) \le (p', \dot{q}')$ pontosan akkor, ha $p \le p'$ és $p \Vdash$ "$\dot{q} \le \dot{q}'$". Azonosítsuk a $(p, \dot{q})$ és $(p', \dot{q}')$ elemeket egymással, ha $(p, \dot{q}) \le (p', \dot{q}') \le (p, \dot{q})$ áll.

Bizonyítás nélkül közöljük a következőket.

$$\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} \text{ kényszerképzet } V\text{-ben.}$$

Ha $G \subset \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ generikus filter, akkor legyen $G_\mathbb{P} = \{p \mid \exists \dot{q},\ (p, \dot{q}) \in G\}$ és $G_{\dot{\mathbb{Q}}} = \left\{ \dot{q}^{G_\mathbb{P}} \mid \exists p,\ (p, \dot{q}) \in G \right\}$. Ekkor

$$G_\mathbb{P}\ V\text{-}\mathbb{P}\text{-generikus filter,}$$
$$G_{\dot{\mathbb{Q}}}\ V[G_\mathbb{P}]\text{-}\dot{\mathbb{Q}}^{G_\mathbb{P}}\text{-generikus filter,}$$
$$V[G] = V[G_\mathbb{P}][G_{\dot{\mathbb{Q}}}].$$

1.3.10. Definíció. *(α hosszú, megszámlálható tartójú iterált forszolás)*

Legyen α rendszám. Rekurzióval definiáljuk a $\mathbb{P}_\beta$ β-ik iteráltat minden $\beta \leq \alpha$-ra. Minden $\beta < \alpha$-ra $\dot{\mathbb{Q}}_\beta$ egy V-$\mathbb{P}_\beta$-név egy kényszerképzetre, melynek legnagyobb eleme $\mathbb{1}_\beta$.

$\mathbb{P}_0$ legyen a triviális kényszerképzet.

Rákövetkező rendszámra $\mathbb{P}_{\beta+1} \cong \mathbb{P}_\beta * \dot{\mathbb{Q}}_\beta$.

$\mathbb{P}_\beta$ elemei β limesz esetén olyan f függvények, amelyekre

$$D(f) = \beta, \tag{1.5}$$

$$\forall \gamma \leq \beta \Rightarrow f|_\gamma \in \mathbb{P}_\gamma,\ f|_\gamma \Vdash \text{"}f(\gamma) \in \dot{\mathbb{Q}}_\gamma\text{"}, \tag{1.6}$$

$$supp(f) = \{\gamma < \beta \mid f|_\gamma \nVdash \text{"}f(\gamma) = \mathbb{1}_\gamma\text{"}\} \text{ megszámlálható}, \tag{1.7}$$

$$f' \leq f \Leftrightarrow f'|_\gamma \Vdash \text{"}f'(\gamma) \leq f(\gamma)\text{"} \quad \forall \gamma < \beta. \tag{1.8}$$

1.3.11. Definíció. Egy $\mathbb{P}$ kényszerképzetre azt mondjuk, hogy *proper*, ha valahányszor $\mathfrak{M}$ egy megszámlálható elemi részmodell V-ben úgy, hogy $p \in \mathbb{P}$ és $p, \mathbb{P} \in \mathfrak{M}$, akkor létezik $q \leq p$, hogy minden $D \subset \mathbb{P}$ sűrű nyílt, $D \in \mathfrak{M}$ esetén $q \Vdash$ "$\dot{G} \cap D \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset$", ahol $\dot{G}$ a generikus filter neve. Ekkor q-t $\mathfrak{M}$-generikus feltételnek nevezzük.

1.3.12. *Megjegyzés.* Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy a properség definíciójában valójában elegendő lenne a D halmazokról feltenni, hogy sűrűek, és ez ekvivalens definíciót eredményezne. Ugyanígy D helyett A maximális antiláncot véve is ekvivalens definíciót kapunk.

1.3.13. Állítás. *Megszámlálható antilánc feltételes kényszerképzet proper.*

Bizonyítás. Legyen A egy maximális antilánc $\mathbb{P}$-ben, ekkor a megszámlálható antilánc feltétel miatt A megszámlálható, így ha $A \in \mathfrak{M}$ akkor $A \subset \mathfrak{M}$ is teljesül, ugyanis $V \models |A| = \omega$, ebből adódóan $\mathfrak{M} \models |A| = \omega$, tehát létezik egy $f : \omega \to A$ szürjektív $\mathfrak{M}$-beli függvény, de ekkor minden $n \in \omega$-ra $f(n) \in \mathfrak{M}$ is teljesül, miközben $\mathfrak{M}$ elemi volta miatt f függvény V-ben is szürjektív. Emellett egy G generikus filternek tetszőleges maximális antilánccal vett metszete nem üres. Ez is világos, hiszen $D = \{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p,\ p \in A\}$ halmaz sűrű $\mathbb{P}$-ben. Ezt összegezve azt kapjuk, hogy $\mathbb{1}$ egy $\mathfrak{M}$-generikus feltétel. $\square$

A következő két állítást nem bizonyítjuk, ezeket [7, 308 old.] alapján elfogadjuk.

1.3.14. Állítás. *Proper forszolás megőrzi az ω_1 számosságot, azaz $\omega_1^V = \omega_1^{V[G]}$.*

1.3.15. Állítás. *Proper forszolás megszámlálható tartójú iteráltja proper.*

1.4. A Miller kényszerképzet

A Miller forszolás egy V megszámlálható ZFC modellben a valós számok halmazához ad hozzá egy újabb elemet, a Miller valóst. Az ehhez tartozó Miller kényszerképzet a következők segítségével állítható élő.

1.4.1. Definíció. $(T, \prec)$ részbenrendezett halmaz *fa* $\omega^{<\omega}$-ban, ha $T \subset \omega^{<\omega}$ lefelé zárt halmaz, azaz minden $t \in T$-re, ha $t' \prec t$, akkor $t' \in T$. Általában jelölésében elhagyjuk a relációjelet, és ilyenkor azt mondjuk, hogy T egy fa.

1.4.2. Definíció. Legyen $T \subset \omega^{<\omega}$ fa, $t \in T$, ekkor legyen $succ_T(t)$ a t *rákövetkezőinek* halmaza T-ben, azaz

$$succ_T(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ s \in T \mid \exists k \in \omega,\ s = t^\frown k \right\}.$$

Ha $|succ_T(t)| \geq 2$ akkor azt mondjuk, hogy t a T fa *elágazási pontja.*

1.4.3. Definíció. Egy $T \subset \omega^{<\omega}$ halmaz *Miller fa*, ha a következők teljesülnek:

$$T \neq \emptyset \text{ fa,} \tag{1.9}$$

$$\forall t \in T \quad |succ_T(t)| = 1 \text{ vagy } \omega, \tag{1.10}$$

$$\forall t \in T,\ \exists t' \succ t \quad |succ_T(t')| = \omega. \tag{1.11}$$

1.4.4. Definíció. A *Miller kényszerképzet* az az $(\mathbb{M}, \leq)$ pár, ahol

$$\mathbb{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{T \subset \omega^{<\omega} \mid T \text{ Miller fa}\}$$

és $T, T' \in \mathbb{M}$-re definíció szerint

$$T \leq T' \Leftrightarrow T \subset T'.$$

1.4.5. *Megjegyzés.* Ez valóban kényszerképzet, ugyanis az $\mathbb{1} = \omega^{<\omega}$ a legnagyobb Miller fa, mivel bármely Miller fa ennek része, tehát definíció szerint kiterjeszti, kisebb nála. Emellett világos, hogy tetszőleges Miller fában elhagyva egy végtelen elágazási pont egyetlen rákövetkezőjét és annak kiterjesztéseit, ugyanúgy Miller fát kapunk, ami része a kiinduló fánknak.

1.4.6. Definíció. Legyen $T \in \mathbb{M}$, ekkor T *gyökerének* nevezzük T első elágazási pontját, azaz

$$rt(T) = min_{\prec} \{t \in T \mid |succ_T(t)| = \omega\}$$

Világos, hogy ez a minimum mindig létezik és egyértelmű.

1.4.7. Definíció. Legyen $T \in \mathbb{M}$, $\sigma \in T$ tetszőleges, ekkor T *megszorítása* σ-ra

$$T[\sigma] = \{t \in T \mid t \prec \sigma \text{ vagy } t \succ \sigma\}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a megszorítás is Miller fát eredményez, ennek bizonyítását az olvasóra bízzuk.

1.4.8. Definíció. A $b \subset \omega^{<\omega}$ halmaz egy *végtelen ág*, ha $(b, \prec)$ rendezett halmaz, és tetszőleges $h \in \omega$ magasságra létezik $\sigma \in b$, hogy $|\sigma| = h$.

Könnyen látszik, hogy minden Miller fa tartalmaz végtelen ágat.

A továbbiakban $\mathbb{M}$ elemeire inkább, mint a kényszerképzet feltételeire szeretnénk gondolni, ezért áttérünk a $p, q \in \mathbb{M}$ általánosabban használt jelölésekre.

Legyen V egy megszámlálható ZFC modell, $\mathbb{M} \in V$. Vizsgáljuk meg, hogy hogyan néz ki egy V-$\mathbb{M}$-generikus filter, G. Tudjuk, hogy bármely $p, q \in G$ esetén létezik $r \in G$, amelyre $r \leq p, q$, azaz $r \subset p, q$ Miller feltétel, tehát $p \cap q$ szükségszerűen tartalmaz Miller fát. Tehát azt kapjuk, hogy bármely két G-beli feltételnek van közös végtelen ága. Emellett, ha $p, q \in G$, akkor $rt(p) \prec rt(q)$ vagy $rt(q) \prec rt(p)$, különben $p \cap q$ egy véges sorozat lenne, ami az előzőek alapján lehetetlen.

Tekintsük a

$$D_h = \{p \in \mathbb{M} \mid |rt(p)| \geq h\}$$

részhalmazokat minden $h \in \omega$-ra. Ez a halmaz sűrű, mivel tetszőleges p Miller feltételre és $h \in \omega$ magasságra, p-nek van h felett, azaz h-nál hosszabb elágazási pontja, mondjuk σ. Ekkor $p[\sigma] \leq p$ eleget tesz a D_h definíciójában szereplő feltételnek, tehát D_h valóban sűrű és V-beliek is, mert V-ben definiálhatók. Mivel G generikus filter, ezért minden D_h-val vett metszete nem üres.

Ezek alapján világos, hogy

$$\bigcap G = \bigcap_{p \in G} p = \{\emptyset, (m_0), (m_0, m_1), (m_0, m_1, m_2), \ldots\}$$

halmaz szükségszerűen egyetlen végtelen ág. Ez a végtelen ág azonosítható ω^ω egy egyértelműen meghatározott elemével, a fenti felírás szerinti végtelen ághoz tartozzon az $(m_0, m_1, m_2, \ldots) \in \omega^\omega$ valós. A V modell G-vel való bővítésével tehát valójában ω^ω egy jól meghatározott elemével is bővítjük V-t, ezt nevezzük a Miller valósnak, ez is eleme lesz a $V[G]$ modellnek. Megadjuk a Miller valós kanonikus nevét, amelyet $\dot{m}$-al jelölünk. Legyen

$$\dot{m} = \{\langle p, \check{\sigma} \rangle \mid p \in \mathbb{M}, \sigma \in rt(p)\},$$

ami valóban név, ugyanis, ha $p \in V$, akkor a $\sigma \in rt(p)$ is V-ben van. Nézzük $\dot{m}$ kiértékelését a G generikus filter mellett, ami nem más, mint

$$\left\{\check{\sigma}^G \mid p \in G, \sigma \in rt(p)\right\} = \{\sigma \mid p \in G, \sigma \in rt(p)\} = \bigcup_{p \in G} rt(p).$$

Ez valóban helyes felírás, mert ha ennek vesszük egy h hosszú σ kezdőszeletét, az azt jelenti, hogy létezik $p \in G$, hogy $\sigma \prec rt(p)$, és korábbi megállapításunk, miszerint a G-beli feltételek gyökerei kiterjesztik egymást, mindenképpen szükségszerű, hogy σ minden G-beliben benne legyen. Másik irányban, ha $\bigcap G$ végtelen ág h hosszú σ elemét vesszük, az azt jelenti, hogy ezt minden $p \in G$ tartalmazza, és mivel $G \cap D_h$ nem üres, ezért létezik $p \in G$, hogy $\sigma \prec rt(p)$ teljesül.

A következő egyszerű állítások lényegében olyasmit mutatnak, hogy egy Miller feltétel csak a végtelen ágait tudja Miller valósnak gondolni.

1.4.9. Állítás. *Legyen $p \in \mathbb{M}$ tetszőleges és $\sigma \in p$, ekkor $p[\sigma] \Vdash$ "$\dot{m}|_{|\sigma|} = \sigma$".*

Bizonyítás. Valójában elegendő a következőt ellenőriznünk. Ha $p[\sigma] \in G$, akkor $\dot{m}|_{|\sigma|}$ kiértékelése G szerint megegyezik σ-val. Ez viszont $\dot{m}$ definíciójából adódóan nyilvánvaló, hiszen minden $p \in \mathbb{M}$ esetén $\sigma \prec rt(p[\sigma])$ teljesül, tehát $\sigma \prec rt(p[\sigma]) \prec \dot{m}^G$ is teljesül. □

1.4.10. Állítás. *Legyen $p \in \mathbb{M}$ és $n \in \omega$. Ha $p \Vdash$ "$\dot{m}|_n$ P tulajdonságú", akkor minden $\sigma \in p$, $|\sigma| = n$ esetén σ P tulajdonságú.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamilyen $p \in \mathbb{M}$ és $n \in \omega$ esetén nem teljesül, tehát létezik egy $\sigma \in p$, $|\sigma| = n$, hogy σ nem P tulajdonságú. Az előző állítás szerint erre a σ-ra és p-re $p[\sigma] \Vdash$ "$\dot{m}|_{|\sigma|} = \sigma$", amiből az is következik, hogy $p[\sigma] \Vdash$ "$\dot{m}|_n$ nem P tulajdonságú". Ez viszont lehetetlen, mert ez p kiterjesztése, és egymásnak ellentmondó állításokat forszolnak. □

A bizonyítás során szükségünk lesz rá, hogy a Miller kényszerképzet egy módosított változatát használjuk, ezért bevezetjük a növekedő Miller fa fogalmát.

1.4.11. Definíció. Egy $p \in \mathbb{M}$ feltétel *növekedő Miller fa*, ha tetszőleges $\sigma \in p$ esetén, minden $\tau \in succ_p(\sigma)$ elemre τ utolsó tagja nagyobb, mint σ utolsó tagja, azaz

$$\sigma(|\sigma| - 1) < \tau(|\tau| - 1).$$

Ilyenkor következik, hogy $succ_p(\sigma) \subset \{\tau \mid \tau = \sigma^\frown k,\ k > \sigma(|\sigma|-1)\}$.

Könnyen látszik, hogy a Miller fák és a növekedő Miller fák között megadható egy relációtartó bijekció, így világos hogy ugyanazokat az állításokat lehet kiforszolni velük. A továbbiakban a Miller fán, illetve feltételen mindig növekedő Miller fát értünk.

