Játékok és játékos feladatok a matematika órán

Diplomamunka

Készítette: Ujváry-Menyhárt Mónika
(kiegészítő matematika tanár szak)

Témavezető: dr. Vancsó Ödön
(egyetemi adjunktus, Matematikatanítási és Módszertani Központ)

ELTE TTK, 2008.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A módszertani témájú szakdolgozatomat a játék és a játékos feladatok oktatásban való alkalmazásának hasznosságáról készítettem. A téma feldolgozásának ötletét az adta, hogy míg – másfél éves tanári és többéves magántanári tapasztalatom alapján – ez a módszer lényegesen közelebb hozza és érthetőbbé teszi a matematikát a diákok számára, addig meglátásom szerint kevesen alkalmazzák és nem kap elegendő hangsúlyt a felső tagozaton és különösen a középiskolában. Éppen ezért konkrét, gyakorlati játékokat és játékos példákat is bemutatok a munkámban.

A 2. fejezetben a témát pedagógiai és pszichológiai megközelítésből vizsgálom meg, kiemelve a játék egyéni fejlesztő és közösségformáló szerepét. A 3. fejezetben a játékos oktatás előkészítésére és az ehhez illeszkedő megfelelő tankönyv kiválasztására hívom fel a figyelmet. A 4. fejezetben – összekapcsolva a pedagógia-pszichológiát a matematikai módszertannal – a logikus gondolkodás és a problémamegoldó-készség fejlesztésével foglalkozom, aminek a mindennapi életben való hasznosítására is kitekintek. Emellett jellegzetes logikai feladatokat is bemutatok, amelyekkel színesíthetjük a matematika órát bármilyen korosztálynál. Az 5. és 6. fejezetben a matematika két nagy témakörén, a geometrián és a valószínűségszámításon keresztül tekintem át konkrét játékokkal és játékos feladatokkal, hogy ez a módszer hogyan alkalmazható a mindennapi matematika oktatásban.

Végül szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek dr. Vancsó Ödönnek, aki nemcsak a szakdolgozatom elkészítésénél, hanem már egyetemi tanulmányaim alatt is segítette és támogatta – elsőre talán meglepőnek tűnő – ötleteim és egyéni elgondolásaim kidolgozását. Továbbá köszönöm férjemnek, Szádeczky-Kardoss Szabolcsnak, hogy segített a lektorálásban, illetve köszönöm gyermekeimnek a türelmet, hogy elegendő időt hagytak a diplomamunkám elkészítéséhez.

2. A játék szerepe az oktatásban

A játék szó görögül: paidiá, melynek jelentése: mindaz, ami a gyermekhez tartozik. [1] Nem véletlen, hogy már az ókori görögök is alkalmaztak különböző játékokat az oktatás folyamatában. Azt tapasztalták, hogy a játéktevékenység közbeiktatása hatékonyabbá teheti a tanítást és a tanulást. Platón így szólt erről: „Kerüljük a kényszert, s hagyjuk, hogy a kisgyerek örömmel tanuljon. A gyerekek játékok révén okosodnak, a kényszeres okítás nem jut el a lelkükig.” [2]
A játék tehát a gyermek életének szerves része, hiszen

- a természet és a gyermeket körülvevő világ megismerésének valamint a környezethez való alkalmazkodásnak az eszköze
- általa tudja belső világát, vágyait és problémáit kifejezésre juttatni, azokat jobban megérteni és feldolgozni
- játék közben fejlődik önkifejező és másokkal való kommunikációs készsége, megismeri és észrevétlenül fejleszti a legkülönfélébb képességeit
- megtanul másokhoz alkalmazkodni és velük együttműködni
- elsajátítja környezetének viselkedési normáit
- hosszabb ideig képes figyelmét koncentrálni
- egy olyan örömforrás, mely csökkenti, sőt akár teljesen meg is szüntetheti a gyermek belső feszültségét.

Ám a gyermeket közvetlenül körülvevő világnak szülőként, pedagógusként és még megannyi formában felnőttek is részesei, így a játékról és annak öröméről nekünk felnőtteknek sem szabad megfeledkeznünk. Ugyanakkor a tanár, mint játékmester gondoskodhat arról is, hogy a tanóra menetében a megfelelően kiválasztott és felépített játékoknak céljaik legyenek. A játékok nem csak felkeltik az érdeklődést egy adott téma iránt vagy éppen megtörik az óra egyhangúságát, hanem segíthetnek a fogalmak megértésében, az ismeretek és a gondolkodási folyamat elsajátításában. Az órai játék lehet az egész osztályt foglalkoztató, közös tevékenység, de egyben alkalmat ad arra is, hogy a pedagógus differenciáltan, kiscsoportban vagy akár egyénileg foglalkoztassa a gyermekeket.

Számos tanulmány és könyv (ezek egy listáját a [3] forrás foglalja össze) szól arról, hogy

- mennyire fontos a játék az értelmi és érzelmi fejlődésben csecsemő és kisgyermekkorban
- hogyan és milyen játékokkal fejlesszük (minden területen) kisgyermekünket szülőként
- milyen meghatározó szerepe van a játékoknak az óvodában
- a játékokon keresztül fejlődnek ki a sikeres iskolai teljesítményhez szükséges részképességek és játékkal korrigálhatók leghatékonyabban az esetleges képességhiányok.

Az óvodai játékos foglalkozások után az általános iskola alsó tagozatán is helyet kapnak a játékok. Robert Fisher: *Tanítsuk gyermekeinket gondolkodni játékokkal* [2] című könyvében rengeteg játéklehetőséget kínál – a szülők mellett – a kisiskolás gyermekekkel foglalkozó tanítóknak is. A játékok szerepe azonban felsőbb évfolyamokra lépve fokozatosan csökken és sajnos a felső tagozatos és a középiskolai órákról a legtöbb iskolában már szinte teljesen kiszorul. Ezzel párhuzamosan az elsajátítandó tananyag mennyisége és a különórák időtartama is fokozatosan nő. Sok esetben az otthoni környezet sem kedvez a társas, a logikai gondolkodást igénylő, vagy éppen az anyanyelvi játékoknak, hiszen a gyermekek szabadidejük egyre nagyobb részét a számítógép illetve a televízió előtt töltik.

Ebben a helyzetben a pedagógusnak kell észrevennie, hogy a túlságosan nagy szóáradatban sokszor elveszik a lényeges tartalom, a fontos mondanivaló. A tanulók kevésbé képesek erre odafigyelni, mint valamilyen motivált cselekvés közben - amely lehet akár az önálló vagy kiscsoportos játék is – amiben aktív résztvevői lehetnek az ismeretszerzésnek. Így a játékra fordított idő a tanítási órán nem veszik el, mivel a játszó emberben óriási fizikai és szellemi energiák lépnek/léphetnek működésbe, amely aktivizált állapot a tanulás szempontjából is ideális, hiszen az ilyenkor megjelenő új ismeretek könnyen integrálódnak és tartósan megmaradnak az emlékezetben.

Tehát a jól megválasztott, megfelelő helyen és kellő időben alkalmazott játék megkönnyíti és hosszabb távon is eredményesebbé teszi a tanulást. Emellett a játék megtöri a verbális közlések egyhangúságát, egyfajta kikapcsolódás, amely feloldja a diákokban lévő feszültséget és örömet is szerez nekik. Ezáltal válik a játék az óra azon részévé, melyet a gyermek a legjobban élvez és közben észrevétlenül tanul és fejlődik.

A játék egy közösségépítő módszer is, hiszen gazdagítja a közösségi élményeket, ezáltal növeli a csoport vagy osztály összetartó erejét. A kooperáló játékok különösen erősítik a közösség összetartó erejét, mivel nincs bennük nyertes és vesztes, hanem mindenki egyenrangú félként, pusztán a játék öröméért vehet benne részt. Az együttműködési készség mellett fejlesztik az önismeretet és segítenek a másik megismerésében is. A konkuráló játékok ellenben segítenek felismerni a teljesítőképesség határait, felkészítenek az életben előforduló kudarcok, csalódások elviselésére, hiszen meg kell tanulni bennük nyerni és veszíteni is.

Mielőtt azonban elkezdenénk a tanórán játszani a diákokkal fontos, hogy tisztázzunk magunkban néhány kérdést:

- Milyen ismeretet szeretnék átadni vagy elmélyíteni illetve mit szeretnék gyakorolni?
- Hol és miben kapcsolódik az adott játék a tananyaghoz?
- Mit fejleszt a játék?

