A sorozatok tanítása a magyar és egy angol tanítási nyelvű ország tantervében

SZAKDOLGOZAT

Laszák Nikolett

Matematika tanár szak

Témavezető: Munkácsy Katalin, főiskolai docens

ELTE Természettudományi Kar, Matematikai Intézet

Matematikatanítási és Módszertani Központ

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Budapest, 2011

Tartalomjegyzék:

A sorozatok tanítása a magyar és egy angol tanítási nyelvű ország tantervében

1. Bevezetés

1.1. Személyes kötődés a témához

A sorozatok tanítását nem csak azért választottam a szakdolgozatom témájaként, mert már általános és középiskolában is szívesen foglalkoztam ezzel a témakörrel, hanem azért is, mert nyelvi kötődésem is van a címben megjelölt tárgyhoz, ugyanis a matematika mellett angol szakon végzem a tanulmányaimat. A tágabb értelmezési lehetőséggel ellentétben azonban az angol tanítási nyelvű országok közül csak az ausztráliai, míg a magyar tanítási nyelvű területek közül a magyarországi vonatkozást fogom összehasonlítani.

Az egyetemnek köszönhetően a 2009/2010-es tanév tavaszi félévét az Egyesült Királyságban tölthettem Erasmus ösztöndíjjal. A részképzés során azonban nem csak angolokkal és amerikaiakkal, valamint számos más nemzetiségű hallgatóval ismerkedettem meg, hanem – aminek különösen örültem – egy ausztrál lánnyal is sikerült szoros kapcsolatot kialakítanom. Az angol nyelvterületek közül mindig is különösen érdekelt az ausztrál kultúra. Leendő tanárként azonban már egy idegen ország kultúrája, lakosai és történelme mellett az oktatási módszerek is felkeltették az érdeklődésemet. Kíváncsi voltam, hogy épül fel a közoktatási rendszer a szigetországban, milyen követelmények szerint tanulnak az ausztrál diákok (NAT, tankötelesség korhatára), és mennyire térnek el a matematika tanításának módszerei és tartalma a két országban. Ezeket természetesen nem az egész tantárgy hasonlóságainak és különbözőségeinek összevetésével, hanem csak egy tananyagrész – a sorozatok – tanításának vizsgálatán keresztül fogom bemutatni a szakdolgozatomban. Ehhez a magyar nyomtatott dokumentumokon kívül (tankönyv-családok, NAT, KET, matematika történeti könyvek, didaktika témájú könyvek) ausztrál írásos forrásokat és az ausztrál csoporttársam szóbeli közléseit is nagymértékben fel fogom használni.

Témaválasztásom oka, hogy a sorozatok tanítása egészen az általános iskola első osztályától egyetemig része a tananyagnak, szinte minden évfolyamon továbbvihetjük a témát, hiszen bármely korosztályú és bármely tudásszinten lévő gyermeknek adhatóak érdekes feladatok belőle. Ezenkívül nagyon jól alkalmazható a mindennapokban, amit hamar meg is tudunk mutatni a diákok számára. A valóság-közeliség motivációs ereje mellett további előnye, hogy több matematikai résztéma épül rá (a felsőoktatásban is) valamint, hogy jó a más tantárgyakkal való integráció lehetősége. A sorozatok-témakör ezen tulajdonságait kihasználva a tantárgyat kevésbé kedvelőknek ugyanolyan érdekessé tehetjük, mint azok számára, akik komolyabb szinten érdeklődnek az analízis iránt.

2. Problémafelvetés

2.1. A kutatás célja

Szakdolgozatom célja tehát a lehető legtöbb szempont alapján elemezni a sorozatok tanítását Magyarországon és Ausztráliában, mind matematikai mind pedagógiai illetve didaktikai aspektusokból. Ezeket a fent említett információ-forrásokon kívül órai és verseny feladatok, valamint oktatástechnikai eszközök bemutatásával egészítem ki. A megvizsgált információk alapján pedig egy összehasonlító elemzést fogok készíteni. Igyekszem majd kiemelni a dolgozat minden fejezetében azt, hogy az adatok alapján melyik ország módszerei milyen előnyökkel és hátrányokkal bírnak, valamint, hogy melyik oktatási metódust tartom követendőnek a jövőben.

3. Kérdések, vizsgált problémák

Elsősorban arra a kérdésre szeretnék választ kapni a kutatás során, hogy lehet-e a magyartól eltérő struktúrával, módszerrel tanítani a sorozatokat és amennyiben igen, akkor előnyösebb, hasznosabb-e az a módszer. Kíváncsi vagyok, hogy van-e olyan részlet, eljárás, didaktikai elem az ausztrál matematika oktatásban a témát illetően, amit érdemes átvenni, kipróbálni, hozzátenni a jelenlegi módszerekhez? Leendő pedagógusként természetesen nagyban szeretnék támaszkodni a hazánkban már bevált és széleskörűen alkalmazott módszerekre, de mindemellett azt gondolom, hogy alkalmanként érdemes megismerni, tesztelni és – amennyiben beválik – felhasználni, bevezetni új eljárásokat, új ötleteket is. Ahhoz, hogy a legszélesebb képet kapjam a sorozatok tanításáról összevetem, hogy melyek a téma előzményei, esetleges folytatásai, tanított fogalmai a két országban. Úgy vélem, mindegyik kérdésben fedezek majd fel eltéréseket, hiszen az oktatási rendszer is több szempontból eltér a magyartól.

A kutatást azzal fogom folytatni, hogy megvizsgálom, milyen feladatok részei a tanmenetnek. Úgy gondolom, hogy az alkalmazási feladatok és az érdekesebb problémák mennyisége és minősége egy kiemelkedően fontos jellemzője a matematika oktatásnak. Természetesen a középiskolásoknak szánt verseny feladatok is segítségemre lehetnek az egyes korosztályoknál elvárt tudásszint feltérképezését illetően.

Megnézem, hogy mely ábrázolási mód (koordináta-rendszer vagy számegyenes) illetve mely megadási mód (utasítás, rekurzió vagy formula/képlet) a jellemzőek.

Végül arra a kérdésre szeretnék választ kapni, hogy mi a célja a sorozatok tanításának a két országban? Indok-e a témakör oktatásában a más tárgyakkal való integráció, a téma jó alkalmazhatósága, praktikussága, vagy éppen a Nemzeti alaptantervben kitűzött kompetenciák és hosszú távú tervek (egész életen át tartó tanulás, felsőoktatás, gazdasági célok) miatt került bele a tantervbe a sorozatok tanítása.

4. Összehasonlítás

A sorozatok általános és középiskolában zajló tanításának eltérő módjait Magyarországon és Ausztráliában a következő szempontok szerint fogom összehasonlítani: megvizsgálom, hogy melyek a téma előzményei valamint az esetleges folytatásai a tananyagban; melyek a témakörben tanított fogalmak a két országban? Ezeket a kérdéseket – valamint, hogy mi a célja a sorozatok tanításának – a két ország tanterveinek sajátosságai és a tantervek, tanmenetek tartalma alapján fogom elemezni.

Úgy gondolom, hogy nem csak az előbb említett szempontokban, hanem a használt tanári segédanyagokban (tankönyv-családok és oktatástechnikai eszközök), a téma matematikán belüli elhelyezkedésében, viszonyában más tananyagrészekkel és a tantárgyak közötti integrációban is felfedezhető majd eltérés. Az összehasonlítás ezen hét aspektusa nagyban támaszkodik az Ambrus András *Bevezetés a Matematika-didaktikába* (Ambrus, 2004) című könyvében javasoltakra.