1.4.12. Lemma. *Az $\mathbb{M}$ Miller kényszerképzet proper.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{M}$ megszámlálható elemi részmodell, hogy $p \in \mathbb{M}$ és $p, \mathbb{M} \in \mathfrak{M}$. Soroljuk fel az $\mathfrak{M}$-beli nyílt sűrű halmazokat, azaz legyen

$$\{D_n\}_{n\in\omega} = \{D \mid D \subset \mathbb{M} \text{ sűrű nyílt}\} \cap \mathfrak{M}.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy létezik egy $q \leq p$ feltétel, hogy minden $n \in \omega$-ra $q \Vdash$ "$\dot{G} \cap D_n \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset$". Ezt a $q \leq p$ feltételt fúzióval fogjuk előállítani, azaz kiindulunk az adott p fából, és lépésről lépésre megadjuk szűkítéseit, részfáit úgy, hogy közben bizonyos csúcsokról biztosítjuk, hogy az a végső fában is benne lesz. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy a csúcsot fagyasztjuk.

Minden $s \in \omega^{<\omega}$-ra elkészítünk egy $q_s \in \mathfrak{M} \cap \mathbb{M}$ feltételt, úgy hogy $t \succ s$ esetén $q_t \leq q_s$, és ha s hossza n, akkor $q_s \in D_n$ teljesül. Ezekre a feltételekre fogjuk megígérni, hogy $rt(q_s)$ benne lesz a q fában, sőt, minden közvetlen rákövetkezőt megígérünk.

Legyen $q_\emptyset$ a következő. Tekintsük a

$$\exists q_\emptyset\,(q_\emptyset \leq p \wedge q_\emptyset \in D_0)$$

formulát. Ez egy V-ben igaz formula, de $p, D_0, \leq \in \mathfrak{M}$, és $\mathfrak{M}$ elemi részmodell, ezért $\mathfrak{M}$-ben is igaz, tehát létezik $q_\emptyset \in \mathfrak{M} \cap D_0$. Ekkor megígérjük $t_\emptyset = rt(q_\emptyset)$ csúcsot és minden rákövetkezőjét $q_\emptyset$-ban.

Most tegyük fel, hogy $s \in \omega^{<\omega}$-ra ismerjük q_s-et, $n = |s|$, q_s gyökere t_s fagyasztott pont a fúzió során, és minden rákövetkező ágát megtartjuk. Vegyük a $succ_{q_s}(t_s)$ rákövetkező ágak egy $\{\sigma_k\}_{k\in\omega}$ felsorolását. Ekkor hasonlóan az első lépéshez, a

$$\exists q_{s^\frown k}\,(q_{s^\frown k} \leq q_s[\sigma_k] \wedge q_{s^\frown k} \in D_{n+1})$$

formula $\mathfrak{M}$-ben igaz, tehát létezik $q_{s^\frown k} \in \mathfrak{M} \cap D_{n+1}$ feltétel, amelyre $q_{s^\frown k} \leq q_s[\sigma_k]$ is fennáll. Ekkor fagyasztjuk a $t_{s^\frown k} = rt(q_{s^\frown k})$ csúcsot.

Ezek alapján már megadhatjuk a q feltételt. Legyen q az $\bigcup_s t_s$ halmaz lezárása, azaz $\sigma \in q$ pontosan akkor, ha létezik $s \in \omega^{<\omega}$, hogy $\sigma \prec t_s$. Ez a q egy Miller feltétel, ami a t_s-ek egymáshoz való viszonyából világosan látszik. Mutassuk meg, hogy ez valóban jó. Ehhez szükségünk lesz egy egyszerű segédállításra.

1.4.13. Állítás. *Legyen $\mathbb{P} \in V$ egy kényszerképzet. Ha $r \in D \cap \mathfrak{M}$, akkor $r \Vdash$ "$\dot{G} \cap D \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset$", ahol $\mathfrak{M}$ megszámlálható elemi részmodell V-ben, $D \in \mathfrak{M}$ nyílt sűrű $\mathbb{P}$-ben és $\dot{G}$ a generikus filter neve.*

Bizonyítás. Az $r \in D \cap \mathfrak{M}$ feltételnek köszönhetően $\mathbb{1} \Vdash$ "$r \in D \cap \mathfrak{M}$". Az $r \Vdash$ "$r \in \dot{G}$" pedig világos, hiszen ez pontosan azt jelenti, hogy ha $r \in G$, akkor $V[G] \models r \in \dot{G}^G$, ez pedig nyilván teljesül. Azt kapjuk, hogy $r \Vdash$ "$r \in \dot{G} \cap D \cap \mathfrak{M}$", tehát $r \Vdash$ "$\dot{G} \cap D \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset$". □

Mutassuk meg ennek segítségével, hogy q jó. Tegyük fel, hogy van egy $n \in \omega$, amelyre $q \nVdash$ "$\dot{G} \cap D_n \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset$". Ez azt jelenti, hogy van $q' \leq q$, hogy $q' \Vdash$ "$\dot{G} \cap D_n \cap \mathfrak{M} = \emptyset$". Világos, hogy létezik q'-nek olyan q'' kiterjesztése, amelyre valamilyen n hosszú $s \in \omega^{<\omega}$-ra $q'' \leq q_s$ teljesül. Mivel $q_s \in D_n \cap \mathfrak{M}$, ezért a segédállításunk szerint $q_s \Vdash$ "$\dot{G} \cap D_n \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset$". Ekkor q'' két egymásnak ellentmondó állítást forszoló feltétel közös kiterjesztése, ami lehetetlen.

Ezzel beláttuk, hogy $\mathbb{M}$ proper. □

A Miller kényszerképzet a proper tulajdonságnak köszönhetően sok másik hasznos tulajdonsággal rendelkezik. Ilyen például az, hogy proper forszolás mindig megőrzi az ω_1 számosságot, és ez megszámlálható tartójú iteráltjaira is igaz.

1.4.14. Definíció. Legyen $\mathbb{P} \in V$ egy kényszerképzet és κ egy számosság V-ben. Azt mondjuk $\mathbb{P}$-re, hogy κ *antilánc feltételes*, röviden κ-*CC* (κ-chain condition), ha minden $\mathbb{P}$-beli antilánc számossága kisebb κ-nál.

1.4.15. Állítás. *Tegyük fel, hogy $\mathbb{P} \in V$ egy κ-CC kényszerképzet, ahol κ egy reguláris számosság V-ben. Ekkor $\mathbb{P}$ megőriz minden $\theta \geq \kappa$ számosságot, azaz $\theta^V = \theta^{V[G]}$.*

Az állítást bizonyítás nélkül a [8, 6.9. Lemma] alapján elfogadjuk.

1.4.16. Állítás. *A Miller kényszerképzet megőrzi az összes $\kappa \geq (2^\omega)^+$ számosságot.*

Bizonyítás. Ez annak a ténynek az egyszerű következménye, hogy $\mathbb{M}$-ben egy maximális antilánc mérete legfeljebb akkora, mint $|\mathbb{M}| \leq \left|2^{\omega^{<\omega}}\right| = 2^\omega$. Tehát $\mathbb{M}$ egy $(2^\omega)^+$-*CC* kényszerképzet, tehát az 1.4.15. pont szerint teljesül az állításunk. □

1.4.17. Állítás. $\mathbb{M}$ *legfeljebb ω_2 hosszúságú megszámlálható tartójú iteráltjaira minden $\kappa \geq (2^\omega)^+$ számosság megmarad.*

Ezt az állítást [7, 308 old.] alapján, bizonyítás nélkül elfogadjuk.

1.4.18. *Megjegyzés.* Amennyiben feltesszük CH-t, akkor $V \models |2^\omega| = \omega_1$, és $V \models (2^\omega)^+ = \omega_2$, tehát azt kaptuk, hogy minden $\kappa \geq \omega_2$ számosság megmarad. A properség miatt ω_1 is megmarad, tehát $\mathbb{P}_{\omega_2}$ megőrzi az összes számosságot. Emellett $\alpha < \omega_2$-re $\mathbb{P}_\alpha$ csak legfeljebb ω_1 új valóst ad hozzá a modellhez, tehát a forszolt V_α modellre, $V_\alpha \models CH$ teljesül.

Megjegyeznénk, hogy ω_2 hosszúságú iterálás esetén viszont már nem fog teljesülni CH, hiszen ekkor már legalább ω_2 új valóst adtunk a modellhez, és ez a számosság nem omlott össze.

2. fejezet

A bizonyítás gondolatmenete

2.1. Mit szeretnénk bizonyítani?

Célunk megmutatni ZFC mellett egy bizonyos állítás feltételes konzisztenciáját.

2.1.1. Tétel. *ZFC konzisztenciáját feltéve konzisztens, ha ZFC mellé hozzávesszük azt az állítást, hogy minden $X \subset \mathbb{R}$ második kategóriájú halmazhoz létezik $C \subset \mathbb{R}$ Cantor halmaz, hogy $X \cap C$ második kategóriájú halmaz C-ben.*

2.1.2. *Megjegyzés.* Valójában a valós számok helyett az ω^ω halmazban fogunk dolgozni. A következő állítás mutatja, hogy miért tehetjük ezt meg.

2.1.3. Állítás. *Amennyiben ZFC konzisztenciáját feltéve konzisztens, ha ZFC mellé hozzávesszük azt az állítást, hogy minden $X \subset \omega^\omega$ második kategóriájú halmazhoz létezik $C \subset \omega^\omega$ Cantor halmaz, hogy $X \cap C$ második kategóriájú halmaz C-ben, akkor a 2.1.1. Tétel állítása is teljesül.*

Bizonyítás. Az 1.1.1. Állításra támaszkodva ω^ω halmazt azonosnak tekintjük az irracionális számok halmazával. Először lássuk be azt, hogy $X \subset \mathbb{R}$ pontosan akkor második kategóriájú, ha $X \cap \omega^\omega$ második kategóriájú ω^ω-ban. Ez adódik abból, hogy $\mathbb{R} \setminus \omega^\omega$ nem más, mint $\mathbb{Q}$, a racionális számok halmaza, ami egy megszámlálható, első kategóriájú F_σ halmaz $\mathbb{R}$-ben, így ω^ω egy sűrű G_δ halmaz $\mathbb{R}$-ben. Azt mutatjuk meg, hogy Y pontosan akkor első kategóriájú $\mathbb{R}$-ben, ha $Y \cap \omega^\omega$ első kategóriájú ω^ω-ban, és ez nyilván elég. Az egyik irány könnyen látszik, mivel az első azt jelenti, hogy Y elkerül egy $\mathbb{R}$-beli U sűrű G_δ halmazt, de ekkor $U \cap \omega^\omega$ sűrű G_δ halmaz ω^ω-ban, és $Y \cap \omega^\omega$ elkerüli $U \cap \omega^\omega$-t, így első kategóriájú. A másik irányhoz legyen $Y \cap \omega^\omega$ első kategóriájú ω^ω-ban. Ekkor van egy U sűrű G_δ halmaz ω^ω-ban, ami elkerüli.

Létezik egy U' $\mathbb{R}$-beli G_δ halmaz, hogy $U = U' \cap \omega^\omega$, mivel $\omega^\omega \subset \mathbb{R}$ altér, és U' sűrű $\mathbb{R}$-ben, mert sűrű altér sűrű része sűrű a nagy térben is. Ekkor $Y \cap \omega^\omega$ elkerüli $U' \cap \omega^\omega$ halmazt is, ami sűrű G_δ $\mathbb{R}$-ben.

$$Y = (Y \cap \omega^\omega) \cup (Y \cap \mathbb{Q}),$$

ami két első kategóriájú uniója, azaz első kategóriájú.

Innen már egyszerű, hiszen ha a 2.1.3. Tétel feltétele teljesül, és veszünk egy $X \subset \mathbb{R}$ második kategóriájú halmazt, akkor nézzük az $X' = X \cap \omega^\omega$ halmazt, amihez létezik $C \subset \omega^\omega$ Cantor halmaz, hogy $X' \cap C$ második kategóriájú C-ben. Ekkor C jó lesz X-hez is, hiszen $X \cap C$ bővebb, mint $X' \cap C$, tehát $X \cap C$ is második kategóriájú C-ben, és C Cantor halmaz, mert Cantor halmaznak lenni független tulajdonság attól, hogy milyen altérben nézzük. □

A 2.1.3. pontban szereplő állításhoz, hogy minden $X \subset \omega^\omega$ második kategóriájú halmazhoz létezik $C \subset \omega^\omega$ Cantor halmaz, hogy $X \cap C$ második kategóriájú halmaz C-ben, létezik egy φ formula, ami ezt fejezi ki. Tehát igazolandó célunk röviden felírva a következő:

$$Con\,(ZFC) \Rightarrow Con\,(ZFC + \varphi)\,.$$

Ehhez elegendő megadnunk egy olyan ZFC modellt, amelyben φ igaz. Ilyen modellt a forszolás módszerének segítségével fogunk előállítani. Kiindulunk egy megszámlálható ZFC modellből, és a forszolás segítségével, megadunk egy másik, forszolt ZFC modellt, amiben ez a φ már teljesül. A fő technikai tételünk állítása nagyon hasonlít φ állításához, de nagy különbség lesz, hogy a tárgyalt X halmazt a kiinduló modellből vesszük, amelynek reprezentáltjához létezik az új modellben egy C Cantor halmaz, ami a fentieket tudja. Fogalmazzuk meg ezt az állítást formálisan is.

2.1.4. Tétel. *Legyen V egy megszámlálható ZFC modell, és $\mathbb{M} \in V$ a Miller kényszerképzet. Legyen $X \in V$ második kategóriájú ω^ω-ban. Ekkor létezik $V^{\mathbb{M}}$-beli $\dot{C}$ név egy Cantor halmazra ω^ω-ban, amire a keletkező modellben igaz, hogy $X \cap \dot{C}$ második kategóriájú $\dot{C}$-ban.*

2.1.5. *Megjegyzés.* A következő fejezetünket szánjuk a 2.1.4. Tétel bizonyítására, így a fejezet további részeiben egyelőre csak fogadjuk el a tétel állítását.

A 2.1.4. Tétel és a φ formula állításai között az a lényeges különbség, hogy a technikai tétel az új modellben lévő második kategóriájú halmazokról általában véve nem mond semmit. Vizsgáljuk meg, hogy a tétel segítségével hogyan tudjuk mégis megmutatni a célunkat.

2.2. Tükröződés

Ahhoz, hogy fel tudjuk használni a 2.1.4. Tételt, iterált forszolást fogunk alkalmazni, és megmutatjuk, hogy ha egy halmaz a végső modellben második kategóriájú, akkor szükségszerűen van egy korábbi iterált, amelyben szintén második kategóriájú, tehát egy korábbi modellben is *"tükröződik"* a második kategóriájúság.

Legyen $\mathbb{P}_\alpha$ $\alpha \leq \omega_2$-re az α-ik megszámlálható tartójú iteráltja a Miller kényszerképzetnek. Jelöljük V_α-val egy V kiinduló modellből a $\mathbb{P}_\alpha$ kényszerképzettel kiforszolt modellt.

Ahhoz, hogy belássuk a tükröződést, egy olyan megszámlálható V modellből fogunk kiindulni, amelyben teljesül CH, azaz a kontinuum hipotézis. Ekkor, ahogy azt már az 1.4.18. pontban láttuk, $\mathbb{P}_{\omega_2}$-vel való forszolás során semelyik $\kappa \geq \omega_2$ számosság nem omlik össze, és a properség miatt ω_1 sem omlik össze. Emellett minden $\alpha \in \omega_2$ esetén V_α-ban teljesül CH.

