SZAKDOLGOZAT

Jámbor Dorottya

Matematika tanár

ELTE 2011

Ellenőrzés és értékelés a magyar matematikaoktatásban

SZAKDOLGOZAT

Jámbor Dorottya

Témavezető: dr. Ambrus András

Matematika tanár

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Budapest, 2011

Tartalomjegyzék

1 Bevezetés

Mindenki, aki valamilyen munkát végez, igényli a visszajelzést a környezetétől, hogy tudja, jó úton halad-e. Az iskolában is így vannak ezzel a tanulók, hiszen ellenőrzés és értékelés nélkül nem kapnának visszajelzést arról, hogy a tanulásba fektetett energiájuk elegendő-e, a módszerek, melyeket használnak megfelelőek-e, és a teljesítményük megfelel-e a céljaik eléréséhez. Éppen ezért, az ellenőrzés és értékelés fontos és elengedhetetlen részét alkotja az oktatásnak. Az értékelés során nem csak a diákok kapnak visszacsatolást a munkájukról, hanem minden oktatásban érintett személy, például a szülők, a tanárok, az iskolák vezetői és az oktatást érintő döntéseket hozó szervezetek. Ebből következik, hogy az értékelést többféleképpen lehet és kell értelmezni, attól függően, hogy ki szeretne következtetéseket levonni az értékelés eredményeiből. Ez azt jelenti, hogy az értékelésnek kellőképpen átgondoltnak és megszervezettnek kell lennie, hogy ezeket a funkciókat betöltse.

Kezdő matematikatanárként ezzel a kihívással is szembe kell néznünk, hiszen ki kell alakítanunk egy olyan átgondolt, biztos alapokon álló értékelési és ellenőrzési rendszert, amellyel megfelelő minőségű és mennyiségű információval tudunk szolgálni a diákoknak, szüleiknek, az iskola vezetőségének és persze saját magunknak is.

Ebből a gondolatból kiindulva döntöttem úgy, hogy a szakdolgozatom témájának az ellenőrzést és értékelést választom. Úgy gondolom, hogy a kutatás segíteni fog majd a szakmai előrehaladásban, mert a szakirodalom elolvasásával megismerkedem majd a témával kapcsolatos elméleti háttérrel, így választ kaphatok majd a ’miért’ kezdetű kérdéseimre. A kérdőívet kitöltő matematikatanárok segítségével pedig a ’hogyan’ kezdetű kérdésekre születhetnek majd válaszok, mivel ők már több éve tanítanak, ezért biztosan már bevett, jól bejáratott szokásaik vannak az ellenőrzéssel és értékeléssel kapcsolatban. Végül a szakdolgozatom harmadik részében arra keresem majd a választ, hogy vajon a kétszintű érettségi betölti-e funkcióját a középiskolai matematika-tanulmányok lezárásában, az előre lefektetett követelményeknek valamint a tartalmi leírásoknak megfelel-e, a feladatok pontozása arányos-e a feladatba fektetett munkával és megfelelő visszajelzést ad-e a diákok tudásáról.

Így a szakdolgozatom megírásával egy átfogó képet kaphatok majd az ellenőrzés és értékelés miértjeiről, hogyanjairól és arról, hogy a matematika érettségiben hogyan érvényesülnek a szakirodalomban és a vizsgaleírásban leírt alapelvek és követelmények.

2 Irodalmi áttekintés

2.1 Az értékelés funkciói

Golnhofer (2003) kiemelten foglalkozott Tyler értékelési modelljével, amely alapvető elemei a célok kitűzése, a tanulási tapasztalatok és az értékelés. Szerinte az oktatási program céljait kell elsődlegesen lefektetni, egyértelműen és átfogóan megfogalmazni, majd ezek fényében kell értékelni a tanuló teljesítményeket. Az értékelés nem csak a tervezésben, hanem a folyamat lebonyolításában és a folyamat befejező szakaszában nyújthat segítséget. Az értékelés során a célok elérését és a célok hatásait is vizsgálni kell a nevelési-oktatási folyamatban.

Golnhofer Erzsébet (2003) megfogalmazta, hogy a pedagógiai értékelésnek három fő funkciónak kell eleget tennie, ezek pedig a következők:

- minősítő funkció
- motiváló funkció
- szelektáló funkció

Talán a három közül a legismertebb és leghangsúlyosabb a minősítő funkció. Ezzel egyetért Fóris-Ferenczi Rita (2008), aki azt is hangsúlyozza, hogy fontos, hogy a minősítés során mihez viszonyítjuk a diákok teljesítményét. Az ellenőrzéskor a tanár kiválasztja az értékelés eszközét, ezzel adatot gyűjtve a diákok teljesítményéről, majd minősíti ezeket a teljesítményéket. Mind a tanár, mind a diákok számára egyértelműnek kell lennie a viszonyítás alapjának, hogy meg tudják ítélni, hogy az adott teljesítmény ahhoz képest hol helyezkedik el a skálán. Kétféle módszer alakult ki a viszonyítás alapjának meghatározására: az egyik a kritérium-orientált értékelés, amely során a pedagógus a diákok teljesítményét egy előre, a tantervben lefektetett követelményrendszerhez viszonyítja; a másik pedig a norma-orientált értékelés, amelyben a tanár a diákok egyéni teljesítményét a csoport átlagteljesítményéhez viszonyítja.

Az értékelés második funkciója a motiváció. Ezt Fóris-Ferenczi Rita (2008) összekapcsolja a minősítő funkcióval, hiszen a diákok teljesítményének értékelésével nemcsak minősít a tanár, hanem egyben motiválja is a tanulókat. Ezzel egy nevelési módszer van a pedagógus kezében, hiszen így egy külső szabályozó eszközzel tud elismerni, jutalmazni, büntetni és elutasítani. A szerző kiemeli, hogy az értékelés során minél inkább minimalizálni kell a kudarcjelzést, az elismerésvágyat igyekezni kell kielégíteni, de nem túlzásba vinni. Ezzel elérheti a tanár, hogy a tanulókban egy optimális sikervágy és egy optimális kudarcfélelem alakuljon ki. Fontosnak tartja még, hogy a legoptimálisabb eset, ha a pedagógus tisztában van a családi pedagógiai kultúrával, így könnyebb megtalálnia a tanulónak legmegfelelőbb motiválási módszert. Meg kell találni az egyensúlyt a minősítés és a motiváció kapcsolatában, hogy a diák teljesítményét fokozni lehessen, viszont a külső szabályozást nem szabad sem túlhangsúlyozni, sem elhanyagolni, így egyénre szabottan hatékony lehet.

A harmadik funkció a szelekció, melyet Fóris-Ferenczi (2008) szintén a minősítéssel összevetve vizsgál. A magyar oktatási rendszerben a szelekció elkerülhetetlen jelenség, hiszen jelen van az oktatás minden színterén: a diákok évről évre történő haladásánál, a következő iskolafokra való lépésénél, a más iskolába vagy magasabb fokú iskolába való felvételénél. Megfogalmazza, hogy az osztályzatok egyre inkább szelektáló funkciót töltenek be és ez a funkció napjainkban még inkább felerősödött, hiszen a főiskolára vagy egyetemre való jelentkezéskor az érettségin és a középiskola utolsó két évében szerzett jegyek alapján döntenek a diákok felvételéről. A szerző három szempontot vizsgál a minősítés szelektív funkciójával kapcsolatban: az iskola szelekciós szerepét; azt, hogy ezt a szerepet az osztályzással éri el az iskola; és végül azt, hogy ezzel a szelekcióval az iskola befolyásolja a diákok pályaorientációját is. Tehát valóban minden téren jelen van a szelekció a diákok életében.

További funkciója az értékelésnek a visszacsatolás. Ebben az esetben a pedagógiai értékelés tárgya nem csupán a tanuló teljesítménye, hanem az iskola dolgozóinak munkája, az oktatási rendszer, a tantervek, programok, eszközök, stb.. Ezzel a visszacsatoló funkcióval az értékelés hatékonyságnövelő szerepet tölthet be, ha az értékelés eredményeit megfelelően értékelik, kezelik az érintettek. Ennek a funkciónak a kifejlődésében nagy szerepet játszottak a következő tényezők: helyi tervezés, helyi döntések, iskolák autonómiája, tömegoktatás színvonalának növelése. Ezt elősegítik a tudásszint-mérések és monitorvizsgálatok, melyek iskolától függetlenek, így objektív visszajelzést adnak az iskolában folyó oktatásról.

2.2 Az értékelés fajtái

Scriven (1967) szerint két fajtája van, majd később Bloom et al. (1975) kibővítette az értékelés fajtáit még eggyel, így az értékelésnek három fajtáját különböztetjük meg:

diagnosztikus, formatív és szummatív értékelés. Az utolsó értékelési fajta a legelterjedtebb, hiszen ez egy folyamatot lezáró, a folyamat során történt munkát összegző értékelés. A tanár megállapítja a tanuló teljesítményének szintjét, majd ezután minősíti azt. A félév végi és az év végi értékelésnél jut nagy szerep ennek a fajtának, hiszen ilyenkor szelektálja a tanulókat, legyen szó akár felsőbb osztályba való lépésről, vagy továbbtanulásról. Egyszóval a szummatív értékelés szelektáló funkciót tölt be. Több kritika éri ezt az értékelési fajtát, bár a pedagógusok ezt használják leggyakrabban. Fóris-Ferenczi (2008) két okot hoz fel a szummatív értékelés pontatlanságára:

- Mivel a szummatív értékelés kritériumai nincsenek tisztázva és pontosan lefektetve, nem biztosíthatnak megfelelő alapot az objektív szelekció számára.
- A szummatív értékelés kifejezőeszköze, az osztályzat, nem biztosít lehetőséget a teljesítmény árnyalt és pontos minősítésére.

Golnhofer (2003) és Fóris-Ferenczi (2008) egyetértenek abban, hogy a szummatív értékelés elengedhetetlen az oktatás során, szelektáló funkciója miatt, de mindketten hangsúlyozzák, hogy a szerepét jól el kell különíteni az értékelés többi fajtájától, mert ez valóban egy hosszabb folyamat lezárására, összegzésére alkalmas.

Szintén mindkét szerző egyetért abban, hogy az értékelést színesítené, és még árnyaltabbá tenné, ha mindhárom értékelési fajtát használnák a pedagógusok a megfelelő időben, helyzetben és arányban. Viszont a formatív és diagnosztikus értékelési mód kevés szerepet kap az iskolákban.

Golnhofer (2003) és Fóris-Ferenczi (2008) szerint a formatív értékelési fajta folyamatos használata az oktatás során segíti a tanulási sikerek megerősítését és a tanulási nehézségek feltárását, így alapot képez a korrekcióhoz, ha szükség van rá. A formatív értékelés nem minősíti a teljesítményt, hanem segíti és formálja azt, és egyben motiváló szerepet is betölt. Leggyakrabban nem jeggyel zárják az értékelést, hanem szöveges vagy írásos visszajelzésekkel, melyek segítik a tanulót a továbbhaladásban. Fóris-Ferenczi (2008) szerint probléma lehet a formatív értékeléssel, hogy a pedagógus vagy az aktívabb, vagy pedig a problémásabb tanulókat tünteti ki értékelő figyelmével, így a csendesebb visszahúzódóbb diákok nem részesülnek formatív értékelésben.

A harmadik értékelési fajta a diagnosztikus értékelés, amely során a pedagógusok kielemzik a fennálló helyzetet és ezzel együtt előkészítik a tantervben foglalt döntéseket. Golnhofer (2003) szerint a diagnosztikus értékelés segít információt szerezni a döntéshozóknak a beavatkozások, fejlesztések előtt és egyben a besorolási döntések meghozatalában is segítséget nyújt. Fóris-Ferenczi (2008) egyetért az előbbi szerző gondolataival, miszerint a diagnosztikus értékelés elősegíti a tantervben foglalt célok és az elért teljesítmény összevetését. Az írásból kiderül, hogy az ilyen típusú értékelés a tanulók diagnosztizálására is megfelelő eszköz, mind a személyiségükre, mind a tudásszintjükre nézve.

Fóris-Ferenczi (2008) felbontja a diagnosztikus értékelést három szintre az értékelés időpontja szerint: tanév eleji, évközi és év végi diagnosztikus értékelésre.

- A tanév eleji diagnosztikus vizsgálat egyrészt jelzést ad a tanulóknak, hogy hol és milyen típusú elmaradásai vannak a követelményekhez képest. Másrészt segítséget nyújt a pedagógusnak a tanulók számára legmegfelelőbb oktatási program kiválasztásában és megtervezésében. Harmadrészt segít megállapítani, hogy a tervezett program reális követelményeket támaszt-e a tanulókkal szemben, azaz megvannak-e a megfelelő előismereteik az oktatási programhoz.
- Az évközi vizsgálat során a tanulók visszajelzést kapnak eddigi haladásukról, sikereikről és hiányosságaikról, így segítve őket változtatni az eddigi tanulási stratégiájukon, vagy éppen megerősíteni azokat. Ez a vizsgálat a tanárnak is visszajelzést ad arról, hogy kell-e és ha kell, akkor miben kell változtatnia a tanítási módszerein, stílusán. Végül információt ad arról, hogy a követelmények teljesíthetőek-e, a tananyag tanulható-e és hogy a módszerek használhatóak-e. Az évközi diagnosztikus vizsgálat különösen nagy szerepet kap, amikor kísérleti programok és tantervek értékeléséről van szó.
- Az év végi diagnosztikus vizsgálat eredményeképpen a tanulók visszajelzést kapnak a tanév során nyújtott teljesítményükről, így szummatív értékelésnek is megfelel az effajta értékelés. Viszont sokkal árnyaltabb, részletesebb információkat ad a diákoknak. A tanév végi diagnosztikus értékelés a tanár számára is ad egy képet arról, hogy a tananyag témaköreit milyen mértékben sikerült elsajátítania a tanulóknak, milyen módszerek voltak megfelelőek és

min kell változtatnia. Ez a visszajelzés az új tantervekről, tankönyvekről és módszerekről is átfogó, részletes információkat nyújt.

2.3 Az értékelés folyamata

Több szerző is egyetért abban, hogy az értékelés folyamata négy különböző fázisból áll (Golnhofer 2003, Fóris-Ferenczi 2008, Csala Istvánné Dr. Ranschburg 2002). Az értékelés lépései a következők:

1. Az értékelési probléma megértése, az értékelés megtervezése:
    a) az értékelési célok megfogalmazása
    b) az információ-, illetve adatgyűjtés módszereinek, eszközeinek kiválasztása, ha szükséges, akkor kifejlesztése
2. Információ-, azaz adatgyűjtés
3. Az adatok elemzése, értelmezése
4. Minősítések, döntések meghozatala, visszajelentés

Ebből a felsorolásból is kiderül, hogy az értékelésnek egy jól megtervezett, jól átgondolt folyamatnak kell lennie, ami azt jelenti, hogy az értékelés minden lépését előre alaposan át kell gondolni, és véghez kell vinni. Az értékelés tervezésekor el kell dönteni, hogy szummatív, formatív vagy diagnosztikus értékelést szeretnénk kivitelezni, hiszen ez meghatározza az értékelés célját. A módszerek kiválasztásánál fontos szempont az adatok kezelhetősége és az adatok elemzésének folyamata. A visszajelentés készítéséhez szintén előre el kell dönteni, hogy mihez viszonyítja a pedagógus a teljesítményeket. Fóris-Ferenczi (2008, 146) négy csoportba osztja az értékeléseket aszerint, hogy mi képezi a viszonyítás alapját. Ezek a következők: leíró értékelés, normatív értékelés, kritériumorientált értékelés, standardra vonatkoztatott értékelés. Az imént említett értékelésfajták meghatározzák az értékelésben használt eszközöket és az adatok értelmezését, ezért kell ezek közül választani a tervezés fázisában.

Golnhofer (2003) hangsúlyozza, hogy a mérésnek három mérésmetodológiai követelménynek meg kell felelnie, ezek pedig a következők: objektivitás, érvényesség (validitás) és megbízhatóság (reliabilitás). Ha egy értékelés objektív, akkor ez biztosítja, hogy a minősítése tárgyilagos és nem szubjektív. A mérés érvényessége arra utal, hogy az értékelés során azt mérjük, amit mérni akartunk. A megbízhatóság pedig biztosítja, hogy egy tulajdonság megismételt mérése ugyanazt az eredményt adja.

Abban egyetértenek a szerzők, hogy a legideálisabb eset az értékelésben, ha folyamatosan és változatosan történik, hiszen így a tanulók sűrűn kapnak visszajelzést, és van idejük a módszereiken változtatni, ha arra szükség van. Golnhofer (2003) kiemeli, hogy minden pedagógusnak meg kell találnia a saját értékelő szerepfelfogását, a pedagógus szerepfelfogásához igazodva.

2.4 Külső és belső értékelés

Golnhofer (2003) különbséget tesz külső és belső értékelés között, és ezt a különbséget kétféle megközelítésből is el lehet érni: az egyik az értékelő személyektől függ, a másik pedig az értékelés céljától. Akkor tekintünk egy értékelést az értékelő személyétől függően külsőnek, ha az értékelők nem vettek részt az oktatási folyamat lebonyolításában; és akkor belső, ha az értékelők jelen voltak a nevelés-oktatás folyamatában. A célok szerinti felosztást tekintve a felosztás alapja, hogy az értékelés iskolán vagy kisebb rendszeren belül történik, vagy az értékelés egy nagyobb, magasabb rendszer elvárásai alapján történik meg.

2.5 A kompetenciamérések és a PISA felmérés

A kompetenciamérések és a PISA (Programme for International Student Assessment) felmérés mindenképpen a külső mérések csoportjába sorolandó, hiszen nem iskolán vagy kisebb rendszeren belül történnek a mérések, hanem az előbbi egy országos szintű felmérés, az utóbbi pedig egy nemzetközi mérés. A Nemzeti Alaptanterv már az első verziójától kezdve törekszik arra, hogy bevezesse és megalapozza az Európai Unió által javasolt kulcskompetenciák rendszerét a magyar oktatásban (Vass, 2008). Ezen kompetenciák elsajátításának ellenőrzésére vezették be a kompetenciaméréseket.

A PISA felmérések a 15 éves korosztály tudását vizsgálják, de nem az iskolai tananyagot kérik számon, hanem azt mérik, hogy a tanulók a mindennapi életben hogyan tudják hasznosítani tudásukat, hogyan tudnak befogadni és alkalmazni új ismereteket. Háromévente megismétlik a méréseket, három tudásterületen: szövegértés, matematika, természettudomány. A felmérésekben egyre több ország vesz részt, így az értékelés még tágabb spektrumú. A matematikai kultúra, melyet a PISA felmérések mérnek a következők (Csíkos,2005):

- Az egyén legyen képes arra, hogy felismerje és megértse a matematika szerepét a világban.
- Az egyén használja matematikai tudását az életben felmerülő szükségleteknek megfelelően.
- A matematika kultúrának több szintje van, attól függően, hogy a matematikai tudás felhasználása során a tanuló milyen szintű elemzésre, következtetéses gondolkodásra és kommunikációra képes.

Ebből a felsorolásból is látszik, hogy a felméréshez nem csupán tanórai matematikahasználatra van szükség, hanem az órán tanult matematikát meg kell találni az életszerű feladatokban. Ahogy Vári et al. (2002) írja, a PISA felmérések azt mérik, hogy mennyire, milyen mértékben tudják a tanulók alkalmazni, hasznosítani a tudásukat a való életben. Vári et al. (2002) összegyűjtötte, hogy milyen matematikai képességeket mérnek a PISA felmérés segítségével: a matematikai gondolkodási készséget; a matematikai érvelési készséget; a modellezési készséget; a feladatmegfogalmazó és feladatmegoldó készséget; az ábrázolási készséget; a jelképes, formális és technikai készséget; a kommunikáció készséget; és a segédeszköz-használati készséget.

Somfai (2002) felhívja a figyelmet arra a tényre, hogy Magyarország az eddigi PISA vizsgálatok során a nemzetközi átlagnál szignifikánsabban gyengébben teljesített, ami arra enged következtetni, hogy a hazai matematikaoktatás az ilyen típusú használati célnak nem tesz eleget. Ebből az következik, hogy az oktatás alapjait kell megváltoztatni, gyakorlatorientáltabbá kell tenni a matematikaoktatást, és az új céloknak megfelelően kell megreformálni a matematikai teljesítmények értékelését is.

2.6 Értékelés a matematikaoktatásban

A fent leírt tudnivalók érvényesek a matematikai értékelésre is, de érdemes megvizsgálni, hogy a matematikadidaktikával foglalkozó szakirodalmak hogyan értelmezik a pedagógiai értékelést a matematikaoktatásban. Több szerző is egyetért abban, hogy a matematikai értékelés célja az, hogy visszajelzést adjon a tanulók teljesítményéről, mind a diákoknak, mind a tanárnak (Izard 1993, Swan 1993, Manon 1995, Ambrus 1995). De Lange (1995) hangsúlyozza, hogy elmúlt évek alatt létrejött változások a matematikaoktatásban, az értékelésben is változtatást igényelnek. A szerző felsorolja az oktatás változó feltételeit, melyek a következők:

- az embereknek tudniuk kell használni a számítógépeket
- jelentős változások mentek végbe a matematika természetében és használatában
- a számítógépek és számológépek fejlődése is változtatott a matematikán
- demográfiai változások mentek végbe, így a munkahely-igények is megváltoztak
- a tanulást már nem passzív információ-befogadásnak tekintjük
- a diákok tudásszintjét a világ többi országának tanulóinak tudásszintjére kell hozni

De Lange (1995) szerint a matematikaoktatást újra kell gondolni a megváltozott feltételek mellett, hogy az megfeleljen a megváltozott céloknak is: intelligens lakosok nevelése (matematikai műveltség), munkára és felsőbb szintű oktatásra való felkészítés, a matematika megértése és gyakorlati használata. Ezek a változó feltételek és célok az elméletek megváltozásához vezettek, melyek az úgy nevezett 'realisztikus matematikaoktatás' elméletei. Eszerint a tanulóknak újra kell konstruálniuk a matematikai tudást valósághű problémákon keresztül, és a tanulóknak megfelelő mennyiségű időt kell kapniuk, hogy a saját tempójukban haladhassanak a fogalomépítésben. Ezek a változások vezettek a matematikai értékelés megváltozásához.

De Lange (1995) lefektette az értékelés alapelveit, melyeket Ambrus (1995) is felhasznált. Eszerint az értékelés folyamán a pedagógusnak lehetőséget kell adnia a tanulóknak, hogy megmutathassák, hogy mit tudnak, és nem azt, hogy mit nem. Ezzel a felvetéssel Swan (1993) is egyetért, hiszen így demonstrálhatják a diákok, hogy mi az, amit tudnak és értenek, és mire képesek a tudásukkal. A következő alapelv arról szól, hogy az értékelésnek a matematikaoktatás céljait kell megvalósítania. A pontozásra is vonatkozik egy alapelv: az objektív pontozhatóság nem határozza meg az értékelés minőségét, viszont az értékelés során a praktikus ellenőrzési eszközök használata javasolt. Az utolsó alapelv a komplexebb tanulási eredmények mérésére vonatkozik, mint például a megértés, interpretáció, diszkusszió, stb..