4.1. A legfelsőbb szint (NAT, KET)

Magyarországon a jelenleg érvényes Nemzeti alaptanterv 2007-ben jelent meg, mely a harmadik változata az oktatás törvényben mellékletként kiadott 1995-ös és a 2003-as alaptantervnek, mely utóbbi még mindig része az oktatásnak, hiszen az új NAT bevezetése – és ezzel együtt a korábbi(ak) kifutása – szakaszos. Az 1995-ös alaptantervhez képest a második és a mostani is két jelentős tulajdonságban tér el. Az első fontos különbség, hogy a legkorábbi dokumentum csak a „nevelés-oktatás első 10 évfolyamára” (Vass, 2008) vonatkozott, azonban közben a tankötelezettségi korhatár 18 évre nőtt, így a XXI. századi alaptantervek már az oktatás első 12 évfolyamát regulázzák. A másik szempont, melyet Vass Vilmos kiemel *A Nemzeti alaptanterv implementációja* című dokumentumában, az, hogy a továbbfejlesztések során az „általános fejlesztési és részletes követelmények”[1] helyett a fejlesztendő kulcskompetenciákra helyezték a hangsúlyt. Ezenkívül, a „tantárgyi szemléletet integrált szemlélet”[2] váltotta fel a tantervekben, vagyis a hangsúly a tartalomról a kompetenciaalapú tanulásra helyeződött át.

Az ausztrál Nemzeti alaptanterv (National Core Curriculum) napjainkban is használatos struktúrájú és szemléletű formája közel három évtizeddel korábbi előzményekkel bír, mint a magyar tanterv. Már az 1960-as évek végétől jelentek meg az oktatás tartalmára és a ma érvényes tanterv előkészítésére vonatkozó dokumentumok. Például felhívások nemzeti összefogásra az oktatásban, az oktatás fő területeinek meghatározása, alaptanterv-tervezetek, illetve a XXI. századi oktatás céljainak összefoglalása.[3]

Természetesen, csakúgy mint a magyar, az ausztrál Nemzeti alaptanterv is folyamatosan fejlesztés alatt áll. 2010-ben a 10. évfolyam számára jelent meg matematika, angol, történelem és természettudományok tantárgyból egy-egy követelményrendszer[4]. Azóta már e legutóbbi verzióban is történtek kisebb javítások, azonban minden egyes ausztrál alaptanterv célja, hogy meghatározzon egy alapműveltséget, valamint képességek és készségek olyan csoportját, mely nélkülözhetetlen az ausztrál diákok számára, és amelyeket a tankötelesség végére mindenkinek el kell sajátítania. Magyarországgal ellentétben, Ausztráliában a középiskola 10. évfolyama az utolsó kötelezően elvégzendő (a Core Curriculum is csak eddig egységes), amelyet egy vizsgával (School Certificate Exam) zárnak a diákok. Ez a dokumentum igazolja, hogy tanulmányaikat elvégezték és jogosultak a munkavégzésre. A középfokú oktatás 11. és a 12. évfolyama opcionális (ezekre az alaptanterv különböző választási lehetőséget tartalmaz), és egy magasabb szintű vizsgával zárul (Higher School Certificate) és elvégzésével megnyílik a lehetőség a felsőoktatásban való részvételre.

[1] Vass, 2008
[2] Vass, 2008
[3] Alan, 2003
[4] The Australian Curriculum, 2000

A fent említett értékek mellett az egész életen át tartó tanulásra és a közösségben való aktív részvételre való nevelést tűzi ki célul a Nemzeti alaptanterv.

A magyar dokumentum az ausztrál követelményrendszerben meghatározott, az előző két bekezdésben kiemelt három célján kívül biztosítani kívánja az érettségire való felkészülést, a XXI. század természettudományos ismereteinek oktatását, a majdani minőségi munkavégzést, és a gazdasági világban való aktív szerepvállalást[5]. További hasonlóság, hogy mindkét dokumentum meghatározza a műveltség fő területét, valamint az oktatást különböző képzési szakaszokra osztja.

KÉPZÉSI SZAKASZOK			
MAGYAR[6]			AUSZTRÁL[7]
1.-2. évfolyam/ bevezető szakasz	1.-4. évfolyam	1.-4. évfolyam	K-2. évfolyam/5-8 év
3.-4. évfolyam/ kezdő szakasz	5.-6. évfolyam	5.-6. évfolyam	3.-6. évfolyam/8-12 év
5.-6. évfolyam/ alapozó szakasz	7.-8. évfolyam	7.-8. évfolyam	7.-10. évfolyam/12-15 év
7.-8. évfolyam/ fejlesztő szakasz	9.-10. évfolyam	9.-12. évfolyam	11.-12. évfolyam/15-18év
9.-12. évfolyam/ pályaválasztási szakasz	11.-12. évfolyam		

A három különböző magyar felosztás a Nemzeti alaptantervben, valamint annak implementációjában[8] található a különböző fejezetekben. Az első oszlop szerinti besorolást Vass Vilmos emeli ki, mint az újabb NAT-ok tartalmi jellemzőit, a második oszlop csoportjai a *Műveltségi területek százalékos arányai*nál található[9], míg az utolsó a tantárgyi felosztás *Fejlesztési feladatok, kompetenciák* részben jelenik meg[10]. Az ausztrál dokumentumokban mindenütt egységesen a jelen táblázatban látható felosztás szerepel.

[5] NAT, 2003
[6] NAT, 2003 és Vass, 2008
[7] Shape of the Australian Curriculum, 2009
[8] Vass, 2008
[9] NAT, 2003, p 22
[10] NAT, 2003, p 42

Az alaptantervekben meghatározott főbb műveltségi területek összehasonlítása helyett azt gondolom, érdemesebb a matematikán belüli specifikus fejlesztendő területeket, kompetenciákat megvizsgálni.

FEJLESZTENDŐ KOMPETENCIÁK	
MAGYAR[11]	AUSZTRÁL[12]
1. Tájékozódás 2. Megismerés 3. Problémakezelés és -megoldás 4. Ismeretek alkalmazása 5. Alkotás és kreativitás 6. Akarati, érzelmi, önfejlesztő képességek és együttéléssel kapcsolatos értékek (Kommunikáció, Együttműködés, Motiváltság, Önismeret, önértékelés, reflektálás, önszabályozás) 7. A matematika épülésének elvei	1. Megértés 2. Folyékonyság 3. Problémamegoldás 4. Érvelés

Érdemes megfigyelni, hogy a szempontok közül mindösszesen egy azonos (*3. Problémamegoldás*). Véleményem szerint ebben az aspektusban a magyar elvárások részletesebbek és maguk a szempontok is kidolgozottabbak. Valóban nélkülözhetetlen a *megértés* a továbblépéshez, azonban semmi esetre sem elegendő. El kell várnunk a tanultak *alkalmazás*át is, valamint az önálló *alkotás* igényét is. Nem csak a közoktatás során, de mindennapi életben is szükséges az *önértékelés* és az *együttműködés*. Úgy vélem azonban, hogy az *érvelés* fontosságát érdemes lenne kiemelni a magyar tantervben is, habár a matematikai bizonyítások ezt kimondatlanul is megkövetelik, legalábbis emelt szinten.

Míg a műveltségterületen (matematikán) belüli témakörökre való bontás megjelenik az Ausztrál tantervben, addig ez magyar vonatkozásban kimarad a NAT-ból, és csak a

[11] NAT, 2003
[12] Shape of the Australian Curriculum, 2009

Kerettantervekben találjuk meg a matematika öt nagyobb témakörre való felosztását az alábbiak szerint:

A MATEMATIKA RÉSZEI	
MAGYAR KET[13]	AUSZTRÁL NAT[14]
1. Számtan, algebra 2. Geometria 3. Valószínűség, statisztika 4. Függvények, sorozatok 5. Gondolkodási módszerek	1. Számok és algebra 1.1. Számok és helyi értékek 1.2. Törtek, tizedes törtek 1.3. Pénz és pénzügy 1.4. Algebra és minták 1.5. Lineáris és nem lineáris kapcsolatok 2. Mérés és geometria 2.1. Mértékegységek használata 2.2. Alakzatok 2.3. Mértani helyek és transzformációk 2.4. Geometriai érvelés 2.5. Pitagorasz és trigonometria 3. Statisztika és valószínűség 3.1. Véletlen 3.2. Adat ábrázolás és magyarázat

A táblázatból jól látható, hogy a kerettanterv(ek) – szoros összhangban az érettségi követelményekkel – külön csoportba osztják a *Sorozatok* tanítását a közoktatásban. Ezzel ellentétben a matematika, mint tantárgy ausztrál jellegű részekre bontása még alpontokban sem említi a sorozatokat. A további összehasonlításból majd látható válik, hogy a sorozatok csak a *1.1. Számok és helyi értékek* és az *1.4. Algebra és minták* fejezetek részeként jelennek meg az oktatásban.