2.2.1. Lemma. *(Tükröződés)*

Legyen $\mathbb{P}_{\omega_2}$ az ω_2-ik megszámlálható tartójú iteráltja a Miller kényszerképzetnek, és V egy megszámlálható ZFC modell úgy, hogy $\mathbb{P}_{\omega_2} \in V$. Legyen $X \in V_{\omega_2}$ második kategóriájú ω^ω-ban. Ekkor létezik $\alpha \in \omega_2$, hogy $V_\alpha \models X \cap V_\alpha$ második kategóriájú.

Bizonyítás. Ahhoz, hogy a tükröződést belássuk, bizonyítás nélkül használjuk azt az állítást, hogy a Miller forszolás ω_1 kofinalitású és ω_2 kofinalitású iteráltjában sem keletkezik új valós [7, Lemma 1.20]. Ha ezt elfogadjuk, akkor elegendő megmutatnunk, hogy létezik olyan α, amelyre $X \cap V_\alpha$ elkerül minden V_α-beli első kategóriájú F_σ halmazt.

Megadunk minden $\alpha \in \omega_2$-re egy $Y_\alpha \subset X$ tanút arra, hogy X elkerül minden V_α-beli első kategóriájú F_σ halmazt. Mivel V_α-ban CH igaz, ezért ω_1 sok F_σ halmaz van benne, tehát legfeljebb ugyanennyi első kategóriájú F_σ. Ezeket soroljuk fel az $\{F_\gamma\}_{\gamma\in\omega_1}$ halmazban. Mindegyik F_γ-hoz választhatunk egy X-beli x_γ elemet, hogy $x_\gamma \notin F_\gamma$, hiszen X második kategóriájú V_{ω_2}-ben, és az 1.3.8. Állításunk értelmében F_γ V_{ω_2}-ben is első kategóriájú. Minden x_γ előkerül valamilyen $\beta_\gamma \in \omega_2$-re a V_{β_γ}-ban, ugyanis ω_2 kofinalitású iteráltban nem keletkezik új valós. Tekintsük a legkisebb ilyen β_γ-kat. Ez azt jelenti, hogy ha Y_α halmazt úgy adjuk meg, mint az x_γ pontok egyesítését, akkor erre $Y_\alpha \subset V_\beta$ teljesül, ahol

$$\beta = \sup_{\gamma\in\omega_1} \{\beta_\gamma\}.$$

Ez a β biztosan eleme ω_2-nek, ugyanis legfeljebb ω_1 kofinalitású halmaz szuprémumaként áll elő.

Megadunk egy $f : \omega_2 \to \omega_2$ függvényt. Egy α elemhez rendeljük hozzá a β elemet, ha Y_α-hoz β a legkisebb, hogy $Y_\alpha \subset V_\beta$ teljesül. Ezek alapján elegendő lenne megadnunk egy $\alpha \in \omega_2$ elemet, hogy $f(\alpha) \leq \alpha$, ugyanis ekkor α megfelelő, hiszen ebben az esetben Y_α részhalmaza $V_{f(\alpha)} \subset V_\alpha$-nak, és elkerül minden első kategóriájút V_α-ban, azaz Y_α, és így $X \cap V_\alpha$ is, második kategóriájú V_α-ban.

2.2.2. Állítás. *Tetszőleges $g : \omega_2 \to \omega_2$ függvényre, tetszőleges $\alpha_0 \in \omega_2$ elemhez létezik nála nagyobb ω_1 kofinalitású $\alpha \in \omega_2$ úgy, hogy minden $\beta < \alpha$ esetén $g(\beta) < \alpha$.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha_0 \in \omega_2$ adott. Rekurzívan megadunk egy szigorúan növő $\{\alpha_\xi\}_{\xi\in\omega_1}$ sorozatot, amelynek a szuprémuma jó lesz. Legyen

$$\alpha_\xi = \sup\Big(\{\alpha_\eta + 1 \mid \eta < \xi\} \cup \{g(\beta) \mid \exists \eta < \xi,\ \beta < \alpha_\eta\} \Big).$$

Legyen $\alpha = \sup_{\xi<\omega_1} \alpha_\xi$ és $\beta < \alpha$. Ekkor létezik ξ úgy, hogy $\beta < \alpha_\xi$, így $g(\beta) \leq \alpha_{\xi+1} < \alpha_{\xi+2} \leq \alpha$. □

Térjünk vissza a Lemma bizonyítására. Vegyünk egy ω_1 kofinalitású α rendszámot, amelyre minden $\beta < \alpha$ esetén $f(\beta) < \alpha$. Mivel ω_1 kofinalitású forszolás esetén nem keletkezik új valós, ezért

$$\omega^\omega \cap V_\alpha = \omega^\omega \cap \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta,$$

illetve tetszőleges $Y \subset \omega^\omega$ esetén

$$Y \cap V_\alpha = Y \cap \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$$

is teljesül. Ebből adódóan a V_α-ban lévő összes F_σ első kategóriájú előfordul korábban, tehát ha tekintjük minden $\beta < \alpha$-ra az Y_β-k egyesítését, akkor ez jó tanú V_α-ban. Emellett

$$\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta \subset \bigcup_{\beta<\alpha} V_{f(\beta)} \subset \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta \subset V_\alpha$$

is teljesül, tehát erre az α-ra $f(\alpha) \leq \alpha$. Ezzel bebizonyítottuk a tükröződést. □

2.3. Kategóriaőrzés

Azt már tudjuk, hogy ha veszünk egy tetszőleges $X \subset \omega^\omega$ második kategóriájú halmazt a V_{ω_2} modellben, akkor létezik egy olyan köztes iterált, amelyben tükröződik a második kategóriájúság. Tehát létezik $\alpha \in \omega_2$, hogy V_α-ban igaz, hogy $X \cap V_\alpha$ második kategóriájú. A folytatáshoz egyelőre csak elfogadva a 2.1.4. Tétel állítását, amelynek bizonyítása a továbbiaktól független, felírhatjuk, hogy ha a V_α modellt vesszük kiinduló modellnek, akkor a következő, azaz az $\alpha + 1$-ik iteráltban van egy ω^ω-beli C Cantor halmaz, amire

$$V_{\alpha+1} \models (X \cap V_\alpha) \cap C \text{ második kategóriájú } C\text{-ben.}$$

Mondhatnánk, hogy ez a C halmaz jó lesz a végső modellben is, mert nekünk az kell, hogy $X \cap C$ legyen második kategóriájú C-ben, és az $X \cap C$ bővebb halmaz, mint az $(X \cap V_\alpha) \cap C$, tehát ez is második kategóriájú. Ezzel viszont az a probléma, hogy egyelőre semmi nem garantálja nekünk, hogy egy Miller forszolás után egy második kategóriájú halmaz második kategóriájú marad. Annál inkább kérdéses, hogy ω_2 hosszú iterálás mellett marad-e második kategóriájú.

2.3.1. Definíció. Egy $\mathbb{P}$ kényszerképzet *kategóriaőrző*, ha minden $V \ni \mathbb{P}$ megszámlálható ZFC modellben tetszőleges $X \subset \omega^\omega$ második kategóriájú halmazra, a forszolt modellben is teljesül, hogy X második kategóriájú ω^ω-ban.

2.3.2. Tétel. *A Miller kényszerképzet kategóriaőrző, sőt a Miller forszolás megszámlálható tartójú, legfeljebb ω_2 hosszú iteráltjai is kategóriaőrzők.*

Ennél egy erősebb állítást fogunk belátni, mégpedig azt, hogy $\mathbb{M}$ őrzi a [7, Definition 6.18] szerinti $\sqsubset^{\text{Cohen}}$ relációt (2.3.5. Definíció). Azért ezt az erősebb állítást látjuk be, mert ez [7, Corollary 5.14] szerint őrződik megszámlálható tartójú iterációira is, amire szükségünk van. A bizonyításunk megértéséhez nincs szükség az iterációra vonatkozó állítás bizonyításának részletezésére, ezt elfogadottnak tekintjük.

2.3.3. Definíció. Legyen $\mathfrak{M}$ megszámlálható elemi részmodell. Ekkor egy $c \in V$ ω^ω-beli elemre azt mondjuk, hogy *Cohen $\mathfrak{M}$ felett*, ha c elkerül minden $\mathfrak{M}$-beli első kategóriájút.

2.3.4. *Megjegyzés.* Világos, hogy ekvivalens lenne, ha azt követelnénk meg, hogy minden F_σ első kategóriájút kerüljön el, amivel szintén ekvivalens, ha az ellenkező irányból fogalmazzuk meg, azaz azt követlejük meg, hogy c legyen benne minden $\mathfrak{M}$-beli sűrű G_δ halmazban. Ehhez viszont elegendő, ha minden sűrű nyíltban benne van, azaz c Cohen $\mathfrak{M}$ felett, ha minden $f \in \mathfrak{M}$ nyílt sűrű halmaz kódjára $c \in U_f$.

2.3.5. Definíció. Egy $\mathbb{P}$ kényszerképzet *őrzi a* $\sqsubset^{Cohen}$ *relációt*, ha minden $\mathfrak{M}$ megszámlálható elemi részmodellre, amire $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$, $p \in \mathbb{P} \cap \mathfrak{M}$ és c Cohen $\mathfrak{M}$ felett, akkor létezik $q \leq p$ $\mathfrak{M}$-generikus, hogy tetszőleges $\dot{f} \in \mathfrak{M}$ nyílt sűrű kódjának nevére $q \Vdash$ "$c \in U_{\dot{f}}$".

2.3.6. Állítás. *Ha egy* $\mathbb{P}$ *kényszerképzet őrzi a* $\sqsubset^{Cohen}$ *relációt, akkor* $\mathbb{P}$ *kategóriaőrző.*

Bizonyítás. Legyen $X \in V$ második kategóriájú. Valahányszor $\mathfrak{M}$ megszámlálható elemi részmodell, akkor létezik $c \in X$ Cohen $\mathfrak{M}$ felett, azaz tetszőleges $F \in \mathfrak{M}$ első kategóriájúra $c \notin F$, ugyanis

$$\bigcup \{F \in \mathfrak{M} \mid F \text{ első kategóriájú}\}$$

megszámlálható unió V-ben, tehát ez az unió is első kategóriájú, ami nem tartalmazhat egy második kategóriájú halmazt, így X-nek van eleme az unión kívül is.

Tegyük fel, hogy létezik $\dot{F} \in V$ név egy első kategóriájúra, ami igazolja a forszolt modellben, hogy X első kategóriájú, azaz $V[G] \models X \subset \dot{F}^G$. Ekkor létezik $p \in \mathbb{P}$, hogy $p \Vdash$ "$X \subset \dot{F}$". Ehhez viszont létezik $\{\dot{f}_n\}_{n\in\omega}$ sorozat nyílt sűrű halmazok kódjainak neveivel, hogy egy $p' \leq p$-re $p' \Vdash$ "$\dot{F} \cap \bigcap_n U_{\dot{f}_n} = \emptyset$". Legyen $\mathfrak{M}$ megszámlálható elemi részmodell olyan, hogy $p', \mathbb{P}, X \in \mathfrak{M}$ és $\{\dot{f}_n\}_{n\in\omega} \in \mathfrak{M}$. Ekkor a fentiek alapján létezik $c \in X$ Cohen $\mathfrak{M}$ felett. A $\sqsubset^{\text{Cohen}}$ reláció őrzésből tudjuk, hogy létezik $q \leq p'$, hogy minden $\dot{f} \in \mathfrak{M}$ nyílt sűrű kódjának nevére $q \Vdash$ "$c \in U_{\dot{f}}$". Ez viszont lehetetlen, mert ekkor $q \leq p' \leq p$ egyszerre forszolja a következőket:

$$\begin{aligned} &c \in \dot{F}, \\ &c \in \bigcap_{n\in\omega} U_{\dot{f}_n}, \\ &\dot{F} \cap \bigcap_{n\in\omega} U_{\dot{f}_n} = \emptyset, \end{aligned}$$

amelyek ellentmondanak egymásnak. Ezzel beláttuk, hogy a $\sqsubset^{\text{Cohen}}$ reláció őrzése erősebb, mint a kategóriaőrzés. $\square$

2.3.7. Lemma. $\mathbb{M}$ *őrzi a* $\sqsubset^{Cohen}$ *relációt.*

Bizonyítás. A következőt kell belátnunk:

Valahányszor $\mathfrak{M}$ egy megszámlálható elemi részmodell, amely tartalmazza az $\mathbb{M}$ kényszerképzetet és a $p \in \mathbb{M}$-et, és c Cohen $\mathfrak{M}$ felett, akkor létezik

$q \leq p$ $\mathfrak{M}$-generikus, hogy tetszőleges $\dot{f} \in \mathfrak{M}$ nyílt sűrű kódjának nevére $q \Vdash$ "$c \in U_{\dot{f}}$". Írjuk fel $U_{\dot{f}}$ definíciója szerint ugyanezt, azaz

$$q \Vdash \text{"}c \in \bigcup_{\sigma \in \omega^{<\omega}} \left[\dot{f}(\sigma)\right]\text{"}.$$

Világos, hogy ehhez valójában elég, ha létezik τ és $\sigma \prec \tau$, hogy

$$q \Vdash \text{"}\dot{f}(\sigma) = \tau\text{"}, \text{ ahol } c \in [\tau].$$

Fúzióval fogjuk megmutatni ilyen q létezését.

Mivel $\mathfrak{M}$ megszámlálható, ezért tekinthetjük

$$\{D_n\}_{n \in \omega} = \{D \mid D \text{ nyílt sűrű } \mathbb{M}\text{-ben}\} \cap \mathfrak{M},$$

illetve

$$\left\{\dot{f}_n\right\}_{n \in \omega} = \left\{\dot{f} \mid \dot{f} \text{ egy nyílt sűrű halmaz kódjának neve}\right\} \cap \mathfrak{M}$$

halmazokat. A fúzió lépéseiben a következő állítást fogjuk használni.