2.7 Értékelési eszközök

Abban mindegyik felhasznált szakirodalom szerzője egyetért, hogy a legideálisabb eset, ha többféle értékelési módszert, eszközt használnak a matematikatanárok, viszont megtalálva közöttük a megfelelő egyensúlyt. Ambrus (1995), Izard (1993) és Manon (1995) egyetért abban, hogy az értékelés forrásai a következők lehetnek: megfigyelések, kommunikáció, tanulói munkák. Mindhárom szerző fontosnak tartja, hogy egy tanulói teljesítmény ellenőrzése és értékelése úgy szülessen, hogy a pedagógus legalább ezt a három forrást használja az értékelés során. Mégis a legfontosabb mindhárom technikánál, hogy a matematikatanárnak előre át kell gondolnia az értékelés folyamatát, és előre el kell döntenie, mit és hogyan fog értékelni. A megfigyelések történhetnek, önálló, pár- vagy csoportmunka folyamata közben, a kommunikáció magában foglalhatja a problémák elmagyarázását, a házi feladat bemutatását, a megoldási ötlet vázlatát, stb.. A tanulói munkák nagy sokrétűek lehetnek, például önálló tanulói beszámolók, tesztek, írásbeli ellenőrzések, dolgozatok, röpdolgozatok, vizsgák. A tanulói munkák értékelése felveti a pontozás problémáját, mellyel Ambrus (1995) is foglalkozik. A szerző szerint több hangsúlyt kellene fektetni a gondolkodási folyamatok értékelésére, ezt tükrözik a nemzetközi felmérések eredményei is. A pontozásban kétféle módszer terjedt el, ezek pedig az analitikus és holisztikus pontozási technikák. Az analitikus pontozás lehetővé teszi, hogy a tanár a feladatmegoldás különböző részeiben nyújtott teljesítményt külön értékelje. Problémát okozhat a részpontok adása, ezért igyekezni kell minden részletet előre tisztázni. A másik pontozási módszer a feladat megoldását, mint egészet értékeli.

Swan (1993, 200) szerint az értékelési eszközök kiválasztásakor vagy fejlesztésekor a tanárnak hat fontos dimenziót kell észben tartania:

1. a teljesítményt, amit mérni szeretne
2. a megfelelő értékelési módszert, eszközt
3. a feladat nyitottságának mértékét
4. az önállóság és rugalmasság mértékét, ami a feladat megoldásához szükséges

5. a feladat koherenciáját és határait
6. a feladat kontextusát

Az egyes pont arra utal, hogy a tanuló által ismert és használt tények és készségek, fogalmi rendszerek, általános feladatmegoldó módszerek és eszközök közül a tanárnak ki kell választania azokat, amelyeket mérni szeretne. A megfelelő értékelési módszer és eszköz kiválasztása azt jelenti, hogy a tanárnak el kell döntenie, hogy a céljai eléréséhez, melyik módszer a legalkalmasabb, például: egyéni, pár- vagy csoportmunka; írásbeli vagy szóbeli munka, stb.. A feladat nyitottsága kétszintű lehet: az egyik szint, hogy a feladat megoldásához több megoldási módszer létezik, és ezek közül a tanulók kiválaszthatják azt, amelyikkel dolgozni szeretnének, vagy csak egy megoldási módszer elfogadható; a másik szint pedig arra utal, hogy a feladatnak több elfogadható megoldása van, vagy csak egy. Az önállóság és rugalmasság kérdése a feladatban több tényezőtől is függ, ilyen például a tanulók kora és a feladat típusa. Ha a feladat nagyobb önállóságot és rugalmasságot igényel a diákoktól, akkor célszerű a feladatot úgy alakítani, hogy kevesebb technikai követelményt támasszon a tanulók elé. A feladat koherenciája és határai arra utalnak, hogy a feladat milyen hosszú, mennyi részfeladatot tartalmaz, és azok mennyire függenek össze. Swan (1993) különbséget tesz a feladatok között a hosszuk alapján: rövid feladatok, melyek megoldásához az időkeret pár másodperctől 20 percig terjed; hosszú feladatok, melyek megoldása húsz perctől két óráig terjedhet; összetett feladatok, melyek megoldásához a tanulóknak több óra, esetleg több hét szükséges. A feladat kontextusa szintén alapvető kérdés a matematikai feladatoknál, ezzel egyetért De Lange (1995) is. Szerintük különbséget kell tenni a tisztán matematikai feladatok, a hétköznapi külsőbe bújtatott matematikai feladatok, más szóval 'szöveges feladatok', és a valóságos matematikai feladatok között. De Lange (1995) szerint a mai probléma-orientált matematikaoktatásban a legjobb módszer, ha a matematikai problémákat kontextusba helyezzük, így a matematikai fogalomalkotástól, a modellalkotáson keresztül, eljutunk a matematika használhatóságáig, specifikus képességek használatával és gyakorlásával. Ezzel összhangban vannak Swan (1993) állításai, miszerint a tisztán matematikai feladatok arról szólnak, hogy a tanulók felfedezzék a matematika szerkezetét. Majd a hétköznapi köntösbe bújtatott feladatok segítségével illusztrálni tudják a matematikai elméleteket. Végül a tanulók a valóságos feladatok segítségével, matematikai és nem-matematikai képességek, illetve készségek használatával a világ jelenségeit tudják felfedezni és megérteni.

Az értékeléshez használt feladatok nehézségi foka eltérő lehet, ebben megegyezik Ambrus (1995) és de Lange (1995) véleménye is. Abban is egyetértenek, hogy három szintet különíthetünk el, de ezek között nem húzódik éles határvonal, hiszen minden a tanítási szituációtól, a tankönyvektől, a korábbi értékelési eszközöktől, módszerektől, a felkészüléstől, és a diákok életkorától függ. Az alapszintű feladatok a mechanikus alapkészségeket mérik, viszont de Lange (1995) szerint ebbe csoportba beleillik néhány többlépéses valóságos probléma az életből. A középszintre jellemző a matematikai fogalmak és jelenségek közötti kapcsolatok teremtése, integrálása és a problémamegoldás. A magasabb szintű feladatok matematikai gondolkodást, okfejtést, matematikai kommunikációt, kritikus hozzáállást, interpretációt, reflexiót, kreativitást, általánosítást és matematizálást mérnek.

Bruder (1981, 1985) öt paramétert ajánl, melyek meghatározzák a feladatok nehézségének, összetettségének fokát: struktúra paraméter, kidolgozási paraméter, ismertségi fok, komplexitási fok, megoldási mód és eredmény meghatározottsági foka. A struktúra paraméter magában foglalja a feladat szövegezését és szemléltetését, a megoldási öletek megtalálásához szükséges tevékenységek mennyiségét és minőségét. A kidolgozási paraméter a megoldási eszközök bonyolultságára utal. Az ismertségi paraméter tartalmazza a feladat megoldásához szükséges ismeretek mennyiségét és a feladattípus ismertségét. A komplexitási paraméter a kidolgozandó részproblémák, az elvégzendő műveletek számától és minőségétől függ. Végül az utolsó paraméter a feladat nyíltságára utal: egy vagy több elfogadható megoldási mód és megoldás létezik.

Egy feladat megadásának is többféle módja van, írja Ambrus (1995), amelyet a feladatnak céljától függően kell kiválasztani. Az első mód, amelyet tárgyal a szemléletesség. Ez magában foglalja, hogy a feladathoz tartozik-e ábra vagy sem, illetve hogy a feladat szövegében szereplő fogalmak és szituációk ismertek-e a tanulók számára. A második megadási szempont a feladatok szövegének teljessége, egyértelműsége. Ez arra utal, hogy a feladat szövegének elegendő és egyértelmű információkat kell tartalmaznia a tanulók számára, hogy a feladat szövegezése ne okozzon problémát a megoldás folyamán. A harmadik szempont a felesleges adatok szerepeltetése. Ez a szempont magában foglalja, hogy a feladat szövege világosan legyen megfogalmazva, egyszerű, rövid mondatokkal, és a tanulók életkorának megfelelő szóhasználattal. Más szóval nem szabad összetett, bonyolult mondatokat és ismeretlen szavakat használni a feladat szövegezésekor, mert az problémát okozhat a tanulóknak.

2.8 Tanulói tevékenységek az értékelés során

Az értékelés fent említett folyamata szerint a pedagógus lefekteti az értékelés célját, módszereit, kiválasztva vagy kifejlesztve a céloknak megfelelő értékelési eszközt a hat dimenzió segítségével, majd a következő fokozat az adatok begyűjtése és elemzése. Ebben a részben a tanulói tevékenységek elemzése következik, melyek alapul szolgálnak a tanulóktól begyűjtött információk elemzéséhez.

Ambrus (1995) négy csoportba sorolja a tanulói tevékenységeket: reprodukció, rekonstrukció, transzfer és problémamegoldás. Ha közelebbről megvizsgáljuk ezek a fogalmakat, kiderül, hogy a diákok a legjobb esetben mind a négy fázison keresztülmennek, ezért nem mindegy, hogy a tanulási folyamatban, mikor melyik tanulói tevékenységet ellenőrizzük, illetve értékeljük. A reprodukció azt jelenti, hogy a diákok a megtanult ismereteiket változatlan formában adják vissza. A rekonstrukció szakaszában a tanár a reprodukció során elsajátított tartalomra kérdez rá, de megváltozott formában. A transzfer fázisban egy már megtanult ismeretet kell a tanulóknak átültetni egy új, ismeretlen szituációra. A problémamegoldás során a diákok olyan problémával találkoznak, amelynek megoldásához nem áll rendelkezésükre tanult ismeret.

3 Helyi gyakorlat – Matematikatanárok az értékelésről

Ebben a fejezetben azokra a kérdésekre keresem a választ, hogy ma a matematikatanárok milyen módszereket használnak diákjaik teljesítményének értékelésére; milyen tág az értékelési eszközeik skálája; fontosnak tartják-e a szóbeli értékelést és adnak-e a jegyeken kívül egyéb visszajelzést diákjaiknak.

Somfai (2003) készített egy felmérést a matematikatanárok körében, hogy milyen értékelési eljárásokat használnak, ezeket kellett osztályozniuk gyakoriságuk szerint. Ezek közül a leggyakoribb tanulói produktumok, melyek alapján értékelik tanítványaik teljesítményét a következők voltak: dolgozat, röpdolgozat; házi dolgozat, önálló munka; szóbeli felelet; teszt. A legritkább módszer, amit használnak a gyakorlati feladat, projektmunka és a számítógépes feladatok. Ebből a kutatásból kiderül, hogy ma a matematikatanárok még mindig ragaszkodnak a dolgozatokhoz, és inkább kerülik a projektmunkát, csoportmunkát és a számítógépes feladatok adta lehetőségeket.

3.1 Kérdőívelemzés

A tanári kérdőív, melyet összeállítottam, 15 kérdésből áll. Ezek között van feleletválasztós, igen-nem típusú és hosszabb szöveges választ igénylő kérdés is. A kérdőív a témát érintő szakirodalom alapján készült és a kitöltők ellenőrzési és értékelési szokásait kutatja, valamint a véleményüket, hozzáállásukat a témához. A kérdőív rákérdez a kitöltők életkorára és végzettségére, mindezt feleletválasztós formában. A hosszabb választ kívánó kérdések témájukban érintik az ellenőrzés és értékelés során használt módszereket, típusfeladatokat, az ellenőrzés céljait és gyakoriságát, a szöveges visszajelzést, a súlyozást, a házi feladatot és annak ellenőrzését, végül a szóbeli feleletet és az emelt szintű érettségi szóbeli részét.

A kérdőívet 6 gyakorló matematika szakos tanár töltötte ki, az ő válaszaik alapján szeretnék különböző következtetéseket levonni a témával kapcsolatban. A válaszadók fele egyetemet, másik fele főiskolát végzett. Ebből következik, hogy a kérdőívet kitöltők közül három fő az emelt szintű érettségi szóbeli részére vonatkozó kérdésre nem tud válaszolni, hiszen nem foglalkoznak a témával érdemben. A válaszadók korukat tekintve három csoportba sorolhatók: az első csoportba két ember tartozik, akik 26 és 35 év közöttiek, a második csoportba tartozó két fő 46 és

55 év közötti, végül a harmadik csoport két tagja 56 és 65 év közötti korcsoportba sorolható.

Módszerek

Az ellenőrzés és értékelés módszereit érintő kérdésre a válaszok többségében a szokásos módszerek jelentek meg: röpdolgozat, témazáró dolgozat, órai munka, csoportmunka és az önálló feladat megoldása. Kevesebb hangsúlyt kapott a szóbeli felelet, három válaszadónál jelent meg ez a válasz. Azok a módszerek, amelyek legritkábban fordultak elő a válaszok között a következők voltak: projektfeladat, házi feladat, házi dolgozat, pármunka. Az összes kérdőívet kitöltő tanár közül egy használ csak számítógépes feladatokat diákjai ellenőrzésére és értékelésére.

Ebből a kérdésből levonható az a következtetés, hogy nem kell mindenáron ragaszkodni a régi, jól bevált módszerekhez, hanem nyitni kell az új dolgok felé is. Ezzel egyetértenek a témát érintő szakirodalmak szerző is: minél több eszközt használ a matematika tanár a diákjai ellenőrzésére és értékelésére, annál árnyaltabb képet kap a haladásukról, fejlődésükről és hiányosságaikról. Ezzel hatékonyabban tudja módszereit a tanulói igényekhez igazítani, így sokkal nagyobb sikereket érhetnek el a közös munkában.

Feladatok típusai

Erre a kérdésre majdnem az összes tanár válasza megegyezik. A válaszadók többsége hangsúlyozta, hogy az értékelés célja határozza meg a használt feladatok típusát. Minden kérdőívet kitöltő pedagógus reprodukáló és új ötletet igénylő feladatokat is használ az ellenőrzésre. Egy válaszadó használ teszteket és kiegészítős feladatokat is a dolgozatokban.

A válaszok tanulsága az, hogy a matematikatanárok többsége reprodukáló, azaz olyan feladatokat használ a dolgozatban, amelyekhez hasonlóak már felmerültek a gyakorlás során; a másik népszerű feladat pedig az új ötletet igénylő. A szakirodalomból az is kiderült, hogy érdemes többféle típusú feladatot használni az értékelés során, a már fent említett okokból. Pozitívum, hogy a kitöltők között van olyan pedagógus is, aki nem csak a már említett feladattípusokat használja az ellenőrzésre, hanem azokon kívül más fajta feladatokat is alkalmaz.

Az értékelés célja

Az összes válaszadó egyetért abban, hogy ellenőrzésének és értékelésének céljai között szerepel mindhárom fő cél: szummatív, formatív és diagnosztikus.

A válaszokból kiderült, hogy pontosabban kellett volna rákérdezni a célokra, esetleg példát kellett volna kérni a különböző célú értékelésekre, hiszen így a kérdés nem ad releváns visszajelzést a célokról. A szakirodalom ebben a kérdésben szintén azt hangsúlyozza, hogy mindhárom értékelési célnak jelen kell lennie a oktatásban, de lényeges szempont, hogy tisztában kell lenni azzal, hogy mikor melyiket érdemes használni.

Az értékelés gyakorisága

Az erre a kérdésre adott válaszok eléggé szélsőségesek, hiszen született olyan válasz is, hogy a válaszadó minden órán értékel, viszont a másik szélsőséges válasz a havonta 1 jegy. A többi válasz nagyjából egybecseng: anyagrészek közben és végén, hetente egyszer, fontosabb anyagrészek után.

Az eltérő válaszok oka az lehetett, hogy a válaszadók gondolataiban nem különül el az ellenőrzés és értékelés közötti különbség. Értékelésnek tekinthető az, ha a tanár óra közben vagy végén pár szót szól az adott tanuló órai teljesítményéről vagy értékeli az ellenőrzés során nyújtott munkáját. Ebben az esetben az értékelés fogalma inkább a számonkéréssel azonosult, mely a jegyszerzés módja. Ez a két fogalom cserélődhetett fel, talán a kérdést kellett volna világosabban feltenni és a válaszok nem lettek volna ennyire szerteágazók.

A visszajelzés formája

Az összes válaszadó ad visszajelzést a tanulóinak szóban és írásban is. Többen hangsúlyozzák, hogy a diákok értékelésében az írásbeli értékelés a dominánsabb, és a szóbeli visszajelzést motiválásra, a diákok buzdítására használják.

A válaszok egy pozitív tényre mutatnak rá, ami az, hogy a tantermekben ugyanúgy jelen van a szóbeli és az írásos értékelés is. Ennek fontosságával egyetértenek a téma szakértői is, hiszen ezzel a diákok árnyaltabb, több szempontú visszajelzést kapnak a munkájukról, ami a hatékonyabb haladásukat segíti elő. Ez a tény azért bíztató, mert így a tanulók nem csak a dolgozatukon látnak egy jegyet, hanem megtudhatják, miért ez az osztályzat született és azt, hogy hogyan tudnak javítani, tovább fejlődni.

Az év végi visszacsatolás

A megkérdezett tanárok egyetértenek abban, hogy hasznos a tanév végén visszacsatolást adni a diákjaiknak az egész éves teljesítményükről. Véleményük megegyezik abban is, hogy ezt a tanév utolsó óráján teszik meg és minden tanulónak szóban értékelik a magukhoz viszonyított fejlődésüket, vagy visszafejlődésüket.

Az erre a kérdésre adott válaszok szintén pozitívumot jelentenek az oktatásra nézve, hiszen a szakirodalom is egyetért abban, hogy egy szakasz lezárásakor szóbeli értékelést nyújtson a pedagógus a diákjai számára, hiszen ezzel vagy megerősíti a tanévben nyújtott teljesítményt és ezzel motivál a következő tanévre, vagy negatív véleményét fejezi ki a nem megfelelő teljesítményről, így talán nagyobb energia-befektetésre sarkall a következő évben.

Súlyozás

A tananyagrészek közötti különbségtételt érintő kérdésre a válaszadók kétharmada egyetért abban, hogy igenis kell a különböző tananyagokat súlyozni, hiszen így kapunk összetett képet a tananyagról és annak elsajátításáról. A válaszadók egyharmada szerint nem szükséges különbséget tenni a számonkérés során az anyagrészek között.

Az ötfokozatú skála

A kérdés arra irányul, hogy megfelelő-e a diákok értékelésére az ötfokozatú skála. A válaszadók fele úgy gondolja, hogy céljának megfelel a skála, több indoklás is született a kérdéshez: összemérhető, szülő számára transzparens. A kérdőívet kitöltők másik fele úgy gondolja, hogy jobban tükrözné a tudásbeli különbségeket egy szélesebb skála, esetleg az érettségin használt százalékos értékelés. Egy másik válaszadó azt hangsúlyozza, hogy megfelelne ez az ötfokozatú skála, ha megfelelő mennyiségben és minőségben biztosítanának a tanárok szöveges értékelést mind a diákoknak, mind a szüleiknek.

A válaszok elgondolkodtatóak, és azt tükrözik, hogy az értékelés skáláját alaposan át kell gondolni ahhoz, hogy a céljának megfeleljen. Az utolsót válasszal egyetértek, miszerint a skála megfelel, csak ellensúlyozni kell a hiányosságait szóbeli visszacsatolással.

A házi feladat

A válaszadók közül öt fontosnak tartja a házi feladatot, egy pedig úgy érzi, az otthoni munkaként kiadott feladat nem képezi szerves részét az oktatásnak. A házi feladatok ellenőrzésére többféle módszer is felmerült a válaszok között: óra elején közösen megbeszélik; tanulói bemutatás óra elején; házi feladat felelősök, akik a házi meglétét ellenőrzik, problémás feladatok megbeszélése; végeredmények egyeztetése, probléma esetén közös megbeszélés.

Pozitív tapasztalat, hogy a matematikatanár közül a legtöbben fontosnak tartják az otthoni megoldásra adott feladatokat, és elegendő hangsúlyt fektetnek azok ellenőrzésére, kijavítására. Ha a házi feladatok meglétét szigorúbban ellenőrzi a tanár, akkor előbb-utóbb eléri azt, hogy a diákok hozzászokjanak a megírásához.

Szóbeli feleltetés

A válaszadók között egy tanár volt, aki felelteti a diákjait. A többi válaszadó óráira nem, vagy ritkán jellemző a feleltetés, mert közben nem tudják a többieknek funkcionálissá tenni az így eltöltött időt. Másik típusú indoklásokban megjelenik az, hogy van az órájukon szóbeli produktum, de általában nem jegyre megy.

A szóbeli feleltetés a középiskola végén kap nagyobb hangsúlyt az emelt szinten érettségiző csoportokban, mivel az érettségi részeként szerepel a vizsgán egy 20 perces szóbeli vizsgarész. Mivel alsóbb osztályokban még nem döntenek a diákok ez érettségijük szintjéről, ezért nem árt, ha már akkor hozzászoknak a szóbeli megmérettetéshez. Ezért úgy gondolom, valamilyen szinten mindenképpen meg kell ismertetni a tanulókat a matematika órai feleltetéssel.

Az emelt szintű érettségi szóbeli vizsgarésze

Habár a válaszadók fele középiskolában tanít, mégsem adott senki érdembeli választ erre a kérdésre. A válaszadók fele egyáltalán nem foglalkozik középiskolai matematikával, másik részük, akik középiskolában tanítanak, pedig nem ismerik eléggé a szóbeli érettségi követelményeit, hogy véleményt formálhassanak róla. Egy válaszadó helyesnek tartja, hogy van ilyen része is az emelt szintű érettséginek, persze azzal a feltétellel, hogy az objektivitást betartják.

A válaszokból kiderül, hogy a középiskolai matematika tanárokban felmerül annak igénye, hogy több információt kapjanak az emelt szintű érettségi szóbeli részéről. Az írásbeli érettségik mind megtalálhatóak az interneten, viszont a szóbeli részhez csak egy általános útmutató tartozik, ahol az értékelés szempontjait és a vizsga lefolyását mutatják be.

A kérdőívben feltett kérdésekre kapott válaszok összhangban vannak Somfai (2003) kutatásával: az módszereket érintő válaszok azt mutatják, hogy az általam megkérdezett matematikatanárokra is jellemző az a tendencia, melyet a szerző leírt.