[13] NAT, 2003
[14] Shape of the Australian Curriculum, 2009

4.2. A téma előzményei

Érdemes megemlíteni, hogy a sorozatok témaköre végighúzódik az alapszintű, a középszintű és a felsőoktatásban is. Már az egészen pici gyermekeknek feladhatók egyszerű feladatok: tárgyak sorba rendezésére, sorozatok hiányzó tagjának megkeresésére vonatkozóan. Természetesen alsó tagozatban nem definiáljuk számukra sem magát a *sorozat* szót, sem az ezzel kapcsolatos fogalmakat. Jellemzőek viszont az alábbi típusú feladatok:

- Hányadik a sorban….?
- Folytasd a sort….!
- Melyik nem illik a sorba…..?
- Állítsd sorrendbe!
- Folytasd a színezést!
- Mi lehet a szabály?
- Keress kapcsolatokat!
- Számolj kettesével, hármasával, tízesével, stb.…...![15]

Természetesen a legtöbb tankönyv szerző rengeteg színes ábrával egészíti ki az ilyen típusú feladatokat (is) az első négy évfolyamon. A felső tagozaton és főleg a gimnáziumok részére szánt tankönyv-családokban azonban csak ritkán találkozhatunk ábrákkal az általam vizsgált könyvek esetében, még ritkábban színes, érdekes reprezentációval. Kivételt ez alól csak a *Sokszínű matematika*[16] című sorozat képez, pedig a szemléltetés nem csak motivál, hanem elősegíti a gyorsabb, jobb megértést és a gyerekeket is az ábra készítésének fontosságára ébresztheti rá.

Visszatérve a sorozatok tanításának előzményeihez 1.-11. osztályig, a legszembetűnőbb formai különbség a magyar és az angol tanítási nyelvű ország alaptanterve között, hogy míg az előbbi három szempont szerint (*Tartalom; Fejlesztési feladatok, tevékenységek; Követelmények*), addig az utóbbi – elhagyva a *fejlesztési feladatokat, tevékenységeket* – mindössze két szempont alapján határozza meg a követelményeket a közoktatásban. A mellékelt táblázatból (*4.2. melléklet*) azonnal észrevehető persze a képzési szakaszok közötti eltérés is, hiszen nem szabad elfelejtenünk, hogy Ausztráliában már 5 éves korban elkezdődik az általános iskola egy ”óvodai” (K/Kindergarten) vagy ”alapozó”

[15] Takács, 1992
[16] Sokszínű matematika, 2002-2004

(Foundation) évnek nevezett évfolyammal, azonban náluk a 11., 12. évfolyam már nem kötelező. Így ugyan a kötelezően elvégzendő évfolyamok száma csak egy évvel tér el (12 itthon, és 11 ott), mégis inkább korcsoport szerint készítettem el a táblázatot, és nem pedig azt állítottam párhuzamba, hogy hányadik éve jár a gyermek iskolába, ugyanis a NAT is jellemzően úgy fogalmaz, hogy egy adott korcsoportnak milyen szintű tudással kell rendelkeznie.

Megvizsgálva a követelményeket, azt gondolom, hogy jelentős eltérés tapasztalható a két ország matematika tanterve között a sorozatok tanításának előzményeit illetően. A magyar tantervben szinte minden évfolyamon megtalálhatóak a sorozatokkal kapcsolatos tartalmak, követelmények. Ezzel szemben az ausztrál tanterv 11 évfolyamából mindössze négy évfolyamon (K,1. ,2. , 6.) foglalkoznak a témával kapcsolatos előzményekkel. Úgy vélem, hogy a téma rendszeres, szinte évente való ismétlése, és továbbvitele sokkal célravezetőbb. Ezenkívül, véleményem szerint, hasznosabb a tananyag fokozatos felépítése, és a korosztálynak megfelelő nehézségi-szintű feldolgozása. A nehézségi szintek a tananyag szinte teljes egészében eltérnek az egyes korcsoportoknál a két Nemzeti alaptantervben. Különbség figyelhető meg már a számkörök bővítésénél is: első évfolyam során a magyar gyermekek még csak a 20-as számkörben dolgoznak, míg az ausztrálok már 100-asban, sőt néhány esetben még ebből is kitekintenek. Magyar társaik ezt a következő évben teszik meg. Ábrák, diagrammok használatával az ausztrál diákok szintén korábban ismerkednek meg, (már az első év folyamán), majd végig nagyon fontos szempont marad. Nálunk ez csak 3. osztályban jelenik meg (sőt a táblázatok, grafikonok csak felső tagozatban – eleinte csak értelmezés, majd önálló készítés), és kevésbé hangsúlyos szerepük van, pedig az érettségi feladatok között gyakran szerepel ilyen jellegű feladat. Ezenkívül az élet számos terültén előfordulnak szemléltető céllal, és nem csak elkészítenünk, hanem olvasnunk is tudni kell őket. Érdekesség, hogy az ausztrál gyerekeknek már 6-7 éves koruktól fogva tudniuk kell kettesével, hármasával, ötösével számolni, igaz, eleinte csak 0 kezdőponttal, majd egy év elteltével már bármely kezdőponttal. Itthon ez a képesség nem jelenik meg, mint tantervi követelmény, de későbbre tehető az elvárása. Ugyan a modellalkotást előbb tanulják (2. illetve 3. évfolyam) és a jelöléseket is hamarabb bevezetik külföldön, az ábrázolást a magyar gyerekek egy évvel korábban ismerkednek meg, mint társaik. Azonban az ausztrál pedagógusok nem csak számegyenest, és Descartes-féle koordinátarendszert, hanem számsíkot is használnak. A sorozatok felismerése az első évfolyam feladatai közé tartozik; folytatni, kiegészíteni és a hiányzó elemeket pótolni eleinte tárgyakból majd számokból álló sorozatok esetén kell

tudni. A képzési szabályt a magyar másodikas kisgyerekek még csak szóban, velük egykorú ausztrál társaik már írásban is prezentálják, matematikai jelekkel.
A legjelentősebb eltérés a speciális sorozatok, azaz a számtani és mértani sorozatok tanításának időpontját illetően mutatkozik: előbbiekkel Ausztráliában már első, második osztályban foglalkoznak, Magyarországon csak a 7. évfolyamon jelenik meg ez a tantervi követelmény. A mértani sorozatok 4. illetve 8. osztályos tananyag. Ennek a jelentős eltérésnek az oka talán az lehet, hogy a szigetországban kevésbé jelentős részét képezi a sorozatok tanítása az egész matematika oktatásnak, és ahogy majd a minta feladatokból látható lesz, kevésbé részletesen is tárgyalják. Érdekesség azonban, hogy a középiskolát kiegészítő két évfolyamon (11., 12.) a magyar egyetemi szinthez hasonló mélységig tanulják, valamint, hogy korán megjelennek a törtet, tizedes törtet tartalmazó sorozatok is.
Amint az a tanított fogalmak listájából is látható, a sorozatok függvényszerű tulajdonságaival, és ezáltal a függvényekkel való összekapcsolással csak a magyar NAT-ban találkozunk.