2.3.8. Állítás. *Minden $\dot{f} \in \mathfrak{M}$-re és $p' \in \mathfrak{M} \cap \mathbb{M}$-re létezik $p'' \leq p'$, $\sigma \in \omega^{<\omega}$ és $\tau \succ \sigma$, hogy $c \in [\tau]$ és $p'' \Vdash$ "$\dot{f}(\sigma) = \tau$" úgy, hogy $p'' \in \mathfrak{M}$ is teljesül.*

Bizonyítás. Tekintsük a

$$V_{\dot{f}} = \bigcup \left\{[\tau] \mid \exists p'' \leq p',\ \exists \sigma \prec \tau \quad p'' \Vdash \text{"}\dot{f}(\sigma) = \tau\text{"}\right\}$$

halmazt. Ez a halmaz nyílt sűrű. Nyílt, mivel nyílt-zártak uniója, és sűrű, mivel ha tekintünk egy tetszőleges $[\sigma]$ bázis nyíltat, akkor $U_{\dot{f}} \cap [\sigma] \neq \emptyset$ nyílt, és létezik $[\tau]$ bázis nyílt, ami része ennek, tehát az igazságlemma értelmében van $p'' \leq p'$, amely valamilyen $\tau \succ \sigma$-ra forszolja ezt, azaz $p'' \Vdash$ "$\dot{f}(\sigma) = \tau$". A $V_{\dot{f}}$ halmaz $\mathfrak{M}$-ben definiált nyílt sűrű, tehát c benne van. Ebből adódóan c benne van az unió valamelyik tagjában, amiből automatikusan adódik az állítás. □

A fúzió során megalkotjuk feltételek egy $p \geq q^{(0)} \geq q^{(1)} \geq \ldots$ sorozatát úgy, hogy $q^{(n)}$ minden $n \in \omega$-ra a következőket teljesíti

$$q^{(n)} \Vdash \text{"}\dot{G} \cap D_n \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset\text{"}, \qquad \text{ahol } \dot{G} \text{ a generikus filter neve,} \tag{2.1}$$

$$q^{(n)} \Vdash \text{"}c \in U_{\dot{f}_n}\text{"}. \tag{2.2}$$

Minden $s \in \omega^{<\omega}$-ra elkészítünk egy $q_s \in \mathfrak{M} \cap \mathbb{M}$ feltételt, úgy hogy $t \succ s$ esetén $q_t \leq q_s$ és $q^{(n)}$-et az n hosszúságú $s \in \omega^{<\omega}$ elemekre a q_s-ek uniója fogja adni. Nézzük az első lépést. Legyen $p_\emptyset$ a 2.3.8. Állítás szerinti feltétel az $\dot{f}_0$ nyílt sűrű nevére és a $p \in \mathfrak{M}$ feltételre. Ekkor $p_\emptyset \leq p$ és $p_\emptyset \in \mathfrak{M}$. Tekintsük a

$$\exists q_\emptyset \, (q_\emptyset \leq p_\emptyset \wedge q_\emptyset \in D_0)$$

formulát, amely egy V-ben igaz formula. Mivel $p_\emptyset, D_0 \in \mathfrak{M}$, ezért a formula $\mathfrak{M}$-ben is igaz, tehát legyen $q_\emptyset \in \mathfrak{M}$ ilyen. Ekkor fagyasztjuk $q_\emptyset$ gyökerét, és minden közvetlen rákövetkezőt megtartunk, $q^{(0)}$-t pedig definiáljuk egyszerűen $q_\emptyset$-nak.

Most tegyük fel, hogy $s \in \omega^{<\omega}$-ra ismerjük q_s-et, $n = |s|$, q_s gyökere t_s fagyasztott pont a fúzió során, és minden közvetlen rákövetkezőjét is megtartjuk. Vegyük a $succ_{q_s}(t_s)$ rákövetkező csúcsok egy $\{\sigma_k\}_{k\in\omega}$ felsorolását. Ekkor legyen $p_{s^\frown k}$, hasonlóan az első lépéshez, a 2.3.8. Állítás szerinti feltétel az $\dot{f}_{n+1}$ nyílt sűrű nevére és a $q_s[\sigma_k] \in \mathfrak{M}$ feltételre. Ekkor $p_{s^\frown k} \leq q_s[\sigma_k]$ egy $\mathfrak{M} \cap \mathbb{M}$-beli feltétel. A fentihez hasonlóan tekintsük a

$$\exists q_{s^\frown k} \, (q_{s^\frown k} \leq p_{s^\frown k} \wedge q_{s^\frown k} \in D_{n+1})$$

formulát, így kapjuk $q_{s^\frown k} \in \mathfrak{M}$-et.

Ezek ismeretében legyen $q^{(n)}$ azon q_s-ek egyesítése, amelyekre $|s| = n$, azaz

$$q^{(n)} = \bigcup_{\substack{s\in\omega^{<\omega}\\ |s|=n}} q_s,$$

amelyekről az előállítás miatt tudjuk, hogy $q^{(n+1)} \leq q^{(n)}$, és $t_s \in q^{(n)}$ minden s-re, ha $|s| \leq n$. Lássuk be a (2.1) és (2.2) pontokat.

Tegyük fel elsőként, hogy (2.1) nem teljesül egy adott n esetén. Ez azt jelenti, hogy létezik egy $q' \leq q^{(n)}$, amelyre $q' \Vdash$ "$\dot{G} \cap D_n \cap \mathfrak{M} = \emptyset$". Világos, hogy létezik q'' olyan kiterjesztése q'-nek, amelyre valamilyen n hosszú $s \in \omega^{<\omega}$-ra $q'' \leq q_s$ teljesül. Mivel $q_s \in D_n \cap \mathfrak{M}$, ezért az 1.4.13. Állításunk szerint $q_s \Vdash$ "$\dot{G} \cap D_n \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset$". Ekkor q'' két inkompatibilis feltétel közös kiterjesztése, ami lehetetlen.

Tegyük fel, hogy (2.2) nem teljesül. A fentihez hasonlóan, különben létezik egy $q' \leq q^{(n)}$ feltétel, amelyre $q' \Vdash$ "$c \notin U_{\dot{f}_n}$", és létezik q'' kiterjesztése q'-nek, hogy valamely n hosszú $s \in \omega^{<\omega}$-ra, $q'' \leq q_s$ teljesül. Ekkor $q'' \leq q_s \leq p_s$, amelyhez a 2.3.8. Állítás értelmében létezik τ és $\sigma \prec \tau$, hogy $p_s \Vdash$ "$\dot{f}_n(\sigma) = \tau$", ahol $c \in [\tau]$. Ez viszont lehetetlen, hiszen ekkor q'' közös kiterjesztése p_s-nek és q'-nek, de ezek egymásnak ellentmondó állítást forszolnak, tehát inkompatibilisek.

Ekkor a $q = \bigcap_n q^{(n)}$ egy $\mathbb{M}$-beli feltétel lesz, ami nem más, mint

$$\bigcup_{s \in \omega^{<\omega}} t_s \text{ lezárása.}$$

Ez könnyen látszik az előállításból, ugyanis világos, hogy q elágazási pontjai csak a t_s pontokban lehetnek, és mivel $t_s \in q^{(n)}$ minden $|s| \leq n$ esetén, ezért q megegyezik az unió lezárásával. Ez a felírás biztosítja, hogy a feltétel $\mathbb{M}$-beli, köszönhetően annak, hogy minden $s \prec s' \in \omega^{<\omega}$-ra $t_s \precneqq t_{s'}$ teljesül. A metszetként való felírás biztosítja, hogy q kiterjeszti $q^{(n)}$-et minden $n \in \omega$-ra, ami valójában azt is jelenti, hogy q egy $\mathfrak{M}$-generikus feltétel, és

$$q \Vdash \text{"} c \in U_{\dot{f}} \text{"}$$

is teljesül tetszőleges $\dot{f} \in \mathfrak{M}$-re. Ezzel beláttuk, hogy $\mathbb{M}$ őrzi a $\sqsubset^{\text{Cohen}}$ relációt.

□

2.3.9. *Megjegyzés.* Következményként kapjuk, hogy $\mathbb{M}$ kategóriaőrző, de valójában ez sem elegendő nekünk, mert jelenleg egy második kategóriájú ω^ω-beli halmaz marad második kategóriájú, de nekünk arra van szükségünk, hogy ez egy Cantor halmazon belül teljesül.

2.3.10. Állítás. *A Miller kényszerképzet kategóriaőrző Cantor halmazon belül, azaz ha C egy Cantor halmaz, és $X \subset C$ második kategóriájú C-ben, akkor X a forszolt modellben is második kategóriájú C-ben.*

Bizonyítás. Ennek egy vázlatos bizonyítását adjuk meg.
A bizonyítást visszavezetjük $\mathbb{M}$ kategóriaőrzésére. Az ω^ω halmaznak létezik egy Ω természetesen adódó kompaktifikációja, hogy Ω homeomorf a Cantor halmazzal, és $\Omega \setminus \omega^\omega$ egy megszámlálható halmaz.

Kódoljuk a Cantor halmazok közötti homeomorfizmusokat a következőképpen. Egy $h : C \to C'$ Cantor halmazok közötti homeomorfizmushoz, legyen f függvény a h kódja, ha f megadja, hogy C mely nyílt-zárt halmazait C'-nek melyik nyílt-zárt halmazaiba képezi le. Így f egy $2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$ típusú függvény. Mivel C Cantor, így kompakt, ezért valahányszor tekintünk C-ben egy nyílt-zárt halmazokból álló *pontra húzódó sorozat*ot, azaz egy $\{F_n\}_{n\in\omega}$ sorozatot úgy, hogy $F_{n+1} \subsetneqq F_n$ minden $n \in \omega$-ra, és $diam(F_n) \to 0$, akkor $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$ és egyelemű. Megköveteljük továbbá, hogy ha f a $h : C \to C'$ homeomorfizmus kódolása, akkor valahányszor $\{F_n\}_{n\in\omega}$ egy bázis nyílt-zártakból álló pontra húzódó sorozat, akkor $\{f(F_n)\}_{n\in\omega}$ sorozat szintén pontra húzódó sorozat legyen. Az inverzre hasonlóan. Ekkor f dekódolása

h_f egyszerűen adódik. Egy $x \in C$ elemre vegyünk C-ben egy bázis nyílt-zártakból álló, az x pontra húzódó $\{F_n\}_{n\in\omega}$ sorozatot, azaz $\{x\} = \bigcap_n F_n$. Legyen

$$\{h_f(x)\} = \bigcap_{n\in\omega} f(F_n).$$

Ha f a h kódja, akkor világos, hogy $h_f = h$.

Térjünk rá a bizonyításra. Legyen C Cantor halmaz adott, és rögzítsünk le egy $h : C \to \Omega$ homeomorfizmushoz tartozó f kódot. A 2.1.3. Állításunk bizonyításával teljesen analóg módon megmutatható, hogy egy $X \subset \Omega$ pontosan akkor második kategóriájú, ha $X \cap \omega^\omega$ második kategóriájú ω^ω-ban. Ebből adódóan $X \subset C$ pontosan akkor második kategóriájú C-ben, ha $h_f(X) \cap \omega^\omega$ második kategóriájú ω^ω-ban. A 2.3.7. Lemma és a 2.3.6. Állítás következményeként tudjuk, hogy az utóbbi második kategóriájúságát megőrzi a Miller forszolás. A homeomorfizmus a kódolásnak köszönhetően kiterjed az új értékelésekre, és homeomorfizmus marad, amely szerint, ha X második kategóriájú C-ben a V modell szerint, akkor $h_f(X) \cap \omega^\omega$ második kategóriájú ω^ω-ban, tehát a forszolt modell szerint ez utóbbi továbbra is fennáll, amiből következik, hogy $h_f^{-1}(h_f(X) \cap \omega^\omega) \subset X$ második kategóriájú C-ben. □

2.3.11. *Megjegyzés.* Fontos megjegyeznünk, hogy a Cantor halmazon belüli kategóriaőrzés valójában úgy értendő, hogy a C Cantor halmaz a forszolással bővülhet, illetve bővül, tehát valamilyen formában le vannak kódolva a Cantor halmazaink. Tekintsünk például egy C Cantor halmazhoz egy h_C homeomorfizmust 2^ω és C között, amelyhez a fentiek szerint létezik egy f_C kód úgy, hogy $h_{f_C} = h_C$. Ekkor egy V megszámlálható modellre a C^V nem más, mint $(2^\omega)^V$ képe a $h_{f_C}^V$ homeomorfizmusra. Mivel 2^ω természetes módon bővül a forszolás során, automatikusan adódik C bővítése is:

$$C^{V[G]} = h_{f_C}^{V[G]}\left((2^\omega)^{V[G]}\right).$$

2.4. Összegzés

Eredeti célunk, hogy bebizonyítsuk a 2.1.1. Tétel állítását, amely szerint ZFC konzisztenciáját feltételezve konzisztens ZFC plusz egy bizonyos φ formula együttese, ahol φ az a formula, amely kifejezi, hogy a valós számok halmazán minden X második kategóriájú halmazhoz létezik egy C Cantor halmaz, hogy ezekre $X \cap C$ második kategóriájú C-ben. Ekkor a Miller kényszerképzet megszámlálható tartójú, ω_2 hosszúságú iteráltjának segítségével egy V megszámlálható ZFC modellből kiindulva, megadtunk egy V_{ω_2} szintén

ZFC modellt. Végeredményben arra jutunk, hogy ebben a V_{ω_2} modellben teljesül a φ formula, ugyanis tekintve ebben egy tetszőleges X második kategóriájú halmazt a tükröződésnek köszönhetően, és elfogadva a 2.1.4. Tétel állítását megmutattuk, hogy létezik $\alpha \in \omega_2$, amelyre

$$V_{\alpha+1} \models (X \cap V_\alpha) \cap C \text{ második kategóriájú } C\text{-ben.}$$

Megmutattuk azt is, hogy a Miller kényszerképzet megszámlálható tartójú, ω_2 hosszúságú iteráltja kategóriaőrző, azaz $V_{\alpha+1}$-ből tovább forszolva az ω_2-ik iteráltig kapjuk, hogy

$$V_{\omega_2} \models (X \cap V_\alpha) \cap C \text{ második kategóriájú } C\text{-ben,}$$

ahol már C valójában, mint a bővebb $C^{V_{\omega_2}}$ értendő. Az $X \cap C$ bővebb halmaz, mint az $(X \cap V_\alpha) \cap C$, tehát

$$V_{\omega_2} \models X \cap C \text{ második kategóriájú } C\text{-ben}$$

is teljesül. Ez viszont azt jelenti, hogy V_{ω_2} ZFC modellben igaz a φ formula, amit szerettünk volna.

3. fejezet

A fő technikai tétel

Ebben a fejezetben bizonyítjuk be a 2.1.4. Tételt, és megjegyeznénk, hogy ezzel együtt bizonyításunk már teljes, így már csak ennek a tételnek a bizonyítására szorítkozunk. Emlékeztetőül megismételjük a tétel kimondását.

3.1. A fő technikai tétel állítása

2.1.4. Tétel. Legyen V egy megszámlálható ZFC modell, és $\mathbb{M} \in V$ a Miller kényszerképzet. Legyen $X \in V$ második kategóriájú ω^ω-ban. Ekkor létezik $V^{\mathbb{M}}$-beli $\dot{C}$ név egy Cantor halmazra ω^ω-ban, amire a keletkező modellben igaz, hogy $X \cap \dot{C}$ második kategóriájú $\dot{C}$-ben.

3.1.1. Definíció. Egy halmaz *mindenhol második kategóriájú*, ha minden nem üres nyíltban második kategóriájú.

3.1.2. Állítás. *Feltehető, hogy az X második kategóriájú halmaz mindenhol második kategóriájú.*

Bizonyítás. Meg fogunk adni megszámlálható sok homeomorfizmust ω^ω-ról önmagára. Ehhez nyújt segítséget a következő

$$Id^* = \{f \mid f : \omega \to \omega \text{ bijekció},\ f =^* id_\omega\},$$

ahol $=^*$ azt jelenti, hogy véges sok kivétellel megegyeznek, illetve id_ω az identikus leképzés az ω-n. Legyen

$$\Pi = \left\{ \pi \mid \pi : \omega^\omega \to \omega^\omega,\ \exists f_0, \dots,\ f_{n-1} \in Id^*, \pi = f_0 \times \dots \times f_{n-1} \times \prod_{i=n}^{\omega} id_\omega \right\}.$$

Ekkor könnyen ellenőrizhető az is, hogy tetszőleges $\pi \in \Pi$ homeomorfizmus ω^ω-ról önmagára. Mivel az Id^* halmaz megszámlálható, ezért Π is megszámlálható, illetve Π minden eleme bázis nyíltat bázis nyíltba visz át, és ha $\sigma, \tau \in \omega^{<\omega}$ elemekre $|\sigma| = |\tau|$, akkor létezik $\pi \in \Pi$, hogy $\pi([\sigma]) = [\tau]$. Ezek ellenőrzését az olvasóra bízzuk.