- Hogyan illeszthető be a játék az óra menetébe?
- Hogyan csinálhatok kedvet a játékhoz?
- Milyen segédanyagokra lehet szükségem?
- Mit tehetek, ha az osztály nem akar játszani?

Természetesen érdemes a spontán játéklehetőséget is megragadni, ha az kapcsolódik az adott témához és megfelelően kivitelezhető. A legfontosabb talán mégis az, hogy a tanár is szívesen játsszon, hiszen csak az tud igazán kedvet csinálni a játékhoz, aki maga is örömmel teszi és élvezi azt. Emellett azonban ne feledkezzen meg arról, hogy neki kell kijelölnie a határokat, hogy meddig lehet elmenni a játékban.

3. Játék a matematika órán

A matematika tanítása és tanulása során különösen nagy szükség van a szemléltetésre, a játékok és a játékos feladatokkal teli érdekes, színes tankönyvek használatára, hogy a gyermekekben a matematika ne valamiféle nehezen érthető, elvont tudomány képét keltse.

„A lényeg, hogy a matematikát úgy kellene felfogni, mint egy természettudományt. Odamenni, megtapasztalni, kézbe venni, játszani vele.” (Holló-Szabó Ferenc)

A diákok szívesebben nyitnak ki egy matematika tankönyvet, ha az tele van érdekes és színes (helyenként akár vicces) ábrákkal, játékos feladatokkal vagy akár rejtvényekkel is. Ellenkező esetben úgyis a saját vagy éppen a társaik szórakoztatására gyakran telerajzolják, kipingálják a tankönyveket, mely „ábráknak” legtöbbször sem a témához sem a tárgyhoz nincs köze.

Kiemelkedő fontosságú tehát, hogy a pedagógus olyan érdekes és jól átgondolt felépítésű tankönyvet válasszon, mely képes a tanulók figyelmét lekötni és a tananyagra irányítani, hiszen legtöbb helyen ez adja az elsődleges segítséget a tantárgy elsajátításához és ez az, amivel a diákok már a tanítás megkezdése előtt találkoznak.

Képzeljük el például, hogy a törtek tanulásakor olyan feladat is szerepel a tankönyvben, ahol kalózok osztozkodnak a kincsen és ezt ábrával is illusztrálják. Sokkal inkább kíváncsiak a gyerekek az ilyen jellegű feladat megoldására, mint a puszta számokkal felírt feladat végeredményére.

Ha pedig a feladatok felkeltik az érdeklődésüket, motiváltabbak lesznek az elvégzésüknél, ezáltal könnyebben jutnak el a helyes eredményhez vagy könnyebben értik meg és fogadják be a megoldási módszereket. Még gyorsabb lehet a megértés, ha minden témánál szerepelnek mintafeladatok részletes megoldással együtt, hiszen ezek segítenek a tanulóknak a tanórán és azon kívül is a típusfeladatok megoldásában vagy akár egy érdekes feladat megoldásához vezető út keresésében.

A tananyag könnyebb elsajátítását segíti, ha a mindennapi élethez kapcsolható feladatokat és illusztrációkat is találunk egy-egy témánál. Például ha az egyenletek előkészítéseként kétkarú mérleges feladatokkal találkozunk és azokat akár egy kis „tanulmányi kirándulás” keretében egy hagyományos kétkarú (nem digitális) mérleggel rendelkező zöldségesnél vagy a piacon oldjuk meg, akkor a diákok számára kézzelfoghatóvá válik, hogy ha az egyik oldalon változtatunk valamit, akkor a másik oldalon is ugyanazt meg kell tennünk. (Természetesen ehhez nem árt előzetesen egyeztetni a látogatásra kiszemelt helyen dolgozókkal, árusítókkal.)

A tankönyvet tovább színesíthetik a rejtvények, melyek megoldásához valamilyen turpisság szükséges, ezáltal izgatja a gyerekek fantáziáját és megfejtésük hatalmas sikerélménnyel párosul, de a sikertelen kísérletezgetések sem járnak együtt kudarcélménnyel. Az ilyen tankönyv az osztály csoportos illetve differenciált foglalkoztatásának lehetőségét is támogatja.

4. A logika világa

A tankönyvek mellett van néhány olyan logikai fejtőröket tartalmazó könyv, amelyek segítségével fejleszthetjük a diákok matematikai, logikai gondolkodásmódját és kreativitását. Ráadásul azáltal hogy közelebb hozzuk a matematika tanítását a való élethez, és nem egy elvont, absztrakt tudományként kezeljük, a diákok is könnyebben fogadják be az – akár indirekt módon – átadott ismereteket. És ez nem véletlen.

Ha megvizsgáljuk mindennapi életünket, akkor látjuk, hogy cselekvéseink jó részét kisebb-nagyobb feladatok megoldása alkotja. Ezek között gyakoriak az – akár napi rendszerességgel – ismétlődő rutinfeladatok (pl. eljutás az iskolába, munkahelyre, különórára), amelyeket alapvetően hatékonyan és eredményesen oldunk már meg. Előfordulnak azonban szokatlan, új feladatok is (pl. időben eljutni a város egy ismeretlen pontjára) vagy korábban sokszor megoldott feladatok módosult peremfeltételekkel (pl. eljutás reggel az iskolába, munkahelyre úgy, hogy az autó / bicikli / helyközi autóbusz elromlott és nem használható). Ilyenkor a sikeres megoldás nem rutinból jön, hanem korábbi tapasztalatainktól, az eredményhez vezető út gyors és hatékony felismerésétől függ. Nem ritkán maga a feladat sem világos, ezért először azt kell felismerni és megfogalmazni. Nyilvánvaló, hogy minél hamarabb ismeri fel valaki a feladatot és minél többféle vagy új megoldási lehetőséget talál, annál hatékonyabban boldogul a probléma kezelésével. A gyors és egyszerű megoldás ráadásul sikerélménnyel is párosul, illetve a környezet is értékelheti az újító, ötletes vagy eredeti megoldást. A fenti példákból azt is láthatjuk, hogy nem csak matematikai vagy műszaki feladatoknál van ez így, hanem hétköznapi helyzetekben is.

Mindezen lépések átfogó vizsgálata vezet el a kreativitáshoz, azon tulajdonsághoz, amely révén egy-egy új feladat sikeresen megoldhatóvá válik. Nyilvánvalóan ha szeretnénk váratlan helyzetekre vagy szokatlan problémákra minél sokoldalúbban felkészülni, akkor a kreativitásunkat kell erősíteni, fejleszteni. A kreativitásnak sok formája van és nem is lehet pontosan körülhatárolni, de a különféle logikai fejtörő feladványokban bizonyosan megnyilvánulnak a kreativitás ismérvei, hiszen sok lehetséges változatot kell végiggondolni, mire eljutunk a megoldásig. A kreativitás fejlesztésével ráadásul a személyiség is előnyére változik, nyitottabb lesz és mentes(ebb) a konformizmustól. [4]

E feladványok arra is alkalmasak, hogy a gondolkodást gátló jelenségek – különösen a három „intelligenciacsapda” – kiküszöbölésén segítsenek. E gátak: a kapkodás, a szűklátókörűség és a szétszórtság. Az oktalan sietség, a kapkodás az egyik legelterjedtebb gondolkozási hiba: nem vesszük figyelembe az összes döntési lehetőséget, elsietjük a döntést, vagy éppen annak következményeit nem gondoljuk végig előre. A gondolkodtató játékok és feladatok arra bátorítják a játékost, hogy megálljon és átgondolja lépéseit, ezáltal segít leszokni a kapkodásról.

A szűklátókörűség a másik hiba: rutinból, megszokásból cselekszünk, „járt utat a járatlanra nem cserélünk”. Nem jut eszünkbe, hogy A-ból B-be a megszokotthoz képest más úton is el lehet jutni, így esetleg lemaradunk egy rövidebb, hatékonyabb vagy szebb megoldásról. A kreativitás fejlesztésével nagyban segíthetünk ezen a problémán is.

A harmadik gondolkodási probléma a szétszórtság. Ha nincs tervünk, stratégiánk, nem látjuk tisztán a célt és az irányt magunk előtt, akkor gondolkodásunk hamarosan esetlegessé, formátlanná válik, agyunk szervezetlenül fog dolgozni. A különféle logikai játékok és fejtőrök segítik a stratégiai gondolkodás kialakítását. [2]

Emellett a logikai fejtőrök – még ha észrevétlenül is – a matematika eszköztárára támaszkodnak, így a matematikai gondolkodást is fejlesztik. Különösen a „Tegyük fel, hogy...” jellegű bizonyításokkal való megismerkedés és azok elsajátítása hasznos a matematikában gyakran használt indirekt bizonyítási módszerek (illetve a teljes indukció) megértése szempontjából.