A kérdőív segítségével kaphattam egy képet arról, hogy tapasztalt matematika tanárok hogyan, milyen módszerek, elvek alapján foglalkoznak a tanítás egy igazán fontos részével: az értékeléssel és ellenőrzéssel. Megtudhattam, hogy melyek a legnépszerűbb ellenőrzési módszerek, leggyakrabban használt feladattípusok, milyen fontos szóbeli értékelést nyújtani egy dolgozat után, vagy év végén, mennyire fontos része a tanításnak a házi feladat, és a szóbeli feleltetés. Úgy gondolom, a kutatás után tudatosabban fogom végezni a diákok teljesítményének ellenőrzését és értékelését.

4 A kétszintű érettségi értékelése

Ebben a fejezetben elemezni fogom a 2010. évi közép-, és emeltszintű érettségit. Azért választottam az elemzés tárgyának az érettségit, mivel mindegyik szinthez tartozik javítási-értékelési útmutató, ami tartalmazza a pontozást is, ez segítséget nyújt a feladatok értékelésében, hiszen a pontozásból kiderül, hogy a feladatok megoldásában melyek azok a lépések, amelyek nagyobb hangsúlyt kapnak. A választásom másik oka az, hogy az érettségi központi szerepet tölt be a középiskolai matematikaoktatás lezárásában, ezért fontos, hogy megfelelő szintű és minőségű feladatokat tartalmazzon.

Mindkét elemzést a fent említett szempontok alapján fogom elvégezni, és azt szeretném kideríteni, hogy vajon a feladatok megfelelnek-e a matematikai értékelés kritériumainak, követelményeinek és hogy valóban azt mérik-e, amit azzal mérni szándékoztak.

Az érettségi a középiskolai matematikaoktatás lezárása, és mint annak, mindenképpen át kell fognia a középiskolai matematika tantervben foglalt témaköröket, az ott leírt hangsúly szerint. Arra vagyok kíváncsi, hogy nincsenek-e ebben érettségiben túlhangsúlyozott tananyagrészek, és nincs-e esetleg olyan anyagrész, amely nem kapott elegendő figyelmet. Külön hangsúlyt fektetek a pontozás ellenőrzésére, hogy vajon nincsenek-e aránytalanul beállított részpontozások mind a közép-, mind az emelt szintű érettségiben.

4.1 A matematika érettségi követelményei és leírása

A részletes érettségivizsga-követelményben a szerzők összefoglalják, hogy általánosan milyen elvárásaik vannak a középszinten érettségizőkkel szemben: a matematikai fogalmak és tételek ismerete és gyakorlati használata. Ezután felsorolják a kompetenciákat, amelyekkel a tanulóknak rendelkezniük kell az érettségi sikeres teljesítéséhez. Ezeket a kompetenciákat öt nagyobb csoportra lebontva mutatják be, ezek pedig a következők:

- gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok
- számelmélet, algebra
- függvények, az analízis elemei
- geometria, koordinátageometria, trigonometria

- valószínűség-számítás, statisztika

A kompetenciák felsorolásából látszik, hogy középszinten a tanulóktól elvárt ismeretek a való életben való eligazodást szolgálják; az ott jelen lévő matematikai összefüggések észrevételére és gyakorlati használatára utalnak. Így ezek az alapismeretek az életben felmerülő matematikai problémák megoldását célozzák meg.

Középszinten a vizsga két részből áll, ez kiderül a vizsga részletes leírásából. Az első részben a tanulóknak egy 12 feladatot tartalmazó feladatlapot kell kitölteniük, ami az alapfogalmakat, definíciókat, egyszerű összefüggéseket ellenőriz. A leírás szerint ezek a feladatok többnyire nyílt végűek. A második rész első felében három hosszabb feladat szerepel, a második felében pedig három nagyobb lélegzetvételű feladat van, amelyekből a vizsgázóknak kettőt kell megoldaniuk. A szerzők szerint a feladatsor feladatai között 30-50%-os a szöveges, hétköznapi élethez kapcsolódó feladat, melyek egyszerű modellalkotást igényelnek. A leírás szerkesztői közölnek egy táblázatot, amelyben összesítik a tartalmi arányokat, de hangsúlyozzák, hogy ezek csak hozzávetőleges arányok, hiszen egy feladat akár több témakörbe is besorolható.

Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok	20%
Aritmetika, algebra, számelmélet	25%
Függvények, az analízis elemei	15%
Geometria, koordinátageometria, trigonometria	25%
Valószínűség-számítás, statisztika	15%

A feladatlap értékelését a vizsgázókat tanító szaktanárok végzik, egy központi javítási-értékelési útmutató segítségével. Az útmutató tartalmazza a megoldások menetét, esetenként több részletes megoldást, és a megoldási lépésekre adható részpontszámokat.

Ha egy vizsgázó nem éri el az elégségeshez szükséges 20%-ot, de teljesítménye meghaladja a 10%-ot, akkor szóbeli vizsgát tehet. A szóbeli vizsgához a tételsor összeállítása a vizsgabizottságot működtető intézmény feladata, de a tételsort nem hozhatják nyilvánosságra. A szóbeli tételek három egyszerű, az elméleti anyagot érintő kérdést és három feladatot tartalmaznak. A húzott tételt a vizsgázónak önállóan kell kifejtenie. A szóbeli feleletet a következőképpen kell értékelni: az elméleti kérdésekre összesen 15 pont adható; a három feladatra összesen 30 pont jár; és az önálló gondolkodásra való képességet, a feladatok logikus előadását, és a matematikai kommunikáció képességet maximum 5 pontra lehet értékelni. A vizsgázó végső pontszámát az írásbeli és a szóbeli vizsgán elért pontok összege adja.

4.2 A középszintű érettségi

Az első lépés a feladatlap értékelésében a megadott arányok ellenőrzése. Mivel a szerzők hangsúlyozták, hogy a felsorolt arányok csak hozzávetőlegesek, mégis nagy különbség van az általuk közölt arány és a valóságos arány között a valószínűség-számítás, statisztika témakört tekintve, hiszen jóval több valószínűség-számítási és statisztikai feladat szerepel a 2010. évi középszintű érettségiben, mint amennyinek lennie kellene. Az érettségi követelményekben leírják, hogy középszinten az alapfogalmak megértését és használatát ellenőrzik, mivel ez a témakör alapvető társadalmi szükséglet, viszont kiemelik, hogy a tanításban elfoglalt helye ma még igazán periférikus. A többi témakör nagyjából megfelel a megadott arányoknak, bár apróbb eltérések szerepelnek az elemzésben.
Az elemzés elkészítéséhez egy négy nagyobb és több alkérdésből álló kérdőívet használok, amely rákérdez a feladat megoldásának menetére, a gondolkodási folyamatra, diszkussziós kérdéseket tartalmaz, és a feladat nehézségi fokára is rákérdez. A kérdőív megtalálható a Függelék részben.

4.2.1 A középszintű érettségi első része

Ebben a részben 12 rövidebb feladat szerepel, melyek megoldásával a vizsgázó összesen 30 pontot szerezhet.

1. *Sorolja fel a 2010-nek mindazokat a pozitív osztóit, amelyek prímszámok!*

Az első feladatban a diákoknak egy összetett számot kell prímtényezős alakra bontani, majd ki kell választania a különböző pozitív prímeket. Ez a feladat a számelméleti alapfogalmak témakörébe sorolható. A feladat megoldásához a tanulóknak ismerniük kell a természetes számok prímtényezőkre való bontásának módszerét és ismerniük kell a prímszám fogalmát. Ez a feladat egy tisztán matematikai probléma, így a vizsgázónak a feladat szövege alapján nem kell matematikai modellt alkotnia, a feladat szövege egyértelműen közli a problémát. A feladat zárt, hiszen egy megoldási módja és egy helyes megoldása van. A feladathoz indoklás nem szükséges, sőt a javítókulcsban nem szerepel a megoldás folyamata, csak a négy helyes megoldás. Ha egyet elhibáz a tanulók a maximális kettő pontból csak egyet kaphat, ha többet ront, akkor nulla pont jár a feladatra. Ha a prímek közé sorolja az egyet is, akkor szintén egy pont kerül levonásra. A megoldáshoz szükségek lépések száma kettő, hiszen prímtényezőkre kell bontani a tanulónak a számot, majd fel kell sorolnia a különböző prímszámokat, melyen szerepelnek a felbontásban. Ez a feladat transzfert igényel a vizsgázóktól, hiszen a prímtényezős felbontást kell alkalmazniuk, melyet már jóval korábban tanultak.

2. *Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!* $x^2 - 25 = 0$

A feladat egy másodfokú egyenlet megoldását igényli a tanulóktól, ezért szintén az algebra és számelmélet témakörbe sorolandó. A feladat megoldásához többféle úton el lehet jutni: az egyik a másodfokú egyenlet megoldó képletének használata; a másik az egyenlet rendezése, majd gyökvonás mindkét oldalból, és egy abszolút értékes egyenlet megoldása; esetleg okoskodással is megkapható a két eredmény. A vizsgázók ezekből a megoldási lehetőségekből választhatnak. A megoldás utolsó lépése, hogy a vizsgázóknak ellenőrizniük kell, hogy a kapott megoldások elemei-e a valós számok halmazának, hiszen a feladat szövege erre kéri őket. A javítási útmutatót megvizsgálva kiderül, hogy elég a két megoldást megadni, a megoldás folyamata, módszere és a megoldások ellenőrzése nem szükséges a korrekt megoldáshoz. A feladat szövege emiatt túldefiniált, hiszen olyan feltételt fogalmaz meg, amelyet aztán nem kér számon. Ezt a feladatot úgy is meg lehet oldani és meg lehet szerezni a maximális pontszámot, hogy a vizsgázó nem ismeri a valós számfogalmat. Ebben az esetben felesleges a feladat szövegében szerepeltetni, ha az ellenőrzésnél ezt nem kérik számon. A feladat kontextusa itt is tisztán matematikai, hiszen egy egyenlet megoldását kéri. A feladat a megoldási mód szempontjából nyitott, a megoldás szempontjából zárt. A feladat megoldásához semmiféle indoklás nem szükséges; elég, ha a két megoldást szerepelteti a vizsgázó. A feladat megoldásában a közbeeső lépések száma a megoldási mód megválasztásától függ, egytől terjedhet háromig. Ez a feladat a vizsgázótól szintén ismeret-transzfert igényel.

3. *Az alábbi táblázat egy 7 fős csoport tagjainak cm-ben mért magasságait tartalmazza. Mekkora a csoport átlagmagassága? A csoport melyik tagjának a magassága van a legközelebb az átlagmagassághoz?*

Anna	*Bea*	*Marci*	*Karcsi*	*Ede*	*Fanni*	*Gábor*
155	*158*	*168*	*170*	*170*	*174*	*183*

A feladat egy hét elemből álló számhalmaz átlagának kiszámítását igényli, majd az átlag meghatározása után a vizsgázóknak el kell dönteniük, hogy a hét adat közül, melyik áll legközelebb az átlaghoz. A feladat megoldásához a tanulóknak ismerniük kell az átlag fogalmát és kiszámítási módját. A feladat egy hétköznapi külsőbe öltöztetett, zárt matematikai probléma. A feladat megoldásához indoklás nem szükséges, a megoldáshoz két lépés szükséges. A feladat szintén ismeret-transzfer teljesítményt igényel a vizsgázóktól. A feladat három pontot ér, ebből egy adható az átlag fogalmának helyes használatára, egy a helyes számolásra és végül egy azért, hogy a vizsgázó ki tudja választani a hét adat közül azt, amelyik legközelebb van az átlaghoz.

4. *Az* $R^+ \to R,\ x \mapsto 3 + \log_2 x$ *függvény az alább megadott függvények közül melyikkel azonos?*

A. $R^+ \to R,\ x \mapsto 3\log_2 x$

B. $R^+ \to R,\ x \mapsto \log_2(8x)$

C. $R^+ \to R,\ x \mapsto \log_2(3x)$

D. $R^+ \to R,\ x \mapsto \log_2(x^3)$

Ebben a feladatban a vizsgázónak ismernie kell a logaritmus azonosságait, és azoknak alkalmazásával tudja megoldani a feladatot. A feladat kontextusa egyértelműen matematikai. A feladat a megoldásszámát és megoldási módszerét tekintve is zárt. A feladat nem követel meg indoklást a vizsgázóktól. A feladat két lépésből megoldható, az elsőben a logaritmus definícióját kell alkalmaznia, a másodikban pedig a logaritmus egyik azonosságát. Ennél a feladatnál szintén ismeret-transzfer történik. Az értékelési útmutatóban csak egy betűjel található, ha a vizsgázó a helyes megoldást választja, két pontot kap érte. Nem szükséges a feladatat teljes értékű megoldásához sem levezetés, sem indoklás, és mivel négy lehetséges opciót adtak meg a szerzők, a fent említett ismeretek nélkül is 25% esélye van arra a vizsgázónak, hogy eltalálja a megoldást és megszerezze a feladatra járó kettő pontot.

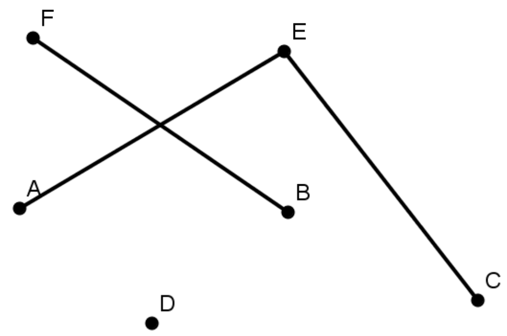
5. *Annának kedden 5 órája van, mégpedig matematika (M), német (N), testnevelés (T), angol (A) és biológia (B). Tudjuk, hogy a matematikaórát testnevelés követi, és az utolsó óra német. Írja le Anna keddi órarendjének összes lehetőségét!*

Ez a feladat a kombinatorika témakörébe sorolható, tehát a nagy felosztásban az egyes kategóriába. Logikus próbálkozással, felsorolással kell megoldani a feladatot. A vizsgázónak először rögzítenie kell, hogy mit tudunk az adott nap órarendjéről, majd a megadott feltételeket figyelembe véve be kell osztania a többi tanórát is. A feladat szövege egyértelműen leírja, hogy a szerzők mit kívánnak a vizsgázótól egy hétköznapi matematikai problémában. A feladat megoldási módját tekintve zárt, de mivel nem adták meg az írok, hogy hány különböző órarend lehetséges, ezért a megoldásszám nyitottnak minősülhet. Ehhez a feladathoz, épp úgy, mint a többihez nem kell indoklást adnia a vizsgázónak. Egy lépést kell a vizsgázónak végrehajtania hatszor, hiszen a feladatnak hat megoldása van. Ez a feladat minősülhet problémamegoldásnak, hiszen a vizsgázóknak nincs egy megtanult módszer a kezükben a feladat megoldásához. A javítási útmutatóban felsorolják a hat megoldást, melyek összesen két pontot érnek. A pontozása elég szigorú a feladatnak, hiszen egy hiba esetén már csak egy pontot lehet szerezni, több hiba esetén pedig egyet sem.

6. *Egy egyenlő szárú háromszög alapja 5 cm, a szára 6 cm hosszú. Hány fokosak háromszög alapon fekvő szögei? A szögek nagyságát egész fokra kerekítve adja meg! Válaszát indokolja!*

Ennek a geometriai feladatnak a megoldásához a vizsgázóknak tudnia kell, hogy az egyenlő szárú háromszög alapjához tartozó magassága felezi az alapot, majd a koszinusz szögfüggvény definíciójának használatával ki kell számolniuk, hogy mekkorák az alapon fekvő szögek. A feladat egy jól megfogalmazott, tisztán matematikai, zárt feladat. A feladat készítői kérnek indoklást a feladat megoldásához; a javítási útmutatóból kiderül, hogy ez lehet egy ábra, vagy szavakkal megfogalmazott indoklás is. A feladat megoldása három lépésből áll: az alap felének kiszámítása, a koszinusz definíciójának felírása és kiszámítása, majd pedig a kerekítés. Ez a feladat ismét ismeret-transzfert igényel a tanulóktól. A feladatra maximálisan három pont adható, ez a következőképpen oszlik meg: ha a feladat megoldásából kiderül, hogy a vizsgázó tudja, hogy az egyenlőszárú háromszög alaphoz tartozó magassága felezi az alapot, akkor egy pontot érdemel; ha a vizsgázó fel tudja írni a koszinusz-tétel definícióját az adott adatokkal, akkor megkapja az azért járó egy pontot; és végül egy jól kerekített válaszért ismét egy pont adható. A kerekítést ismét nagyon szigorúan pontozzák, hiszen, ha a vizsgázó nem jól kerekít, akkor nem kapja meg a válaszért járó egy pontot.

7. *Az ábrán látható hatpontú gráfba rajzoljon be 2 élt úgy, hogy a kapott gráf minden csúcsából 2 él induljon ki! A berajzolt éleket két végpontjukkal adja meg!*



Ez a feladat az alap felosztás első kategóriájába tartozik. A feladat megoldásához a gráfokkal kapcsolatos fogalmak, definíciók ismerte szükséges: csúcs, él. Ebből kiderül, hogy ez szinten egy tisztán matematikai feladat, pedig lehetett volna belőle készíteni egy életszerű feladatot, például ismeretséges feladatot: hat ember találkozik, közülük mindenki pontosan két embert ismer. A feladat szövege jól megfogalmazott, és mivel több elfogadható megoldás is létezik, így nyitott. Ha életszerűbbé tették volna a feladatot, akkor mindenképpen zárt lett volna a feladat, mert akkor nem lett volna jó megoldás a D-D hurokél választása. A feladat megoldásához semmilyen indoklás sem szükséges. A közbeeső lépések száma kettő, hiszen az első lépésben meg kell keresnie a vizsgázónak azokat a csúcsokat, amelyekből nem két él indul ki, majd össze kell párosítani azokat. Ennek a feladatnak a megoldásához is ismeret-transzfert kell alkalmazni. Az értékelési útmutatóból kiderül, hogy két megoldást fogadnak el: az egyik az, amely az A-D és D-F éleket tartalmazza, a másik pedig az A-F és D-D hurokélt tartalmazza. Viszont a jó megoldásért járó két pont nem bontható, tehát ha csak egy élt ad meg a vizsgázó, akkor nem kap egyetlen pontot sem. Ez az értékelés szigorúnak tűnik ehhez a feladathoz.

8. *Az alábbi kilenc szám közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám* ***nem negatív****?*

-3,5; -5; 6; 8,4; 0; -2,5; 4; 12; -11.

Ez a feladat egy valószínűség-számítási probléma, amelyben a vizsgázóknak a klasszikus valószínűségi modellt kell használniuk. A feladat megoldásához ki kell választaniuk a kedvező eseteket, majd azoknak a számát el kell osztaniuk a megadott számok számával. Ez egy tisztán matematikai feladat, bár ezt is lehetett volna hétköznapibb külsőbe bújtatni. A feladat mind a megoldási módjára, mind a megoldásszámára nézve zárt probléma. A feladat megoldásához a szerkesztők nem kérnek indoklást, ami a többi érettségiben szereplő valószínűség-számítás feladatot tekintve nem megszokott. A megoldás két lépésből áll: a vizsgázónak meg kell számolnia a negatív számokat és el kell osztania az összes szám számával. Ez a feladat ismét ismeret-transzfert igényel. A pontozást tekintve a feladat szintén érdekes, hiszen semmiféle indoklás nélkül két pont jár a valószínűség megadásáért.

9. *Oldja meg a valós számok halmazán a* $\sin x = 0$ *egyenletet, ha* $-2\pi \le x \le 2\pi$ *!*

Ez a feladat a trigonometria témakörébe sorolható, hiszen a diákoktól egy trigonometrikus egyenlet megoldását igényli, egy adott alaphalmazon. A feladat megoldása kétféleképpen érhető el: az egyik, hogy kiszámolja számológéppel az egyenlet alapmegoldását, majd abból kiszámolja az értelmezési tartományba eső többi megoldást; a másik megoldási módszer pedig a függvény ábrázolása és a megoldások leolvasása. A feladat megoldásához ismernie kell a vizsgázónak a trigonometrikus egyenletek megoldásának módszerét, vagy a szinusz-függvény grafikonját. A feladat egy tisztán matematikai probléma, jól és egyértelműen van megfogalmazva. A megoldási módját tekintve a feladat nyitott, viszont a megoldást tekintve zárt, hiszen az adott intervallumon belül öt megoldása van, melyeket a vizsgázónak fel kell sorolni. A javítási útmutatóból kiderül, hogy a feladat megoldása indoklás nélkül is elfogadható. A megoldáshoz minimum négy lépés szükséges, hiszen a vizsgázóknak ki kell számolniuk az egyenlet alapmegoldását, majd a szinusz függvény periódusát ismerve meg kell keresniük az alaphalmazban a többi megoldást; ezután a korrekció segítségével megkapják a feladat másik megoldását, és az ehhez tartozó többi gyököt is meg kell találniuk az alaphalmazban. Ehhez a feladathoz szintén ismeret-transzfert kell alkalmazniuk a diákoknak. A javítási útmutató szerint a feladatért járó maximális pontszámot akkor kapja meg a diák, ha a megadott alaphalmazon dolgozik, a megoldásokat radiánban adja meg, és megadja az összes megoldást. Mindhárom szempontra egy pont adható, így összesen három pontot ér ez a feladat, viszont a megoldás menetét nem kell szerepeltetni a dolgozatban, így ha felsorolja az öt megoldást, megkapja érte a maximális három pontot.

10. Döntse el az alábbi négy állításról, hogy melyik igaz, illetve hamis!

A. Van olyan derékszögű háromszög, amelyben az egyik hegyesszög szinusza $\frac{1}{2}$.

B. Ha egy háromszög egyik hegyesszögének szinusza $\frac{1}{2}$*, akkor a háromszög derékszögű.*

C. A derékszögű háromszögnek van olyan szöge, amelynek nincs tangense.

D. A derékszögű háromszögek bármelyik szögének értelmezzük a koszinuszát.

A feladat a derékszögű háromszög szögfüggvényeire kérdez rá, ezért a negyedik nagy témakörbe sorolható: geometria, koordinátageometria, trigonometria. Az A állítás igazságértékének eldöntéséhez a vizsgázónak ismernie kell, hogy mely hegyesszög szinusza egyenlő $\frac{1}{2}$-del, majd miután megkapta ezt a szöget, el kell döntenie, hogy létezik-e olyan derékszögű háromszög, melynek ekkora hegyesszöge van. A B állítás szorosan kapcsolódik az A állításhoz, hiszen ott már egyszer ki kellett számolniuk a kérdéses szöget, majd már csak annyit kell eldönteniük a vizsgázóknak, hogy a szög csak derékszögű háromszögekben szerepelhet-e, vagy más háromszögekben is. A C állítás igazságértékének eldöntéséhez a diákoknak tudniuk kell, hogy a tangens-függvényt milyen értékekre nem értelmezzük, majd ennek segítségével el kell dönteniük az állításról, hogy igaz, vagy hamis. A D állításnál szintén értelmezési tartományra kérdez rá a feladat, de ebben az esetben a koszinuszéra. Itt szintén egy a definícióból következő ismeret áll a probléma középpontjában: van-e olyan hegyesszög, amelynek nem értelmezzük a koszinuszát. A feladat szövege érhető, világos, a válasz megadásához elegendő mennyiségű információt közöl. Ez a feladat szintén tisztán matematikai. A feladat zárt, hiszen mind a négy állításnál csak egy helyes válasz adható és a megoldáshoz is egy módon lehet eljutni, ki kell számolni a keresett szögeket, majd diszkussziót kell alkalmazni. A problémák megoldásához nem kell indoklás, elég a megfelelő szót beírni a válasz helyére. Ez abból a szempontból nem előnyös, hogy a vizsgázónak 50% esélye van eltalálni a helyes megoldást az állításoknál, függetlenül a tudásától. Az ilyen típusú feladatok nem feltétlenül azt mérik, amit a feladattal mérni szándékoztak a készítők. A feladat végrehajtásához szükséges közbeeső lépések száma az első két állításnál kettő: számolás és diszkusszió; a második két állításnál pedig egy: a tangens és a koszinusz függvény értelmezési tartományának ismerete. A feladat a vizsgázóktól ismeret-transzfert igényel, hiszen az itt felmerülő problémákról már tanultak, korábbi ismereteiket kell használniuk. A javítási útmutatóból kiderül, hogy minden egyes helyes válasz egy pontot ér.