Összegezve a sorozatok tanításának ausztrál és magyar előzményeit, látható, hogy az egyes résztémák jóval előbb megjelennek, ugyan kevésbé részletesen tanítják őket. Bár a tananyag egyenletesebb elosztása a magyar közoktatásban célravezetőbb lehet. (Megfigyelhető, hogy a legtöbb alapot ötödikben sajátítják el a hazai diákok a sorozatokat illetően.) Azt gondolom, Ausztráliában sokkal praktikusabb a matematika oktatás, nagy hangsúlyt fektetnek az alkalmazhatóságra és a mindennapi élet során előforduló problémák tanítására. Ezt mutatja az is, hogy jelentős mértékben foglalkoznak a pénzzel matematika órákon: gyakoriak a finanszírozással kapcsolatos feladatok és matematika felhasználhatóságának tudatosítása a pénzügyeinkben. A sorozatok tanítása különösen alkalmas arra, hogy valóság-közeli példákkal motiváljuk a gyerekeket, hiszen a kamatos kamatszámítás talán a leggyakoribb alkalmazási terület.
Azt gondolom, a magyar alaptanterv részletessége kimondottan hasznos a kezdő pedagógusok számára, viszont egy másik ország tantervének vizsgálata, és az onnan nyert ötletek, kiegészítő feladatok tovább segíthetik a munkánkat.

4.3. A téma elhelyezkedése a tananyagban

Az sorozatok 12. osztályos tanítását megelőző ismereteket összefoglaló táblázatból (*1.2. melléklet*) látható, hogy a magyar közoktatási rendszerben a sorozatokat az *Összefüggések,* *függvények, sorozatok* témakörön belül ismerik meg a diákok. Így nem meglepő, hogy a sorozatok beépülését a tananyagba nem csak a konkrét előzmények, hanem más anyagrészek is előkészítik. A 12 évfolyam alatt elsajátítandó matematika tananyagban szoros összefüggés figyelhető meg a függvényekkel, hiszen magukat a sorozatokat is bizonyos függvényekként definiálják leggyakrabban a tankönyvszerzők.

Például:

> „ Számsorozaton olyan függvényt értünk, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, és értékkészlete pedig a valós számok egy részhalmaza."[17]

Ezenkívül kapcsolat fedezhető fel a halmazokkal és a közepekkel is, ugyanis a halmazelmélet részeként a gyermekek megismerkednek a számhalmazok közötti hozzárendeléssel, a halmaz elemeivel, azok tulajdonságaival. A számtani és mértani közép fogalmának felidézése pedig segít az aritmetikai és geometriai sorozatok tagjainak kiszámításánál és ezen speciális sorozatokra jellemző sajátosságok bemutatásánál. A témakör összekapcsolása más, korábbi anyagrészekkel pedig segít a tanulóknak a már meglévő matematikai tudáshoz való kapcsoláshoz.

Ausztráliában – ettől eltérő módon – nem szerepel a tantárgyi felosztásban az analízis, helyette a *Számok és helyi értékek* valamint az *Algebra és minták* részeken belül foglakoznak függvénytannal, sorozatokkal. Úgy vélem, az analízis elemeinek szétválasztása nem célravezető az oktatásban, bár a más matematikai részterületekkel (törtekkel, sokszögekkel szögeinek összegével) való összekapcsolás előnyös és követendő lehet, mint további alkalmazási lehetősége a sorozatoknak.

4.4. Tanított fogalmak listája 5.-12. osztály

MINDKÉT ORSZÁGBAN TANÍTOTT FOGALMAK (Magyarországon középszinten és Ausztráliában középiskolai kiegészítő évek nélkül):

[17] Czapáry, 2004

- sorozat fogalma
- képzési szabály
- sorozat tagjai
- általános tag/n-edik tag
- megadási mód:
  - utasítással
  - formulával/ képlettel
  - rekurzióval
- számtani sorozat:
  - növekvő,
  - csökkenő,
  - állandó előjelű,
  - változó előjelű
- a sorozat különbsége/ differencia
- mértani sorozat:
  - növekvő,
  - csökkenő,
  - állandó előjelű,
  - változó előjelű
  - végtelen
- sorozat hányadosa/kvóciens
- sorozat összege/az első n tag összege, összegképlet, $n.$ részösszeg
- rekurzió, rekurzív sorozat
- korlát:
  - (legnagyobb) alsó
  - (legkisebb) felső
- alulról korlátos sorozat
- felülről korlátos sorozat
- korlátos sorozat
- Fibonacci-sorozat

Ezenkívül tanított fogalmak:

MAGYARORSZÁGON	AUSZTRÁLIÁBAN
– monotonitás o (szigorúan) monoton csökkenő sorozat o (szigorúan) monoton növekvő sorozat – ábrázolási mód: o koordináta-rendszerben o számegyenesen	– Hatványsorok o integráltja o deriváltja – Taylor-sorok – Maclaurin sor – harmonikus sorok, sorozatok

A felsorolás és a táblázat alapján látható, hogy a két országban nagyrészt megegyezik *a tankötelesség végéig* (Magyarország: 12 évfolyam, Ausztrália: 10évfolyam) tanított fogalma listája. Különbség abban mutatkozik, hogy a szigetországban a kötelező (egységes követelményű) 10 évfolyam utáni felsőoktatásra is felkészítő két kiegészítő évfolyamon olyan fogalmakkal is megismerkednek a diákok, melyekkel Magyarországon csak a felsőfokú tanulmányok során. Habár a differenciálszámítás és az integrálszámítás emelt szinten hazánkban is része az érettségi követelményeknek[18], Ausztráliában egy kalkulus

[18] Matematika érettségi követelmények, 2010

(Calculus) nevű tantárgy keretein belül már a középiskolai választhatóan elvégzett szintemelő évfolyamok során foglalkoznak a határértékkel, függvényekkel, differenciál- és integrálszámítással, végtelen sorokkal.
A monotonitás és az ábrázolási mód csak olyan értelemben számít többlettudásnak a magyar gyermekeknél, hogy számukra definiáljuk és használjuk is ezen fogalmakat, míg Ausztráliában ezek kifejezések nem szerepelnek a NAT-ban. Természetesen a határértékhez, korlátossághoz nélkülözhetetlen a monotonitás fogalmának ismerete. A grafikus ábrázolás pedig olyannyira kihangsúlyozott kompetencia és követelmény az ausztrál tantervben egészen korai életévtől kezdve – amint az látható lesz a példaként bemutatott feladatokból is (*5. fejezet*) – hogy a tanulók nyilvánvalóan ismerik az ábrázolási módokat, még ha nem is említik a tanmenetekben és a tantervben ezeket a fogalmakat.