Tekintsük az

$$X' = \bigcup_{\pi \in \Pi} \pi(X)$$

halmazt. Megmutatjuk, hogy ez a halmaz mindenhol második kategóriájú. Világos, hogy elegendő bázis nyíltakra ellenőrizni. Legyen $[\tau]$ bázis nyílt, ekkor létezik $\sigma \in \omega^{<\omega}$, hogy $|\sigma| = |\tau|$, és X második kategóriájú $[\sigma]$-ban. Ilyen tényleg van, mivel ha nem lenne, akkor minden ilyen $[\sigma]$ bázis nyíltban első kategóriájú lenne, ami lehetetlen, mivel tetszőleges $n \in \omega$-ra

$$\omega^\omega = \bigcup_{\substack{\sigma \in \omega^{<\omega} \\ |\sigma| = n}} [\sigma] \,,$$

és ez egy megszámlálható unió, amiből következne, hogy X első kategóriájú. Ekkor létezik egy $\pi \in \Pi$, hogy $\pi([\sigma]) = [\tau]$, ebből tehát következik az is, hogy $X' \cap [\tau]$ második kategóriájú $[\tau]$-ban.

Most nézzük azt, hogy ez miért elegendő a tételhez. Tegyük fel, hogy az X' halmazhoz létezik C Cantor halmaz, hogy $X' \cap C$ második kategóriájú C-ben. Mivel egy második kategóriájú halmaz nem áll elő megszámlálható sok első kategóriájú halmaz uniójaként, ezért az

$$X' \cap C = \bigcup_{\pi \in \Pi} \pi(X) \cap C$$

felírásból látszik, hogy létezik π, amelyre $\pi(X) \cap C$ második kategóriájú C-ben, így kapjuk azt is, hogy $X \cap \pi^{-1}(C)$ második kategóriájú $\pi^{-1}(C)$-ben, ahol $\pi^{-1}(C)$ Cantor, hiszen π homeomorfizmus. $\square$

Mint láttuk, feltehető, hogy az X második kategóriájú halmaz mindenhol második kategóriájú. Azt fogjuk belátni, hogy ebben az esetben megadható egy név egy Cantor halmazra úgy, hogy teljesítse a tételt.

3.1.3. Definíció. Legyen $\dot{m}$ a Miller valós egy neve. Ekkor $C_{\dot{m}}$ legyen név a következő halmazra:

$$\prod_{i \in \omega} [\dot{m}(i) + 1] \,.$$

Ilyen név van, a teljesség kedvéért most megadunk egy konkrét nevet, de a továbbiakban az olvasóra bízzuk az ilyen előállításokat. Legyen

$$C_{\dot{m}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(p,\tau) \mid \tau \text{ név } \omega^\omega \text{ egy elemére, } p \Vdash \text{"}\tau(i) \leq \dot{m}(i) \quad \forall i \in \omega\text{"}\}\,.$$

3.1.4. *Megjegyzés.* Az így definiált $C_{\dot{m}}$ halmaz kiértékelése megszámlálható sok véges, nem üres halmaz szorzata, sőt, mivel növekedő Millert használunk, ezért a második tagtól legalább kételeműek a halmazok. Ennek köszönhetően a Cantor halmazok karakterizációja [3, 7.4. Theorem] alapján $C_{\dot{m}} \subset \omega^\omega$ valóban Cantor halmaz a forszolt modellben.

Elég tehát a következő tételt igazolnunk.

3.1.5. Tétel. *Legyen V megszámlálható ZFC modell, és $\mathbb{M} \in V$ a Miller kényszerképzet. Legyen $X \in V$ mindenhol második kategóriájú ω^ω-ban. Ekkor a keletkező modellben $X \cap C_{\dot{m}}$ második kategóriájú $C_{\dot{m}}$-ben.*

3.2. A fő technikai tétel bizonyítása

A 3.1.5. Tétel bizonyításához indirekt módon kezdünk hozzá. Tegyük fel, hogy X mindenhol második kategóriájú, és $X \cap C_{\dot{m}}$ első kategóriájú $C_{\dot{m}}$-ben, azaz létezik $p \in \mathbb{M}$, amire $p \Vdash$ "$X \cap C_{\dot{m}}$ első kategóriájú $C_{\dot{m}}$-ben". Másképpen fogalmazva létezik $p \in \mathbb{M}$ és $\dot{U}$ név sűrű G_δ halmazra $C_{\dot{m}}$-ben, hogy $p \Vdash$ "$X \cap \dot{U} = \emptyset$".

Világos, hogy tetszőleges $C \subset \omega^\omega$ Cantor halmazra, minden C-beli nyílt halmaz előáll egy ω^ω-beli nyílt halmaz C-vel vett metszeteként. Hasonlóan tetszőleges C-beli sűrű G_δ halmaz előáll egy ω^ω-beli G_δ halmaz C-vel vett metszeteként. Továbbá tetszőleges ω^ω-beli G_δ halmaz előáll ω^ω-beli nyílt halmazok fogyó sorozatának metszeteként. Tekintsük ω^ω-beli nyílt halmazok fogyó $\{U_n\}_{n\in\omega}$ sorozatát, amelyere $\bigcap_n U_n$ metszete C-vel sűrű G_δ halmazt alkot C-ben.

Ugyanakkor feltehető, hogy U_n C-nek elég kicsi környezetében van, például ha elmetsszük az U_n halmazokat $B(C, \frac{1}{n})$-el, ahol $B(H, \varrho)$ a H halmaz ϱ sugarú környezetét jelöli. Ebből triviálisan következik, hogy $\bigcap_n U_n \subset C$. Az adott sűrű G_δ halmaz előállítását azért szeretnénk ilyen formában megadni, mert a bizonyítás során szükségünk lesz arra, hogy a szóban forgó U_n halmazok nyíltak legyenek ω^ω-ban.

Tehát az indirekt feltevésünk szerint létezik $p \in \mathbb{M}$ és $\{\dot{U_n}\}_{n\in\omega}$ név ω^ω-beli nyílt halmazok fogyó sorozatára, hogy a következők teljesülnek

$$p \Vdash \text{"}X \cap \bigcap_{n\in\omega} \dot{U}_n = \emptyset\text{"}, \tag{3.1}$$

$$C_{\dot{m}} \cap \dot{U}_n \text{ sűrű nyílt } C_{\dot{m}}\text{-ben}, \tag{3.2}$$

$$\dot{U}_n \subset B\left(C_{\dot{m}}, \tfrac{1}{n}\right). \tag{3.3}$$

Azt szeretnénk megmutatni, hogy létezik $r \in \omega^\omega$, amelyre

$$r \in X,$$

$$\exists q \leq p \quad q \Vdash \text{"}r \in \bigcap_{n\in\omega} \dot{U}_n\text{"}.$$

Ilyen r létezése esetén ellentmondásra is jutnánk, ugyanis $q \leq p$-ből következik, hogy

$$q \Vdash \text{"}X \cap \bigcap_{n\in\omega} \dot{U}_n = \emptyset\text{"}.$$

Ezek mellett

$$\mathbb{1} \Vdash \text{"}r \in X\text{"}.$$

Ez nyilvánvalóan nem lehetséges, ugyanis ekkor q forszolja, hogy r benne van X-ben és $\bigcap_n \dot{U}_n$-ben is, amelyekről egyben azt is forszolja, hogy diszjunktak.

Ilyen, az ellentmondásra vezető r létezését az

$$R_{p,\{U_n\}_{n\in\omega}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ r \in \omega^\omega \mid \exists q \leq p,\ q \Vdash \text{"}r \in \bigcap_{n\in\omega} \dot{U}_n\text{"} \right\}$$

halmaz segítségével fogjuk igazolni. Elegendő megmutatnunk, hogy X-nek és ennek a halmaznak a metszete nem üres, hiszen ez pont egy ilyen r valós létezését mutatná. Ehhez viszont elegendő belátni, hogy $R_{p,\{U_n\}_{n\in\omega}}$ reziduális egy nem üres nyílt halmazban, ugyanis X mindenhol második kategóriájú. Az 1.2.4. Állítás szerint, ha egy halmaz második kategóriájú és analitikus, akkor reziduális egy nem üres nyílt halmazban. Ezek alapján elegendő lenne belátni, hogy $R_{p,\{U_n\}_{n\in\omega}}$ második kategóriájú és analitikus.

Az analitikusságot csak sűrűn sok $\mathbb{M}$-beli elemre tudjuk megmutatni, azaz létezik egy $D \subset \mathbb{M}$ sűrű halmaz, hogy $p \in D$ esetén $R_{p,\{U_n\}_{n\in\omega}}$ analitikus, de megmutatjuk, hogy ez is elegendő. Legyen $p \in \mathbb{M}$ tetszőleges, ehhez létezik $p' \leq p$ úgy, hogy $p' \in D$, és ekkor $R_{p',\{U_n\}_{n\in\omega}} \subset R_{p,\{U_n\}_{n\in\omega}}$ is fennáll, mert egy szűkebb halmazon válogatunk r-eket.

Tehát tartalmaz olyan analitikus halmazt, amiről az erre vonatkozó részben belátjuk a második kategóriájúságot is, így ez egy nem üres nyíltban reziduális. Természetesen, ebből adódóan a bővebb $R_{p,\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}}$ halmaz is ilyen, amit szerettünk volna látni. Ennek megfelelően a következő két állítást szeretnénk bizonyítani:

$$R_{p,\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}} \text{ második kategóriájú,} \tag{3.4}$$
$$R_{p,\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}} \text{ analitikus sűrűn sok } p \in \mathbb{M}\text{-re.} \tag{3.5}$$

3.3. Második kategóriájúság

3.3.1. Lemma. *$R_{p,\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}}$ második kategóriájú.*

Bizonyítás. A következőt fogjuk belátni:
Minden $p \in \mathbb{M}$-re, $\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}$ névre, amely olyan, mint fent, és minden $\{V_n\}_{n\in\omega}$ ω^ω-beli nyílt sűrűek fogyó sorozatára

$$\exists r \in \bigcap_{n\in\omega} V_n \quad \text{és} \quad \exists q \le p, \text{ hogy } q \Vdash \text{"}r \in \bigcap_{n\in\omega} \dot{U}_n\text{"}. \tag{3.6}$$

Ez elég, hiszen egy ilyen r megfelel az $R_{p,\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}}$ halmaz definíciójának feltételében szereplő követelménynek. Ekkor a lemma állítása teljesül, ellenkező esetben $R_{p,\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}}$ első kategóriájú lenne, amihez létezne $\{V_n\}_{n\in\omega}$ nyílt sűrűek fogyó sorozata úgy, hogy

$$\bigcap_{n\in\omega} V_n \cap R_{p,\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}} = \emptyset,$$

de (3.6) feltétel szerint $r \in \bigcap_n V_n$ és $r \in R_{p,\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}}$. Ez ellentmondás.

Tehát szeretnénk belátni (3.6)-t. Ezt fúzió segítségével fogjuk megtenni egy rekurzióval egybekötve. A rekurzióval alkotjuk meg az $r \in \omega^\omega$ valós számot úgy, hogy $\omega^{<\omega}$-beli elemekkel közelítjük minden lépésben, vigyázva, hogy $\mathbb{M}$-beli feltétel is biztosítsa, hogy r megfelelőképpen $C_{\dot{m}}$-be, illetve $C_{\dot{m}} \cap \dot{U}_n$-be kerüljön, és ezen feltételek közös kiterjesztése fogja adni a q-t.

Mielőtt folytatnánk a bizonyítást, belátunk néhány segédállítást, és bevezetünk gallyazás néven egy operációt a Miller fákon, amelyek mind a rekurziós építkezést fogják segíteni.

3.3.2. Állítás. *Minden $V \subset \omega^\omega$ nyílt sűrű halmazra és minden $r_0 \in \omega^{<\omega}$ sorozathoz létezik $r_0' \in \omega^{<\omega}$, hogy $r_0' \supsetneq r_0$ és $[r_0'] \subset V$.*

Bizonyítás. V nyílt sűrű és $[r_0]$ nem üres bázisnyílt, így $V \cap [r_0] \neq \emptyset$ nyílt halmaz, azaz tartalmaz nem üres bázisnyíltat, tehát létezik r_0', amire $[r_0'] \subset V \cap [r_0]$ teljesül, és $[r_0'] \subset [r_0]$ pontosan akkor teljesül, ha $r_0' \succ r_0$. Emellett r_0' nyilván választható úgy, hogy szigorú kiterjesztés legyen. □

3.3.3. Állítás. *Legyen $\dot{U}$ név egy nyílt halmazra ω^ω-ban úgy, hogy $\dot{U} \cap C_{\dot{m}}$ sűrű nyílt $C_{\dot{m}}$-ben. Minden $p \in \mathbb{M}$ és $r_0 \in \omega^{<\omega}$ esetén, ha $p \Vdash$ " $[r_0] \cap C_{\dot{m}} \neq \emptyset$", akkor létezik $p' \leq p$ és $r_0' \succ r_0$, hogy $p' \Vdash$ "$\emptyset \neq [r_0'] \cap C_{\dot{m}} \subset \dot{U}$ és $[r_0'] \subset \dot{U}$".*

Bizonyítás. A 3.3.2. Állításunkkal analóg módon igaz ω^ω-beli Cantor halmazban is az állítás. Mivel $[r_0] \cap C_{\dot{m}}$ nem üres bázisnyílt $C_{\dot{m}}$-ben, ebből adódóan az igazságlemma értelmében teljesül $p \Vdash$ "$\exists r_0' \succ r_0,\ \emptyset \neq [r_0'] \cap C_{\dot{m}} \subset \dot{U}$" is, így létezik $r_0' \in \omega^{<\omega}$ és $p' \leq p$, amelyekre $r_0' \succ r_0$ és $p' \Vdash$ "$\emptyset \neq [r_0'] \cap C_{\dot{m}} \subset \dot{U}$". Mivel $p' \Vdash$ " $[r_0'] \cap \dot{U} \neq \emptyset$" és $\dot{U}$ egy nyílt halmaz neve, ezért létezik $p'' \leq p'$ és $r_0'' \succ r_0'$, amelyekre $p'' \Vdash$ " $[r_0''] \subset \dot{U}$", így $p'' \leq p'$ miatt

$$p'' \Vdash \text{"}\emptyset \neq [r_0''] \cap C_{\dot{m}} \subset \dot{U} \text{ és } [r_0''] \subset \dot{U}\text{"}$$

teljesül, amit szerettünk volna. □

3.3.4. Állítás. *Adott $r_0 \in \omega^{<\omega}$ és $p \in \mathbb{M}$ esetén a következők ekvivalensek:*

$$p \Vdash \text{" } [r_0] \cap C_{\dot{m}} \neq \emptyset\text{"}, \tag{3.7}$$

$$p \Vdash \text{"}r_0(i) \leq \dot{m}(i) \quad \forall i < |r_0|\text{"}, \tag{3.8}$$

$$\forall \sigma \in p \qquad r_0(i) \leq \sigma(i) \quad \forall i < min\{|r_0|, |\sigma|\}. \tag{3.9}$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy (3.7) $\Rightarrow$ (3.8) $\Rightarrow$ (3.9) $\Rightarrow$ (3.7) teljesül.