A következő részben nézzünk meg néhány gyöngyszemet a műfaj jeles képviselőjétől, a Raymond Smullyan könyveiben [5,6,7] megjelent feladatok közül!

4.1. Feladatok

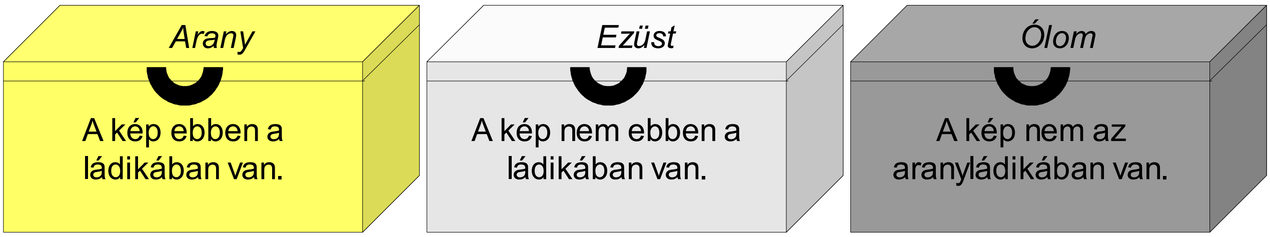
1.) Amikor a Fekete Király alszik, akkor az amit igaznak hisz, hamis. Más szóval, amit a Király alvás közben hisz, az hamis. Amit viszont ébren hisz, az mind igaz. Nos, múlt éjszaka, pontosan 10 órakor, a Király azt hitte, hogy ő is és a Királynő is alszik. Aludt ekkor a Fekete Királynő vagy nem?

2.) Én is olyan vagyok, mint a Fekete Király – mondta a Fekete Királynő. – Én is hamis dolgokat hiszek igaznak, mikor alszom, és igazakat, amikor ébren vagyok. Tegnapelőtt éjjel, tizenegy órakor a Fekete Király azt hitte, hogy alszom. Én ekkor vagy azt hittem, hogy ő alszik, vagy azt, hogy nem. Meg tudod mondani, hogy melyiket?

3.) Van egy ikerpár, akik teljesen egyformán néznek ki, viszont az egyikük mindig igazat mond, a másikuk mindig hazudik. Egyiküket úgy hívják, hogy John. Hogyan lehetne az ikerpár egyik tagjától egyetlen kérdéssel – ami legfeljebb 3 szóból áll – kideríteni, hogy melyikük John?

4.) Shakespeare *Velencei kalmár*-jában Portiának volt három ládikája – egy arany, egy ezüst és egy ólom – amelyek egyikében Portia képe rejtőzött. Kérőjének választania kellett egyet a ládikák közül, és ha elég szerencsés (vagy elég bölcs) volt ahhoz, hogy a képet tartalmazó ládikát válassza, akkor igényt tarthatott Portia kezére. A ládikákon levő egy-egy felirat segítette a kérőt a bölcs választásban.

Tegyük fel, hogy Portia csupán intelligenciája és nem egyéb erényei alapján szerette volna kiválasztani leendő férjét! A következő feliratokkal látta el ládikáit:



Portia annyit mondott kérőjének, hogy a három állítás közül legfeljebb egy igaz. Melyik ládikát válassza a kérő?

5.) Portia kérője jól választott, így hát összeházasodtak és egész boldogan éltek – legalábbis egy ideig. Az idő múltával azonban Portiának a következő gondolata támadt: „Bár a férjem mutatott némi intelligenciát, amikor a jó ládikát választotta, a feladat nem volt elég nehéz. Nehezebb feladatot is adhattam volna, és akkor most igazán okos férjem lehetne.” Így hát azonnal elvált, és elhatározta, hogy szert tesz egy okosabb férjre.

Ezúttal a következő feliratokkal látta el a ládikákat:

Portia annyit mondott kérőjének, hogy a három állítás közül legalább egy igaz és legalább egy hamis. Melyik ládikában van a kép?

(**Epilógus**: A sors úgy hozta, hogy az első kérő éppen Portia ex férje volt, aki elég elmésnek bizonyult ahhoz, hogy megoldja ezt a feladatot is. Így hát újra összeházasodtak. Portiát hazavitte a férje, majd a térdére fektette és jól elnáspángolta. Portiának soha többé nem támadtak bolondos gondolatai.)

4.2. Megoldások

1.) Ha a Fekete Király ébren lett volna a kérdéses időpontban, akkor igaz lett volna, amit hisz, vagyis hogy ő is és Fekete Királynő is alszik. Ez ellentmondás, tehát a Fekete Király aludt, és amit hitt az hamis volt. Viszont ha a Fekete Királynő is aludt volna, akkor igaz lett volna, amit hisz, tehát a Fekete Királynőnek ébren kellett lennie.

2.) Ez a feladat az előzőhöz képest egy újabb csavart tartalmaz, ami néha megakasztja az embereket. Arról van szó ugyanis, hogy azt nem fogjuk tudni kideríteni, hogy alszik-e vagy ébren van-e a király vagy a királynő. Viszont a kérdés, csak arra vonatkozik, hogy mit hisz a királynő és mint látni fogjuk mindjárt ez „független” lesz attól, hogy mi a valóság.

Tegyük fel, hogy a Fekete Király ébren volt. Ekkor amit hitt igaz volt, tehát a Fekete Királynő aludt. Így a Fekete Királynőnek hamisan azt kellett hinnie, hogy a király alszik. Most tegyük fel, hogy a Fekete Király aludt. Ekkor nem igaz amit hitt, hogy a Fekete Királynő aludt, vagyis a királynő ébren volt. Ilyenkor viszont az igazat hiszi, vagyis, hogy a Fekete Király alszik. Tehát a Fekete királynő mindenképp azt hitte, hogy a Fekete Király alszik.

3.) Mivel nem tudjuk, hogy akitől kérdezünk igazat mond-e vagy hazudik, ezért mindkét eshetőségre fel kell készülnünk. Ezért olyan furfangos kérdést kell kitalálni, ami egyszerre vonatkozik John-ra (hiszen ki kell találnunk az ő kilétét) és az igazmondásra is (hogy ki tudjuk védeni a válasz nem ismert igaz vagy hamis voltának problémáját). Egy lehetséges kérdés: „John mindig hazudik?”. Ha igen a válasz, akkor a másikuk John, ha pedig nem a válasz, akkor a válaszoló maga John, függetlenül attól, hogy igaz vagy hamis volt a válasz. Nézzük meg miért.

Ha a válasz igen és ez igaz is, akkor értelemszerűen nem ő John. Ha a válasz igen, de hazugság,

akkor a válaszoló hazudik, viszont John nem, tehát értelemszerűen a másikuk John. Ha a válasz nem és ez igaz is, akkor John igazat mond és a válaszoló is, tehát ő John. Végül az utolsó lehetőség, hogy a válasz nem és ez hazugság, akkor a válaszoló hazudik, akárcsak John, tehát ebben az esetben is ő John.
Vagyis kicsit hasonlóan az előző példához, azt (egyetlen kérdéssel) nem tudjuk kideríteni, hogy a kapott válasz igaz-e vagy hamis, de azt hogy melyikük John azt igen. Egyébként a kérdés lehetne az is, hogy „John igazat mond?”.

4.) Az arany- és az ólomládikán levő állítások pontosan egymás ellentétei, vagyis az egyik igaz, a másik hamis. Mivel igaz állítás legfeljebb egy van, ezért az ezüstládikán levő állítás hamis, tehát a kép az ezüstládikában van.
Természetesen – ha nem használjuk ki szemfülesen két állítás ellentétes mivoltát, akkor – az előző megoldásokban használt módszerrel is boldogulhatunk. Tegyük fel, hogy a kép az aranyládikában van, ekkor két igaz állítás lenne (nevezetesen az arany- és az ezüstládikán levők), ami nem lehetséges. Ha a kép az ólomládikában lenne, akkor szintén két igaz állítást kapnánk. Tehát a kép csak az ezüstládikában lehet, és ekkor valóban csak egy igaz állítás van.