11. *A héten az ötös lottón a következő számokat húzták ki: 10, 21, 22, 53 és 87. Kata elújságolta Sárának, hogy a héten egy kéttalálatos szelvénye volt. Sára nem ismeri Kata szelvényét, és arra tippel, hogy Kata a 10-est és az 53-ast találta el. Mekkora annak a valószínűsége, hogy Sára tippje helyes? Válaszát indokolja!*

Ennek a feladatnak egyik része a kombinatorika, másik része pedig a valószínűség-számítás témakörébe tartozik, és a megoldásához ismernie kell a vizsgázónak az valószínűség-számítás alapmodelljét és az ismétlés nélküli kombinációt. A tanulóknak tudniuk kell, hogy a kihúzott öt számból hányféleképpen lehet kiválasztani kettőt, ez adja az összes eset számát. A kedvező eset pedig Sára tippje, azaz egy számpár. Ezután el kell osztania a kedvező esetek számát az összes eset számával, így megkapja a vizsgázó a keresett valószínűséget. A feladat pontosan van megfogalmazva, elegendő információt ad a feladat megoldásához. A probléma valóságos matematikai feladat, hiszen ez egy való életből vett probléma, amellyel bármikor találkozhatunk. A feladat megoldási módja és megoldása is zárt. A feladat szerkesztői indoklást is kérnek a vizsgázóktól, amivel bizonyítják, hogy tudják használni a valószínűség-számítás alapmodelljét. A feladat három közbeeső lépésből áll: az összes eset kiszámolása, a kedvező eset megadása, és végül a valószínűség kiszámítása. Ebben a feladatban a tanulóknak ismét ismeret-transzfert kell alkalmazniuk, hiszen egy már megtanult modellt kell használniuk egy új, ismeretlen feladatban. Az értékelési útmutató alapján az összes eset kiszámítására, a kedvező eset megadására és a valószínűség kiszámítására is egy-egy pont adható, így maximálisan három pontot lehet szerezni a feladatban.

12. Egy 17 fős csoport matematika témazáró dolgozatának értékelésekor a tanár a következő információt közölte:

Mind a 17 dolgozatot az 1-es, a 2-es, a 3-as, a 4-es és az 5-ös jegyek valamelyikével osztályozta.

A jegyek mediánja 4, módusza 4, terjedelme 4 és az átlaga (két tizedes jegyre kerekítve) 3,41.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, illetve hamis!

A. *A dolgozatoknak több mint a fele jobb hármasnál.*

B. *Nincs hármasnál rosszabb dolgozat.*

A vizsgázóknak a feladat megoldásához ismerniük kell a leíró statisztika fogalmait: módusz, medián, terjedelem, átlag; és ezek alapján kell eldönteniük az állítások igazságértékét. Így ez a feladat a statisztika, valószínűség-számítás témakörbe sorolható. Az A állítás eldöntéséhez a medián definícióját kell ismerniük és használniuk a diákoknak. A B rész megoldásához pedig a terjedelem definícióját kell alkalmazni. A feladat szövege korrekten van megfogalmazva, elegendő információt közöl. A probléma egy hétköznapi külsőbe bújtatott matematikai feladat, mégis valószerűvé teszi a feladatot. A feladat megoldása és megoldási módszere zárt, indoklás nem szükséges. Ez ismét ahhoz a problémához vezethet, hogy a vizsgázó a fent említett fogalmak, definíciók ismerete nélkül is $\frac{1}{2}$ valószínűséggel találhatja el a helyes megoldást. A probléma elkerülése érdekébe hasznos lenne indoklást kérni a diákoktól. Mind az A, mind a B rész egy megoldási lépést igényel. Ez a feladat is ismeret-transzfert vár el a diákoktól, hiszen olyan definíciók ismeretét kéri számon, melyet már tanultak, most pedig a gyakorlatban kell alkalmazniuk. A helyes válaszok 1-1 pontot érnek.

A középszintű érettségi első részében a feladatok változatosak, talán azzal lehetne még hatékonyabbá tenni, ha az igaz-hamis típusú feladatok számát csökkentik, hiszen ezzel hat pontot lehet szerezni, és 50% esélye van a vizsgázóknak a helyes válasz eltalálására. Másik lehetőség az ilyen fajtájú feladatok javítására, hogy indoklást is kérnek a vizsgázóktól, így kiderül, hogy valóban tudják-e, értik-e az adott tananyagot, vagy csak ráhibáztak a helyes válaszra.

4.2.2 Az középszintű érettségi második része

A második részben a vizsgázóknak nagyobb lélegzetvételű feladatokat kell megoldaniuk. A második rész első fele három 12 pontot érő feladatot tartalmaz, második fele pedig szintén három 17 pontot érő feladatot, melyek közül a vizsgázóknak kettőt kell kiválasztaniuk és megoldaniuk.

13. Számítsa ki azt a két pozitív számot, amelyek számtani (aritmetikai) közepe 8, mértani (geometriai) közepe pedig 4,8.

Ez a feladat az algebra és számelmélet témakörbe sorolható, hiszen a feladat megoldásához a tanulóknak ismernie kell a számtani és mértani közepek definícióját és alkalmazniuk kell a gyakorlatban is. Miután a definíciók alapján felírják az összefüggéseket, egy két ismeretlenes egyenletrendszert kapnak, melynek megoldása szintén az algebra és számelmélet témakörbe tartozik. Az egyenletrendszer megoldásához a behelyettesítő módszert a legalkalmasabb, így egy másodfokú egyenletet kapnak valamelyik ismeretlenre. A másodfokú egyenlet megoldása a másodfokú megoldóképlettel történik, és így két megoldáshoz jut a vizsgázó. A kapott két megoldást ezután vissza kell helyettesíteni az alapegyenletek valamelyikébe, így megkapják az egyenletrendszer megoldásának számító két megoldáspárt, ami ebben az esetben szimmetrikus.

A feladat érthetően van megfogalmazva, minden a megoldáshoz szükséges adatot tartalmaz, és nem többet. A feladat tisztán matematikai, nem kapcsolódik az életben felmerülő matematikai problémákhoz. A feladat a megoldási módját és a megoldásszámát tekintve is zárt, hiszen egy megoldása van, és a megoldás módszere is csak egyféle lehet: adatok felvétele, egyenletrendszer felírása, megoldása, megoldáspár megadása. A feladatra adható maximális pontszám eléréséhez külön indoklás nem szükséges, csak a feladat megoldásának lépésről lépésre való levezetése. A közbeeső lépések száma négy, ami megegyezik a feljebb felsorolt megoldási lépésekkel. Ez a feladat ismeret-transzfert igényel a vizsgázóktól, hiszen két, már korábban tanult matematikai fogalom definíciójából kiindulva kell megoldaniuk egy egyenletrendszert, melynek megoldásához szintén egy már tanult módszert kell alkalmazniuk. A javítási-értékelési útmutatóból kiderül, hogy az adatok felvételére és ezekből az egyenletrendszer felírására 4 pont jár; a behelyettesítő módszer alkalmazása 1 pontot ér; ennek segítségével a másodfokú egyenlet felírására 2 pont adható; a gyökök meghatározása szintén 2 pontot ér; ezekből a másik ismeretlen kifejezése megint 2 pontot ér; végül a megfogalmazott válaszra vagy ellenőrzésre 1 pont jár. A pontok eloszlása megfelelő, egyedül az ellenőrzésre vagy válaszadásra járó 1 pont nem reális, hiszen a feladat szövege sem ellenőrzést, sem szöveges választ nem kér a vizsgázóktól. Ha a vizsgázók követik az egyenletrendszer megoldásának folyamatát, a végén ott van az ellenőrzés, de lehet, hogy ebben az esetben csak fejben, esetleg csak számológéppel ellenőrzik a megoldásukat és nem írják le, mivel a feladat szövege nem kérte tőlük. Ugyanez a helyzet a szöveges válasszal, hiszen erre sem kéri a feladat a vizsgázókat, így esetleg a feladatokat azzal zárják, hogy kétszer aláhúzzák a megoldáspárokat, viszont ez nem minősül szöveges válasznak, így 1 pontot veszítenek, bár a megoldásuk tökéletes.

14. Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: A(0;0), B(-2;4), C(4;5).

a) Írja fel az AB oldal egyenesének egyenletét!

b) Számítsa ki az ABC háromszög legnagyobb szögét! A választ tized fokra kerekítve adja meg!

c) *Számítsa ki az ABC háromszög területét!*

A feladat a koordinátageometriai feladatok közé tartozik, hiszen egy háromszög csúcsait adták meg koordinátákkal, melyeknek segítségével a vizsgázóknak meg kell adniuk a háromszög egyik oldala egyenesének egyenletét, a legnagyobb szögét és a területét. Az a) részfeladatot át lehet úgy fogalmazni, hogy egy olyan egyenes egyenlete a kérdés, mely két pontjával van megadva. Ehhez tudniuk kell a diákoknak, hogy az egyenest két pontja meghatározza és meg kell keresniük a négyjegyű függvénytáblázatban az egyenes azon egyenletére vonatkozó összefüggést, ami a két adott pontra vonatkozik. Ezen a ponton a tanulók választhatnak több lehetőség közül is: irányvektoros, normálvektoros, két ponton átmenő, vagy iránytangenses formában jutnak el az egyenes egyenletéhez.

A b) részben a háromszög legnagyobb szögét kell megadniuk a vizsgázóknak. Ezt kétféle módon kaphatják meg: az egyik, hogy kiszámolják a három oldal hosszát, és ismerve azt az összefüggést a háromszögben, hogy nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, a koszinusztétel alkalmazásával kiszámolják a legnagyobb szöget; vagy a másik megoldás, hogy az oldalak kiszámítása után szintén koszinusztétellel kiszámolják mindhárom szöget, és közülük megadják a legnagyobbat.

A c) részfeladatban a tanulóknak ki kell számolniuk a három csúcsponttal megadott háromszög területét. A feladat megoldására itt is több lehetőség kínálkozik: az egyik, hogy a háromszög területét azzal a képlettel számolják ki, amelyben két oldal hossza és az általuk közbezárt szög szinusza szerepel; vagy a Heron-képlet segítségével számolják ki a területet; vagy a háromszöget belefoglalják egy téglalapba, melynek területéből levonják a felesleges derékszögű háromszögek területét.

A 14. feladat szintén jól van megfogalmazva, minden releváns információt tartalmaz. A feladat kontextusa tisztán matematikai. Az a) részfeladat megoldási folyamata nyitott, hiszen az egyenlet felírásához többféle úton is el lehet jutni, viszont a megoldást tekintve a részfeladat zárt. A b) feladat szintén nyitott, hiszen a megoldáshoz ebben a részben is kétféleképpen lehet eljutni, de a megoldás szempontjából zárt. A c) részben megint csak egy nyitott feladatot adtak meg szerkesztők, hiszen a háromszög területét többféleképpen ki lehet számolni a megadott adatokból, de maga a megoldás zárt. A részfeladatokban külön indoklás nem szükséges, csak a megoldás menetének leírása, a levezetés kell, hogy megjelenjen a feladatlapon. A munkaszükséglet a különböző részfeladatokban eltérő:

a) Az egyenes egyenletének felírás két lépésből áll: ki kell választania a vizsgázónak, hogy melyik adatokkal megadott egyenlettel szeretne dolgozni, majd oda be kell helyettesítenie az adatokat és meg kell adnia az egyenletet.

b) A háromszög oldalainak hosszát mindenképpen ki kell számolniuk a vizsgázóknak, ezt a két, koordinátákkal megadott, pont távolságának kiszámítására adott képlet segítségével tudják megtenni. Ha megvannak az oldalhosszok, két lehetőség közül választhat a vizsgázó: koszinusztétellel kiszámolja mindhárom szöget, vagy csak a leghosszabb oldallal szemben fekvő szöget számolja ki. A döntéstől függően a feladat négy, vagy hat lépésből áll.

c) Mivel már minden adat adott a háromszög területének kiszámításához, csak a megfelelő képletet kell kiválasztania a vizsgázóknak, és abba behelyettesíteni az adatokat, így ez a feladat egy lépésből áll.

A feladat a tanulóktól ismeret-transzfert igényel, hiszen olyan ismereteket kell felszínre hozniuk és alkalmazniuk, melyeket tanultak.

Az javítási-értékelési útmutatóban minden külön értékelendő lépés szét van választva és külön is kell őket pontozni. Az egyenes tetszőleges alakjának kiválasztása és a behelyettesítés 1 pontot ér, és az egyenes egyenletéért szintén 1 pont jár, az így az a) részre összesen két pont. A b) részben a háromszög oldalainak kiszámítása 2 pontot ér, és arra, hogy tudja a vizsgázó azt az összefüggést, hogy nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, 1 pont adható. Zárójelben fel van tűntetve, hogy ha kiszámolja mindhárom szöget a tanuló, akkor is megadható ez a pont. A koszinusztétel felírására, kiszámolására 3 pont jár, és a helyes szög megadására 1 pontot kell adni. Így ez a részfeladat összesen 7 pontot ér. Az egyetlen megkérdőjelezhető lépés a pontozásban az, hogy miért adnak a feladat készítői külön pontot a koszinusztétel felírásáért, hiszen benne van a négyjegyű függvénytáblázatban, nem a diákok tudását tükrözi, talán csak azt, hogy tudják, ezt kell használniuk.

A c) részfeladatban 1 pontot ér a kiválasztott területképlet felírása, 1-et a behelyettesítés, és 1-et a válasz megadása. Ennek a részfeladatnak a pontozásával szintén az a probléma, ami az előzővel, hiszen arra kell pontot adni, ami nem vizsgázó tudása, hanem egy megengedett segédeszközből másolt ki. A probléma nem azzal van, hogy ez a részfeladat 3 pontot ér, hanem azzal, hogy a részpontok hogyan vannak felosztva a lépések között.

15.

a) *Rajzolja meg derékszögű koordinátarendszerben a* $]-1;6]$ *intervallumon értelmezett,* $x \mapsto -|x-2|+3$ *hozzárendelésű függvény grafikonját!*

b) *Állapítsa meg a függvény értékkészletét, és adja meg az összes zérushelyét!*

c) *Döntse el, hogy a* $P(3,2;1,85)$ *pont rajta van-e a függvény grafikonján! Válaszát számítással indokolja!*

d) *Töltse ki az alábbi táblázatot, és adja meg a függvényértékek (a hét szám) mediánját!*

x	*-0,5*	*0*	*1,7*	*2*	*2,02*	*4*	*5,5*
$x \mapsto -\|x-2\|+3$							

A feladat a függvények témakörébe tartozik, és elég jól lefedi a témakört, hiszen tartalmaz függvényábrázolást, függvényelemzést és értéktáblázattal való megadást is. A d) rész magában foglal egy kis statisztikát is, mivel a medián definícióját kell alkalmazniuk a diákoknak.

Az a) rész megoldásához a vizsgázóknak ismerniük kell az abszolútérték függvény grafikonját és a függvénytranszformációkat, és ezeket kell alkalmazniuk: a feladat függvényábrázolás. A b) részben a függvényelemzés néhány elemét kell használniuk a diákoknak: a függvény értékkészletét és zérushelyeit kell megadniuk. Ehhez ismerniük kell a mindkét fogalmat és a megadási módjukat. A c) részben azt kell vizsgálniuk a tanulóknak, hogy egy pont rajta van-e a függvénygrafikonon, ehhez tudniuk kell, hogy ezt úgy lehet megtenni, hogy behelyettesítik a megadott pont koordinátáit a függvény hozzárendelési szabályába, és ha azonosságot kapnak, akkor a pont rajta van a grafikonon, ha pedig ellentmondásra jutnak, akkor a pont nem eleme a grafikonnak. Ez a részfeladat megmutatja a függvényanalízis és az algebra közötti kapcsolatot. A d) rész a helyettesítési értékek kiszámolását követeli meg a vizsgázóktól, 7 megadott érték helyettesítési értékét kell kiszámolniuk, majd a kapott 7 érték mediánját kell kiválasztaniuk, ehhez ismerniük kell a fogalmát, definícióját.

A feladat szövege korrekten van megfogalmazva, minden szükséges adatot tartalmaz. A feladat kontextusa tisztán matematikai. Az a) feladat megoldási módszerét tekintve nyitott, hiszen kétféleképpen is eljuthat a tanuló a grafikonhoz: az egyik mód, hogy a függvény-transzformációkat alkalmazza, melyből hármat tartalmaz a feladat, vagy értéktáblázatot csinál, és a függvényértékek ábrázolásával jeleníti meg a grafikont. Viszont a feladatnak egy megoldása van, ezért a megoldására nézve zárt. A másik három részfeladat a megoldási módszert és a megoldások számát tekintve zárt. Indoklás nem szükséges az a) részben, csak a helyes grafikon ábrázolása kell. A b) részben szintén nem kérnek a feladatlap készítői indoklást, csak az értékkészletet és a zérushelyeket. A c) résznél kell indoklás, ami a számolást foglalja magában, amivel a tanuló ellentmondásra vagy azonosságra jut. A d) részben szintén semmiféle indoklás nem szükséges, csak a táblázat helyes kitöltése és a medián megadása.

A munkaszükségletet nézve a részfeladatok eltérőek. Az a) részben a lépések száma attól függ, hogy melyik módszerrel ábrázolja a tanuló a grafikont. Ha a transzformációkat használja, akkor a végső függvénygrafikont négy lépésből kapja meg: felveszi az alap grafikont és három transzformációt alkalmaz. Ha értéktáblázatot használ, akkor a legjobb megvizsgálnia az értelmezési tartományban szereplő összes egész számra a függvény értékét, így 8 számot kell behelyettesíteni a hozzárendelési szabályba. A b) részben a függvény értékkészletét kell leolvasnia a grafikonról, ami egy lépés, és ki kell számolnia a zérushelyeket, ami szintén egy lépés, hiszen a hozzárendelési szabályt egyenlővé kell tennie nullával és az abszolútértékes egyenletet kell megoldania, így a teljes részfeladat két lépésből áll. A c) feladatnál a P pont koordinátáit kell behelyettesítenie a hozzárendelési szabállyal megadott függvény egyenletébe, ami egy lépésből áll.

Ebben a feladatban a vizsgázóknak ismeret-transzfert kell alkalmazniuk, hiszen a feladat komponensei már ismerősek nekik, hiszen tanulták őket.

Az javítási-értékelési útmutatóból kiderül, hogy a feladat a) részében a transzformációs lépésekre összesen 3 pont jár, de ha a vizsgázó pontonként ábrázolta a grafikont, akkor is megkapja az érte járó 3 pontot. 1 pont jár azért, hogy a grafikon leszűkítését helyes végpontokkal adja meg, így összesen 4 pontot ér az a) rész. A b) részben az intervallum megadására 2 pont adható, ha hibázott a vizsgázó bármelyik végpont megadásában, akkor elvi hiba történt, így nem kap pontot a megoldására. Viszont ha valamelyik végpont lezárását tévesztette el, akkor 1 pontot kell levonnia a javítónak. A zérushely megadása 1 pontot ér, nem kell hozzá levezetnie, hogy hogyan jutott el a zérushelyhez. A c) részben 1 pontot ér a válasz, és 1 pontot ér az, hogy megmutatja a vizsgázó, hogy hogyan jutott erre a következtetésre, azaz behelyettesít az egyenletbe és ellentmondásra jut. A d) résznél a pontot ér a táblázat helyes kitöltése, viszont nem részletezi az útmutató, hogy mi van akkor, ha a tanuló elszámol egy-egy eredményt, akkor mi van az erre a részre adható ponttal. Így nem tűnik igazságosnak a felosztás, hiszen ha csak egy eredményt téveszt el a vizsgázó, akkor már az egész táblázatra nem kaphat pontot. Viszont a medián megadására 2 pontot adhatnak a javítók, bontásban, vagy egészben: ha jól sorba rendezi a tanuló a kapott értékeket, akkor arra 1 pont adható, és ha megadja a mediánt, akkor arra is 1 pont jár. A megjegyzés rovatban szerepel, hogy sorba rendezés nélkül, a helyes medián értékre is megadható a maximális 2 pont.

16. Egy középiskolába 620 tanuló jár. Az iskola diákbizottsága az iskolanapra három kiadványt jelentetett meg:

I. Diákok Hangja

II. Iskolaélet

III. Miénk a suli!

Később felmérték, hogy ezeknek a kiadványoknak milyen volt az olvasottsága az iskola tanulóinak körében.

A Diákok Hangját a tanulók 25%-a, az Iskolaéletet 40%-a, a Miénk a suli! c. kiadványt pedig 45%-a olvasta. Az első két kiadványt a tanulók 10%-a, az első és harmadik kiadványt 20%-a, a másodikat és harmadikat 25%-a, mindhármat pedig 5%-a olvasta.

a) Hányan olvasták mindhárom kiadványt?

b) A halmazábra az egyes kiadványokat elolvasott tanulók létszámát szemlélteti. Írja be a halmazábra mindegyik tartományába az oda tartozó tanulók számát!

c) Az iskola tanulóinak hány százaléka olvasta legalább az egyik kiadványt?

Az iskola 12. évfolyamára 126 tanuló jár, közöttük kétszer annyi látogatta az iskolanap rendezvényeit, mint aki nem látogatta. Az Iskolaélt c. kiadványt a rendezvényeket látogatók harmada, a nem látogatóknak pedig a fele olvasta. Egy újságíró megkérdez két, találomra kiválasztott diákot az évfolyamról, hogy olvasták-e az Iskolaéletet.

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a két megkérdezett diák közül az egyik látogatta az iskolanap rendezvényeit, a másik nem, viszont mindketten olvasták az iskolaéletet?