(3.7) $\Rightarrow$ (3.8) Ehhez tegyük fel, hogy $p \nVdash$ "$r_0(i) \leq \dot{m}(i) \quad \forall i < |r_0|$", azaz létezik $p' \leq p$, hogy $p' \Vdash$ "$\exists i < |r_0| \, (r_0(i) > \dot{m}(i))$". Ekkor létezik $p'' \leq p'$ és $i < |r_0|$, hogy $p'' \Vdash$ "$r_0(i) > \dot{m}(i)$". Ebből és $C_{\dot{m}}$ névként való felírásából látszik, hogy $p'' \Vdash$ "$r \notin C_{\dot{m}} \quad \forall r \in [r_0]$", de ekkor nyilván $p'' \Vdash$ " $[r_0] \cap C_{\dot{m}} = \emptyset$", tehát p nem forszolhatja az ellenkezőjét, mert $p'' \leq p$.

(3.8) $\Rightarrow$ (3.9) Tegyük fel, hogy létezik $\sigma \in p$ és $i < min\{|r_0|, |\sigma|\}$, hogy $r_0(i) > \sigma(i)$. Ekkor az 1.4.9. Állítás alapján $p[\sigma] \Vdash$ "$\dot{m}|_{|\sigma|} = \sigma$", és az igazságlemma alapján $p[\sigma] \Vdash$ "$r_0(i) > \sigma(i)$", tehát $p[\sigma] \Vdash$ "$r_0(i) > \dot{m}(i)$". Mivel $p[\sigma] \leq p$, ezért lehetetlen, hogy (3.8) teljesüljön.

(3.9) $\Rightarrow$ (3.7) Tegyük fel, hogy létezik $p' \leq p$, hogy $p' \Vdash$ " $[r_0] \cap C_{\dot{m}} = \emptyset$". Ez $C_{\dot{m}}$ definíciója szerint akkor lehetséges, ha létezik $i < |r_0|$ és $p'' \leq p'$ úgy, hogy $p'' \Vdash$ "$r_0(i) > \dot{m}(i)$". Legyen $\sigma \in p''$ tetszőleges $i+1$ hosszú sorozat. Az 1.4.10. Állításnak köszönhetően $p''[\sigma] \Vdash$ "$r_0(i) > \sigma(i)$", de ezek V-beliek, tehát $r_0(i) > \sigma(i)$ áll, ami ellentmond (3.9)-nek. □

Vezessük be a gallyazás fogalmát. Gallyazást mindig egy adott $h \in \omega$ magasságban, $j \in \omega$ értékre alkalmazunk egy $p \in \mathbb{M}$ feltételen. Bevezethetnénk a $T \subset \omega^{<\omega}$ fákra is, de mi csak a Miller fákra fogunk szorítkozni, ugyanis ezekre szeretnénk alkalmazni. A gallyazás lényege, hogy a p feltételből elhagyjuk azokat az ágakat, amelyek az adott magasságban j értéket vesznek fel, "j irányba mennek tovább". A gallyazás eredménye egy $p \in \mathbb{M}$ fára mindig egy $p' \subset p$, amely $\omega^{<\omega}$ egy részhalmaza, de megfelelő feltételekkel garantálható, hogy Miller fa legyen. Arra szeretnénk használni a gallyazást, hogy az új feltételre a fenti (3.7) teljesüljön, hogy a 3.3.3. Állítást tudjuk alkalmazni. Ehhez addig gallyazunk, amíg (3.9) szerinti feltételt nem kapunk, ami az állítás szerint ezzel ekvivalens.

Ahogy azt a technikai bevezetőnkben már megjegyeztük, növekedő Miller fát értünk a Miller feltételen, illetve a Miller fán. Ennek ebben a részben fontos szerepe lesz.

3.3.5. Definíció. *(Gallyazás)*

Adott $h \in \omega$ és $j \in \omega$ értékekre legyen $G_h^j : \mathbb{M} \to \mathcal{T}$, amelynek a hozzárendelését a következőképpen adjuk meg:

$$G_h^j(p) \overset{\text{def}}{=} \{\sigma \in p \,|\, \exists \tau \in p,\, \tau \succ \sigma,\, |\tau| > h,\, \tau(h) \neq j\}\,,$$

ahol $\mathcal{T}$ jelöli a fák halmazát $\omega^{<\omega}$-ban.

3.3.6. *Megjegyzés.* Nem világos, hogy a hozzárendelés miért fát ad, de könnyen ellenőrizhető, sőt a következő lemmánkban azt is megmutatjuk, hogy ha $h \geq |rt(p)|$, akkor Miller feltételt kapunk. Megmutatjuk, hogy az eredmény valóban fa.

Bizonyítás. Elegendő megmutatni, hogy lefelé zárt halmazt kapunk $\omega^{<\omega}$-ban. Ez viszont egyszerű, hiszen ha egy σ-t beválasztottunk, az azt jelenti, hogy létezik hozzá megfelelő $\tau \succ \sigma$. Ekkor minden $\sigma' \prec \tau$ szintén p-ben van, és ezekhez τ megfelelő, tehát mind benne vannak $G_h^j(p)$-ben, így lefelé zárt. Ha semmilyen σ-hoz nem létezik megfelelő τ, akkor az üres fát kapjuk. □

3.3.7. Lemma. *(Gallyazási lemma)*

Valahányszor $h \in \omega$ magasságban $j \in \omega$ értéknél gallyazunk egy $p \in \mathbb{M}$ feltételt, és $h \geq |rt(p)|$, akkor $p' = G_h^j(p)$ Miller feltétel, ami kiterjeszti p-t, és minden $t \in p$ elágazási pontra, amelyre $|t| \leq h$, t elágazási pontja lesz p'-nek is.

Bizonyítás. Amennyiben valóban egy $\mathbb{M}$-beli elemet kapunk, akkor világos, hogy kiterjeszti p-t, mivel részhalmazaként van definiálva. Ahhoz, hogy belássuk, hogy Miller fa, a következőket elég megmutatni:

$$p' \text{ fa,} \tag{3.10}$$
$$\forall \sigma \in p' \quad |succ_{p'}(\sigma)| = 1 \text{ vagy } \omega, \tag{3.11}$$
$$\text{Minden } \sigma \in p' \text{ felett van elágazási pont.} \tag{3.12}$$

Ahogy azt a 3.3.6. Megjegyzésben már tárgyaltuk, azt tudjuk, hogy az eredmény fa. Először mutassuk meg, hogy minden $\sigma \in p'$-re létezik $\tau \supsetneq \sigma$ úgy, hogy $\tau \in p'$. Az világos, hogy ha van $\sigma \in p$, amelyre $\sigma(h)$ értelmezve van, és j-től különböző, akkor ez eleme p'-nek, ugyanis $\tau = \sigma$ megfelelő hozzá. Sőt, az is igaz, hogy minden p-beli kiterjesztése is benne van, ugyanis tetszőleges $\tau \succ \sigma$ esetén $\tau|_{|\sigma|} = \sigma$, azaz $\tau(h) \neq j$. Ezekből adódóan h felett világos, hogy teljesül, h alatt pedig egyszerűen a gallyazás definíciójából adódik ugyanez.

Mivel p' részhalmaza p-nek, ezért (3.11) csak elágazási pontban romolhatna el, a fentiek szerint pedig, csak h alatt. Tehát legyen $t \in p$ elágazási pont, és $|t| \leq h$. Előfordulhatna, hogy t összes p-beli kiterjesztése a h magasságban ugyanazt a j értéket vegye fel, de mivel mi feltettük, hogy növekedő Miller fákkal dolgozunk, ezért ez nem lehetséges. Mutassuk ezt meg. Legyen

$$K = \big\{k \in \omega \,|\, k > j,\ t^\frown k \in succ_p(t)\big\}$$

azon j-nél nagyobb irányok halmaza, amerre p-ben tovább lehet haladni t-ből. Ez végtelen halmaz, mert t elágazási pontja p-nek. Minden $k \in K$-ra $t^\frown k$-nak akármilyen hosszú kiterjesztése létezik p-ben. Legyen τ_k egy h-nál hosszabb ilyen. Ekkor abból, hogy p növekedő fa, $\tau_k \in p$, $\tau_k(|t|) = k$, valamint $|t| \leq h$, adódik, hogy $\tau_k(h) \geq k$, ami miatt biztosan különbözik j-től. Emiatt $\tau_k \in p'$ teljesül. Mivel p' lefelé zárt, azt is kapjuk, hogy $\big\{t^\frown k \,|\, k \in K\big\} \subset succ_{p'}(t)$, azaz t végtelen elágazási pont p'-ben is. Ezzel beláttuk (3.11)-t, illetve azt is, hogy minden $t \in p$ elágazási pontra, amelyre $|t| \leq h$, t elágazási pontja lesz p'-nek is.

Már csak (3.12)-t kellene megmutatnunk, de ez az előzőekből világos, ugyanis minden $\sigma \in p'$ felett van h-nál hosszabb p'-beli, és ezek felett ugyanúgy néz ki, mint p, erre pedig teljesül. $\square$

Ezek ismeretében értelmes a következő definíció, ami olyasmit fejez ki, hogy egy p feltételt h magasságban gallyazunk minden $i < j$-re.

3.3.8. Definíció. Azt mondjuk, hogy p feltételt *h magasságban* $j \in \omega \setminus \{0\}$ értékre *j-ig gallyazunk*, ha $h \geq |rt(p)|$, és ezt $G_h^{<j}(p)$-vel jelöljük. Erre a

következő rekurzív definíciót adjuk meg:

$$G_h^{<1}(p) = G_h^{0}(p),$$
$$G_h^{<j}(p) = G_h^{j-1}(G_h^{<j-1}(p)).$$

3.3.9. *Megjegyzés.* Amennyiben a fenti feltételek állnak, a Gallyazási lemma értelmében világos, hogy $G_h^{<j}(p)$ egy Miller fa, ami kiterjeszti p-t, illetve ha véges sok megengedett h magasságban gallyazunk j_h-ig, akkor is hasonlóképpen egy $p' \leq p$ feltételt kapunk.

Térjünk vissza a 3.3.1. Lemma bizonyításához. Már láttuk, hogy elegendő megadnunk (3.6) feltételnek eleget tevő r-et. Adottnak tekintjük az $\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}$ és a $\{\dot{V}_n\}_{n\in\omega}$ sorozatokat, illetve a $p \in \mathbb{M}$ feltételt. Ezekhez rekurzióval megadjuk az $r_0 \precneqq r_1 \precneqq \ldots \in \omega^{<\omega}$, a $p = p_0 \geq p_1 \geq \ldots \in \mathbb{M}$ és a $t_0, t_1, \ldots \in \omega^{<\omega}$ sorozatokat, amelyekre $\bigcup_i r_i$ adja majd a keresett r-et, p_n garantálja, hogy r_n megfelelőképpen $C_{\dot{m}}$-ben maradjon, és t_{n+1}-el jelöljük a fúzió során az n-ik lépésben lerögzített csúcsot, amely minden esetben elágazási pont lesz, valójában q elágazási pontjait fogják adni.

Az eljárás során a következő rekurziós feltételek teljesülését biztosítjuk:

$$|r_n| \geq |t_l| \qquad \forall l \leq n, \tag{3.13}$$
$$p_n \Vdash \text{"}r_n(i) \leq \dot{m}(i) \quad \forall i < |r_n|\text{"}, \tag{3.14}$$
$$t_m \in p_n \text{ elágazási pont} \qquad \forall m \leq n, \tag{3.15}$$
$$|r_{n+1}| > |r_n|\,. \tag{3.16}$$

A fúzió során mindig a már rögzített t_k $(k \leq n)$ csúcsokat fogjuk látogatni, és hozzájuk megadni egy $t_{n+1} \succ t_k$ újabb elágazási pontot úgy, hogy közöttük már nem lesz elágazás. Mivel minden t_n-nek végtelen sok szomszédja kell legyen, garantálnunk kell, hogy végtelen sokszor meglátogassuk. Ehhez tekintsük rögzítettnek a $k : \omega \to \omega$ felsoroló függvényt, amelyre minden $n \in \omega$ esetén $k(n) \leq n$ teljesül, illetve minden $l \in \omega$ értéket végtelen sokszor felvesz. Világos, hogy ilyen k függvény létezik, és a továbbiakban a $k = k(n)$ egyszerűsítő jelöléssel fogunk élni, így t_k az n-ik lépésben meglátogatott csúcsot jelenti majd nekünk.

A rekurzió kiinduló elemeit adjuk meg a következők szerint:

$$p_0 = p,$$
$$t_0 = rt(p_0),$$
$$r_0(i) = 0 \qquad \forall i \leq |t_0|\,.$$

Így $|r_0| = |t_0|$, és a rekurziós feltételek teljesülnek. Tekintsük a rekurzió általános, n-ik lépését. A 3.3.2. Állítás szerint r_n-nek létezik egy ${r_n}'$ szigorú kiterjesztése, hogy $[{r_n}'] \subset V_n$. Tekintsük p_n-nek véges sok magasságban egymás után elvégzett gallyazását. Minden $h \in \{|r_n|, |r_n|+1, \ldots, |{r_n}'|-1\}$ magasságban gallyazzunk $j_h = {r_n}'(h)$ értékig. A 3.3.9. Megjegyzésünk értelmében ekkor kapunk egy ${p_n}' \leq p_n$ feltételt. Erre a ${p_n}'$-re és ${r_n}'$-re teljesül (3.9), hiszen pont így gallyaztuk, tehát teljesül ${p_n}' \Vdash$ " $[{r_n}'] \cap C_{\dot{m}} \neq \emptyset$". Ráadásul (3.13) feltétel teljesülése miatt a 3.3.7. Gallyazási lemma értelmében minden eddig rögzített t_l, ahol $l \leq n$, elágazási pontja marad ${p_n}'$-nek.

Az iméntiek alapján t_k elágazási pontja ${p_n}'$-nek. Veszünk egy tetszőleges $\sigma \in succ_{{p_n}'}(t_k)$ elemet, amelyre nem létezik olyan $j \leq n$, hogy $t_j \succ \sigma$, azaz egy olyan irányt, amerre még nem haladtunk tovább. Ilyen szomszédos irány van, hiszen eddig csak véges sok lépésünk volt, véges sok kiválasztott t_j-vel, és minden elágazásban végtelen szomszédja van egy $\mathbb{M}$-beli feltételnek. A 3.3.4. Állítás alapján tudjuk, hogy ${p_n}' \Vdash$ " $[{r_n}'] \cap C_{\dot{m}} \neq \emptyset$", tehát ${p_n}'[\sigma]$ kiterjesztése is forszolja ugyanezt, így alkalmazhatjuk a 3.3.3. Állítást. Eszerint létezik ${r_n}'' \succ {r_n}'$ és $q_n \leq {p_n}'[\sigma]$ úgy, hogy

$$q_n \Vdash \text{"}\emptyset \neq [{r_n}''] \cap C_{\dot{m}} \subset \dot{U}_n \text{ és } [{r_n}''] \subset \dot{U}_n\text{"} \tag{3.17}$$

teljesül.

Hasonlóan egy korábbi lépésünkhöz, erre az ${r_n}''$-re, gallyazzuk a ${p_n}'$ feltételünket, hogy teljesítse (3.14)-t, tehát minden

$$h \in \{|{r_n}'|, |{r_n}'|+1, \ldots, |{r_n}''|-1\}$$

magasságban gallyazzunk $j_h = {r_n}''(h)$ értékig. A gallyazás eredménye legyen a ${p_n}'' \leq {p_n}'$ feltétel.