5.) Tegyük fel, hogy a kép az ólomládikában van, ekkor mindhárom állítás igaz lenne, ami nem lehetséges. Ha a kép az ezüstládikában volna, akkor mindhárom állítás hamis lenne, ami szintén nem lehetséges, tehát a képnek az aranyládikában kell lennie (és ekkor az első két állítás igaz, a harmadik hamis, ami megfelel a feltételnek). Feltevéssel egyébként nem csak a kép helyére vonatkozóan élhetünk, hanem az állítások igaz vagy hamis voltára is. Ha feltesszük, hogy az aranyládikán levő állítás igaz, akkor az ezüstládikán levő állítás is igaz, így az ólomládikán levő állításnak hamisnak kell lennie a feltételek szerint. Vagyis a kép nem az ezüst és nem az ólom ládikában van, tehát csakis az aranyládikában lehet. Ha pedig azt tesszük fel, hogy az aranyládikán levő állítás hamis, akkor az ezüstládikán levő is hamis, így az ólomládikán levő állításnak igaznak kell lennie a feltételek szerint. Viszont ekkor a képnek az ólomládikában és az ezüstládikában is lennie kéne a feliratok szerint, ez pedig ellentmondás.
A matematika órát egyébként még jobban színesíthetjük azzal, hogy kigondolunk hasonló feladatokat és megcsináljuk a ládikákat (pl. színes kartonból) és a feliratokat hozzájuk. Természetesen nem Portia képét, hanem például egy almát vagy egy csokoládét, bonyolultabb feladat esetén pedig egy „ötöst” rejthetünk el az egyikben.

5. Játékos geometria

A játékos feladatok nagyon hasznosak az érdeklődés felcsigázására és a matematikai gondolkodásmód fejlesztésére, de vannak további – a szó szoros értelmében kézzelfogható – eszközök is, amelyek valóban tapinthatóvá teszik a matematikát. A kézzelfogható geometria oktatás egyik lehetősége például a Geomag nevű mágneses építőjáték használata a tanítási órán. Ez a játék 1.27 cm átmérőjű nikkelezett acélgolyókból és 2.7 cm hosszú 2 permanens mágnest tartalmazó rudakból áll. A semleges golyót a rúd bármely vége magához vonzza, és akár forgatható is rajta. Sőt egy rúd szőlőfürt-szerűen több golyót is magához tud vonzani vagy fordítva, egy golyóhoz csillag-szerűen akár 14 rúd is kapcsolódhat.

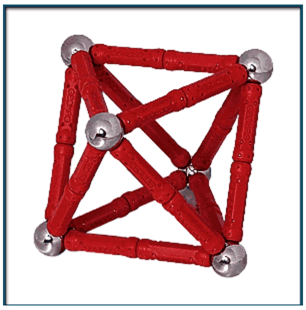
Az „építkezések” legalapvetőbb formája a háromszög. Ha a háromszöget úgy építjük meg, hogy minden golyóhoz egy északi és egy déli pólus csatlakozik (vagyis a mágneses erővonalak körbefolynak), akkor a háromszög kifelé semleges lesz és így érhetjük el a maximális stabilitást. Ha viszont mágneses vonzerőt kívánunk létrehozni valamelyik csúcsnál, akkor ehhez a golyóhoz a két rudat az azonos pólusú végénél illesszük hozzá. [8]

Az első kísérletezések alatt hamar kiderül, hogy a 3 rúdból és 3 golyóból felépített szabályos háromszög (különösen, ha a mágneses erővonalak körbe folynak) stabil és nem deformálható, ugyanakkor a négyzetet vagy a nagyobb oldalszámú szabályos sokszögeket nem lehet stabilan megépíteni. Ekkor könnyen rávezethetjük a tanulókat arra a síkgeometriai tételre, hogy egy háromszöget egyértelműen meghatároz a három oldala, de ez nagyobb oldalszámú sokszögekre már nem igaz. A négyzet például még síkban is (pl. egy asztallapra helyezve) jobbra-balra „eldönthető” és ezáltal rombuszba megy át.

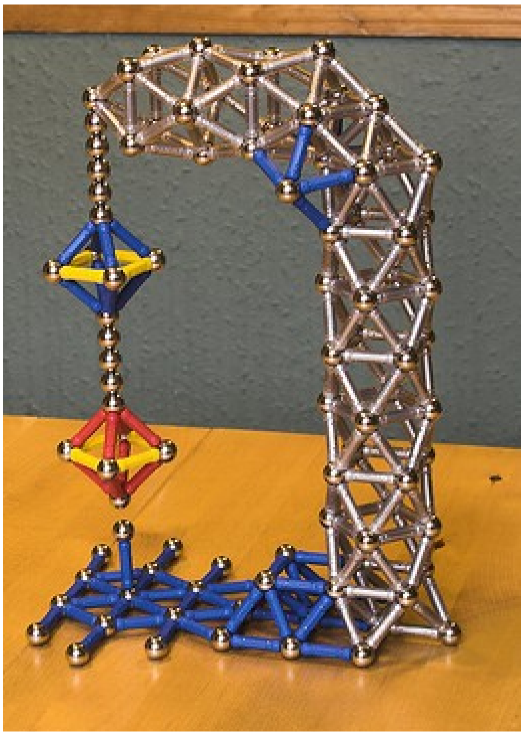
Ha a négyzet döntögetésével nem csak a síkban játszunk, akkor máris térgeometriai felfedezésre csábíthatjuk a diákokat. A térben „meghajlított” négyzethez – az átlók helyén – további két rudat hozzárakva a „legkompaktabb” és egyben legstabilabb szabályos testet, a tetraédert kapjuk.

Ennek kapcsán felmerülhet a kérdés, hogy „Milyen további szabályos testek vannak?”.

Erre a kérdésre már Platón óta tudjuk a választ, hogy összesen 5 ilyen test van, melyeket viszonylag könnyedén meg is építhetünk. A kocka (hexaéder) megépítésekor újra megtapasztalhatjuk, hogy a négyzet oldalak instabilak és a kocka „döntögetésével” romboidot állíthatunk elő. Az oktaéder (1. ábra) és az ikozaéder viszont stabilak lesznek, mivel háromszög lapjaik vannak. A dodekaéder azonban még a négyzetnél is instabilabb, olyannyira, hogy külön segítség nélkül még az építmény megfelelő összerakása is nehézséget okoz.


1. ábra

Ilyen „külön segítség” lehet például a kiegészítőként elérhető szabályos ötszög panel, amivel stabillá tehetők az ötszög lapok. Hasonló panelek vannak négyzet illetve (60 és 120 fokos szögű) rombusz formában is, melyekkel a négyzetet és kockát valamint a rombuszt és romboidot is stabillá tehetjük.



2. ábra

Ha már vannak stabil, kézzelfogható alakzataink, akkor a felszínt és a térfogatot valamit ezek megváltoztatását is szemléltetni tudjuk a különböző térbeli testeken. Nem ritkán pótolhatatlan segítséget jelent, hogy a diákok gyakorlatilag tapinthatják a két fogalom közötti különbséget, melyeket hasonló szemléltetés nélkül előfordul, hogy összekevernek.

Érdemes a diákoknak szabad játék keretében megengedni, hogy kiélhessék és megmutathassák kreativitásukat, megépíthessék egyénileg vagy kisebb csoportokban az ötleteiket.

Ezután a különféle alakzatok statikus vizsgálatáról áttérhetünk a geometriai transzformációk vizsgálatára. Szinte bármelyik (nem túlságosan nagy és nehéz) síkbeli vagy térbeli alakzatot egy további golyó-rúd párossal az egyik csúcsánál felfüggesztve meg is forgathatjuk. Itt akár azt is megszámolhatjuk, hogy hány olyan különböző szögű forgatás van, ami a kiindulási állapottal azonosan kinéző eredményt ad, illetve hányadik forgatással jutunk vissza az eredeti állapotba.

A transzformációk közül nem csak a forgatást, de a tengelyes és középpontos tükrözéseket, sőt az eltolást is lehet egy kis kreativitással demonstrálni.

A Geomag azonban nem csak a geometriában adhat kézzelfogható segítséget, hanem további tantárgyak esetében is hasznos demonstrációs eszköz lehet. A fizikában az értelemszerűen adódó mágnesességen kívül az ellentétes irányú erők hatásait, az erőkart, sőt némi extra felszereléssel akár a mozgási indukciót is be lehet mutatni. Az ún. balerina alakzat megforgatásával pedig a perdületmegmaradás törvényét lehet látványosan szemléltetni. A kémiában pedig a molekulák térbeli formáját és a kötéseket lehet vele modellezni. Végül, de nem utolsósorban technika órák során is hasznos segédeszköz lehet, hiszen rendkívül sokféle modellt illetve esztétikai érzéket és kreativitást fejlesztő műremeket készíthetünk ebből a játékból.