4.5. Tantárgyak között integráció

A magyar közoktatásban egyre inkább észrevehető az a tendencia, hogy egy adott tananyagrészt ne csak, mint egy tantárgy önálló egységét kezeljük, hanem mutassuk meg, fedeztessük fel annak interdiszciplináris voltát a tanulók számára. Egy szakasz összefüggései más tantárgyakkal illetve a hétköznapi élet tevékenységeivel gyakran a legerősebb motivációs faktorok között van. Amikor ugyanis egy diák nem kifejezetten érdeklődik a matematika iránt, de észreveszi, hogy az e tárgykörben szerzett tudását ”ki tudja vinni matematika óráról” és akár a kedvenc tantárgyával vagy érdeklődési körével kapcsolatban alkalmazni egy eljárást, vagy számolási módszert, akkor sokkal nyitottabban fog beülni a következő órára. Éppen ezért az integrálás, más tantárgyakkal való összekapcsolás mellett a másik nagyon kiemelkedő motivációs tényező az alkalmazhatóság bemutatása. Mivel ez a szempont is egyre nagyobb szerepet kap a matematika-didaktikában, ezért ezt külön fejezetben szeretném összehasonlítani a két országban előforduló valóság-közeli feladatok vizsgálatával.
Az ausztrál Nemzeti alaptanterv külön fejezetet szentel a kérdésnek és három másik tantárggyal hozza szorosabb kapcsolatba a matematikát és a sorozatokat. Ezek a következők: történelem, angol és természettudományok. Talán e legutóbbival mindenki azonnal fel tud sorolni néhány összefüggést, és alkalmazást, de érdemes megemlíteni, hogy a világ több ezer éves múltra visszatekintő történelmében számos híres matematikus foglalkozott a sorozatokkal. Az ókori tudósok (Nikomakhosz, Püthagorasz – háromszögszámok, négyszögszámok) mellett a középkorból (Fibonacci) és az újkorból

(Bernoulli, Cauchy, Dirichlet) is megemlíthetünk néhány példát a gyerekek számára, remélhetőleg jobban felkeltve ezáltal az érdeklődésüket a téma iránt. A jelenkorból pedig a társadalom fejlődésével, pénzügyi adatokkal (banki kamat), idővonalak rajzolásával és még számos egyéb területtel kapcsolatban alkalmazhatjuk a sorozatokat. Az anyanyelvi kapcsolat oka pedig az, hogy „a számolás csak szociális, kulturális, politikai, gazdasági és történelmi kontextusban és gyakorlatban érthető meg" állítják az ausztrál alaptanterv összeállítói[19].

A magyar közoktatásban általában a biológiával (botanika), fizikával, történelemmel, hozható kapcsolatba a sorozatok tanítása, hiszen természetesen a magyar matematikusok között is vannak elismert tudósok, többek között Fejér Lipót, Reisz Frigyes, Haar Alfréd. Fizika órán a határérték alkalmazható, míg a biológiával, természettudományokkal a Fibonacci-sorozatot hozhatjuk összefüggésbe. „Például a liliomnak, a nősziromnak három; a haranglábnak, a boglárkának öt; a szarkalábnak nyolc; a körömvirágnak 13; az őszirózsának 21; egyes százszorszépeknek 34; más százszorszép-fajoknak pedig 55 vagy 89 szirma van. Fibonacci-spirálba rendeződnek például a fenyőtoboz és az ananász pikkelyei, a napraforgó magjai, a málna szemei, a karfiol rózsái és egyes kaktuszok tüskéi"[20]. A sorozat elemei többször megjelennek a híres író, Dan Brown könyveiben is, sőt, a zenében is felfedezhetjük a megjelenésüket, „Bartók Béla a Fibonacci-szám hosszúságú szakaszok fölhasználásával tagolta zeneműveiben az egyes zenei gondolatok ütemsorrendjét"[21].

4.6. Felhasználható oktatástechnikai eszközök – Sorozatok szemléltetése

4.6.1. GeoGebra programmal:

Az interneten számos olyan alkalmazás és program található, melyeket szívesen használnak a diákok még egy-egy iskolai feladat megoldásához is. A szakdolgozatban található színes ábrákat én is egy matematikai szoftver, a GeoGebra segítségével készítettem el, amely úgy gondolom kifejezetten alkalmas a sorozatok témakörébe tartozó feladatok ábrázolásához. Az matematika oktatás során jól használható a program mind a

[19] Shape of the Australian Curriculum, 2009
[20;21] Fibonacci-számok, 2011

tanulók, mind a pedagógusok által, ezért röviden bemutatnám a GeoGebrát, összefoglalva előnyeit és a benne rejlő lehetőségeket.

A GeoGebra egy olyan dinamikus matematikai program, amely 2001-ben a Salzburg Egyetemről indult útjára Markus Hohenwarternak köszönhetően – olvashatjuk Répásy Nóra szakdolgozatában a GeoGebráról[22]. A dolgozat főként a pedagógusok számára nyújt útmutatást, hogy a matematika mely területein érdemes és lehet alkalmazni ezt a számítógépes programot, de akár a diákok számára is hasznos lehet. A szoftver „legfontosabb előnye […] az, hogy használatát, az alap funkcióinak működését szinte bárki pár óra alatt el tudja sajátítani" – idézi a szakdolgozat Papp-Varga Zsuzsanna szavait. A programot a matematika mindhárom főbb területén, az analízisben, az algebrában és a geometriában is nagyon praktikusan lehet alkalmazni, sőt a GeoGebra „összekapcsolja az objektumok különböző reprezentációit, geometriai megjelenítését és algebrai leírását. […] A felhasználó a programmal egy virtuális szerkesztőkészletet kap, amelynek segítségével elkészítheti a középiskolai szerkesztések bármelyikét. A papíron végzett szerkesztésektől eltérően a kiinduló objektumok (pontok, egyenesek…) a szoftverben szabadon mozgathatók, miközben a tőlük függő objektumok a geometriai kapcsolatok alapján velük együtt mozognak. A GeoGebra másrészt egy számítógépes algebrai rendszer, amelyben az objektumok algebrai úton adhatók meg (pontok koordinátáikkal, egyenesek egyenleteikkel, függvények képletükkel, stb.)" – véli Papp-Varga Zsuzsanna[23].

Répásy Nóra szerint a programban „a menüsor alatti gombokkal lehet szerkesztéseket végezni. Itt vehetünk fel pontokat, egyeneseket, sokszögeket, szögeket, ellipszist, hiperbolát, parabolát és kört. Forgathatunk, tükrözhetünk, felvehetünk adott egyenesekkel párhuzamos illetve merőleges egyeneseket, és mozgathatjuk az objektumokat, valamint magát a rajzlapot is. A szerkesztésre való gombok alatt jobb oldalon található maga a rajzlap, míg bal oldalon a felvett objektumok algebrai leírását (például: pontok koordinátáit, egyenesek egyenletét) láthatjuk. A programablak legalján egy parancssor található, melynek segítségével különböző függvényeket, alakzatokat definiálhatunk"[24]. Kiemeli még, hogy a GeoGebra „alkalmazható különböző műveletek és absztrakt fogalmak szemléltetésére, [valamint] sokat segíthet a diákoknak abban, hogy meglássák a különböző matematikai összefüggéseket"[25] és bátran kísérletezhetnek a segítségével.

[22] Répásy, 2011, pp 3-4
[23] Papp-Varga, 2010
[24] Répásy, 2011
[25] Répásy, 2011

Azt gondolom, a könnyű kezelhetőség valamint a számítógéphez kötött használat miatt a gyerekek szívesen játszanak, szerkesztenek a programmal, és a GeoGebrával elkészítendő házifeladat rámutathat a tantárgy szépségire. A látványos eredmény meghozhatja a kísérletező kedvüket az egyes témakörök esetében és például a gyakran csak számokkal és jelekkel leírt számsorozatokat kiválóan szemléltethetjük a program segítségével. Az érdeklődés felkeltése, azaz a motiváltság elérése különösen nehéz feladat a matematika esetében, ezért úgy vélem, hogy minden hasonló lehetőséget ki kell használnunk pedagógusként.

4.6.2. Maximával és Scilabbal

Amint az a New England-i egyetem kurzusainak leírásából kivehető, természetesen a szigetországban is használnak számítógépes programokat a matematika oktatásban. Röviden megemlíteném ezek közül kettőt összehasonlítási alapot nyújtva a magyar lehetőségekhez.
Az egyik ilyen program a Maxima[26], mely 1982-ben William Schelter közreműködésével jött létre. Szimbolikus és számalapú kifejezésekkel dolgozik, beleértve a differenciálást, integrálást, Taylor-sorokat, és sok egyéb algebrai egységet. A GeoGebrával szembeni előnye, hogy a függvényeket kettő és három dimenzióban is képes ábrázolni.