Ezzel eljutottunk arra a pontra, hogy megadhatjuk a rekurzió következő elemeit. Legyen

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= rt(q_n), \\ p_{n+1} &= (p_n'' \setminus {p_n}''[\sigma]) \cup q_n. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy ekkor $p_{n+1}[t_{n+1}] = q_n$ és $p_{n+1} \leq p_n$.

Ahhoz, hogy fenntartsuk az összes rekurziós feltételt, lehetséges, hogy ${r_n}''$-t még további nullákkal ki kell terjesztenünk, hogyha $|{r_n}''| < |t_{n+1}|$ állna. Ez a kiterjesztés viszont már jó lesz r_{n+1} definíciójának, ha a kiterjesztést addig folytattuk, amíg $|r_{n+1}| \geq |t_{n+1}|$ nem teljesül. Világos, hogy a nullákkal való kiterjesztés a rekurziós feltételeket nem zavarja meg.

Megmutatjuk, hogy ezek teljesítik a rekurziós feltételeket. (3.13) világos, a legutolsó megállapításunk, pontosabban r_{n+1} definíciója miatt. (3.14) teljesül egyrészt a gallyazások miatt, másrészt pedig q_n azon tulajdonsága miatt, hogy forszolja, hogy $[r_n''] \cap C_{\dot{m}} \neq \emptyset$, de ezáltal egyben azt is, hogy $[r_{n+1}] \cap C_{\dot{m}} \neq \emptyset$. A 3.3.4. Állítás szerint (3.14) teljesül. (3.15) teljesülése a Gallyazási lemma értelmében világos n-ig, illetve t_{n+1}-et úgy választottuk, hogy elágazási pont legyen, és eszerint állítottuk elő p_{n+1}-et. (3.16) feltételt rögtön a 3.3.2. Állítás alkalmazásával biztosítottuk. Megjegyezzük még, hogy $[r_{n+1}] \subset V_n$ automatikusan teljesül $r_{n+1} \succ r_n'$-ből.

Ezek alapján megadjuk az $r \in \omega^\omega$ valóst és a $q \in \mathbb{M}$ feltételt, amelyek teljesíteni fogják (3.6)-t. Mivel $[r_{n+1}] \subset V_n$ teljesül, ezért az

$$r = \bigcup_{n \in \omega} r_n$$

definícióval megadott valósról látszik, hogy eleme $\bigcap_n V_n$ halmaznak, hiszen ekkor $r \in \bigcap_n [r_n]$. Legyen q az $\{t_n\}_{n\in\omega}$ halmaz lezárása, azaz $\sigma \in q$ pontosan akkor, ha létezik $n \in \omega$, hogy $\sigma \prec t_n$. Ekkor a t_n-ek felépítéséből világos, hogy q Miller fa, amelynek elágazási pontjai a t_n-ek. Meggondoljuk, hogy az így előállított q része a $\bigcap_n p_n$-nek, ami egyben azt is jelenti, hogy $q \leq p_n$ minden n-re. Legyen $\sigma \in q$, tehát létezik $n \in \omega$, hogy $\sigma \prec t_n$. A rekurziós feltételek (3.15) pontja szerint $t_n \in p_l$ minden $l \geq n$ esetén, de nyilván akkor kisebbekre is, azaz $t_n \in \bigcap_n p_n$. Ez a $\bigcap_n p_n$ lefelé zárt, mert minden eleme az, tehát $\sigma \in \bigcap_n p_n$.

Már csak azt kellene látnunk, hogy $q \Vdash$ "$r \in \bigcap_n \dot{U}_n$". Tetszőleges $n \in \omega$-ra megmutatjuk, hogy $q \Vdash$ "$r \in \dot{U}_n$", amiből ez következik. Indirekt módon tegyük fel, hogy ez nem igaz, tehát létezik egy $q' \leq q$, amelyre $q' \Vdash$ "$r \notin \dot{U}_n$". Ekkor létezik $k > n$, hogy $t_k \in q'$, hiszen q' végtelen. Mivel $q' \leq q \leq p_k$, ezért teljesül $q'[t_k] \leq p_k[t_k]$, de $p_k[t_k]$ nem más, mint q_{k-1}, és ez (3.17) miatt forszolja, hogy $[r_k] \subset \dot{U}_{k-1}$. Az $\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}$ sorozatról viszont feltettük, hogy fogyó, tehát $\dot{U}_{k-1} \subset \dot{U}_n$, így $q'[t_k] \Vdash$ " $[r_k] \subset \dot{U}_n$", amiből $q'[t_k] \Vdash$ "$r \in \dot{U}_n$" is következik, de ez lehetetlen.

Tehát beláttuk (3.6) feltételnek eleget tevő r és q létezését, amely szerint bebizonyítottuk a 3.3.1. Lemma állítását.

□

3.4. Analitikusság

Az analitikusság belátásához azt fogjuk megmutatni, hogy $R_{p,\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}}$ egy Borel halmaz vetülete, ahol p egy adott $\mathbb{M}$-beli sűrű halmaz eleme. Ahhoz, hogy ezt beláthassuk, szükségünk van egy rövid technikai jellegű definícióra, amit arra használunk, hogy kezelhetőbbé tegyük a Miller feltételek közötti relációt. Ezzel bizonyos értelemben a struktúrájából adódóan látjuk majd egy feltételről, hogy egy meghatározott dolgot forszol egy konkrét kiterjesztése, ahelyett, hogy csak annyit tudnánk, hogy egy valamilyen kiterjesztése forszolja ezt a dolgot.

3.4.1. Definíció. Legyen T egy fa, ekkor $B \subset T$ *gát*, ha B metsz minden végtelen ágat T-ben.

3.4.2. Definíció. Legyen $\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}$ olyan, mint fent. Nevezzünk *szép*nek egy $p \in \mathbb{M}$ feltételt $\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}$-re nézve, ha minden $t \in \omega^{<\omega}$ és $n \in \omega$ párhoz létezik $B_{t,n} \subset p$ gát úgy, hogy minden $s \in B_{t,n}$ esetén

$$p[s] \Vdash \text{"} [t] \subset \dot{U}_n \text{"} \qquad \text{vagy} \qquad p[s] \Vdash \text{"} [t] \not\subset \dot{U}_n \text{"},$$

ilyenkor azt mondjuk, hogy $p[s]$ eldönti $[t] \subset \dot{U}_n$-t.

Meg fogjuk mutatni, hogy adott $\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}$-ra a szép feltételek sűrű halmazt alkotnak $\mathbb{M}$-ben, ezt a következő lemmában fogalmazzuk meg.

3.4.3. Lemma. *Adott* $\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}$, *ekkor a* $\left\{p \in \mathbb{M} \,|\, p \text{ szép } \{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}\text{-re nézve}\right\}$ *halmaz sűrű* $\mathbb{M}$*-ben.*

Bizonyítás. Tetszőleges $p \in \mathbb{M}$-re fúzióval fogjuk megmutatni, hogy létezik $q \leq p$ szép feltétel. Soroljuk fel az $\omega^{<\omega} \times \omega$ halmazt:

$$\{(t_k, n_k)\}_{k\in\omega} = \omega^{<\omega} \times \omega.$$

Nézzük a fúzió kiinduló lépését. Az igazságlemma értelmében tudjuk, hogy létezik $p' \leq p$, hogy p' eldönti $[t_0] \subset \dot{U}_{n_0}$-t. Ekkor legyen $B_0 = \{rt(p')\}$ és legyen $p_0 = p'$. Nevezzük B_k-t jó gátnak p_k-hoz, ha B_k gát p_k-ban és minden $s \in B_k$-ra $p_k[s]$ eldönti $[t_k] \subset \dot{U}_{n_k}$-t. Világos, hogy B_0 jó gát p_0-hoz. Nézzük akkor a fúzió egy általános k-ik lépését, amikor már adott $p \geq p_0 \geq \ldots \geq p_k$ és B_k jó gát p_k-hoz. Legyen $\sigma \in B_k$ tetszőleges, ekkor minden $s_\sigma \in succ_{p_k}(\sigma)$ szomszédjára, a kiinduló lépésnél látotthoz hasonlóan, létezik $p_{s_\sigma} \leq p[s_\sigma]$ úgy, hogy p_{s_σ} eldönti $[t_{k+1}] \subset \dot{U}_{n_{k+1}}$-t. Ekkor legyen

$$B_{k+1} = \bigcup_{\substack{\sigma\in B_k \\ s_\sigma \in succ_{p_k}(\sigma)}} rt(p_{s_\sigma})$$

és

$$p_{k+1} = \bigcup_{\substack{\sigma \in B_k \\ s_\sigma \in succ_{p_k}(\sigma)}} p_{s_\sigma} .$$

Ekkor B_{k+1} nyilvánvalóan gát p_{k+1}-ben, és egyben jó gát, mivel tetszőleges $s \in B_{k+1}$ esetén egyértelműen létezik $\sigma \in B_k$ és $s_\sigma \in succ_{p_k}(\sigma)$ úgy, hogy $s \succ s_\sigma$. Így $p_{k+1}[s]$ nem más, mint p_{s_σ}, ez viszont eldönti $[t_{k+1}] \subset \dot{U}_{n_{k+1}}$-t. Az is világos, hogy B_{k+1} minden eleme szigorú kiterjesztése B_k valamely elemének, és a gát nem tartalmaz egymás alatti elemeket. Szintén egyszerűen látszik az is, hogy minden $l \geq k$ esetén $B_k \subset p_l$ és egyben gát p_l-ben.

A keresett q szép kiterjesztése p-nek ekkor már könnyen megadható a p_k-k metszeteként. A felépítésből látszik, hogy lényegében szintenként szerkesztettük meg q-t, és a struktúrájából adódóan világos, hogy $\mathbb{M}$-beli feltételt kaptunk. Ekkor q kiterjesztése az összes p_k-nak, így kiterjesztése p-nek is. Szép, mivel tetszőleges $(t, n) \in \omega^{<\omega} \times \omega$ párhoz létezik k, hogy $(t_k, n_k) = (t, n)$, és ekkor $B_k \cap q$ jó gát q-hoz, hiszen tetszőleges $s \in B_k \cap q$ esetén $q[s] \leq p_k[s]$, ami viszont eldönti $[t] \subset \dot{U}_n$-t. $\square$

A következő két lemmában megfogalmazzuk az analitikusságot, illetve felírunk egy analitikus feltételt, ami ekvivalens lesz azzal, hogy $R_{p,\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}}$-ben vagyunk.

3.4.4. Lemma. *Ha $\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}$ adott és $p \in \mathbb{M}$ szép feltétel erre nézve, akkor $R_{p,\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}}$ analitikus halmaz.*

Használni fogjuk a következőt. Tetszőleges $s, t \in \omega^{<\omega}$ elemekre, amelyekre $s \not\prec t$ és $s \not\succ t$, jelölje $s \curlywedge t$ az s és t leghosszabb közös kezdőszeletét, azaz $r = s \curlywedge t$ pontosan akkor, ha $r = s|_{|r|} = t|_{|r|}$ és $s(|r|) \neq t(|r|)$.

3.4.5. Lemma. *Legyen p szép név $\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}$-re nézve. Ekkor egy $r \in \omega^\omega$ pontosan akkor van $R_{p,\{\dot{U}_n\}_{n\in\omega}}$-ben, ha létezik olyan p részhalmazaiból álló $\{F_n\}_{n\in\omega}$ sorozat úgy, hogy minden $n \in \omega$ esetén az alábbiak teljesülnek:*

$$|F_0| = 1, \tag{3.18}$$

$$\forall s, t \in F_n,\ s \neq t \qquad s \not\prec t, \tag{3.19}$$

$$\forall s \in F_n,\ \forall k \in \omega,\ \exists l \geq k,\ \exists t \in F_{n+1} \qquad s^\frown l \prec t, \tag{3.20}$$

$$\forall s \in F_n,\ \forall t, t' \in F_{n+1},\ t, t' \succ s \qquad t \curlywedge t' = s, \tag{3.21}$$

$$\forall t \in F_{n+1},\ \exists s \in F_n \qquad t \succ s, \tag{3.22}$$

$$\forall t \in F_n,\ \exists k \in \omega \qquad p[t] \Vdash \text{"}\ [r|_k] \subset \dot{U}_n\text{"}. \tag{3.23}$$

Bizonyítás. Az egyik irányhoz tegyük fel, hogy létezik a Lemma szerinti $\{F_n\}_{n\in\omega}$ sorozat. Elegendő megadnunk egy $q \in \mathbb{M}$ feltételt, hogy $q \leq p$ és minden $n \in \omega$ esetén $q \Vdash$ "$r \in \dot{U}_n$". Legyen q az F_n-ek lezárásainak egyesítése, azaz valahányszor $s \prec t$, ahol $t \in F_n$ akkor $s \in q$. Ekkor q egy Miller fa. Lefelé zárt, hiszen lezárások egyesítése. F_n lezárásához hozzávéve F_{n+1} lezárását, F_n alatt nem keletkezik új elágazási pont, ami (3.22) feltételből látszik. Az előbbiek, F_0 egyelemű volta és (3.21) feltétel biztosítják, hogy csak F_n-beli csúcsok lehetnek elágazási pontok, de (3.20) egyben biztosítja, hogy mindegyik F_n-beli végtelen elágazási pont. Már csak az kell, hogy mindegyiknek van kiterjesztése, ami elágazási pont, de ez szintén világos, hiszen minden F_n-beli elágazáshoz létezik F_{n+1}-beli elágazás, ami szigorúan kiterjeszti.

Tehát $q \in \mathbb{M}$ és az is világos, hogy $q \leq p$, hiszen minden $F_n \subset p$, azaz q szükségszerűen része p-nek. Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik $n \in \omega$ $q' \leq q$, hogy $q' \Vdash$ "$r \notin \dot{U}_n$". Ekkor tekintsük az F_n halmazt, ami nyilván gát q-ban, tehát $F_n \cap q'$ gát q'-ben, azaz létezik $t \in F_n \cap q'$, és (3.23) szerint létezik $k \in \omega$, hogy $p[t] \Vdash$ " $[r|_k] \subset \dot{U}_n$". Mivel $r \in [r|_k]$, ezért ekkor teljesül $p[t] \Vdash$ "$r \in \dot{U}_n$" is. Figyeljük most meg $q'[t]$-t, ami egyszerre kiterjesztése q'-nek és $p[t]$-nek is, de ezek különböző állítást forszolnak. Eszerint inkompatibilis elemek közös kiterjesztését kaptuk, ami lehetetlen.

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy adott $q \leq p$, amelyre $q \Vdash$ "$r \in \bigcap_n \dot{U}_n$". Meg kell adnunk (3.18)-(3.23) feltételeknek eleget tevő $\{F_n\}_{n\in\omega}$ sorozatot. A következő állítások a megfelelő F_n halmazok indukciós előállítását fogják segíteni.