3. ábra

5.1. Ötletes geometria feladatok (nem csak felsősöknek)

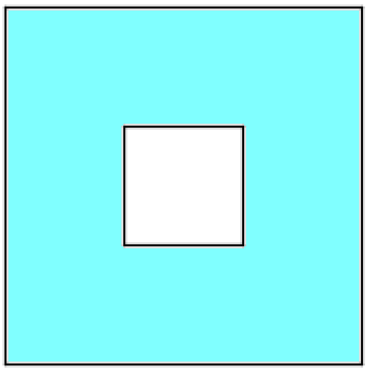
A geometriához kapcsolódóan is találhatunk érdekes és játékos feladatokat, amelyek közös jellemzője, hogy valós életből vett vagy legalábbis könnyen elképzelhető problémákat ragad meg, és ezáltal közelebb hozza a matematikát az élethez. Ráadásul sokszor már a feladat kiírásból látszik, hogy valami kis furfangra van szükség a megoldáshoz, ezért csábítanak is a gondolkodásra. Lássunk néhány ilyen példát, utána pedig a megoldásukat!

1.) Rakj ki 6 szál gyufából 8 szabályos háromszöget!

2.) Vágj egy patkót 2 vágással 6 részre!

3.) Mérőeszköz nélkül tölts *pontosan* félig egy hordót!

4.) A 4. ábrán látható kis szigetet egy 3 méter széles és 3 méter mély mesterséges tó veszi körül. Hogyan lehetne átkelni kívülről a kis szigetre 2 darab 2,9 méteres deszka segítségével?



4. ábra

5.) Helyezz el egy 10 pontból álló ponthalmazt a síkon úgy, hogy minden ponton legalább 2 olyan egyenes menjen át, amelyek tartalmazzák a ponthalmaz 4 pontját.

6.) Nagymama kocka alakú süteményt sütött, melyet csokimázzal vont be. Így a kocka 5 lapján volt csokoládé, a hatodikon nem. Osszuk szét a süteményt 3 gyerek között igazságosan, azaz minden gyereknek ugyanannyi sütemény és csokoládé jusson!

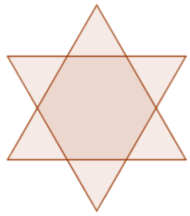
7.) Egy függőleges falnak támasztott létra földet érő pontja elkezd csúszni (a vízszintes talajon). Milyen pályán mozdul el a létra felezőpontja?

8.) Egy téglalap alakú asztalra két játékos felváltva tesz le egy-egy 5 Ft-os pénzérmét. Az nyer, aki utoljára tud pénzt lerakni az asztalra. Kinek van nyerő stratégiája?

9.) A tengeren négy hajó halad együtt, közel egymáshoz: bármely két hajó távolsága 3 km. A hajók között van teherszállító, olajszállító és utasszállító hajó. Milyen hajó a negyedik? [9]

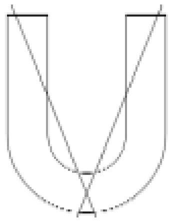
5.2. Megoldások

1.) Az 5. ábra szerint 2 – a súlypontjukra nézve középpontosan tükrös – szabályos háromszögbe elrendezve a gyufákat 6 kicsi és 2 nagy szabályos háromszöget kapunk.



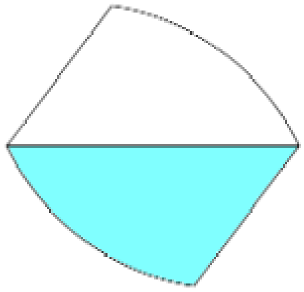
5. ábra

2.) A 6. ábra mutat egy lehetséges 6 részre történő vágást. Vegyük észre, hogy ezt a patkó-alakzat konkáv volta teszi lehetővé, konvex alakzatot lehetetlen lenne négynél több részre vágni. Ha a patkó térbeli lenne, akkor is lehetséges 2 síkkal 6 darabra vágni, méghozzá úgy, hogy az egyik sík a „szárakra” merőlegesen lenne, míg a másik a „felezősík” lenne, ami pont az ábrán látható metszetet vágná ki a patkóból.



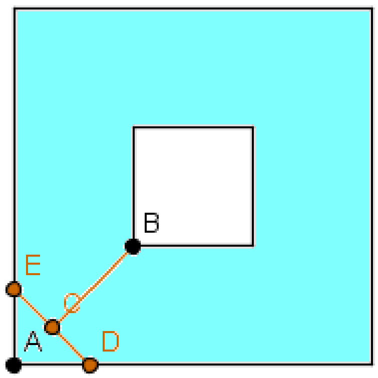
6. ábra

3.) Ez a feladat érdekes ötleteket szokott szülni a diákok fejében, a hajszálak használatól kezdve a hordó meglékeléséig. Mindenki érzi, hogy ez egy könnyű feladat, ha másképp nem hát szemmérték segítségével, ugyanakkor a feladat kiírásban kiemelten fontos a *pontos* szó. Vagyis a szemmértékkel vagy egyéb egyszerű segédeszközzel való körülbelüli félig töltés nem elég. A 7. ábra mutatja a megoldás lényegét, vagyis hogy miközben töltjük a hordót, úgy kell dönteni, hogy a víz szintje pontosan a hordó alsó „sarkánál” (oldal és alsó lemez találkozásának legmagasabb pontja) legyen. Amikor a szemközti oldalon a vízszint eléri a felső „sarkot”, akkor hagyjuk abba a töltést, mert pontosan a felénél vagyunk. (Természetesen ehhez a módszerhez hallgatólagosan kihasználtuk a hordó középpontosan szimmetrikus tulajdonságát.)



7. ábra

4.) Rövid gondolkodással rájöhetünk, hogy mivel „hiányzik” 10 cm a deszkákból, ezért trükközni kell, erre pedig nyilvánvalóan csak a mesterséges tó valamelyik sarka lehet alkalmas. A 8. ábra szerinti módon az egyik saroknál (A), de attól a lehető legmesszebb letesszük az egyik deszkát úgy, hogy az még éppen stabilan megálljon és a deszka végei (D és E) egyenlő távolságra legyenek A-tól. Ezután rámegyünk a deszka közepére (C) és itt letesszük a másik deszkát úgy, hogy az egyik vége itt, a másik pedig a sziget sarkán legyen (B).

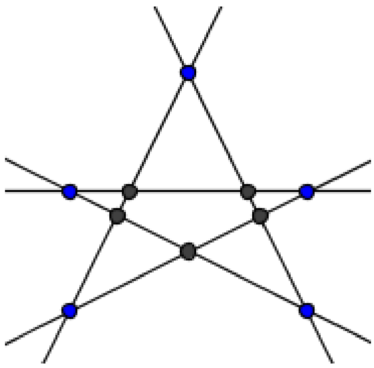


8. ábra

Mindössze azt kell bebizonyítani, hogy a CB távolság kisebb, mint 2,9 méter. Mivel az AED háromszög egyenlő szárú és derékszögű, ezért AC = EC = CD = 1,45 méter. C rajta van az AB szakaszon, így CB = AB – AC = $3\cdot\sqrt{2}-1{,}45\approx 4{,}25-1{,}45=2{,}8$ méter, tehát a 2,9 méter a megadott módon lefektethető.