Az a) részfeladat egy százalékszámítási feladat, ez az algebra és számelmélet témakörbe tartozik. A b) feladatban a vizsgázóknak halmazok elemszámát kell kiszámítaniuk és egy halmazábrát kell kitölteniük, így a feladat a halmazok témakörébe sorolható. A c) részben a halmazábra kitöltése után, ismét százalékszámítás a feladat. A d) feladatban valószínűséget kell számolniuk a vizsgázóknak. Mint látjuk, a feladat magában foglalja a százalékszámítást, a halmazelméletet és a valószínűség-számítást, így egyik csoportba sem sorolható egyértelműen.

Az a) feladat megoldásához a vizsgázóknak ismerniük kell a százalékszámítás módszerét, majd az iskola létszámának ki kell számolniuk az 5%-át. A b) feladatban a halmazába kitöltése előtt ki kell számolniuk, hogy az egyes halmazokban, metszetekben hány tanuló van. Ezután a halmazábrát kell kitölteniük, ehhez azt kell tudniuk, hogy az ábra kitöltését belülről kifelé haladva kell kezdeni, és amit már beírtak, azt le kell vonni a következő beírandó részből. A c) részben a vizsgázóknak tisztában kell lenniük a „legalább” szó fogalmával, ezután meg kell határozniuk azokat a halmazokat, halmazrészeket, melyek megfelelnek a feltételnek, majd össze kell adniuk a halmazokban szereplő értékeket és meg kell határozniuk, hogy ez az összeg hány százaléka az iskola összes tanulóinak számának. A d) feladatrész teljesítéséhez a vizsgázóknak először meg kell határozniuk, hogy adott csoportokban hány fő szerepel. Ezután az alap valószínűségi modell használatával, ki kell számolniuk a keresett valószínűséget.

A feladat szövege mind a négy részben érthetően van megfogalmazva, minden szükséges információt tartalmaz a feladatok megoldásához. A feladat kontextusát tekintve inkább matematikai, hétköznapi külsőbe bújtatva. Mind a négy feladat a megoldási módját és a megoldásszámát tekintve is zárt. A feladat szövege egyik feladatnál sem kéri a külön indoklást, viszont a d) részben a feladat levezetését le kell írni, ez kiderül a javítási útmutatóból. A közbeeső lépések számát tekintve az a) rész egy lépésből áll, a b) részben a vizsgázóknak ki kell számolniuk a különböző halmazrészek elemszámát, ez összesen hét számolás, és be kell írniuk a halmazábrába az adatokat, így a b) rész nyolc lépésből áll. A c) részfeladat két lépésből áll, hiszen a vizsgázóknak először össze kell adniuk a halmazábra azon részeit, melyek a legalább egy kiadványt olvasók számát, majd ki kell számolniuk, hogy ez a teljes létszám hány százaléka, tehát két lépésből áll a feladat. A d) részben a vizsgázók négy lépésben meghatározzák, hogy a különböző csoportok hány fősek, majd az ismétlés nélküli kombináció modelljének segítségével felírják, hogy hány lehetőség van a két fő kiválasztására, majd azt, hogy hány lehetőség van, az adott módon választani a különböző csoportokból, ezután a kedvező esetek számát el kell osztaniuk az összes lehetséges eset számával, így megkapják a keresett valószínűséget. Tehát ez a feladat szintén nyolc lépésből áll. A feladatok megoldásához a vizsgázóktól elvárt kognitív követelmény az ismeret-transzfer, hiszen olyan ismeretanyagot kell gyakorlatban használniuk, melyet már tanultak, ismernek, és a részfeladatok megoldásához minden adott számukra.

A javítási-értékelési útmutatóból kiderül, hogy az a) részfeladatban a számolásra nem jár külön pont, hanem csak a megoldásra adható 2 pont, bontás nélkül. Ahhoz képest, hogy egy előző feladatban arra is pontot kellett adni, hogy a vizsgázó felírta a koszinusztételt, ez a pontozás szigorúnak tűnik, hiszen egy elszámolás bármikor becsúszhat. A b) részben a három halmaz metszetének kitöltéséért nem adható pont, viszont azon kívül minden tartomány helyes kitöltéséért 1 pont adható. Ezzel a 6 ponttal azt is értékelik a javítók, hogy a vizsgázók helyesen tudnak-e százalékot számolni és azt is, hogy a halmazelméleti fogalmakkal tisztában vannak-e. A c) rész egy összeadást és ismét egy százalékszámítást foglal magában, amire szintén 2 pont jár, bontás nélkül. Tehát ha a halmazábrát rosszul töltötte ki, akkor rossz összeget kap a számítás elején, így a keresett százalék sem lesz helyes, így rögtön 2 pontot veszít a vizsgázó. Az érettségi javítási-értékelési útmutatójában bevett szokás a kettős vonalak használata: a logika egységek elkülönítésére, ami azt jelenti, hogy ha az előző részfeladatban kapott eredmény rossz, de a következő részfeladatban azzal a helytelen adattal jól számol, tehát az adott feladat megoldási módját ismeri, csak rossz eredménnyel számol, akkor a részfeladatra maximális pontszám adható. Ennél a feladatnál nem szerepel ez a kettős vonal, viszont a javítási-értékelési útmutató bevezetőjében leírják, hogy a részfeladatok külön logikai egységeknek számítanak. Ez a pontozás túlságosan szigorúnak tűnik, ugyanúgy, mint az a) részben. A d) részfeladat éri a legtöbb pontot a feladatban, ami 7-et jelent. 1 pontot ér az, ha a vizsgázó kiszámítja, hogy a 12. évfolyamon hány ember látogatta, illetve nem látogatta a rendezvényeket. Szintén 1 pont adható arra, ha kiszámolják, közülük hányan olvasták az Iskolaéletet, bár ez a rész két számítást foglal magában. Az kiválasztás összes lehetőségének megadása 1 pont, majd a rendezvénylátogatók és nem-látogatók közül a kiadványt olvasók kiválasztásának lehetőségeinek kiszámolása szintén 1 pontot ér, bár ez is két számítást igényel. Ezután a kedvező esetek számának meghatározására is 1 pont jár. A valószínűség képletbe való behelyettesítése 1 pont, és a valószínűség kiszámítása is 1 pont. A feladat értékelésében a súlyozások kissé eltolódtak, hiszen a pontok felosztása nem feltétlenül tükrözi a mögöttes tudást.

17. Statisztikai adatok szerint az 1997-es év utáni években 2003-mal bezárólag a világon évente átlagosan 1,1%-kal több autót gyártottak, mint a megelőző évben. A 2003-at követő években, egészen 2007-tel bezárólag évente átlagosan már 5,4%-kal gyártottak többet, mint a megelőző évben.

2003-ban összesen 41,9 millió autó készült.

a) Hány autót gyártottak a világon 2007-ben?

b) Hány autót gyártottak a világon 1997-ben?

Válaszait százezerre kerekítve adja meg!

2008-ban az előző évhez képest csökkent a gyártott autók száma, ekkor a világon összesen 48,8 millió új autó hagyta el a gyárakat. 2008-ban előrejelzés készült a következő 5 évre vonatkozóan. Eszerint 2013-ban 38 millió autót fognak gyártani. Az előrejelzés úgy számolt, hogy minden évben az előző évinek ugyanakkora százalékával csökken a termelés.

c) *Hány százalékkal csökken az előrejelzés szerint az évenkénti termelés a 2008-at követő 5 év során? Az eredményt egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!*

d) *Elfogadjuk az előrejelzés adatát, majd azt feltételezzük, hogy 2013 után évente 3%-kal csökken a gyártott autók száma. Melyik évben lesz így az abban az évben gyártott autók száma a 2013-ban gyártottaknak 76%-a?*

A feladat a) és b) részfeladatban a vizsgázóknak kamatos kamatot kell számolniuk, az a) részben növekedés szerepel, a b) részben pedig csökkenés, de a modell mindkét részfeladatban azonos: a kamatos kamatra vonatkozó képletbe kell behelyettesíteniük az adatokat. Így ez a feladat a sorozatok, azon belül a kamatos kamat témakörébe tartozik. A c) részben az adatokból egyenletet kell felírniuk, aztán megoldaniuk. A d) részben az adatok felvétele után egy exponenciális egyenlethez jutnak a vizsgázók, melyet aztán a logaritmus alkalmazásával tudnak megoldani.

A feladat szövege jól van megfogalmazva, minden szükséges adat szerepel a feladat szövegében. A feladat kontextusa a valósághoz kapcsolódik, ezért ez a feladat egy valóságos matematikai probléma. A részfeladatok megoldási módszere és megoldása nyitott. A feladatok szövege külön egyik részben sem kér indoklást, ezért csak a részfeladatok megoldásának levezetése kell, hogy szerepeljen a feladatlapon. A közbeeső lépések száma eltérő a különböző részfeladatokban:

a) A vizsgázóknak meg kell állapítaniuk a növekedés szorzószámát, majd az eltelt évek számát, fel kell írniuk a kamatos kamat képletét, majd ki kell számolniuk a gyártott autók számát a képlet segítségével. Így ez a részfeladat négy lépésből áll.

b) Ennél a feladatnál szintén meg kell határozni a csökkenés szorzószámát és az évek számát, fel kell írniuk a képletet, végül ki kell számolniuk az értéket. Így ennek a feladatnak a felépítése megegyezik az a) rész felépítésével, csak az egyikben növekedés, a másikban csökkenés szerepel, így ez a részfeladat szintén négy lépésből áll.

c) Ebben a részfeladatban szintén meg kell határozni a kérdezett évek számát, és fel kell írni az összefüggést, melyben az ismeretlen a csökkenés szorzószáma, majd végül ki kell fejezni az ismeretlent. Így ez a feladat szintén kamatos kamatszámítás, csak más komponensre kérdez rá a feladat, mint az előző kettő. A feladat három lépésből áll.

d) Ez a részfeladat a kamatos kamatszámítás képletéből ismét egy másik komponensre kérdez rá, mégpedig a kitevőre. Megint fel kell írni a számításhoz szükséges képletet, tízes alapú logaritmusát kell venni mindkét oldalnak, és ki kell fejezni az ismeretlent. Tehát a feladat szintén három lépésből áll.

Bár a feladat valóságos matematikai feladat, a megoldásához mégis ismeret-transzfer szükséges, hiszen az egész feladatban a kamatos kamatszámítás képletével kell dolgozni, annyi különbséggel, hogy az első két feladatrészben a százalékértéket kell kiszámítaniuk, a harmadik feladatrészben a százaléklábat kell meghatározniuk, a negyedik részben pedig az eltelt évek számát kell kiszámolniuk.

A javítási útmutató elemzéséből kiderül, hogy az első két részfeladatban minden lépés 1 pontot ér, ez a felbontás reálisnak tűnik. A c) részben1 pont jár azért, hogy a vizsgázó ismeretlent vezet be a csökkenés szorzószámára és megállapítja az évek számát, majd felírja az egyenletet. Az egyenlet rendezésére is 1 pont jár és arra is, hogy a vizsgázó tudja, hogy ötödik gyököt kell vonni, majd a csökkenés megállapítására is 1 pont adható. Az értékelés nem adja vissza a befektetett munka mértékét és súlyát, hiszen az utolsó két lépés között van egy fontos logikai lépés, melyet nem értékelnek egyértelműen a szerkesztők. Ez fontos része a feladatnak, hiszen a vizsgázóknak tudniuk kell, hogy a gyökvonás után kapott eredmény nem a változást mutatja, hanem azt, hogy a következő évi termelés hány százaléka az adott évinek. Az, hogy az egyenlet rendezése ugyanannyi pontot ér, mint ez a lépés azt mutatja, hogy a szerkesztők nem súlyozták rendesen a különböző lépéseket. A d) részben 1 pont jár arra, hogy a vizsgázó felírja az alapegyenletet és bevezeti az ismeretlent a kitevőben. 1 pontot ér, hogy mindkét oldal tízes alapú logaritmusát veszi a tanuló, és az is, hogy a logaritmus azonosságai alapján rendezi az egyenletet. Majd az ismeretlen kifejezéséért szintén 1 pont jár. Szöveges válaszra, vagyis a megfelelő év kiszámítására is egy pont adható. Így a teljes feladatra 17 pont jár.

18. Az egyik csokoládégyárban egy újfajta, kúp alakú desszertet gyártanak. A desszert csokoládéból készült váza olyan, mint egy tölcsér.

A külső és a belső kúp hasonló, a hasonlóság aránya $\frac{6}{5}$*. A kisebb kúp adatai: alapkörének sugara 1 cm, magassága 2,5 cm hosszú.*

a) Hány cm^3 *csokoládét tartalmaz egy ilyen csokoládéváz? A választ tizedre kerekítve adja meg!*

Az elkészült csokoládéváz üreges belsejébe marcipángömböt helyeznek, ezután egy csokoládéból készült vékony körlemezzel lezárják a kúpot.

b) Hány cm a sugara a lehető legnagyobb méretű ilyen marcipángömbnek? A választ tizedre kerekítve adja meg!

A marcipángömböket gyártó gép működése nem volt hibátlan. A mintavétellel végzett minőség-ellenőrzés kiderítette, hogy a legyártott gömbök 10%-ában a marcipángömb mérete nem felel meg az előírtnak.

c) A már legyártott nagy mennyiségű gömb közül 10-et kiválasztva, mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között pontosan 4-nek a mérete nem felel meg az előírásnak? (A kérdezett valószínűség kiszámításához használhatja a binomiális eloszlás képletét.)

A feladat a) és b) része a geometria, azon belül a térbeli alakzatokkal kapcsolatos témakörbe tartozik, a c) rész pedig a kombinatorikus valószínűség-számítás témakörébe sorolható.

Az a) részfeladat megoldásában a vizsgázóknak ki kell számolniuk a nagy kúp térfogatát, ehhez a hasonlóság arányát ismerve a kisebb kúp adataiból ki kell számolniuk a nagyobb kúp alapkörének sugarát és magasságát. Ezután a belső kúp térfogatát is ki kell számolniuk, majd a nagyobb térfogatból ki kell vonni a kisebb test térfogatát, így megkapják a választ az a) kérdésre.

A b) feladatban a belső kúp beírható gömbjének sugarát kell kiszámolniuk a vizsgázóknak. Ehhez tudniuk kell, hogy a kúp keresztmetszete egy egyenlőszárú háromszög és ennek a háromszögnek kell a beírható körének sugarát kiszámítaniuk, így a feladat átfogalmazódott térgeometriából síkgeometriába. A feladat megoldásához ki kell számolniuk a háromszög szárainak hosszát és tudniuk kell, hogy a beírható kör középpontja a háromszög szögfelezőinek metszéspontja. Szükséges ismeret még, hogy az egyenlőszárú háromszögben az alaphoz tartozó magasság az alappal szemben fekvő szög felezője és hogy a beírható kör középpontja egyenlő távolságra van mindhárom oldaltól, így az oldalak és a kör érintkezési pontjába húzott sugár merőleges az oldalra. Így a vizsgázók két hasonló háromszöget kapnak, és a hasonlóság arányával számolva megkapják a beírt kör sugarát.

A c) feladatban annak a valószínűségét kell megadniuk a vizsgázóknak, hogy 10 kiválasztott gömbből 4 gömbnek a mérete nem felel meg az előírásnak. A vizsgázók használhatják a binomiális eloszlás képletét, ehhez tudniuk kell, hogy a képlet mely változói mit jelölnek.

A feladat szövege korrekten van megfogalmazva, minden lényeges információt tartalmaz és nem túldefiniált. A feladat kontextusa matematikán kívüli, olyan információkra kérdez rá, melyek valóban előfordulhatnak az életben. A harmadik részfeladat zárt, mind a megoldás folyamatát, mind a megoldás számát tekintve; az első és a második részfeladat pedig nyitott, hiszen kétféleképpen is ki lehet számolni a nagyobb kúp adatait és a beírt kör sugarát. Indoklás egyik résznél sem szükséges, csak a megoldás folyamatát kell részletesen levezetni.

A munkaszükséglet tekintetében a feladatok eltérő lépésszámmal rendelkeznek:

a) Az első megoldáshoz a vizsgázóknak tudniuk kell, hogy hasonló testek éleinek arányát köbre emelve megkapjuk a térfogataik arányát. Így a kisebb kúp térfogatából egy szorzás segítségével megkaphatják a nagyobb kúp térfogatát, majd egy kivonással a végeredményt. Ez a megoldási folyamat három lépésből áll. A második megoldás első lépése, hogy a vizsgázó kiszámolja a külső kúp adatait (alapkör sugara és magasság). Ehhez a belső kúp adatai és a hasonlóság aránya szükséges, majd egy-egy szorzással mindkét alapadat megkapható. Ezután a kúpok térfogatát kell kiszámolniuk a vizsgázóknak, majd a nagyobb kúp térfogatából ki kell vonniuk a kisebb kúp térfogatát, így megkapják a desszerthez szükség csokoládémennyiséget, melyet a végén tizedre kerekítve kell megadni. Tehát a feladat 5 lépésből áll.

b) A feladatrész megoldásához ajánlatos vázlatot készíteni, ezután az egyenlőszárú háromszöggel és a beírható körével kapcsolatos ismeretek alapján fel kell venni az adatokat. A Pitagorasz-tétel segítségével ki kell számolniuk a háromszög szárainak hosszát, majd a hasonlóságot kihasználva, felírva a hasonlóság arányát, ki kell számolniuk a keresett sugarat. Ez a megoldás két lépésből áll.

A másik megoldási mód a háromszög szögein alapszik, hiszen a beírható kör középpontja a szögfelezők metszéspontja. Ehhez a megoldáshoz a háromszög alapon fekvő szögeit kell kiszámolniuk a vizsgázóknak, amit az egyik szár kiszámítása után a szögfüggvények valamelyikével kell kiszámolniuk. Ezután ismét a szögfüggvényeket kell használni a sugár kiszámítására. Ez a megoldás három lépésből áll.

c) A részfeladathoz a megfelelő változók ismeretében a binomiális eloszlás képletét kell használni. Ki kell számolni, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy a gömb nem a megfelelő méretű, ebből ki kell számolni, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy megfelelő a gömb mérete. Ezek egymást kizáró események, ezért 1-ből kell kivonni az előbb említett valószínűséget. Ezután már csak a képletbe kell behelyettesíteni az adatokat: a kiválasztott gömbök számát, a nem megfelelő méretű gömbök számát, és annak a valószínűségét, hogy nem megfelelő gömböt választunk ki. A számítások elvégzése után megkapják a keresett valószínűséget. Így a megoldás folyamata három lépésből áll.

A feladathoz ismeret-transzfer szükséges, miután a hétköznapi módon megfogalmazott problémákat átültetik a matematika világába. Ettől kezdve olyan ismereteket kell használniuk, melyeket már tanultak, használtak.

A javítási-értékelési útmutatót megvizsgálva kiderül, hogy a feladat készítői milyen lépéseket értékelnek a megoldás során. Az a) részben 1 pontot ér, hogy tudják, illetve alkalmazzák azt, hogy a hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbével egyenlő. Majd még 1 pont, ha helyesen felírják az összefüggést, aztán ha kiszámítják a belső kúp térfogatát, szintén 1 pontot kapnak. Az összefüggésbe való behelyettesítésért is 1 pont jár, majd a kivonásért még 1. Így összesen 5 pontot ér ez a feladat. A lépések pontozásánál a súlyozás elcsúszik, hiszen kétszer jutalmazzák, hogy a vizsgázó felírja a hasonló testek térfogata közötti összefüggést, egyszer változókkal, másodszor behelyettesítve.

A b) részben 1 pontot ér, ha a vizsgázó tudja, hogy a kúp beírt gömbjének sugarát kell kiszámolni. Szintén 1 pontot ér, ha el tudja készíteni a testek tengelymetszetét, majd a hasonló háromszögek közötti összefüggések felírására is 1 pont jár. A szár kiszámolására 1 pont adható. Majd a sugár kiszámítására felírt hasonlósági összefüggésért és az összefüggés rendezésért 1-1 pont adható. Végül a sugár helyes meghatározása éri az utolsó 1 pontot. Így összesen 7 pontot ér ez a részfeladat. Ennél a részfeladatnál rendben van a pontok bontása.

A c) részben a nem megfelelő méretű gömb kiválasztásának valószínűségének kiszámítására 1 pont jár, majd a valószínűség komplementerének kiszámítása szintén 1 pont. Ezután a képlet felírása ismét 1 pont, és a változók megadása megint 1 pont. Majd a keresett valószínűség kiszámítására adható az utolsó 1 pont. Tehát összesen 5 pontot ér a feladat. Ennek a részfeladatnak a pontozásában is van meggondolatlan lépés, hiszen a feladatlapon feltüntetik, hogy a vizsgázók használhatják a binomiális eloszlás képletét, majd ennek felírásáért adnak 1 pontot, ami nem éppen ésszerű döntés.

4.3 A középszintű érettségi értékelése

A középszintű érettségiben a vizsgaleírásban megadott arányok a tisztán matematikai és a hétköznapi élethez kapcsolódó feladatokat tekintve érvényesülnek. Az első részben a 12 feladatból 4 a valósághoz kapcsolódó feladat, a második részben pedig a feladatok fele hétköznapi kontextusra épül.

A témakörök tekintetében a valószínűség-számítás nagyobb hangsúlyt kap, mint ahogy az a vizsgaleírásban szerepel, holott éppen csak a hétköznapi élethez szükséges alapfogalmak és alapösszefüggések ismeretét kellene az érettségiben számon kérni. Bár egyik feladat sem igényel többet a középszintű tananyagnál, viszont több feladatban szerepel valószínűség-számításhoz kapcsolódó feladat.

A középszintű érettségi első részét hatékonyabbá lehetne tenni úgy, hogy a két igaz-hamis típusú feladatban a válaszokhoz indoklást is kellene adni a vizsgázóknak, hiszen így a helyes válaszok eltalálására 50% esélye van a diákoknak. Ebben az esetben a pontozást úgy kellene kialakítani, hogy a helyes válaszra csak akkor járna az 1 pont, ha mellette szerepel a helyes a indoklás is. Így csökkenteni lehetne a ráhibázás esélyét.

A javítási-értékelési útmutató nagy segítséget jelent a javító tanároknak, mert nem csak a megoldási lépéseket tartalmazza, hanem a megoldási lépésekre adható részpontok is szerepelnek az útmutatóban. Előfordulhat persze, hogy a vizsgázó nem ugyanazzal a módszerrel jut el a megoldáshoz, de az útmutatóban erre a helyzetre is szerepel megjegyzés: nem az útmutatóban szereplő, de helyes megoldásra maximális pontszám adható. A közép szintű érettségi második részében pozitívum, hogy a részfeladatok külön logikai egységnek számítanak, hiszen így egy hibát a készítők nem büntetnek többször. A javítási-értékelési útmutatóban szereplő megjegyzések nagy segítséget jelentenek a javítóknak.