A másik szoftver, a Scilab[27] szintén többdimenziós ábrázolást tesz lehetővé és számos tudományágban használható. Legfontosabb tulajdonságai: szimuláció, vizualizálás, elemzés, statisztika. Nagyon jól használható a középiskolában is grafikus számolóeszközként illetve matematikai problémák megoldására, hiszen a tanulók önállóan is tudnak vele dolgozni, akár otthon is, hasonlóan a GeoGebrához.

4.7. A téma esetleges folytatása

Mivel a magyar közoktatásban a Nemzeti alaptanterv, a Mozaikos Kerettanterv és ennek köszönhetően a tankönyv-családok is szinte kivétel nélkül a középiskola 12. évfolyamára teszi a sorozatok tanítását, a téma folytatására középszinten már nem kerül sor a tankötelesség végéig. Habár az előzményekből látható, hogy az általános iskola felső tagozatának kezdetén foglalkoznak legrészletesebben a sorozatokkal az első 11 évfolyam

[26] Maxima, 2009
[27] The Free Software for Numerical Computation, 2011

során, és ugyan majdnem minden évben kiegészítik, továbbviszik valamelyest az 5. évfolyamon megalapozott tudást, mégis az érettségi évében rögzítik igazán a számsorozatokkal kapcsolatos fogalmakat, tételeket, definíciókat. Tehát a sorozatok folytatása, a rá épülő tananyag, illetve a függvényekkel való szorosabb összekapcsolás már inkább a felsőfokú tanulmányok során valósul meg. Mégis azt gondolom, érdemes néhány szóban megemlíteni, hogyan épül tovább a tananyag, három különböző célból is. Egyrészt az érdeklődő, kiemelkedő képességű diákok számára szemezgethetünk belőle. Másrészt az ELTE matematika tanár szakán oktatott sorozatokkal kapcsolatos tananyag rövid áttekintése azért is érdekes lehet, mert az ausztrál középiskolák kiegészítő éveiben (11.-12. évfolyam) mélyebben foglalkoznak a sorozatokkal, mint a magyar középszintű csoportokban, például megjelenik a határérték és a konvergencia fogalma, így alaposabb lesz az összehasonlítás.
A téma folytatására irányuló vizsgálat harmadik célja, hogy választ találjak a következő kérdésekre a tantervekben meghatározott tervezett tananyag tekintetében természetesen csak a sorozatok témakörre korlátozódva.

1. A magyar vagy az ausztrál diákok kezdik meg felkészültebben felsőfokú tanulmányaikat a tananyag alapján az analízis témakörben?
2. A magyar egyetemi tananyag mennyiben támaszkodik a középiskolai tudásra, mennyire használja fel alapul az érettségihez szükséges tudást?

A magyar közoktatásban évfolyamról évfolyamra haladva épül fel a sorozatokkal kapcsolatos tudás. Ez a folyamatosság és fokozatosság hozzájárul ahhoz, hogy egy biztosabb alapokon nyugvó tudást szerezzenek a tanulók, melyre könnyebben lehet építeni a továbbiakban. Már az első féléves kurzusok olyan előzetes ismereteket kívánnak meg, melyek távol állnak a középiskolai követelményektől. Hirtelen nagyon precíz megfogalmazást, matematikai tisztaságot, és jelölések sokaságát kell egyszerre használnunk és megértenünk már az első hetek során, melyek addig ismeretlenek voltak számunkra. A szemléletesség és a matematikailag korrekt bizonyítások közt szorosabb kapcsolatra lenne szükség, valamint a középiskolában a tételek, definíciók szemléletesebb tanítására és számonkérésére, úgy, mint az ausztrálok esetében az látható a teljes indukciós bizonyítás módszerének rögzítése esetében (*5.1. melléklet*). Illetve az *5.2. versenyfeladatok* alfejezet egyik feladatvariációjában található ábrázolásra vonatkozó kérdések (diagram, rajz készíttetése) gyakran hiányoznak az általam vizsgált magyar tankönyvi feladatokból.

Ezzel ellentétben a különböző ábrázolási módok (Descartes-féle koordináta-rendszer-beli, számegyenesen történő) ismerete és gyakorlása a sorozatok témakörön belül megjelenik a magyar közoktatásban és jól felhasználható az egyetemi analízis során.

A másik különbség, melyet kiemeltem a két országban tanult fogalmak közül, a monotonitás fogalmának definíciálása a középiskolában. A fogalommal nem a sorozatok témakörön belül találkoznak először a gyerekek, hanem már a függvényeknél megismerkednek vele és így jól tudnak rá építeni, ami azért fontos, mert a későbbiekben nélkülözhetetlen alapja a határérték és a konvergencia definiálásának, megértésének. E két utóbbi tekintetben tehát a magyar közoktatás nyújt olyan ismereteket, melyek megkönnyítik a matematikai (analízis) tanulás folytatását.

A tananyag két komponense – ismeretek valamint matematikai probléma- és feladatmegoldó képesség – közül az utóbbit emelném ki, mint az érettségig felépített olyan kompetenciát, melyre erősen támaszkodnak az egyetemi gyakorlati feladatok során. Ehhez először bemutatok egy olyan példát, mely igazolja, hogy a magyar oktatási rendszerben gyakran találkozhatunk összetett feladatokkal, melyek több matematikai rész (jelen esetben algebra, geometria) együttes felhasználását igényelik:

1. Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény I. Összetett feladatok, 987. feladat[28]

Kerti öntözőberendezéssel mindazokat a területeket meg tudjuk locsolni, amelyek a berendezés szórófejétől legalább 1 m-re és legfeljebb 3 m-re vannak.

a) Hány m^2 területet tudunk egyszerre meglocsolni 1 ilyen berendezéssel?
b) Ha egyidejűleg 2 ilyen berendezés van és azt szeretnénk, hogy a 2 berendezés által megöntözött terület a lehető legnagyobb legyen, akkor egymástól mekkora távolságra kell a szórófejeket elhelyezni? Mekkora ez esetben az öntözött terület?
c) Egy gondosan megművelt kert 4 sarkában 1-1 öntözőberendezést helyezünk el. A kert területének hány %-át tudjuk megöntözni a négy berendezés egyidejű működtetésével?

A megoldáshoz szükség van

a)

- annak felismerésére, hogy az ilyen öntözőberendezés kör alakban spricceli a vizet

[28] Hortobágyi, 2002

- kör területének képletére, illetve annak helyes alkalmazására
- legalább, legfeljebb kifejezések matematikai jelentése: $\leq, \geq$

b)

- eset szétválasztásra (a két külső és a két belső körvonal érintő, metsző vagy nem metsző volta), majd a különböző esetek vizsgálatára, és közülük a maximális kiválasztására
- síkgeometriára (kör, koncentrikus körök)

c)

- annak felismerésére, hogy a négy locsolt terület valójában 1 öntözőberendezés által lefedett terület
- százalékszámításra
- síkgeometriára (téglalap, téglalap területének kiszámítása)
- arányszámításra

A következő egyetemi analízis feladat prezentálásával pedig az a célom, hogy megmutassam, mennyiben jelent előnyt a hallgatóknak a középiskolában kialakított kombinatív gondolkodás készsége és a megszerzett problémamegoldó rutin.

2. Analízis II. félév:

Egy henger alakú farönk hossza $4\ m$. A rönk térfogatának meghatározásához megmérik a rönk hosszát és a kerületét. A hosszmérésnél pontos értéket kapnak, de a kerületet csak közelítően lehet mérni. Legyen K a közelítő érték (méterben). Jelölje V a rönk térfogatának közelítő értékét, amikor a K közelítő értékkel számolunk.

a) Adjon képletet V-re K függvényében!
b) Legyen V_0 a rönk tényleges térfogata. Adja meg V_0 értékét, ha a tényleges kerület $K_0 = 1$ méter!
c) Milyen K értékekre lesz a $|V - V_0|$ hiba kisebb, mint V_0 egy százaléka?