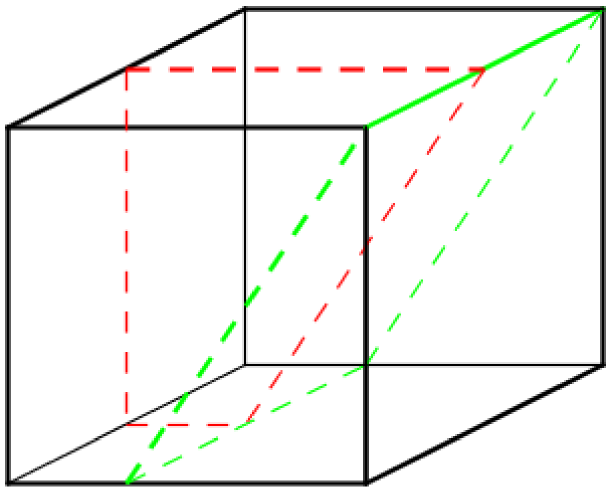
Érdemes elgondolkodni azon, hogy ha a szigetről szeretnénk kijutni a két deszkával, akkor ez a módszer nem működik. Mivel a sziget konvex alakú, ezért az első deszkát sehogyan sem tudjuk úgy (mindkét végén) stabilan lefektetni, hogy bármelyik pontja a tó fölé érjen. Tehát, ha már megépítettük a hidat befelé menet, akkor ne bontsuk le. (Ha mégis építeni kell valamit, akkor a fizikát még mindig hívhatjuk segítségül: ha az első deszkát úgy tesszük le, hogy a vége 20 cm-t lógjon a tó fölé merőlegesen a sziget partjára és a deszka elég nehéz, akkor a forgatónyomatékoknál levő erőkarok különbsége miatt, valószínűleg át tudunk kelni a tavon, ha a másik deszkát rárakjuk erre és a túlpartra 5-5 cm biztonsági tartalék átfedéssel. Fizikai számításokkal kiszámolható, hogy ha a mi tömegünk nem több, mint egy deszka tömegének (kb. 20-25 kg) az 7,5-szerese, akkor óvatosan bár, de átkelhetünk.)

5.) 5 pontot lényegében tetszőlegesen elhelyezhetünk úgy, hogy egy konvex ötszöget alkossanak. Ha az ötszög oldalait nem rajzoljuk be, akkor az átlók bezárnak illetve kimetszenek egy „belső” ötszöget, 5 másik csúcsponttal. A 9. ábrán látható, hogy egy az 5 eredeti és az 5 belső metszéspont együtt megfelel a feladat feltételeinek.



9. ábra

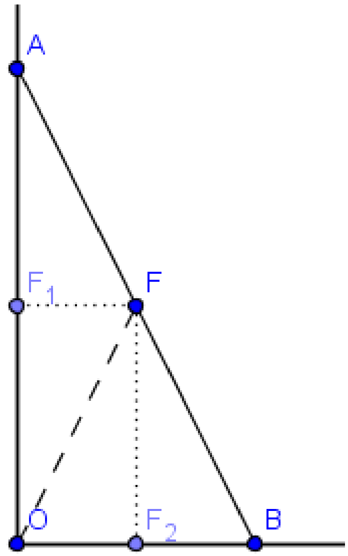
6.) A sütemény három egyforma térfogatú részre osztása nem lenne nehéz, de a csokimáz miatt az alsó lap nélkül tekintett felszín egyezőségére is figyelni kell. A 10. ábrán látható egy lehetséges megoldás, ahol az alsó oldalt a harmadánál vágjuk el. Ezáltal két egybevágó és egy harmadik részre osztjuk a tortát, ezért csak azt kell ellenőrizni, hogy a harmadik rész térfogatban és csokimázas felszínben is megfelelő-e (vagyis az egész torta harmada).



10. ábra

A harmadik rész egy (fektetett) derékszögű háromszög alapú hasábnak fogható fel, melynek alaplapja harmada a kocka egy négyzetlapjának területének, mivel az egyik oldala ugyanakkora, a másik meg 2/3-a a négyzet oldalának. Ezáltal a hasáb térfogata harmada a kockáénak. A csokimázas felszín tekintetében pedig egy teljes és két harmadnyi csokimázas négyzetlapunk van, vagyis összesen 5/3-nyi négyzetlap, ami a teljes csokimáz harmada, vagyis a megoldásunk helyes.

7.) A megoldást nagyban segíti egy kis gondolkodás a 11. ábrán, ami a létra helyzetének egy tetszőleges pillanatát örökíti meg a csúszás közben. A létra két végpontja A és B, felezőpontja F. Az ABO derékszögű háromszög, így OF = AF = FB = AB/2. Mivel az AB távolság a létra állandó hossza, ezért az OF távolság is állandó. Az F pont a faltól indul és folyamatos útvonalon a földre érkezik, méghozzá az O ponttól mindig azonos távolságban, így útja egy O pont körüli negyed-körívet ír le.
A tapasztalatok szerint intuitív módon inkább egy szakaszra, vagy más középpontú körívre vagy egyéb görbére tippelnek az emberek ennél a feladatnál, így itt különösen hasznos a precíz megoldás és az intuíció közötti jelentős eltérésre felhívni a figyelmet.

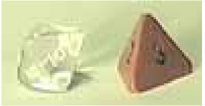


11. ábra

8.) Ilyen jellegű kötetlen játékban ritka, hogy a nem kezdő játékosnak lenne nyerő stratégiája, ezért a kezdő játékos nyerő stratégiáját érdemes keresni. Erre pedig egy lehetséges megoldás az, hogy az első érmét pontosan az asztal középpontjára teszi, és utána minden lépésben a másik játékos lépésének középpontos tükörképére teszi az érméjét. Ha a kezdő következetesen alkalmazza ezt a stratégiát, akkor mindig tud érmét elhelyezni, ha a másik játékos is tudott, így előbb-utóbb a másik játékos nem fog tudni érmét elhelyezni és veszít.

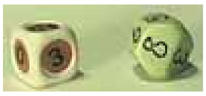
9.) Már a kérdés feltevésből kiderül, hogy valami furfang van a feladatban, hiszen semmiféle közvetlen információnk nincs a negyedik hajóra vonatkozólag. Közvetett információnk viszont van, és azt használva rájöhetünk, hogy a tenger felszínének (közelítőleg) síkjában nem tudunk 4 hajót egyenlő távolságra elhelyezni csak hármat. A negyedik csakis a tenger alatt lehet egy tetraéder negyedik csúcspontjaként, vagyis ez a hajó egy tengeralattjáró.

6. Játékos valószínűségszámítás



12. ábra

Egy másik lehetőség a kézzelfogható matematika oktatásra, ha a valószínűségszámítás témakörénél a „hagyományos” dobókocka mellett pl. a mai fantasy szerepjátékoknál használatos különböző lapszámú dobótesteket is használunk. A dobókockák persze nem mindig olyanok voltak, mint amiket manapság általában ismerünk.



13. ábra

„Amíg a világnyelvek, játékkultúrák többségében a dobókocka megnevezése pl. "dice" a sorsvetés, dobás, kockáztatás széleskörűen általános értelmére épül, addig a mai Magyarországon a hatoldalú hexaéderre szűkítette le a játékeszköz megnevezését. A dobókockás játékok jelentős részében azonban nem hatoldalú a dobótest. A késő középkori 4, 6, 8, 12, 20 oldalú szabályos platóni testekkel folyó játékok ezen eszközeinek közös megnevezésére a gyönyörű "Sorsvető" név szolgált Magyarországon. Ez a név azonban magában foglalta az öt szabályos platóni dobótestet (tetraéder, hexaéder, oktaéder, dodekaéder, ikozaéder), és azon szabálytalan felsorszámozott oldalú testeket is, amik egyenlő eséllyel eshettek egy-egy oldalukra, de nem voltak szabályos testek, sőt némelyik oldalai sem voltak egybevágóak. A sorsvetők XVIII. századi sorába tartoztak a 26-oldalú, fél pakli kártyát pótló jóskockák és a pörgettyűk, sorsológömbök, mókuskerék-szerű rézhengerek, bennük számozott papírhengerekkel.” [10]

Egy szabályos dobókockával dobva (legyen az akárhány oldalú) teljesen természetes, hogy mindegyik lehetséges kimenetel/eredmény egyenlő eséllyel, azaz azonos valószínűséggel következik be. Mi történik azonban akkor, ha pl. 2 vagy több dobókockával egyszerre dobunk és az adott dobáskor kapott eredmények összegét vizsgáljuk?

Ilyenkor megtehetjük, hogy a vizsgálathoz - amit a diákokkal közösen játékos formában végzünk - körbeülünk és tippelünk/fogadunk, hogy mi lesz a dobás kimenetele. Ha elegendően sok kört játszunk, mindegyik kör elején újra tippelünk és közösen feljegyezzük az eredményeket, akkor azt tapasztaljuk, hogy a tanulók a játék előrehaladtával már csak néhány egymáshoz közeli értékre fogadnak. Ezáltal könnyen érthetővé válik számukra a várható érték fogalma, egyszerűen kielemezhetjük, hogy egy-egy eredmény hányféleképpen állhat elő és ezáltal hogyan számolhatjuk ki a különböző kimenetelek valószínűségét. (Évfolyamtól és az osztály típusától függően ismereteiket bővíthetjük a szórással és az eloszlásokkal is.)