3.4.6. Állítás. *Legyen $n \in \omega$ adott és $p' \leq p$ olyan, hogy $p' \Vdash$ "$r \in \dot{U}_n$". Ekkor létezik $t \in p'$ elágazási pont és $k \in \omega$, amelyekre*

$$p[t] \Vdash \text{" } [r|_k] \subset \dot{U}_n\text{"}.$$

Bizonyítás. Mivel $p' \Vdash$ "$r \in \dot{U}_n$", ezért az igazságlemma szerint létezik $p'' \leq p'$ és $k \in \omega$, hogy $p'' \Vdash$ " $[r|_k] \subset \dot{U}_n$". Feltettük, hogy p szép, úgyhogy tekintsük a p-hez tartozó $B_{r|_k,n}$ gátat. Létezik $t \in p'' \cap B_{r|_k,n}$, amelyre tudjuk, hogy $p[t]$ eldönti $[r|_k] \subset \dot{U}_n$-t. Emellett

$$p''[t] \Vdash \text{" } [r|_k] \subset \dot{U}_n\text{"}, \qquad \text{mivel } p''[t] \leq p'',$$

tehát

$$p[t] \Vdash \text{" } [r|_k] \not\subset \dot{U}_n\text{"} \quad \text{lehetetlen, mert } p''[t] \leq p[t].$$

Azaz végülis azt kapjuk, hogy $p[t] \Vdash$ " $[r|_k] \subset \dot{U}_n$". Ez valójában még lehetséges, hogy nem elég, ha t nem elágazási pont, de t helyett $t' = rt(p'[t])$

választással már azt kapjuk, amit szerettünk volna, hiszen ekkor $t' \succ t$ és így $p[t']$ forszol mindent, amit $p[t]$. $\square$

Ennek az állításnak a segítségével megadhatjuk az F_0 halmazt, hogy teljesítse a vonatkozó (3.18), (3.19) és (3.23) feltételeket, mégpedig úgy, hogy a $p' = q$ és $n = 0$ helyettesítéssel élünk, és ekkor a kapott t-re legyen F_0 az az egyelemű halmaz, ami csak a t-t tartalmazza.

3.4.7. Állítás. *Minden $n \in \omega$-ra és q minden s elágazási pontjára, tetszőleges $\sigma \in succ_q(s)$-hez létezik t_σ elágazási pont q-ban, hogy $t_\sigma \succ \sigma$ és ehhez k_{t_σ}, hogy $p[t_\sigma] \Vdash$ " $\left[r|_{k_{t_\sigma}}\right] \subset \dot{U}_n$".*

Ha ezt belátjuk, indukcióval egyszerűen kapjuk az $\{F_n\}_{n\in\omega}$ sorozatot. Tegyük fel, hogy F_n-et már megadtuk. Ennek minden pontja elágazási pont q-ban, tehát a fenti állítás szerint minden $s \in F_n$ esetén minden $\sigma \in succ_q(s)$-hez léteznek a t_σ elágazási pontok, hogy a (3.23) feltételnek megfelelnek, azaz létezik k, hogy $p[t_\sigma] \Vdash$ " $[r|_k] \subset \dot{U}_n$". Ennek segítségével

$$F_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{s\in F_n \\ \sigma\in succ_q(s)}} \{t_\sigma\}$$

halmaz definiálható. Nyilvánvaló, hogy az így meghatározott $\{F_n\}_{n\in\omega}$ sorozatra teljesülnek (3.18)-(3.23) feltételek.

Lássuk akkor be a 3.4.7. Állítást.

Bizonyítás. Tekintsük adottnak $n \in \omega$-t és $s \in q$ elágazási pontot. Ekkor tetszőleges $\sigma \in succ_q(s)$ esetén alkalmazzuk a 3.4.6. Állítást a $p' = q[\sigma]$ helyettesítéssel. Mivel $q \Vdash$ "$r \in \bigcap_n \dot{U}_n$", ezért $q[\sigma]$ is forszolja ugyanezt, így forszolja "$r \in \dot{U}_n$"-et is, és $q[\sigma] \leq p$ tehát az állítás feltételei élnek. Ezek szerint létezik $t_\sigma \in q[\sigma]$ elágazási pont és $k_{t_\sigma} \in \omega$, amelyekre $p[t_\sigma] \Vdash$ " $\left[r|_{k_{t_\sigma}}\right] \subset \dot{U}_n$". Mivel t_σ elágazási pont $q[\sigma]$-ban, ebből $t_\sigma \succ \sigma$ is adódik, tehát minden kívánt feltételt teljesül. $\square$

Ezzel a lemma bizonyításának másik iránya is kész, tehát bebizonyítottuk az ekvivalenciát. $\square$

3.4.8. Következmény. *A 3.4.5. Lemmából következik a 3.4.4. Lemma, ami egyszerűen látszik az alábbiakból. Tekintsük a*

$$B_{p,\{U_n\}_{n\in\omega}} = \left\{\left(r, \{F_n\}_{n\in\omega}\right) \mid (3.18) - (3.23) \textit{ feltételek teljesülnek}\right\}$$

halmazt, amiről a következő lemmában belátjuk, hogy Borel. A 3.4.5. Lemma szerint pedig $R_{p,\{U_n\}_{n\in\omega}}$ pontosan a $B_{p,\{U_n\}_{n\in\omega}}$ vetülete az első koordinátára, így az 1.2.3. Állítás szerint ebből következik, hogy $R_{p,\{U_n\}_{n\in\omega}}$ analitikus.

Ahhoz, hogy belássuk $B_{p,\{U_n\}_{n\in\omega}}$-ról, hogy Borel, először vizsgáljuk meg egy kicsit a teret, amelynek részhalmaza. Ez egy szorzattér, és a szorzat egyik tagja az ω^ω halmaz, a másik tagjának az elemei pedig $\{F_n\}_{n\in\omega}$ alakú halmazok, ahol $F_n \subset p \subset \omega^{<\omega}$. Tehát minden F_n tekinthető $Y = 2^{\omega^{<\omega}}$ egy elemének. Így az $\{F_n\}_{n\in\omega}$ alakú sorozatok Y^ω egy-egy elemei. Y-nak egy $\mathcal{B}_Y$ bázisát adják azok a V halmazok, amelyek elemeiben adott véges sok $\omega^{<\omega}$-beli sorozatról eldöntött, hogy benne van-e, azaz léteznek S és T véges diszjunkt részhalmazai $\omega^{<\omega}$-nak, hogy

$$V = \{F \subset \omega^{<\omega} \mid S \subset F \text{ és } T \subset \omega^{<\omega} \setminus F\}.$$

Ezek a halmazok nyílt-zárt bázist alkotnak Y-ban. Ebből adódóan az Y^ω szorzattopológiájának bázisát azok a halmazok adják, amelyekre véges sok koordinátában $\mathcal{B}_Y$-beli halmaz áll, a többi helyen a teljes Y. Ezek is nyílt-zárt bázist alkotnak. Mindemellett az is teljesül, hogy ezek lengyel terek, ugyanis lengyel terek megszámlálható szorzataiként állnak elő.

3.4.9. Lemma. *Az $\omega^\omega \times Y^\omega$ halmazban a $B_{p,\{U_n\}_{n\in\omega}}$ halmaz Borel, ahol*

$$B_{p,\{U_n\}_{n\in\omega}} = \left\{ \left(r, \{F_n\}_{n\in\omega}\right) \mid (3.18) - (3.23) \textit{ feltételek teljesülnek} \right\}.$$

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy elegendő mindegyik feltételhez tartozó halmazról megmutatni, hogy Borel halmaz, mert akkor ezek metszete is Borel lesz, és ez már az összes feltételt teljesíti. Azt is vegyük észre, hogy csak (3.23) feltételben szerepel az r, tehát a többiről elég megmutatni, hogy Y^ω-ban Borel, hiszen vehetjük az adott halmaz szorzatát ω^ω-val, ami így szintén Borel halmaz lesz, ez már az $\omega^\omega \times Y^\omega$ halmazban. A leírás megkönnyítésének érdekében egy egyszerűsítő jelöléssel fogunk élni:

$$\left\{ \{F_n\}_{n\in\omega} \text{ "P" tulajdonsággal rendelkezik} \right\}$$

jelölje az

$$\left\{ \{F_n\}_{n\in\omega} \in Y^\omega \mid \{F_n\}_{n\in\omega} \text{ "P" tulajdonsággal rendelkezik} \right\}$$

halmazt. Vegyük akkor sorban a feltételekhez tartozó halmazokat:

1. (3.18) feltételhez azt kell megmutatnunk, hogy az egyelemű halmazzal kezdődő sorozatok halmaza Borel. Ez a tulajdonság formulával felírva így néz ki:

$$(\exists s \in \omega^{<\omega} \quad s \in F_0) \wedge (\forall s \neq t \in \omega^{<\omega} \quad s \notin F_0 \vee t \notin F_0)$$

Tehát hasonlóan az ilyen tulajdonsággal rendelkezők halmaza

$$B_1 = \left(\bigcup_{s \in \omega^{<\omega}} \{s \in F_0\} \right) \cap \left(\bigcap_{\substack{s,\, t \in \omega^{<\omega} \\ s \neq t}} (\{s \notin F_0\} \cup \{t \notin F_0\}) \right).$$

Ennek a metszetnek az első tagja nyílt-zárt halmazok uniójából, második tagja pedig nyílt-zárt halmazok véges unióinak megszámlálható metszetéből áll, azaz egy nyílt metszete egy zárttal, ami Borel.

2. (3.19) feltétel az, hogy minden n-re F_n-ben nincsenek olyan elemek, amelyek egymást kiterjesztik. Formulával:

$$\forall n \in \omega, \forall s \precneqq t \in \omega^{<\omega} \quad s \notin F_n \vee t \notin F_n$$

A megfelelő halmaz ebből

$$B_2 = \bigcap_{n \in \omega} \bigcap_{\substack{s,\, t \in \omega^{<\omega} \\ s \precneqq t}} (\{s \notin F_n\} \cup \{t \notin F_n\})$$

Ez nyílt-zárt halmazok véges unióinak megszámlálható metszete, tehát zárt.

3. (3.20) formulával felírva:

$$\forall n \in \omega, \forall s \in \omega^{<\omega}, \forall k \in \omega, \exists l \geq k, \exists t \in \omega^{<\omega}, s^\frown l \prec t \quad s \in F_n \to t \in F_{n+1},$$

A formula végén található $s \in F_n \to t \in F_{n+1}$ helyett írható a vele ekvivalens $s \notin F_n \vee t \in F_{n+1}$ is, ami szerint egyszerűbben látszik a

$$B_3 = \bigcap_{\substack{n \in \omega \\ s \in \omega^{<\omega}}} \bigcap_{k \in \omega} \bigcup_{l \geq k} \bigcup_{\substack{t \in \omega^{<\omega} \\ s^\frown l \prec t}} (\{s \notin F_n\} \cup \{t \in F_{n+1}\})$$

felírása. Ez a halmaz nyílt-zárt halmazok unióinak megszámlálható metszete, azaz nyíltak megszámlálható metszete, vagyis G_δ halmaz, ami Borel.

4. (3.21) formulával való felírása, ahol összegyűjtjük a nem megfelelő s, t, t' hármasokat:

$$\forall n \in \omega, \forall s \in \omega^{<\omega}, \forall t \neq t' \succ s, t \curlywedge t' \neq s \qquad s \notin F_n \vee t \notin F_{n+1} \vee t' \notin F_{n+1}$$

$$B_4 = \bigcap_{\substack{n \in \omega \\ s \in \omega^{<\omega}}} \bigcap_{\substack{t \neq t' \in \omega^{<\omega} \\ t, t' \succ s \\ t \curlywedge t' \neq s}} (\{s \notin F_n\} \cup \{t \notin F_{n+1}\} \cup \{t' \notin F_{n+1}\})$$

Ez a korábbihoz hasonlóan zárt halmaz.

5. (3.22) feltétel azt fejezte ki, hogy minden F_{n+1}-beli elem valamelyik F_n-beli elem kiterjesztése.

$$\forall n \in \omega,\ \forall t \in \omega^{<\omega},\ \exists s \in \omega^{<\omega},\ t \succ s \quad t \in F_{n+1} \to s \in F_n$$

A halmazokra felírva kapjuk

$$B_5 = \bigcap_{n\in\omega} \bigcap_{t\in\omega^{<\omega}} \bigcup_{\substack{s\in\omega^{<\omega}\\ t\succ s}} \left(\{t \notin F_{n+1}\} \cup \{s \in F_n\}\right),$$

ami egy korábbihoz hasonlóan G_δ.

6. (3.23) feltétel az egyetlen, amelyben szerepel az r. Erről több lépésben mutatjuk meg, hogy Borel. Először tekintsük adottnak az $n \in \omega$, $t \in \omega^{<\omega}$ és $k \in \omega$ értékeket. Legyen

$$V_{t,k,n} = \left\{r \in \omega^\omega \,|\, p[t] \Vdash [r|_k] \subset \dot{U}_n\right\}.$$

Megmutatjuk, hogy $V_{t,k,n}$ nyílt halmaz ω^ω-ban. Könnyen látszik, hogy

$$V_{t,k,n} = \bigcup_{\sigma\in\omega^k} \left\{[\sigma] \,|\, p[t] \Vdash [\sigma] \subset \dot{U}_n\right\}.$$

Ez pedig nyílt-zárt halmazok uniója, tehát nyílt. Ezzel a formulát felírhatjuk a következőképpen:

$$\forall n \in \omega,\ \forall t \in \omega^{<\omega},\ \exists k \in \omega \qquad t \in F_n \to r \in V_{t,k,n}$$

A következő halmazfelírásban az előbbiekben bevezetett egyszerűsítő jelölést kiterjesztjük, hogy a tulajdonság leírása jelentse azon $\left(r,\ \{F_n\}_{n\in\omega}\right)$ párok halmazát, amelyek a megadott tulajdonságúak. Például

$$\{r \in V_{t,k,n}\} \overset{\text{jel}}{=} \left\{\left(r,\ \{F_n\}_{n\in\omega}\right) \,|\, r \in V_{t,k,n}\right\},$$

amely másképp felírva nem más, mint $V_{t,k,n} \times Y^\omega$, ami nyílt.

$$B_6 = \bigcap_{\substack{n\in\omega\\ t\in\omega^{<\omega}}} \bigcup_{k\in\omega} \left(\{t \notin F_n\} \cup \{r \in V_{t,k,n}\}\right),$$

így ez a halmaz nyíltak uniójának megszámlálható metszete, azaz G_δ.

Tehát mindegyik halmazra kaptuk, hogy Borel, ebből adódóan a

$$B_{p,\{U_n\}_{n\in\omega}} = \bigcap_{i=1}^{6} B_i$$

is Borel halmaz, ezzel pedig bebizonyítottuk $R_{p,\{U_n\}_{n\in\omega}}$ analitikusságát, amit szerettünk volna. $\square$

Ezzel tehát beláttuk a 3.1.5. Tételt, amelyből, mint láttuk, következik a 2.1.4. Tétel is, tehát készen vagyunk.

Irodalomjegyzék

[1] J. P. R. Christensen, *On sets of Haar measure zero in abelian Polish groups*, Israel J. Math. **13** (1972), 255-260.

[2] D. H. Fremlin, *Problem sheet, Version of 4.2.11*, Problem FC. http://www.essex.ac.uk/maths/people/fremlin/problems.htm

[3] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Graduate Texts in Mathematics **156**, Springer Verlag (1995).

[4] Elekes M.,J. Steprāns, *Haar null sets and the consistent reflection of nonmeagerness*, előkészületben.

[5] T. Bartoszyński, *On perfectly meager sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 4, 1189-1195.

[6] M. R. Burke, A. W. Miller, *Models in which every nonmeager set is nonmeager in a nowhere dense Cantor set.* Canad. J. Math. **57** (2005), no. 6, 1139-1154.

[7] M. Goldstern, *Tools for your forcing construction*, Israel Mathematical Conference Proceedings (Vol 06.1992), 307-362.

[8] K. Kunen, *Set Theory*, Studies in logic and the foundations of mathematics **102**, North-Holland (1992).