A második részben előfordulnak olyan pontozási problémák, hogy a részpontok szétosztása nem tükrözi a lépések nehézségét, esetleg fontosságát. Három feladatnál jelentkezik az a probléma, hogy képletek felírásáért és a behelyettesítésért is külön pontot adnak a feladat készítői; az egyik ilyen kirívó példa erre a 18/c feladat, ahol a készítők megjegyzik, hogy használhatják a vizsgázók a binomiális eloszlás képletét, majd ennek felírására 1 pontot adnak. A 15/d feladatban egy táblázat kitöltésére kérik a vizsgázókat, ahova 7 értéket kell kiszámítaniuk. Az egész táblázat kitöltésére 1 pont jár, viszont az útmutatóban nem szerepel arra utasítás, hogy mi a teendő, ha egy értéket a vizsgázó elszámol. Ha ekkor ezt a részpontot elveszíti a vizsgázó, akkor az aránytalanul szigorú döntés lenne. A legjobb megoldás az lenne, ha megjegyzésben odaírnák: maximum 2 hibás eredményre megadható az 1 pont. Ugyanebben a feladatban 1 pontot ér az, ha a vizsgázó sorba rendezi ezt a hét értéket. Tehát a készítők 1 ponttal jutalmazzák azt, hogy a vizsgázók képesek hét számot növekvő sorba állítani. Úgy gondolom, ezért nem kellene külön pontot adni, hiszen ez egy alapvető mechanizmus, melyet ezen a szinten nem így kellene értékelni. A 16/a feladatban a számolásra, levezetésre nem jár pont, csak a helyes megoldás ér 2 pontot, a megjegyzésben szerepel, hogy a 2 pont nem bontható. Ez pontosan egy olyan helyzet, hogy a számolást és az eredményt külön kellene pontozni, tehát bontani kellene azt a 2 pontot, mert lehet, hogy csak egy számolási hiba történt, amit nem kellene 2 pont levonással büntetni.

4.4 Az emelt szintű érettségi elemzése

Az emelt szintű érettségi írásbeli része szintén két részre van felosztva, melynek megírására a vizsgázóknak 240 perc áll rendelkezésükre. Az első rész négy feladatból áll, melyekre összesen 51 pont adható, a második rész pedig öt feladatot tartalmaz, melyekre egyenként 16 pont jár, ezek közül négyet kell megoldania a vizsgázónak, így az emelt szintű írásbeli érettségin összesen 115 pontot lehet szerezni. Harmadik részként az érettségihez tartozik egy 20 perces szóbeli vizsga, ahol egy húzott tételen belül kell a vizsgázónak egy definíciót pontosan kimondania, egy tételt pontosan kimondania és bizonyítania, egy kitűzött feladatot megoldania, és a témakör matematikán belüli vagy kívüli alkalmazását bemutatnia. Erre a vizsgázó 35 pontot szerezhet, előre megadott szempontrendszer alapján.

A vizsgaleírásban hangsúlyozzák, hogy a feladatok 30-40%-a szöveges, hétköznapi élethez kapcsolódó, modellalkotást igénylő feladat. A feladatlap tartalmi arányai eltérnek a középszintű feladatlaptól:

Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok	25%
Aritmetika, algebra, számelmélet	20%
Függvények, az analízis elemei	20%
Geometria, koordinátageometria	20%
Valószínűség-számítás, statisztika	15%

Az emelt szintű érettségi elemzését ezeknek az arányoknak az ellenőrzésével és a szöveges és nem szöveges feladatok arányának a vizsgálatával fogom kezdeni.

4.4.1 Az emelt szintű érettségi első része

1. *Adott az f és g függvény.*

$f\colon\ D_f = \mathbb{R} / \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\} \qquad x \mapsto (tgx + ctgx) \cdot 2\sin x .$

a) *Igazolja, hogy az így definiált f függvény konstans!*

$g\colon\ D_g = [-7; 7] \qquad x \mapsto x^2 - 6|x| .$

b) *Számítsa ki a g függvény zérushelyeit!*

c) *Adja meg a g függvény értékkészletét!*

A feladat a függvények és az analízis elemei témakörbe tartozik, hiszen mindhárom részfeladatban függvényekkel kell dolgozniuk a vizsgázóknak. Az a) részben ekvivalens átalakításokat kell végrehajtaniuk egy trigonometrikus függvényen úgy, hogy bebizonyítsák, hogy a függvény konstansfüggvény. A b) és a c) részekben egy másik függvény zérushelyeit és értékkészletét kell megadniuk.

Az a) rész megoldásához a vizsgázóknak először a tangenst és kotangenst tartalmazó kifejezéseket kell átírniuk a definíció szerint, majd közös nevezőre kell hozniuk a zárójelen belül. Ezután a tört számlálóját át tudják írni az egyik addíciós tétel alapján, majd a szorzás és egyszerűsítés elvégzése után már meg is kapják a végeredményt, hogy valóban egy konstansfüggvény szerepel az a) feladatban.

A b) feladatot kétféleképpen lehet megoldani: az egyik az, hogy a vizsgázó rájön, hogy a g függvény páros, ezért elég az abszolutértékes kifejezés egyik esetét megvizsgálni, azután a szimmetriára hivatkozva megkapható az összes zérushely. A másik megoldási mód, hogy az abszolutértékes kifejezéseket felbontják a két esetre, egyenlővé teszik a kifejezéseket nullával, és megoldják mindkét egyenletet, így megkapják a zérushelyeket.

A c) feladatban a függvény értékkészletét kell megadniuk a megadott értelmezési tartományon. A hozzárendelési szabályt fel kell bontaniuk az abszolutértékes kifejezés két esetére, majd a kapott másodfokú kifejezéseket teljes négyzetté alakítva megkeresni az értelmezési tartomány azon elemeit, melyekre a függvény maximális, illetve minimális. Így a teljes értékkészlet kapják a g függvény folytonossága miatt.

A feladat szövege jól van megfogalmazva, minden információt tartalmaz, ami a megoldáshoz szükséges. A feladat kontextusa tisztán matematikai. Az a) részfeladat megoldási módját és megoldásszámát tekintve zárt, míg a b) és a c) részfeladat a megoldás mód szempontjából nyitott, a megoldások számát tekintve zárt. Egyik részfeladat sem igényel külön indoklást, csak a megoldások levezetésének kell szerepelnie a dolgozatban.

A közbeeső lépések és a feladatokra járó részpontok nagyjából összhangban vannak mindhárom részfeladat esetében:

a) Az első lépés a tangenst és kotangenst tartalmazó kifejezések definíció szerinti átírása. Erre a feladat készítői 1 pontot adnak. A következő lépés a zárójelen belüli kifejezések közös nevezőre hozása, ami szintén 1 pontot ér. Ezután következik két lépés, amit nem jutalmaznak a feladat készítői külön, ezek pedig a következők: a tört számlálójában egy addíciós tétel használata, majd ezután egy egyszerűsítés. Ezzel megkapják, hogy a kifejezés értéke 2, amivel belátják, hogy valóban konstansfüggvényt definiáltak az a) feladatban. Ha a vizsgázók eljutnak ahhoz, hogy a függvény értéke 2, akkor megkapják a feladatra járó harmadik pontot. Tehát a feladatra összesen 3 pont jár és 4 lépésből áll.

b) A feladat pontozása és a közbeeső lépések száma megegyezik mindkét megoldási mód esetében. Ha a függvény paritását használja fel a vizsgázó a feladat megoldásához, akkor annak megállapítására, hogy a függvény páros, 1 pont jár. Ezután az értelmezési tartomány megválasztására és a zérushelyek kiszámítására 1 pontot adnak. Majd ezeknek a zéruhelyeknek az egész értelmezési tartományra való kiterjesztésére szintén 1 pont adható. Így ez a megoldási mód 3 lépésből áll és 3 pontot ér. A második megoldási mód az abszolutértékes tag esetszétválasztásán alapul. Ezzel a vizsgázók két másodfokú függvényt kapnak, amelyeknek a zérushelyeit kell megkeresniük. Erre 2 pont jár, ha a vizsgázók helyesen választják szét az eseteket és megjelölik a megfelelő tartományokat. Majd a zérushelyek meghatározására 1 pont adható. Így ez a megoldás is 3 lépésből áll és 3 pontot ér.

c) Ebben a részfeladatban az esetek szétválasztása utáni teljes négyzetté alakítások 2 pontot érnek, és mindkét esetet tekintve összesen 4 lépésből állnak. Ezután a legkisebb és a legnagyobb függvényértékek meghatározása 1-1 pontot ér és 1-1 lépésből áll. Majd az utolsó lépés a feladat megoldásában az értékkészlet helyes meghatározása, ami 2 pontot ér. Így összesen 4 lépésből áll és 6 pontot ér. Ha a vizsgázó grafikus megoldási módot választ, akkor az ábrán szerepeltetnie kell az értelmezési tartományt és az értékkészletet, így erre a megoldásra is maximális pontszám adható.

A javítási-értékelési útmutató több helyen szerepeltet megjegyzést a feladat pontozásában:

- A b) részfeladatban az esetszétválasztásnál csak az egyik esetnél definiálja az értelmezési tartományt, akkor a 2-ből 1 pont adható.
- Szintén a b) feladatban adódik a probléma, hogy ha a vizsgázó csak az egyik esettel dolgozik, akkor elvi hiba miatt a feladatra egy pont sem jár.
- A c) részfeladatban az értékkészlet megadása hibás jelöléssel 1 pontot ér a 2-ből.

- Ha a c) feladatban a vizsgázó nem veszi figyelembe az értelmezési tartományt, akkor maximum 4 pont adható a megoldásra. Szintén 4 pontot ér, ha a vizsgázó a grafikus megoldási módot választja és mindkét képlettel megadott másodfokú függvényt a teljes értelmezési tartományon ábrázolja. Így összhangba hozták a feladat készítői a grafikus és algebrai megoldási módok pontozást, ami a hitelesség szempontjából jó, hiszen ugyanúgy értékelik mindkét megoldási módot.
- Ha a vizsgázó a c) feladatban csak az egyik esettel dolgozik, akkor maximum 3 pontot lehet adni a megoldásra. Ez korrekt lépés, hiszen ha a b) részben elhibázta azt, hogy csak egy esettel foglalkozik és ott elvi hiba miatt nem kap pontot, akkor ezt már nem büntetik a feladat készítői a c) részben is, hiszen egyszer már volt a hiba miatt pontlevonás.

Ez a feladat megfelelő szintű az emeltszintű érettségihez és a pontozása is jól van felosztva: minden fontos lépésre jár pont és a lépések közötti súlyozás sem csúszik el.

2. *Kilenc számkártya fekszik az asztalon.*

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

a) Rakja négy csoportba a kilenc számkártyát úgy, hogy egyikben se legyen együtt egy szám és egy nála kisebb osztója! Adjon meg két lehetséges csoportosítást!

b) Berci körbe rakta a kilenc számkártyát egy nagy papírra, és ha két szám között legalább kettő volt a különbség, akkor a két kártyát összekötötte egy vonallal. Összesen hány vonalat rajzolt meg ily módon Berci?

Csaba az első hat kártya felhasználásával (1, 2, 3, 4, 5, 6) két háromjegyű számot készített. Hívjunk egy ilyen számpárt duónak. (Például egy lehetséges duó: „415 ; 362”.)

A hat számból több ilyen duót lehet készíteni. Két duót egyenlőnek tekintünk, ha ugyanaz a két különböző háromjegyű szám alkotja. Például a „415 ; 362” és a „362 ; 415” duó egyenlők, de a „362 ; 145” már egy másik duó.

c) Hány különböző duót lehet a hat számkártyából elkészíteni?

A feladat a logika, gráfelmélet és kombinatorika témakörbe sorolható. Az a) feladat megoldása során azt kell megvizsgálniuk a vizsgázóknak, hogy mely kártyák nem szerepelhetnek egy csoportban, azaz a 2, 3, 4 többszöröseit kell különválasztaniuk. Ezután két csoportot kell létrehozniuk. A b) részben azokat a számokat kell összekötni, amelyek között legalább 2 a különbség. Ebben a feladatban egy gráffal kell dolgozniuk a vizsgázóknak. Először meg kell határozniuk, hogy mely számokat nem köthetik össze, aztán meg kell határozniuk azt, hogy hány összekötő vonal húzható összesen, így az összes vonal számából kivonva azokat, amelyek szomszédos számokat kötnének össze, megkapják, hogy mennyi összekötő vonal szerepel az ábrán. A c) részben kétféle úton is el lehet jutni a feladat megoldásához. Az egyik azon alapszik, hogy a számjegyekből képzett duókat megkaphatjuk a 6 számjegy permutációjaként, ha a számjegyeket hármas bontásban adjuk meg. Viszont nem számít a hármasok sorrendje a duón belül, ezért ezzel a számolással az eseteket duplán számoltuk, így az esetek számát elosztva 2-vel, megkapjuk a különböző duók számát. A másik megoldás a kombináción alapszik, azaz azt kell vizsgálni, hogy a 6 számjegy közül hányféleképpen lehet kiválasztani az egyik hármast, és az már meghatározza a másik hármast. Ezután azt kell vizsgálni, hogy a kiválasztott hármasokon belül hányféle sorrendben helyezkedhet el a 3-3 szám. Majd ezeknek a lehetőségeknek a számát összeszorozva az összes eset dupláját kapjuk, a duók egyenlősége miatt.

A feladat szövegének megfogalmazása korrekt, minden szükséges információt tartalmaz. A feladat kontextusa hétköznapi külsőbe bújtatott matematikai. A részfeladatok az a)-t kivéve megoldási módjukat tekintve nyitottak, viszont megoldásukat tekintve mindhárom részfeladat zárt. A feladat szövege külön egyik részben sem kér indoklást, tehát a megoldások levezetését kell szerepeltetni a dolgozaton.

A közbülső lépések száma ennél a feladatnál is nagyjából összhangban van a pontozással:

a) Az első lépés azoknak a számjegyeknek a meghatározása, amelyek nem kerülhetnek egy csoportba, ez 1 pontot ér. A következő lépés az, hogy a vizsgázó felismeri, hogy az 1-es számjegynek mindenféleképpen egyedül kell szerepelnie egy csoportban. Ezt szintén 1 ponttal jutalmazzák a feladat készítői. A harmadik lépés a feltételeket kielégítve a két csoport megadása. Egy helyesen megadott csoport 1 pontot ér. Így a feladat összesen 4 lépésből áll, és 4 pontot ér.

b) Ennek a részfeladatnak a megoldásában az első lépés lehet annak a meghatározása, hogy mely számok között nem húzható a feltételt kielégítő összekötő vonal. Ha ezt helyesen megteszi a vizsgázó, akkor azért 1 pont jár. Szintén 1 pontot ér, ha a vizsgázó meghatározza, hogy ha minden számjegyet minden számjeggyel összekötünk, akkor hány vonal keletkezik. Ezután a harmadik lépés az, hogy az összes összekötő vonal számából ki kell vonni a szomszédos számokat összekötő vonalak számát. Erre ismét 1 pont jár. Majd végül a vonalak számának megadása jelenti a feladatra adható utolsó 1 pontot. Így a feladat 3 lépésből áll, és 4 pont jár a helyesen megoldott feladatért. Ugyanennyi pontot ér az is, ha a vizsgázó egy 9 csúcsú gráfot rajzol, és annak éleit számolja össze; és az is teljesen jó megoldás, maximális pontszámért, ha egy kilencszög átlóit számolja össze a vizsgázó, viszont ebben az esetben arra figyelnie kell, hogy nem csak az átlókat kell beleszámolni, hanem az 1-es és a 9-es csúcsot összekötő oldalt is. Ha a vizsgázó ezt elmulasztja, akkor 1 pontot veszít a 4-ből.

c) Az első megoldás első lépése az, hogy észreveszi a vizsgázó, hogy a hat számjegy permutációja hármas bontásban egy duót ad, ez 2 pontot ér. A második lépés a sorba rendezési lehetőségek számának meghatározása, 1 pontért. A harmadik lépés az, hogy a vizsgázó feltünteti, hogy ebben az esetben a duók egyenlőségének definíciójából következően, minden esetet duplán számolt; ez szintén 1 pontot ér. Ezután az osztás elvégzése és a helyes duószám megadása következik. Ez a lépés megint 1 pontot ér. Így a feladat összesen 3 lépésből áll, amelyek összesen 5 pontot érnek. Ha a megoldás során derül csak ki a megoldásban szereplő első két lépés, azaz ha a vizsgázó ezeket a megjegyzéseket külön nem szerepelteti, akkor is megadható ez a 3 pont.

A második megoldásnál 1-1 pontot érnek a következő lépések:

- a különböző hármasok számának meghatározása
- a hármasokban szereplő számjegyek sorba rendezési lehetőségeinek meghatározása
- az összes lehetséges duó számának meghatározása
- annak az észrevétele, hogy minden esetet kétszer számolt
- a duók számának meghatározása

Ez a feladat is ideillő, azaz minden, az emeltszintű érettségit érintő követelménynek eleget tesz, és a javítási útmutatóban szereplő pontozás is megfelelő.

3. *Egy mértani sorozat első három tagjának összege 91. A hatodik, a hetedik és a nyolcadik tag összege 2912. Hány tizenhárom-jegyű tagja van a sorozatnak?*

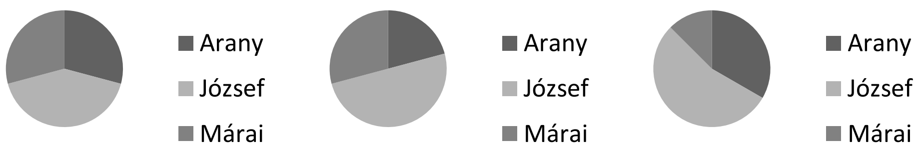
A feladat a sorozatok témakörébe tartozik, ami a függvények és az analízis elemei című nagyobb témakör része. A feladat megoldásához a vizsgázóknak a megadott adatok alapján ki kell számolniuk a sorozat első tagját és a hányadosát. Majd ezután fel kell írniuk a sorozat általános tagját, amire aztán egy egyenlőtlenséget kell felírniuk, melyet megoldva megkapják, hogy hány 13 jegyű tagja van a sorozatnak.

A feladat szövege jól van megfogalmazva, a feladatban feltett kérdés egyértelmű. A feladat kontextusa tisztán matematikai. A feladat mind a megoldási módját, mind a megoldásszámát tekintve zárt. A feladat szövege külön indoklást nem kér, viszont a feladat megoldásának levezetését szerepeltetni kell a dolgozatban.

A közbeeső lépések száma és a lépésekért járó pontok megegyeznek. Az első lépés a megoldásban a feladat szövegében megadott összefüggések felírása a mértani sorozat definíciójának segítségével. Két összefüggés szerepel a feladatban, ezért a két egyenlet felírása 1-1 pontot ér. Ezután a második egyenletből való kiemelés következik, ami szintén 1 pontot ér. Majd az első egyenlet behelyettesítésére a másodikba megint 1 pontját. Ebből az egyenletből a kvóciens kiszámítása 1 pont. A hányadost visszahelyettesítve az első egyenletbe megkapható a sorozat első tagja, 1 pontért. Ezután következik annak a kétoldalú egyenlőtlenségnek a felírása, amelyből kiszámolható, hogy hány tizenhárom-jegyű tagja van a sorozatnak. A helyes egyenlőtlenség felírására 2 pont adható. Majd az egyenlőtlenség mindhárom oldalának 10-es alapú logaritmusát kell venni, és azt megjegyezni, hogy ez egy ekvivalens lépés, hiszen a 10-es alapú logaritmus függvény szigorú monoton növekvő. Mindez 1-1 pontot ér. A következő lépés az egyenlőtlenségek megoldása, 1 pontért. Ezután már leolvasható a megoldásból, hogy milyen egész sorszámokra van 13-jegyű tagja a sorozatnak; ez szintén 1 pont. Végül az utolsó pont a feladatban arra jár, hogy meghatározza a vizsgázó, hogy a mértani sorozatnak hány tizenhárom-jegyű tagja van. Így a feladat összesen 11 lépésből áll és 13 pontot ér.

A javítási-értékelési útmutatóban szerepelnek különböző megjegyzések, melyek a javító tanárok munkáját segítik. Ilyen például az egyenlőtlenség felírása melletti megjegyzés, ami azt mondja, hogy ha a kitevőket eltéveszti a vizsgázó, akkor az azért járó 2 pont nem adható meg, viszont a többi helyesen elvégzett lépésére, még ha rossz értékkel történik is a számolás, megadható a pont. Egy másik fontos megjegyzés az, hogy ha a vizsgázó a megoldást számológép segítségével kapja meg, akkor az érte járó pontok csak akkor járnak, ha a megfelelő indoklást megadja. Ezek pedig a következők: meg kell állapítania, hogy a sorozat szigorú monoton növekvő, ez 2 pontot ér; szerepeltetnie kell 1-1 pontért, hogy melyik az a sorszám, ami még nem felel meg a feltételnek, és melyik az, amelyik már nem felel meg a feltételnek; ezután fel kell sorolnia a megfelelő pontszámokat, ez 2 pontot ér. Ha viszont semmilyen magyarázatot nem mellékel a számológépes megoldása mellé, akkor ez előbb felsorolt 6 pontból maximum 3 pontot kaphat meg a vizsgázó.

4. *Egy könyvkiadó minden negyedévben összesíti, hogy három üzletében melyik szépirodalmi kiadványból fogyott a legtöbb. A legutóbbi összesítéskor mindhárom üzletben ugyanaz a három szerző volt a legnépszerűbb: Arany János, Márai Sándor és József Attila. Az alábbi kördiagramok szemléltetik, hogy az üzletekben milyen arányban adták el ezeknek a szerzőknek a műveit. A kördiagramok az első üzletből 408, a másodikból 432, a harmadikból 216 eladott könyv eloszlásait szemléltetik.*



1. üzlet 2. üzlet 3. üzlet

a) *A kördiagramok adatai alapján töltse ki az alábbi táblázatot! Melyik szerző műveiből adták el a vizsgált időszakban a legtöbb könyvet?*

	1. üzlet	*2. üzlet*	*3. üzlet*	*Összesített forgalom*
Arany János				

Márai Sándor				
József Attila				
Összesen	*408*	*432*	*216*	

b) *Készítsen olyan oszlopdiagramot a táblázat alapján, amely a vizsgált időszakban a szerzők szerinti összesített forgalmat szemlélteti!*

A könyvkiadó a három üzletében minden eladott könyvhöz ad egy sorsjegyet. Ezek a sorsjegyek egy közös sorsoláson vesznek részt negyedévenként. A vizsgált időszakban azok a sorsjegyek vesznek részt a sorsoláson, amelyeket a fenti három szerző műveinek vásárlói kaptak. Két darab 50 ezer forintos könyvutalványt sorsolnak ki köztük.

c) *Mennyi annak a valószínűsége, hogy a vizsgált időszak sorsolásán mind a két nyertes sorsjegyet Márai Sándor egy-egy könyvéhez adták, és mindkét könyvet a 2. üzletben vásárolták? Válaszát három tizedes jegy pontossággal adja meg!*

A feladat a) és b) része a statisztika témakörébe tartozik, mert az a) részfeladatban kördiagramokról kell leolvasni az ábrázolt értékeket, a b) részben oszlopdiagramot kell készíteni. A c) rész pedig a valószínűség-számítás témakörébe sorolható.