Természetesen ezekkel a dobókockákkal sok különböző valószínűségi játékot játszhatunk, amelyek kitalálásába érdemes a diákokat is bevonni, hogy a szokásostól eltérő formában is feldolgozzák és rendszerezzék az új ismereteket és a saját maguk által kitalált játékok, kérdések és válaszok segítségével hosszabb távon is rögzítsék a memóriájukban ezeket.

6.1. Feladatok

1.) Bevezető feladat: Mindenki tippelje meg, hogy a dobókockával hányadik dobásra fogom az első 6-ost dobni. Utána megbeszéljük, mi az optimális tipp.

2.) Egy elítéltnek két sötét dobozt adnak 10 fehér és 10 fekete golyóval. A golyókat tetszés szerint el kell osztania a két dobozba. Amikor bejön a hóhér, benyúl az egyik dobozba és kihúz onnan egy golyót. Ha fehér, akkor a rabot szabadon engedik, ha fekete vagy nem talál golyót a dobozban, akkor kivégzik. Hogyan helyezze el a rab a golyókat, hogy a lehető legnagyobb valószínűséggel szabaduljon?

3.) A brazil labdarúgó válogatott edzésének megkezdése előtt, az edzésen résztvevő 22 játékost két csoportba osztják. Mi annak a valószínűsége, ha találomra történik a szétosztás a két 11-es csoportba, hogy Ronaldo és Ronaldinho egymás ellen játszik? És hogy a 2 kapus egy csapatba kerül?

4.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ötös lottón pontosan
a) 0 ; b) 1 ; c) 2 ; d) 3 ; e) 4 ; f) 5 találatunk lesz?

5.) Anna és Béla két kockával játszanak. Anna akkor fizet Bélának valamennyit, ha a dobott kockákon páratlan számok szerepelnek. Béla pedig akkor fizet Annának valamennyit, ha pontosan az egyik kockával páros számot dobnak. Ha más eset fordul elő, egyikük sem fizet. Milyen pénzösszegben állapodjanak meg az egyik illetve a másik esetben hogy a játék méltányos legyen?

6.) Legalább hány szabályos pénzdarabot kell feldobni ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb legyen az esély arra, hogy legyen köztük fej?

7.) Kaszinóban egy játékos 250 Ft-ot befizet a banknak, majd egy szabályos kockával egy sorozatot dob. Bármelyik dobás után bejelentheti, hogy nem akar tovább játszani és ilyenkor annyiszor 100 Ft-ot kap, ahányszor addig dobott. Ha viszont bármikor 1-et dob, akkor vége a sorozatának, és semmit se kap a banktól. Mi a játékos számára az optimális stratégia?

8.) Egy dobókockával addig dobunk, amíg kétszer egymásután ugyanazt nem dobjuk. Mennyi a dobások számának várható értéke?

9.) Van két érmém, az egyik igazságos érme, a másik cinkelt, de ránézésre nem tudom őket megkülönböztetni egymástól. A cinkelt érme 3/4 valószínűséggel mutat fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, 1/2 eséllyel az igazságosat, 1/2 eséllyel a cinkeltet, és odaadom Nektek. 30 dobás után el kell döntenetek, melyik érme volt, amit elővettem. Hol húznátok meg a döntési határt? (A 30 dobás közül hány fej az a maximális, amikor még az igazságos érmére tippelnétek?)

10.) Egy osztályban 13 leány és 13 fiú írt matematika dolgozatot.

A leányok érdemjegyei: 5, 5, 5, 5, 5, 4, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1.

A fiúk érdemjegyei: 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 1, 1.

A lányoknak az a véleménye, hogy ők jobban szerepeltek, a fiúk pedig azt hangoztatják, hogy az ő dolgozataik sikerültek jobban. Abban egyetértenek, hogy jól sikerült a dolgozat. A matematika tanáruk szerint "csapnivaló" az eredmény.

a) Számítsuk ki az osztály átlagát.
b) Számítsuk ki a lányok és a fiúk átlagát külön-külön.
c) Mennyi az osztályra vonatkoztatott medián?
d) Határozzuk meg külön a lányok és külön a fiúk eredményeinek mediánját.
e) Mennyi az osztályban a módusz?
f) Határozzuk meg a lányok és a fiúk eredményeinek móduszát.
g) Rövid indoklással támasszuk alá a négy véleményt. Használjunk statisztikai mutatókat az érvelésünkhöz.

11.) Egy iskola igazgatói állására hárman adták be pályázatukat: Sándor (S), József (J) és Benedek (B). A 48 fős tantestület minden tagja felállította az alkalmassági sorrendet. Ezeket összeszámoltuk:

az S, J, B sorrendet 14,
az S, B, J sorrendet 5,
a J, S, B sorrendet 6,
a J, B, S sorrendet 9,
a B, S, J sorrendet 4,
a B, J, S sorrendet 10

ember gondolja megfelelőnek.

a) Írjunk az adatok felhasználásával egy rövid beszédet, amelyben Sándor megköszöni, hogy a tantestület neki szavazott bizalmat, ő a győztes.

b) Írjunk az adatok felhasználásával egy rövid beszédet, amelyben József megköszöni, hogy a tantestület ilyen erősen őt támogatja, és ő lehet az iskola igazgatója.
c) Írjunk az adatok felhasználásával egy rövid beszédet, amelyben Benedek kifejti, hogy miért szükséges a pályázatok alapos elolvasása után új szavazást tartani.

6.2. Megoldások

1.) A feladatot a konkrét valószínűség kiszámítása nélkül is megoldhatjuk. Aki azt tippeli, hogy n-edikre dobok 6-ost, az az első (n-1) dobásnál azért szurkol, hogy ne legyen 6-os, majd azért, hogy most legyen 6-os. Mivel a „most legyen 6-os" kívánság mindenkinél megvan, annál jobb, minél kevesebbszer kell azért szurkolni, hogy ne legyen 6-os, tehát az 1. alkalomra kell tippelni. Ezek után persze a konkrét valószínűségek is felírhatók arra vonatkozólag, hogy milyen eséllyel

dobhatunk először az *n*. dobásra 6-ost: $(\frac{5}{6})^{n-1} \cdot (\frac{1}{6})$

2.) Az ember hajlamos elsőre azt gondolni, hogy semmi értelme gondolkodni, hiszen ugyanannyi fehér és fekete golyó van, így hiába pakolgatjuk őket 50% eséllyel úgyis kivégzés lesz a vége. Igen ám, de a hóhér találomra választja ki melyik dobozba nyúl, feltételezhetjük, hogy kívülről semmi nem látható és érezhető abból, hogy hány vagy milyen golyók vannak a dobozban. Vagyis – elnevezve a dobozokat – 50% eséllyel az A dobozba nyúl, 50% eséllyel a B dobozba nyúl. Ha egyenlően osztjuk el a fehér és a fekete golyókat is, akkor a hóhér értelemszerűen mindkét dobozban 50% eséllyel talál feketét, vagyis a kivégzés végső esélye szintén 50% lesz. Ugyanez a végeredmény, ha az A dobozba csak fehér, a B dobozba csak fekete golyót rakunk, de itt már azon múlik minden, melyik dobozba nyúl a hóhér. Nyilvánvalóan az A dobozban nincs szükség 10 darab fehér golyóra, hogy ezt választva a 100%-os szabadulási valószínűség megmaradjon, elég egy fehér golyó is. A maradék 9 fehér golyót áttehetjük a B dobozba, így ott is jelentősen javultak az esélyeink, közel 50%-osra. A szabadulás esélye pedig:

$0{,}5+0{,}5\cdot\frac{9}{19}\approx 0{,}7368$ vagyis 73,68% lesz. Könnyen belátható, hogy ennél jobb megoldás nincs, hiszen legalább az egyik dobozban ugyanannyi vagy több fekete golyó lesz, mint fehér, így ha a hóhér keze arra téved, akkor legfeljebb 50%-os a szabadulás esélye. Viszont ha pontosan 50% lenne, akkor a fehér és fekete golyók száma megegyezik ebben és nyilván a másik dobozban is, tehát oda nyúlva is csak 50% lenne a szabadulás esélye. Az 50%-nál kisebb legnagyobb előállítható érték maximum 10-10 golyóval pedig éppen a 9/19, és ekkor a másik dobozba nyúlva biztos a szabadulás.