Megoldás:

a) $K = 2 \cdot r \cdot \pi$, ebből a kör sugara: $r = \frac{K}{2 \cdot \pi}$

$T = r^2 \cdot \pi$, ahol T a henger alakú farönk alapjának területe

$V = T \cdot m = r^2 \cdot \pi \cdot 4$, ahol $m = 4$ méter a farönk magassága

$$V = (\frac{K}{2 \cdot \pi})^2 \cdot \pi \cdot 4 = \frac{K^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \pi \cdot 4 = \frac{K^2}{\pi}\ m^3$$

b) $V_0 = \frac{K_0^2}{\pi} = V_0 = \frac{1^2}{\pi} = V_0 = \frac{1}{\pi}\ m^3$

c) $|V - V_0| < 0{,}01 V_0$

$$|V - V_0| = \frac{K^2}{\pi} - \frac{1}{\pi} = \frac{K^2 - 1}{\pi}$$

$$\frac{K^2 - 1}{\pi} < 0{,}01 \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$\Updownarrow$$

$$K^2 - 1 < 0{,}01$$

$$\Updownarrow$$

$$K^2 < 1{,}01$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{0{,}99} < K < \sqrt{1{,}01}$$

Véleményem szerint az első kérdés megválaszolásához figyelembe kell venni a sorozatok végzős évfolyamokon való tanításán kívül az előzményeket is. Mint azt a *4.2. A téma előzményei* részben említettem, a magyar iskolarendszerben szinte minden évfolyamon előkerülnek a sorozatokkal kapcsolatos ismeretek, és lassan fokozatosan haladva épül fel az az előzetes tudás, mely 12.-ben szükséges a témakör mélyebb megértéséhez, elsajátításához. Ezzel szemben az ausztrál iskolákban mindössze 4 évfolyam foglalkoznak a sorozatokkal, és erre az időszakra tömörítik be az előzményeket. Bár a szigetországban többet kérnek az ismeretanyagból, sokkal kevesebb idő alatt próbálják azt elsajátíttatni a diákokkal. Így, ha az ausztrál gyerekeknek sikerül a tantervi követelményeknek megfelelniük és rövidebb idő alatt valóban tudást szerezniük, akkor – azt gondolom – ők némileg több tudással rendelkeznek, ami előnyt jelenthet a felsőoktatásban.

A második kérdésre vonatkozó tapasztalataimat, valamint a kutatás eredményeit a következő táblázatban foglalom össze, melyben az információk Laczkovich Miklós és T. Sós Vera *Analízis I.* című tankönyvéből[29] és az ELTE matematika tanári analízis-kurzusok tematikáiból származnak.

[29] Laczkovich, 2005

Középszintű érettségi követelményen alapuló anyagrész	**Teljesen új ismeretanyag**
• Végtelen számsorozatok • Monoton sorozatok • Geometriai sor • Pozitív tagú sorok • Függvénysorozatok	• Konvergens és divergens számsorozatok • Végtelenhez tartó sorozatok • A határérték egyértelműsége, konkrét sorozatok határértéke, a határérték fogalma és alaptulajdonságai • A Bolzano–Weierstrass-tétel és a Cauchy-kritérium • Numerikus sorok, összehasonlító kritérium. Cauchy-féle gyökkritérium, D'Alambert-féle hányados-kritérium • Abszolút konvergens sorok, Leibniz-sor • Pontonkénti konvergencia, konvergenciahalmaz, egyenletes konvergencia ekvivalens megfogalmazásai, példa pontonként, de nem egyenletesen konvergens függvénysorozatra • Függvénysorok és összegfüggvényeinek differenciálhatósága, függvénysor egyenletes konvergenciájára vonatkozó kritériumok. (Cauchy, Weierstrass) • Hatványsorok, példák hatványsorok tagonkénti deriválásával és integrálásával nyert újabb hatványsorokra, a közepű hatványsorok. Hatványsor egyenletes konvergenciája.

A táblázatból látható, hogy a középszintű érettségire felkészítő közoktatás csak kis részben járul hozzá a felsőoktatás-beli tanulmányok megkezdéséhez és a vizsgák letételéhez; a matematika tanár szakon szükséges ismeretekhez kevés alapot nyújt.

Az ausztrál közoktatásban a tankötelesség a középiskola 10. évfolyamának elvégzésével zárul. Elemi szinten fogalakoznak csak a sorozatokkal, és mindössze négy évfolyam során kerül szóba, hogy a két utolsó év kiegészítő-volta ellenére ez a periódus tekinthető a sorozatokkal kapcsolatos ismeretek valódi megszilárdításának.

A sorozatok-témakör folytatása Ausztráliában is az egyetemi tanulmányok részét képezi. Ennek vizsgálatához a University of New England tanegység-kínálatában szereplő kurzusleírásokat használtam fel. Az oktatott órák közül számos olyan található, amely kifejezetten leendő matematika tanárok számára nyújt hasznos és nélkülözhetetlen ismereteket. Érdekesség, hogy a módszertani kurzusokat aszerint szervezik, hogy a hallgató milyen korosztályt fog tanítani (K-6. évfolyam, 7.-10. illetve 11.-12. évfolyam). Természetesen gazdag a kínálat a nem-tanárszakos matematika hallgatók számára is, ahol szintén megvizsgáltam a sorozatok egyetemi szintű folytatását, felhasználását.

Az University of New England kurzusaiból kiemelt adatokat a következő táblázat tartalmazza:

Matematika tanár szakosoknak	**Matematika matematikusoknak**	**Posztgraduális képzés**
o pénzügyi matematika (ábrázolás, grafikonok, táblázatok) o minták, sorozatok az általános iskolában o a sorozatok és az algebra kapcsolata	o hatványsorok o strukturális matematika (mérnöki matematika, statika, mechanika, matematikai modellek) o pénzügyi tervezés o pénzügyi rendszerek o topológia o kalkulus	o határérték problémák o Taylor-sorok o Laurent-sorok o divergencia-tétel

Az ausztrál (és az egyesült királysági) felsőoktatásban nem találkozunk a magyarhoz hasonló analízis-algebra-geometria hármas felosztással. A nem-tanár szakos hallgatók esetében észrevehető a matematika jóval szorosabb kapcsolata a fizikával, mechanikával, mérnöki tudományokkal. Analízis helyett egy kalkulus (Calculus) nevű tantárgy foglalja magába a határértékkel, függvényekkel, differenciál- és integrálszámítással, végtelen sorokkal kapcsolatos tudnivalókat. Tanárszakon szinte elenyésző az egyetemi szintű sorozatok tanítása – úgy tűnik, a cél sokkal inkább az általános és középiskolai tudás didaktikai jellegű kiegészítése, a matematika tudás akadémiai szintre emelése helyett felkészítés a tanári pályára. A tanári kurzusok túlnyomó többsége kihangsúlyozza azt, hogy minden az egyetemen tanított anyagrésznek és vizsgált problémának, valamint a megoldások kivitelezésének is szoros összhangban kell lennie az érvényes Nemzeti alaptantervvel.