Az a) feladatban a megadott középponti szögek és az összes eladott könyv számának segítségével ki kell számolniuk, hogy az egyes szerzők műveiből hány példány fogyott. Ehhez ki kell számolniuk, hogy egy fokhoz hány példány tartozik, ezután meg kell szorozni a középponti szögek nagyságával, így megkapható a keresett példányszám. Ezután a kapott értékek összeadásával a táblázat minden része kitölthető és az a szerző is egyértelműen meghatározható, akinek a legtöbb könyvét adták el. A b) részben az összesített forgalom oszlopban kapott értékekből kell a vizsgázóknak oszlopdiagramot készíteni, melyhez az a) részben minden hiányzó adatot kiszámoltak már. A c) részfeladatban először össze kell adni, hogy hány eladott példány van összesen. Ezután ki kell számolni, hogy hányféleképpen lehet kisorsolni a 2 nyerő sorsjegyet. Majd a kedvező esetek számát kell meghatározni, ami azt jelenti, hogy a 2. üzletben vásárolt Márai könyvek közül kerül ki a 2 nyertes sorsjegy. Az utolsó lépés a keresett valószínűség meghatározása a kedvező esetek száma/összes esetek száma modell segítségével.

A feladat szövege jól van megfogalmazva és egy a hétköznapi életben felmerülő problémán alapul. Mindhárom részfeladat a megoldás módszerét és megoldásszámát tekintve zárt. A feladat készítői egyik részfeladatnál sem kérnek külön indoklást, tehát megint a megoldás menetét kell leírni a dolgozatban.

A feladat teljesítése során a munkaszükséglet eltérő a három részfeladatnál, ugyanígy a pontozás is:

a) A már fent említett módon kell eljárni a táblázat kitöltéséhez, ami az első három oszlop esetében egy osztással és három szorzással jár. A negyedik oszlop esetében a sorokban szereplő értékeket kell összeadni. Majd ki kell választani az utolsó oszlop alapján, hogy melyik szerző műveiből adták el a legtöbbet. Így ez a feladat 4 közbeeső lépésből áll. Az oszlopok helyes kitöltése 1-1 pontot ér, majd az utolsó kérdésre adott válasz is egy pontot ér. Tehát a feladatra összesen 5 pont jár.

b) Ebben a részfeladatban a táblázat utolsó sorában szereplő értékeket kell oszlopdiagramon ábrázolni. 1 pontot ér, ha a vizsgázó a jó adatokat tünteti fel a diagramon. Szintén 1 pont adható, ha a diagram arányos és a vizsgázó célszerűen választja meg a diagram egységét. A feladatért járó utolsó pont akkor adható meg, ha az ábra rendezett és világos. Így a feladat összesen 3 lépésből áll, melyek mindegyike 1-1 pontot ér: az egység meghatározása, az oszlopok ábrázolása és az adatok feltüntetése.

c) A feladat megoldásához először a sorsolásban résztvevő sorsjegyek számát kell meghatározni, amit egy összeadással kell kiszámolni, 1 pontért. A következő lépés az összes esetek számának meghatározása, ami azt jelenti, hogy hányféleképpen lehet kiválasztani az összes sorsjegy közül a két nyerőt; ez szintén 1 pont. Ezután a kedvező esetek számának kiszámítása következik, ugyanúgy kell eljárni, mint az összes eset összeszámolásánál és ugyanúgy 1 pontot ér. A klasszikus valószínűségi modell képletét kell használni a megoldás utolsó lépésében, és megvan a keresett valószínűség. 1-1 pont jár a képletbe való behelyettesítésért, és a valószínűség kiszámításáért. Tehát a feladat 4 lépésből áll és 5 pont jár a helyes megoldásra.

A feladattal kapcsolatban felmerül néhány probléma. Az a) és a c) részre is egyaránt 5-5 pont adható, viszont az első részfeladatban lényegében 3 osztást, 4 szorzást, és 3 összeadást kell elvégezni. Ehhez képest a c) részben a kombináció képletét és a klasszikus valószínűségi modellt is alkalmazni kell. A feladat nem tűnik megfelelőnek egy emelt szintű érettségiben, hiszen egyik részfeladatban sem kell a vizsgázóknak a középszintű anyagon kívül más tudást használniuk. Inkább lehetne ez a feladat a középszintű érettségi második részének első három feladata közül az egyik, mint egy emelt szintű feladatsor része.

4.4.2 Az emelt szintű érettségi második része

5. Egy áruházban egy mosóport négyféle kiszerelésben árusítanak. Az első kiszerelés 50%-kal drágább a harmadiknál, és 20%-kal kevesebb mosópor van benne, mint a másodikban. A második 50%-kal több mosóport tartalmaz, mint a harmadik, és 25%-kal többe kerül, mint az első.

a) Az első három kiszerelés közül melyikben a legalacsonyabb a mosópor egységára?

A negyedik fajta kiszerelést úgy állították össze, hogy annak dobozán feltüntetett egységár megegyezett az első három kiszerelés átlagos egységárával.

b) Ha a legolcsóbb kiszerelésű dobozon 600 Ft egységárat tüntettek fel, akkor hány forint egységár szerepel a negyedik fajta dobozon?

A feladat az algebra témakörbe tartozik, mert a feladat szövege alapján a vizsgázóknak ki kell választaniuk egy-egy alap változót, aminek a segítségével a másik két mosóporra fel kell írniuk az egymáshoz viszonyított értéküket. Ezután össze kell hasonlítaniuk a három mosópor egységárát és ki kell választaniuk a legolcsóbbat. A b) részben az előző feladatban változóval megadott egységárak átlagát kell kiszámolniuk úgy, hogy a legolcsóbb mosópor egységárát megadta a feladat. Az átlag kiszámításával megvan a negyedik kiszerelés egységára.

A feladat szövege jól van megfogalmazva, talán a szövegezés miatt nehezebbnek is tűnik a feladat, mint amilyen valójában. A feladat kontextusa hétköznapinak tűnik, mivel az a) rész egy olyan problémát mutat be, ami a való életben is előfordulhat egy vásárlás alkalmával. Viszont ilyen összefüggésrendszerrel nem találkozhatunk egy boltban, ezért a feladat kontextusa inkább hétköznapi külsőbe bújtatott matematikai.

A b) kontextusa is megegyezik az a) kontextusával. Az a) rész megoldási módját tekintve nyitott, hiszen többféle módon is megválaszthatják a vizsgázók az ismeretleneket, megoldásszámát tekintve zárt. A b) rész mindkét szempontból zárt. A feladat készítői egyik részfeladatnál sem kérnek külön indoklást a vizsgázóktól, ez ismét azt jelenti, hogy a feladatok megoldásának menetét kell leírni mindkét részben.

A feladatok teljesítéséhez szükséges közbeeső lépések száma eltérő az a) és a b) feladatoknál, ugyanígy a pontozás is, hiszen a jóval hangsúlyosabb feladat az a) részben található. Erre a részfeladatra összesen 13 pont jár, míg a b)-re 3. Az a) feladatban az első lépés annak kiválasztása, hogy melyik mosópor melyik jellemzője legyen az ismeretlen. Itt több lehetőség is felmerül, hiszen 3 mosóporról van szó, és 3 jellemzőről: ár, tömeg, egységár. Az egységár definíciójából következik, hogy az előző két adat segítségével megkapható a mosóporok egységára. Az ismeretlenek és az összefüggések felírása után az összefüggések egyszerűbb alakra hozása következik. Ezután már látszik a válasz a kérdésre, mivel az egységárakat kell összehasonlítani, amik ugyanazokkal a változókkal vannak kifejezve, így könnyen összehasonlíthatóak. A feladat összesen 4 lépésből áll: az ismeretlenek megválasztása, az összefüggések felírása, egyszerűbb alakra hozás, legalacsonyabb egységár kiválasztása. A feladat pontozása összhangban van ezekkel a lépésekkel. Ha már kiválasztotta a vizsgázó, hogy melyik mosópor mely jellemzőjét nevezi el az ismeretlennel, a másik két mosópor ugyanezen jellemzőinek felírása az adott ismeretlennel 2-2 pontot ér. Ez a pontozás van érvényben az ár és a tömeg meghatározására. Az egységár definíciójának felírása 1 pontot ér, majd az egységár kifejezése a változókkal mindhárom mosópor esetében 1-1 pontot ér. Végül az utolsó pont a feladatban arra jár, hogy a vizsgázó meghatározza, hogy melyik mosópor egységára a legalacsonyabb. Így az a) részfeladatra 13 pont jár.

A b) feladat szorosan kapcsolódik az a) feladathoz, ami nem feltétlenül szerencsés, hiszen ha a vizsgázó valamit elhibáz a feladat első részében, akkor a második részt sem tudja majd emiatt megoldani. Viszont a javítási-értékelési útmutató felkészült erre a helyzetre is, hiszen ilyenkor a hibás számolásért csak egyszer kell pontot levonni, utána, ha helyesen számol a rossz eredménnyel, akkor arra megadható az érte járó maximális pontszám. A b) feladat 2 lépésből áll: az első, hogy az ismeretlennel kifejezett egységárak felírásába behelyettesíti a vizsgázó a megadott egységárat, ez 1 pontot ér. A következő lépés, hogy kiszámolja az egységárak átlagát, szintén 1 pontért. Majd a feladatért járó harmadik pontot akkor kapja meg a vizsgázó, ha szöveges választ ad a feladatra.

A feladat a) részének a megfogalmazás bonyolultsága miatt van helye az emelt szintű érettségiben, viszont a b) rész, ahol egy egyszerű behelyettesítést kell elvégezni, azután átlagot kell számolni, nem feltétlenül egy emelt szintű érettségibe való feladat.

6. *Legyen* $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = -\frac{4x^3}{a} + \frac{3x^2}{a} + \frac{2x}{a} - a$, *ahol* y *a pozitív valós szám és* $x \in \mathbb{R}$.

a) *Igazolja, hogy* $\int_0^a f(x)dx = -a^3 + a$.

b) *Mely pozitív valós* a *számokra teljesül, hogy* $\int_0^a f(x)dx \geq 0$ *?*

c) *Az* x *mely pozitív valós értéke esetén lesz a* $g(x) = -x^3 + x$ *függvénynek lokális (helyi) maximuma?*

A 6. feladat a függvények, az analízis elemei témakörbe tartozik, azon belül is az integrálszámítás, a függvényvizsgálat és differenciálszámítás témakörébe sorolható. Az a) feladat megoldásához a vizsgázóknak tudniuk kell, hogy az összegfüggvényt tagonként kell integrálni, ismerniük kell az integrálási szabályokat és a Newton-Leibniz- tételt, ami a határozott integrálszámításra vonatkozó tétel. A b) rész megoldásban alapja egy harmadfokú függvényt kell vizsgálniuk, hogy a megadott értelmezési tartomány mely részében lesz pozitív a függvény. Ehhez a kifejezést fel kell bontaniuk elsőfokú tényezőkre, majd ezeket kell vizsgálniuk. A másik megoldási mód a függvény ábrázolása, és a megoldás leolvasása a grafikonról. A c) részfeladatban az adott függvényt kell a vizsgázóknak deriválniuk, hogy megkapják, az értelmezési tartomány mely elemeire lehet a függvénynek szélsőértéke. Ezután ismét deriválni kell a függvényt, ezzel megkapható, hogy lokális maximum- vagy minimumhelye van-e a függvénynek az adott tartományban. Másik megoldási mód az első derivált előjelváltásával történő szélsőértékhely bizonyítása.

A feladat szövege jól van megfogalmazva, kontextusa tisztán matematikai. Az a) részfeladat a megoldás módját és megoldásszámát tekintve zárt, viszont a b) és a c) rész a megoldás módjának szempontjából nyitott, hiszen algebrai és grafikus úton is el lehet jutni a megoldáshoz a b) részben, a c)-ben pedig vagy az első derivált vizsgálatával vagy az első és második derivált vizsgálata is ugyanazt az eredményt adja. A b) és a c) részben is egy helyes megoldás létezik. A feladat szövege egyik részfeladatnál sem kér külön indoklást, csak a megoldás menetének szerepeltetését.

A feladatok megoldásának munkaszükséglete eltérő a részfeladatoknál, ugyanígy a pontozás is:

a) A feladat megoldásában az első lépés a tagok egyenkénti integrálása az integrálási szabályok alapján; ez 4 pontot ér, tagonként 1-1 pontot. A következő lépés a határozott integrál kiszámítása, amire 1 pont jár. Az utolsó lépés pedig az egyszerűsítés, szintén 1 pontért. Így a feladat 6 lépésből áll, és minden lépésre 1 pont jár, ezért összesen 6 pontot ez a részfeladat. Ez az eljárás korrekt, hiszen minden szükséges lépést jutalmaznak a feladat készítői.

b) Ebben a részfeladatban az első lépés az egyenlőtlenség felírása, 1 pontért. A következő lépés a harmadfokú kifejezés elsőfokú tagokra való felbontása, szintén 1 pont jár érte. A kezdeti feltétel figyelembevételéből adódik, hogy a három elsőfokú tag közül kettő biztosan pozitív, ezért csak a harmadik tagot kell vizsgálni. Ezért az észrevételért 1 pont adható. A feladatban az utolsó pont arra jár, hogy a vizsgázó megadja a keresett értelmezési tartományt. Tehát a feladat 4 lépésből áll, és 4 pontot ér. Ennél a részfeladatnál szintén megemlíthető az a korrektség, ami az előző feladatban is jelen volt. A b) részben elfogadható megoldás az is, ha a vizsgázó ábrázolja a függvényt, és a grafikon segítségével adja meg a helyes megoldást. Ebben az esetben a feladat készítői a javító tanárokra bízzák a pontok felosztását, viszont azt kérik, legyen összhangban az általuk közölt megoldással a részpontok felosztása.

c) Az első lépés a feladat megoldásában a függvény deriválása, 1 pontért. A következő lépés a lehetséges szélsőértékhelyek meghatározása, melynek szükséges feltétele az első derivált zérushelyeinek megkeresése; erre szintén 1 pont adható. Az értelmezési tartományban a lehetséges szélsőértékhely megtalálása 1 pontot ér. Ezen a ponton válik szét a megoldás két lehetséges megoldási módra: az egyik az, hogy a második derivált kiszámításával és abba az első derivált zérushelyét behelyettesítve megkapható, hogy a második derivált helyettesítési értéke negatív, tehát a szélsőérték lokális maximum. Ez a gondolatmenet lépésenként 1 pontot ér, tehát összesen hármat. A másik megoldási mód csak az első deriváltat használja fel a megoldáshoz, mégpedig azt az elégséges feltételt a lokális szélsőérték létezéséről, amely arra vonatkozik, hogy az első derivált előjelet vált a szélsőérték környezetében. Erre a megoldási módra nincs külön pontozás az útmutatóban, ezért ezt ismét a javítókra bízzák. Így a feladat összesen 6 lépésből áll és minden lépésre 1-1 pont adható, ezért a feladatra maximum 6 pont adható.

A 6-os feladat mindhárom részfeladata és azok javítási-értékelési útmutatója jól átgondolt és teljes mértékben helye van egy emelt szintű érettségiben. A részpontok felbontása korrekt, minden fontos lépésre jár pont, így a végén ez a feladat valóban a mögöttes tudást méri.

7. *Az ABCD konvex négyszög oldalegyeneseinek egyenlete rendre:*

$DA: 3x-4y-20=0$ $AB: 3x+5y-20=0$

$BC: 4x-3y+12=0$ $CD: 5x+3y+15=0$

a) *Igazolja, hogy a négyszög átlói az x és az y tengelyre illeszkednek, továbbá hogy ennek a négyszögnek nincsen derékszöge!*

b) *Bizonyítsa be, hogy ez a négyszög húrnégyszög!*

A feladat mindkét részfeladata a koordinátageometria témakörébe tartozik. Az a) feladat megoldásához a vizsgázóknak fel kell írniuk a csúcsok koordinátáit, amit úgy tudnak megtenni, hogy az oldalegyenesek páronkénti metszéspontját kiszámítják. Ezután ha a szemben levő csúcsok páronként vagy az x vagy az y tengelyen vannak, akkor ezzel belátják, hogy az átlók illeszkednek a tengelyekre, hiszen ha egy egyenes két pontja illeszkedek egy egyenesre, akkor az összes pontja illeszkedik arra az egyenesre. A második állítás igazolásához az egyenesek normálvektorait, irányvektorait, vagy iránytangenseit kell felírni, majd belátni, hogy ezek között nincs egymásra merőleges vektor, tehát egyenes sem. Ezt a vektorok skalárszorzatával tudják bizonyítani. A b) részben azt kell belátniuk a vizsgázóknak, hogy az ABCD négy húrnégyszög. Ennek feltétele, hogy a szemben lévő szögeinek összege 180°. Ezt úgy tehetik meg, hogy megvizsgálják az oldalegyenesek által bezárt szögeket.

A feladat szövege jól van megfogalmazva, minden szükséges információt tartalmaz. A feladat kontextusa tisztán matematikai. Nyitottság tekintetében az a) feladat mindkét szempontból zárt, viszont a b) feladat a megoldás módját tekintve nyitott, a megoldásszámát tekintve zárt. Mindkét részfeladatban állításokat kell bebizonyítaniuk a vizsgázóknak, tehát mind a két feladatban szükséges indoklást adni.

A munkaszükséglet és a pontozás az a) részben a következőképpen alakul: az oldalegyenesek metszéspontjainak megállapítása az első lépés a feladat megoldásában, a négy metszéspont (csúcs) koordinátáinak felírására 1-1 pont jár. A csúcspontok koordinátáinak felírásával a vizsgázó belátta, hogy az átlók a tengelyekre illeszkednek. Ha ez szerepel a megoldásban, 1 pontot kap a vizsgázó. A feladatra járó utolsó 3 pont az egyenesek normál- illetve irányvektorának, esetleg iránytangensének felírására és annak belátására jár, hogy a vektorok között nincs két egymásra merőleges. Így az a) részfeladat 8 lépésből áll (a 4 csúcspont meghatározása, 4 skalárszorzat kiszámítása), és 8 pont jár a helyes megoldásra, ami teljesen elfogadható döntés.

A b) feladat megoldásának első lépése az előbb definiált vektorok skalárszorzatának felírása úgy, hogy két szemben fekvő szögre írják fel majd a koszinusztételt. 1 pont jár a skalárszorzat felírására, 1 pontot ér a 2 vektor felírása, 1 pont a műveltek elvégzése, és végül 1 pont a vektorok által bezárt szög koszinuszának felírása. 3 pont jár arra, ha a vizsgázó ugyanezeket a számításokat elvégzi a szemben fekvő szöget bezáró egyenesek vektoraival és kifejezik a szög koszinuszát. Végül a feladatban adható utolsó pont akkor jár, ha felírja, hogy a szögek összege 180°, tehát a szögek kiegészítőszögek, azaz a négyszög húrnégyszög. Tehát a feladat összesen 7 lépésből áll, és 8 pontot ér.

A pontozás szempontjából érdekes, hogy kétszer jutalmazzák a normálvektorok felírását: egyszer az a) feladatban jár érte pont, egyszer pedig a b)-ben is. A megjegyzés rovatban szerepel az is, hogy ha indoklás nélkül írja fel a vizsgázó a csúcspontok koordinátáit az a) részben, akkor azért nem adható pont. Ez érthető is, hiszen a feladat szövegében egyértelműen közölték, hogy az állításokat igazolni kell.

8.

a) *Peti levelet írt négy barátjának, Andrásnak, Bélának, Csabának és Daninak, és mindenkinek 1-1 fényképet is akart küldeni a nyaralásról. A négy fénykép különböző volt, és Peti mindegyikük hátlapjára ráírta, kinek szánja. A* *fényképeket végül figyelmetlenül rakta borítékba, bár mindenki kapott a levélben egy fényképet is.*

a1) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy csak Andris kapja azt a fényképet, amelyen a saját neve szerepel?

a2) Melyik esemény bekövetkezésének nagyobb a valószínűsége:

- *senki sem kapja azt a fényképet, amelyet Peti neki szánt;*
- *pontosan egyikük kap olyan fényképet, amelyen a saját neve szerepel?*

b) Egy szabályos érme egyik oldalán a 6-os, a másikon pedig a 4-es számjegy látható. Az érmét négyszer egymás után feldobjuk, és a dobott számokat összeadjuk. Milyen értékeket kaphatunk összeg gyanánt?

Az egyes összegek dobásának mekkora a valószínűsége?

A feladat első és második része is a kombinatorika és valószínűség-számítás témakörbe tartozik. Az a1) részfeladat megoldásához a különböző eseteket kell megvizsgálniuk a vizsgázóknak, azaz azt, hogy hányféleképpen kaphatják Andráson kívül a képeket a fiúk úgy, hogy egyikük sem kapja a neki szánt fényképet. Ezt próbálkozással ki lehet számítani. Az a2) részben ki kell számítani, hogy hányféleképpen tudja Peti szétosztani a fényképeket a barátai között, ez megadja az összes eset számát. Majd a feladat szempontjából kedvező esetek számát kell meghatározni, ami az első esemény tekintetében az, hogy senki sem kapja a sajátját. Ezután a klasszikus valószínűségi modell használatával megkapható az első esemény valószínűsége. A következő lépés a második esemény valószínűségének kiszámítása, amihez ismét kell az esemény szempontjából kedvező esetek száma, ami próbálkozással megkapható. Majd ismét a klasszikus kedvező/összes modell használatával kiszámolható a második esemény valószínűsége. Így már a válasz is megvan az a2) kérdésre. Ugyanezt ki lehet számítani táblázat segítségével, majd az esetek összeszámolásával.

A b) feladat első kérdésére úgy adható válasz, hogy a vizsgázó megvizsgálja a négy dobáshoz tartozó összegeket, felsorolással. Ez után a különböző összegek megvalósulásának lehetőségeit kell kiszámítani, hogy megkapja összegenként a kedvező eseteket, majd ehhez még az összes eset számát is meg kell határozni. Ha mindezek megvannak, akkor ismét a klasszikus valószínűségi modellt kell használni, így az összegek dobásának valószínűsége megkapható.