3.) Rögzítsük, hogy Ronaldo melyik csapatba kerül. Ekkor az összes eset: $\binom{21}{10}$ A jó esetek azok, amikor Ronaldo csapatát Ronaldinho nélkül töltjük fel: $\binom{20}{10}$ Így a keresett valószínűség: $\frac{\binom{20}{10}}{\binom{21}{10}}=\frac{11}{21}$ A 2 kapusra nyilván ugyanez vonatkozik.

4.) 90 szám közül 5 számot kell megjelölnünk, ez a visszatevés nélküli mintavételezés vagyis a hipergeometrikus eloszlás. Annak a valószínűsége, hogy pontosan k (=0,1,2,3,4,5) találatunk lesz:

$$P(X=k)=\frac{\binom{85}{5-k}\cdot\binom{5}{k}}{\binom{90}{5}}$$

Behelyettesítéssel ki lehet számolni, hogy $P(X=0)\approx 0{,}74635$; $P(X=1)\approx 0{,}23035$; $P(X=2)\approx 0{,}02247$; $P(X=3)\approx 0{,}00081$; $P(X=4)\approx 0{,}00001$; $P(X=5) = 1 / 43949268 \approx 0{,}000000023$.
Érdemes más lottó játékokkal (pl. 6 a 45-ből vagy 7 a 35-ből) összehasonlítani a találati valószínűségeket, hogy kiderüljön hol van nagyobb esély nyerni.

5.) Összesen 36 féle dobási végeredmény lehetséges, ebből 9 esetben lesz két páratlan szám a kockákon (Béla nyer) és szintén 9 esetben két páros szám, vagyis a maradék 18 esetben nyer Anna. Mivel Béla várhatóan feleannyi esetben nyer, mint Anna, így akkor igazságos, ha ilyen esetben kétszer annyi pénzt kap (pl. 10 Ft), mint Anna kapna a másik esetben (pl. 5 Ft).

6.) Komplementer képzéssel először azt számoljuk ki, hogy mekkora valószínűséggel lesz n dobás mindegyike írás. Ezután megoldjuk a kapott egyenlőtlenséget: $P = 1-(1/2)^n > 0{,}9$. Ebből adódik, hogy legalább 4 dobás kell.

7.) Tegyük fel, hogy akkor hagyjuk abba a játékot, ha k-szor nyertünk. Ekkor $E_k(X) = p\cdot 100k = (5/6)^k\cdot 100k$. Teljes indukcióval bizonyítható (vagy a folytonos kiterjesztés deriválásával meghatározható), hogy ennek a függvénynek a maximuma valahol 5 és 6 között van. Egész értékekre 5 és 6 esetén is 201 a várható nyeremény (ami kisebb 250-nél).

8.) Az elején dobhatunk bármit, ezután mindig, ha az utolsó dobással megegyezőt dobunk, akkor végeztünk. Ezt 1/6 valószínűséggel érhetjük el bármelyik körben (azaz ez egy geometriai eloszlás lesz eggyel eltolva). Így, ha az első dobást nem számolnánk, akkor 1/6 eséllyel egyetlen dobással végzünk, 5/6 eséllyel pedig tovább megyünk a következő dobásra, ahonnan ugyanez újra ismétlődik. Vagyis E = 1/6 + (E+1) · 5/6, ahonnan E = 6. Az első dobással együtt tehát várhatóan 7 dobás kell.

9.) Annak a valószínűsége, hogy cinkelt az érme feltéve, hogy k fejet dobtunk:

$$\frac{\binom{30}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{30-k}}{\binom{30}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{30-k}+\binom{30}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{30-k}}=\frac{3^k}{3^k+2^{30}}\geq\frac{1}{2}$$

így azt kell meghatározni, hogy ez milyen k-ra igaz. Könnyen kiszámolható, hogy k=19-re már az a valószínűbb, hogy a cinkelt érmével dobtunk.

10.) Az egyes eredmények kiszámolása meglehetősen egyértelmű, így csak a végeredményeket írom le.

a) Osztályátlag: 2,96.
b) Lányok átlaga: 3,00. Fiúk átlaga: 2,92.
c) Osztály medián: 3.
d) Lányok mediánja: 2. Fiúk mediánja: 4.
e) Osztály módusz: 4.
f) Lányok módusza: 5. Fiúk módusza: 4.
g) Rövid indoklással támasszuk alá a négy véleményt. Használjunk statisztikai mutatókat az érvelésünkhöz. A lányok érvelése: "Jobbak a statisztikai mutatóink, hiszen az átlagunk és a móduszunk is magasabb, mint a fiúké..."

   A fiúk érvelése: "Nekünk 4-es a mediánunk, míg a lányoké 2-es, sőt a lányok több elégtelen dolgozatot is írtak..."

   Az osztály érvelése: "A statisztikai mutatóink jelentős része magas. Az osztályra vonatkoztatott módusz: 4, az osztályban 13 tanuló (az osztály fele!) négyes, ötös dolgozatot írt..."

   A tanár érvelése: "Az osztályban 13 tanuló (az osztály fele!) kettes vagy rosszabb dolgozatot írt. Az osztály átlaga a 3-at sem éri el ..."

11.) Az előző feladat utolsó kérdéséhez hasonlóan most is arról van szó, hogy ugyanazon adatokat merőben különbözően is magyarázhatunk attól függően, hogy milyen mutatókat választunk (és hogy mi a célunk). Mindez nap, mint a nap a való életben is előfordul, így ezeken a szemléletes példákon keresztül lehet ráébreszteni a diákokat, hogy ne csak egy-egy mutatószámot illetve ahhoz fűzött magyarázatot nézzenek meg (ha például a GDP-növekedésről, az inflációról vagy egyéb statisztikai adatokról van szó), hanem lehetőség szerint a teljes képet. Most pedig lássuk a lehetséges beszédeket!

a) Sándor beszéde: "A számok magukért beszélnek! A tantestületből 19-en tettek az első helyre. Ilyen magas eredményt senki nem ért el a jelöltek közül. A testület akarata egyértelmű. Győztesként mondok köszönetet..."
b) József beszéde: "Az első helyen leadott szavazatok a legértékesebbek, de ne felejtsük el a második és a harmadik helyeket is összeszámolni. Úgy igazságos, ha az első helyek 3, a második helyek 2 a harmadik helyek pedig 1 pontot érnek. Rövid számolás után a számok valóban magukért beszélnek! A 102 ponttal a testület egyértelműen kifejezte akaratát. Most már győztesként mondhatok köszönetet..."
c) Benedek beszéde: "Ne felejtsük el, hogy a tantestület 48 fős. Bármilyen számításokat elvégezhetünk, mindenki láthatja, hogy a testület nem tudott választani. Egyik jelölt sem tudott meggyőző fölényre szert tenni, mindegyik jelölt a testület kb. harmadának bizalmát élvezi. Így nem lehet irányítani egy iskolát. Javaslatom szerint meg kell ismernünk még alaposabban a jelöltek pályázatát, elképzeléseiket a jövőről, majd új szavazást kell tartanunk..."

7. Irodalomjegyzék

[1] Béndek Katalin: Játék a hittanórán? (http://www.lutheran.hu/ujsagok/lelkipasztor/l961213.htm)

[2] Robert Fisher: Tanítsuk gyermekeinket gondolkodni játékokkal! Műszaki Kiadó, Budapest, 2007.

[3] Játékok, fejlesztő játékok, játékgyűjtemények: válogatás a Nyugat-magyarországi Egyetem Savaria Egyetemi Központ Központi Könyvtárának állományából (http://ww.bdf.hu/pszk/Letlthet%20dokumentumok/pedagógiai%20tájékoztatás/bibliográfiák/Játékok.doc)

[4] Szentiványi Tibor: A kreativitás fejlesztése játszással és játékok segítségével. Új Pedagógiai Szemle 2000 július-augusztus (http://www.epa.hu/00000/00035/00040/2000-07-ta-Szentivanyi-Kreativitas.html)

[5] Raymond Smullyan: A hölgy vagy a tigris? Typotex kiadó, Budapest, 2008.

[6] Raymond Smullyan: Alice rejtvényországban. Typotex kiadó, Budapest, 2006.

[7] Raymond Smullyan: Mi a címe ennek a könyvnek? Typotex kiadó, Budapest, 2005.

[8] A klasszikus Geomag játék dobozában található német nyelvű leírás.

[9] Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből. Typotex kiadó, Budapest, 2000.

[10] Pálffy László: Dobókocka történelem (http://old.homoludens.hu/htmlm/cik/8023ko1m.htm)

[11] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok (http://www.komal.hu)

[12] Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola Matematika portálja (http://matek.fazekas.hu)