A feladat szövege korrekten van megfogalmazva, az első része hétköznapi külsőbe bújtatott matematikai kontextusú, a második része viszont tisztán matematikai. Mindkét feladat megoldási módja nyitott, viszont megoldásszámát tekintve zárt mindkettő. Külön indoklást egyik részfeladatban sem kérnek, ezért ismét a feladatok megoldásának levezetésének kell szerepelnie a dolgozatban.

Az első részfeladat első lépése az, hogy a vizsgázó megállapítja, hogyan tudja úgy elhelyezni a fotókat a borítékokban, hogy csak A kapja a sajátját: B nem mehet a második borítékba, csak C vagy D, ezután már csak egyféleképpen osztható szét a maradék 2 kép. Erre a gondolatmenetre a feladat készítői 2 pontot adnak. Másik beosztás csak úgy lehet, hogy ha első esetben a C-t tette a vizsgázó a B borítékába, akkor a másik lehetőség, hogy ha D-t teszi a B-be, de ezután már ismét egyféleképpen osztható szét a két fénykép. Tehát összesen 2 lehetőség van, ennek belátása 1 pontot ér. Így a feladat 3 lépésből áll, és 3 pontot ér. Az a2) feladatban az összes eset meghatározásra 1 pont jár, ez az első lépés a megoldás menetében. Azoknak az eseteknek az összeszámolására, hogy az első borítékba B képe kerül és más sem kapja a sajátját, 2 pontot ér. Ugyanennyi lehetőség van arra, hogy C vagy D kerül az első borítékba, így megvan a kedvező esetek száma. Ezzel a vizsgázó meghatározta, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy senki sem kapja a saját fényképét, ezzel 1 pontot szerzett. Ezután annak a valószínűségét kell meghatározni, hogy pontosan egy valaki kapja a saját képét, ezt az a1) feladatból kiindulva könnyű összeszámolni. Erre 2 pont jár, végül 1 pont jár arra, hogy a vizsgázó meghatározza ezen esemény valószínűségét. A feladatért járó utolsó pont akkor adható meg, ha a vizsgázó feltünteti, hogy melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége. Így az a2) feladat 6 lépésből áll, és 7 pont jár érte, hiszen a válaszért külön pont jár. Ezzel egyenértékű megoldás az eseménytáblázatok kitöltése, és abban az esetek összeszámolása.

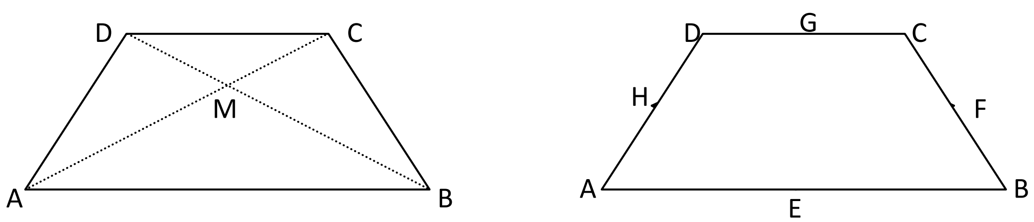
A b) részben az összes lehetséges sorrend meghatározása 1 pontot ér. Ezután az összegek felsorolása szintén 1 pontot ér. A legnagyobb és a legkisebb összeg valószínűségének meghatározására 1 pont jár. Szintén 1 pontot ér a következő két összeg valószínűségének kiszámítása, és 1 pontot ér a középső összeg meghatározása. Így összesen a feladat 5 lépésből áll és 5 pontot lehet vele szerezni, ami korrekt, hiszen minden lépést díjaznak a feladat készítői. Ugyanerre a megoldásra lehet jutni a binomiális eloszlás használatával, ennek pontozását is szerepeltetik a javítási-értékelési útmutatóban.

Ezzel a feladattal kapcsolatban is felmerülhet a probléma, hogy vajon helye van-e egy emelt szintű érettségiben, hiszen a középszintű anyagon túl nem kíván meg több tudást a vizsgázóktól. A feladat pontozásával nincs probléma, viszont lehet, hogy jobb lenne ezt a feladatot a középszintű érettségi második részébe tenni, a 17 pontos feladatok közé.

9. *Egy 90 m^2 területű, trapéz alakú virágágyás párhuzamos oldalainak aránya* $AB:DC=3:2$. *Az ágyást tavasszal és ősszel is az évszaknak megfelelő virágokkal ültetetik be. Mindkét alkalommal mindegyik fajta virágból átlagosan 50 virágtövet ültetnek négyzetméterenként.*

   Tavasszal az átlókkal kijelölt négy háromszögre bontották a virágágyást. Az ABM *háromszögbe sárga virágokat, a* DMC *háromszögbe fehéret, a maradék két részbe piros virágokat ültettek.*

   a) *A tavaszi parkosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek be?*



Ősszel a másik ábra alapján tervezték meg a virágok elhelyezését. (Az E, F, G és H pontok a trapéz oldalainak felezőpontjai.) Ekkor is fehér (f), piros (p) és sárga (s) virágokat ültettek a tervrajz alapján.

   b) *Az őszi parkosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek?*

Válaszait az alábbi táblázatban tüntesse fel!

	fehér	*piros*	*sárga*
tavasszal			
ősszel			

A feladat a geometria témakörébe tartozik, kontextusa hétköznapi. Ilyen jellegű probléma előfordulhat a való életben is. A feladat szövege jól van megfogalmazva, minden szükséges információt tartalmaz. Az a) feladat megoldásához az átlók által levágott háromszögek hasonlóságát kell alapul venni. A b) rész megoldásában az EFGH paralelogramma területét kell kiszámítani, ami a trapéz területének a fele, majd tudva azt, hogy a paralelogrammát a két áltója négy egyenlő területű háromszögre bontja, el kell felezni a paralelogramma területét. A fehér virágok szintén a trapéz területének felét foglalják el. Mindkét részfeladat a megoldás módját és megoldásszámát tekintve zárt. Külön indoklást nem kér a feladat szövege, ezért a vizsgázóknak a megoldás menetét kell leírnia a dolgozatban.

A közbeeső lépések száma nagyjából megegyezik a pontozással:

a) Az első lépés a feladat megoldásában a szemben levő háromszögek hasonlóságának igazolása, amit a szögek segítségével lehet belátni; erre 2 pont jár. A következő lépés, hogy használja a vizsgázó azt az összefüggést, hogy hasonló alakzatok területének aránya megegyezik a hasonlóság arányának négyzetével, erre szintén 1 pont adható. Ha a vizsgázó felírja a háromszögek területét egymáshoz viszonyítva, a hasonlóság segítségével, arra 2 pont jár. A felírt összefüggések összegeként a trapéz területét kapja meg a vizsgázó, a felírásért 1 pont jár, a kiszámításért szintén 1. Végül a virágok számának kiszámítására 2 pont adható. Így a feladat összesen 5 nagyobb lépésből áll, ami 9 pontot ér.
b) Annak bizonyítása az első lépés, hogy a felezőpontok által meghatározott négyszög paralelogramma; erre 1 pont jár. Annak felismeréséért, hogy a paralelogramma területe fele a trapéz területének, 2 pont adható, a bizonyításért pedig 1. A következő lépés a paralelogramma területének negyedelése, hiszen az átlók 4 egyenlő területű háromszögre bontják a paralelogrammát. Ez szintén 1 pontot ér. A virágok számának kiszámítására 2 pontot lehet adni. Tehát ez a feladat is 5 lépésből áll, és 7 pontot ér.

A feladat előnye, hogy a valósághoz kapcsolódik, egy hétköznapi problémát kell a matematika segítségével modellezni. A feladat nehézségi szintje megfelel az emelt szintű érettségi követelményeinek. A feladat pontozása is jól átgondolt és indokolható minden pontozást érintő döntés.

4.5 Az emelt szintű érettségi értékelése

Az emelt szintű érettségiben szereplő 9 feladat lefedi a követelményekben leírt arányokat a témakörök megoszlását tekintve. Az érettségi készítői szerint a szöveges, hétköznapi élethez kötődő feladatok 30-40%-os arányban fordulnak elő a feladatok között. Ebben az esetben a feladatok közül négy tisztán matematikai problémát mutat be, egy hétköznapi külsőbe bújtatott matematikai problémát, és négy feladat hétköznapi élethez kötődő problémát tartalmaz. Tehát az arány, melyet megadtak, valóban igaz a 2010. évi emelt szintű érettségi vizsgára.

A feladatok közelebbről való megvizsgálása után kiderült, hogy a kilenc feladatból hattal sem pontozási, sem szintbeli probléma nincs. Három feladattal kapcsolatban merültek fel problémás szempontok: a 4-es feladat a) és c) része is egyaránt 5-5 pontot ér, holott az a) részben alapműveleteket (osztás, szorzás, összeadás) kell csak elvégezniük a vizsgázóknak, a c) részben pedig kombinatorikával és valószínűség-számítással kell foglalkozniuk, így a részfeladatokban a pontozás súlyozása eltolódott. Másrészt, ez a feladat nem kíván meg a vizsgázóktól a középszinten szükséges tudáson túlmutató ismereteket, ezért inkább lenne helye egy középszintű érettségiben. Az 5-ös feladatban az a probléma, hogy az a) rész valóban egy emelt szintű érettségibe való, viszont a b) rész inkább középszintre. Viszont a feladat készítői ezt úgy ellensúlyozták, hogy a b) részre 3 pontot adtak, az a) részre pedig 13-at, így kiegyenlítődött a különbség. A 8-as feladat pontozásával, javításával nem merült fel probléma, viszont a feladat inkább való a középszintű érettségi második részébe, ott is az utolsó három feladat közé, mivel ennek a feladatnak a megoldásához sem kell a középszintű érettségi megírásához kellő tudásnál több ismeret.

5 Tapasztalatok

A szakdolgozat megírása közben nagyon sok hasznos tapasztalatra tettem szert, hiszen sikerült elmélyülnöm a matematikaoktatás egy igazán fontos és hangsúlyos részében, az ellenőrzés és értékelés témakörében. A szakirodalmak nagy segítséget nyújtottak ahhoz, hogy az ellenőrzés és értékelés elméleti hátterét jobban megismerhessem, és a jövőben a munkám során ezeket a szempontokat még tudatosabban kövessem és alkalmazzam. A témával foglalkozó szakirodalmak szerzői mind egyetértenek abban, hogy az ellenőrzés és értékelés első lépése az, hogy az értékelés célját meg kell határozni, majd ezekhez a célokhoz kell kiválasztani a megfelelő eszközöket és módszereket. Az ellenőrzés és értékelés eszközeinek széles skálán kell mozognia ahhoz, hogy minél hatékonyabb legyen. A legjobb, ha diákjainknak folyamatos, szóbeli és írásbeli visszajelzést is adunk munkájukról, haladásukról. Az elvégzett munkára adott jegyen felül jó, ha szóban, esetleg írásban árnyaltabbá tesszük az értékelést egy-két megjegyzéssel. Ez a motiváció szempontjából is hasznos lépés, hiszen ezzel még jobban rávilágíthatunk a hibákra, hiányosságokra, de ugyanígy a pozitívumokra is, melynek segítségével ösztönözni tudjuk a tanulókat.

A kérdőívet kitöltő matematikatanároktól begyűjtött válaszok rávilágítottak arra, hogyan zajlik az ellenőrzés és értékelés a gyakorlatban. Ezek az információk megmutatták, melyek azok a módszerek, eszközök, amelyeket ma a matematikatanárok leginkább használnak, és melyek azok, amelyek kevés hangsúlyt kapnak a tanórán. A szakirodalomban olvasottak alapján kiderült, hogy jobb lenne még jobban tágítani az ellenőrzési és értékelési eszközök skáláját, mivel így még árnyaltabb képet kaphatnánk a diákok tudásáról és egy kis változatosságot vinne az osztályterembe. Munkám során majd igyekszem ezeket a kevésbé népszerű eszközöket és módszereket is alkalmazni.

A kérdőívben szereplő válaszok összhangban vannak a szakirodalommal a szóbeli értékelés tekintetében, hiszen a kérdőívet kitöltő pedagógusok mindannyian adnak diákjaiknak szóban értékelést, illetve kiegészítést a dolgozatra kapott jegy mellé. A tanárok egy része nem tartja megfelelőnek a diákok értékelésére az ötfokozatú skálát, ezért is használ szóbeli kiegészítést a jegyek mellé, ezzel kompenzálva a skála hiányosságait. A szóbeli feleletek egyre ritkábban jelennek meg a matematikaórákon, ennek oka eltérő a tanároknál. Ugyanígy nemleges válaszok születtek az emelt szintű érettségi szóbeli részét érintő kérdésre, mivel a legtöbb tanár nem tud véleményt formálni a szóbeli részről, mivel eddig még nem volt tapasztalata ebben a témában. Ebből azt szűrtem le, hogy középiskolai matematikatanárként meg kell ismerkedni az emelt szintű érettségi szóbeli részével is, mivel bármikor szükség lehet erre a tudásra.

Az érettségire azért esett a választásom, mert ez a fő ellenőrzési eszköz a középiskolai matematikaoktatásban és az eredménye nagyban beleszámít a tanulók továbbtanulásába, ezért is nagy az érettségire fektetett hangsúly. Kiderült, hogy valóban megfelel a céljának, mert az érettségiben szereplő feladatok változatosak, minden nagyobb témakört érintenek. Az érettségi értékelésében nagy segítséget jelentett a javítási-értékelési útmutató, mivel a pontozás bepillantást ad a feladatok megoldása során a lépések súlyozásába.

A kétszintű érettségi tanulmányozása során kiderült, hogy a mai tendencia az érettségire is jellemző, azaz valóban igyekeznek a matematika hétköznapi életben való hasznosítását, hasznosságát megmutatni a diákoknak, mivel számos hétköznapi élethez kapcsolódó feladat szerepel mind a középszintű, mind az emelt szintű érettségiben. Ez bíztató, viszont a diákok dolgát megnehezíti, hiszen egy életszerű feladatot kell a matematika nyelvére lefordítaniuk és ezután meg kell oldaniuk a matematikai problémát, majd végül a kapott eredményt értelmezniük kell az eredeti probléma szempontjából. A téma elméleti hátteréből kiderült, hogy ez a jó út, tehát efelé kell haladnia a matematikaoktatásnak, viszont ennek meg kell jelennie nem csak az ellenőrzésben, hanem az oktatásban is. Tehát ha a matematikatanárok ilyen típusú feladatokat is használnak a diákok felkészítése során, akkor nem lehet ebből probléma; viszont ha ilyen feladatokkal nem találkoznak a diákok, vagy csak kevéssel, akkor ez nagyon megnehezíti számukra az érettségi sikeres megírását. Ezért is igyekszem majd a munkám során minél több hétköznapi élethez kapcsolódó problémával megismertetni a diákjaimat, hogy ne ütközzenek ebbe a problémába az érettségiben. Úgy gondolom, hogy az érettségi sikeres megírására a diákokat fel kell készíteni: ez nem csak az elméleti háttérre, a tudásra vonatkozik, hanem arra is, hogy az érettségi pontozása igencsak eltérő lehet egy tanórai témazáró dolgozattól. Ezért kell a diákokat megismertetni a vizsga követelményeivel, a pontozás lépéseivel. A középszintű érettségi második részében és az emelt szintű érettségi egészében a megoldás minden lépését le kell írniuk a diákoknak és ajánlott a szükséges lépéseket megindokolni; ezt mutatta az elemzés is. Úgy gondolom, hogy ehhez is hozzá kell szoktatni a diákokat és ezt a 11. évfolyamon a legideálisabb elkezdeni, hogy legyen idejük a diákoknak megszokni ezeket a követelményeket. A Hajdu-tankönyvek nagy segítséget jelenthetnek ebben a megismertetési és hozzászoktatási folyamatban, mivel a tankönyvek tartalmaznak olyan kiegészítéseket, mint például a feladatok lehetséges érettségi pontozását. A tankönyvek tartalmaznak még témazáró és diagnosztikus felmérő feladatsorokat, melyek a pedagógusok munkáját segítik.

Az elemzés során kiderült, hogy az érettségiben van egy-két probléma a pontozás tekintetében, mivel a pontok szétosztása nem minden feladatnál ésszerű és indokolható. Viszont a javítási-értékelési útmutató nagy segítséget nyújt a javító tanároknak a megjegyzésekkel, melyek kiegészítik vagy pontosítják a megoldásokra adható pontok szétosztását.

Az érettségi valóban megfelel a céljának, és a vizsgakövetelmények és az előző évi érettségik segítségével kell felkészíteni a diákokat a vizsgára és ajánlott a középiskola utolsó éveiben az ellenőrzést és értékelést úgy alakítani, hogy minél inkább hasonlítson az érettségire, hogy a diákok megszokhassák az érettségi követelményeit. Így könnyebben veszik majd a tanulók az akadályokat és nem lesz számukra újdonság sem a pontozás, sem a hétköznapi élethez kapcsolódó feladatok.

Bibliográfia:

Ambrus, A. (1995). *Bevezetés a matematikadidaktikába.* Budapest: ELTE Eötvös Kiadó.

Bloom, B. S., Krathwohl, D. R. (1975). Taxonomie von Lernzielen im affektiven Bereich. Weinheim.

Bruder, R. (1981). Zur quantitativen Bestimmung und zum Vergleich objektiver Anforderungsstrukturen von Bestimmungsaufgaben im MU. Wissenschaftliche Zeitschrift Päd. Hochschule, Potsdam.

Bruder, R. (1985). Zur Bestimmung objektiver Anforderungsstrukturen von Begründungs- und Beweisaufgaben in MU. Wissenschaftliche Zeitschrift Pädagogische Hochschule, Potsdam, Heft 1/1985.

Csala Istvánné Ranschburg Ágnes (2002): Pedagógiai értékelés másképpen. Új Pedagógiai Szemle, 1. sz. 66-74.

Csíkos Csaba (2005): A matematikai tudáskoncepció a 2003-as PISA vizsgálatban. In Kósa Barbara és Simon Mária (szerk.): Új vizsga - új tudás? Az új érettségi hatása az iskolakezdéstől a záróvizsgáig. Országos Közoktatási Intézet.

de Lange, J. (1995). Assessment: No change without problems. In T.A. Romberg (Ed),

Reform in school mathematics and authentic assessment, (pp. 87-172). New York: Suny Press.

Fóris-Ferenczi, R. (2008). A tervezéstől az értékelésig – Tanterv- és értékeléselmélet. Kolozsvár: Ábel Kiadó.

Golnhofer, E. (2003). Pedagógiai értékelés. In Falus Iván (szerk.): Didaktika. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó, 2003.

Izard, J. (1993). Challanges to the improvement of assessment practice. In Mogens Niss (szerk.) Investigations into assessment in mathematics education. Dodrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.

Manon, J. R. (1995). Implementing the assessment standards for school mathematics: the mathematics test: a new role for an old friend., Mathematics Teacher 88, 138-41.

Scriven, M. (1967). The methodology of evaluation. In R. W. Tyler, R. M. Gagné, & M. Scriven (Eds.), Perspectives of curriculum evaluation, 39-83. Chicago, IL: Rand McNally.

Somfai, Zs. (2003). A matematikatanítás helyzete a középiskolában – A 2003-as obszervációs felmérés tapasztalatai. Letöltve: http://www.oki.hu/oldal.php?tipus=cikk&kod=kerdoives-Somfai-Matematika.

Somfai, Zs. (2002). A matematika tantárgy helyzete a felső tagozaton és a középiskolában. Letöltve: http://www.oki.hu/oldal.php?tipus=cikk&kod=2002-12-hk-somfai-matematika

Swan, M. (1993). Improving the design and balance of mathematical assessment. In Mogens Niss (szerk.) Investigations into assessment in mathematics education. Dodrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.

Vass, V. (2008). A NAT implementációja. Veszprém Megyei Pedagógiai Szakmai Konferencia.

Vári P., Bánfi I., Felvégi E., Krolopp J., Rózsa Cs., Szalay B. (2002). Gyorsjelentés A PISA 2000 vizsgálatról. Új Pedagógiai Szemle, 2002. január.

Mellékletek:

1. **számú melléklet: Tanári kérdőív**

Ellenőrzés és értékelés a matematika órán

Kedves Válaszadó!

A következő kérdőív a szakdolgozatom részét képezi, amelynek kitöltésével kérem Ön is járuljon hozzá munkám sikeréhez. Egy lényeges dologra felhívom a figyelmét: nincsenek jó és rossz válaszok! Az ellenőrzési és értékelési szokásaira és a véleményére vagyok kíváncsi. A kérdőív anonim, semmilyen olyan adat megadására nincs szükség, ami lehetővé tenné az azonosítását.

Türelemét és segítségét köszönöm!

Köszönettel:

Jámbor Dorottya

ELTE- TTK hallgató

1. Végzettség:
- Főiskola
- Egyetem
2. Életkor:
- 25 év alatt
- 26-35 között
- 36-45 között
- 46-55 között
- 56-65 között
- 65 fölött
3. Milyen módszereket használ a diákok teljesítményének, haladásának értékelésére? (röpdolgozat, témazáró dolgozat, szóbeli felelet, órai munka, csoportmunka, pármunka, projektfeladat, házi dolgozat, önálló munka, számítógépes feladat, teszt, stb.)
4. Milyen típusú feladatokkal értékeli diákjai teljesítményét? Hogyan állítja össze az értékelésnél használt feladatokat? (reprodukáló, ismétlő, új ötletet igénylő, stb.)

5. Milyen céllal értékeli diákjai teljesítményét? (szummatív = záró-összegző, formatív = segítő-formáló, diagnosztikus = helyzetelemző-döntéselőkészítő) Több válasz is adható.
6. Milyen sűrűn értékel?
7. Szóbeli és írásos visszajelzést is biztosít diákjai részére, melyekkel árnyaltabban tudja értékelni a munkájukat? Fontosnak tartja ezt?
8. Év végén ad visszacsatolást diákjainak az éves teljesítményükről az év végi jegyen kívül? Ha igen, ezt milyen formában teszi?
9. Különbséget tesz a tananyagok/tananyagrészek között értékelés tekintetében? (súlyozás)
10. Megfelelőnek tartja az ötfokozatú skálát diákjai teljesítményének értékeléséhez? Ha válasza nem, kérem indokolja válaszát.
11. Fontosnak tartja a házi feladatot?
12. Hogyan, milyen módszerrel ellenőrzi a házi feladatot?
13. Felelteti-e diákjait? Fontosnak tartja-e a szóbeli értékelést?
14. Mi a véleménye az emelt szintű érettségi szóbeli részéről?
15. Egyéb megjegyzés:

2. számú melléklet: A feladatok elemzéséhez használt kérdések

1. A feladat megoldása
2. Szöveg korrekt-e?
3. A feladatmegoldáshoz szükséges matematikai ismeretek.
4. A feladat nehézségi foka:
5. Kontextus
6. Nyitottság
7. Indoklás (bizonyítás) szükségessége
8. Munkaszükséglet (közbeeső lépések száma)
9. A kognitív követelmények komplexitása