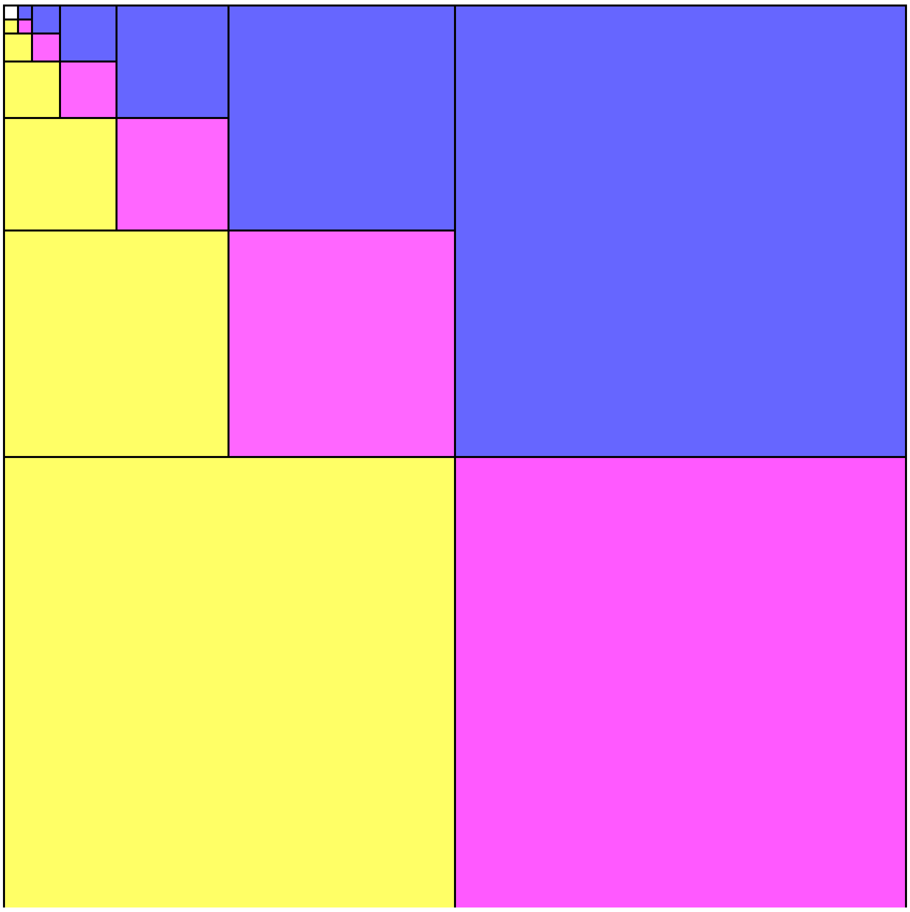
5. Feladatok

5.1. Sorok összeadása

5.1.1. Sorok szemléletesen az általános iskolától az egyetemig – sorok képlettel

Szeredi Éva tanárnő más szerzőkkel kooperációban 1970-es, 80-as években megjelent általános iskolai tankönyvcsaládjának hátsó borítóján érdekes, különleges, kissé szemkápráztató színes ábrákat láthatunk. A végtelenbe futó alakzatok egy-egy speciális sorozat geometriai szemléltetései. Véleményem szerint kiválóan elkészíthetőek a GeoGebra programmal, amelyet a *4.6. Felhasználható oktatástechnikai eszközök* fejezetben mutattam be.

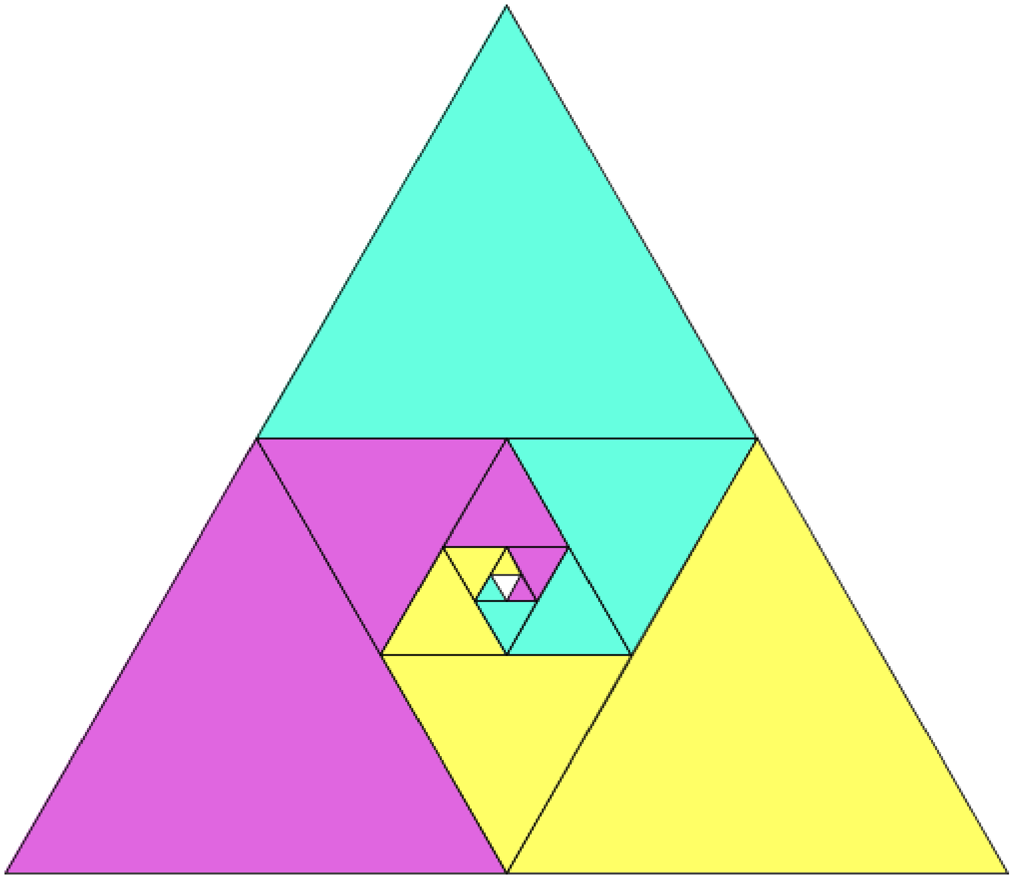
Az alábbi ábrák közül megmutathatunk néhányat a tanórán (általános és középiskolában is a megfelelő anyagrésznél), esetleg egyet-kettőt el is készíthetünk közösen, majd az alapvető szerkesztési eljárások, lépések (pont, szakasz, sokszög felvétele, színezés) megbeszélése után különleges, érdekes házifeladatot adhatunk a tanulóknak, akár projekt, pár vagy csoportmunkaként is. A feladatok célja elsősorban a szemléltetés, a téma iránti érdeklődés felkeltése, a matematika szépségének megmutatása. Ezenkívül kiválóan reprezentálhatóak az ábrákkal a sorozatok alaptulajdonságai, például a tagok, az n. tag, az összeg, a sorozatok növekedő/csökkenő tulajdonsága és a differencia vagy a kvóciens. Az általam felhasznált és bemutatott példák alkalmasak még a végtelen sorozatok és a korlátosság realizálására is. Természetesen a határértékre, konvergenciára vonatkozó információk túlmutatnak a középiskolás tananyagon, de a fogalmak exakt definiálása nélkül beszélgethetünk a sorozatoknak ezekről a tulajdonságairól is.



1. ábra[30]

Az *1. ábrán* három egyforma, a_0 kezdő tagú és $q = \frac{1}{4}$ kvóciensű végtelen mértani sorozat szemléltetését mutathatjuk be a tanulóknak. Az ábra azonban nem pusztán a sorozat állandó hányadosának reprezentálására alkalmas. Szépen ábrázolhatóak vele az egyes sorozatok (rózsaszín, kék, sárga) határértékei ($\lim_{n\to\infty} r_n$, $\lim_{n\to\infty} k_n$, $\lim_{n\to\infty} s_n$) a sorozatok összegé(nek határértékei) ($\lim_{n\to\infty} S_r$, $\lim_{n\to\infty} S_k$, $\lim_{n\to\infty} S_s$) valamint a három végtelen mértani sorozat első n tagjának összege, ami a sorozatok határértékeinek összege is (mivel $|q| < 1$): $\lim_{n\to\infty} S_r + \lim_{n\to\infty} S_k + \lim_{n\to\infty} S_s = 3 \cdot \frac{a_1}{1-q} = 3 \cdot \frac{a_1}{1-\frac{1}{4}} = 4 \cdot a_1$.

[30] Szeredi, 1980



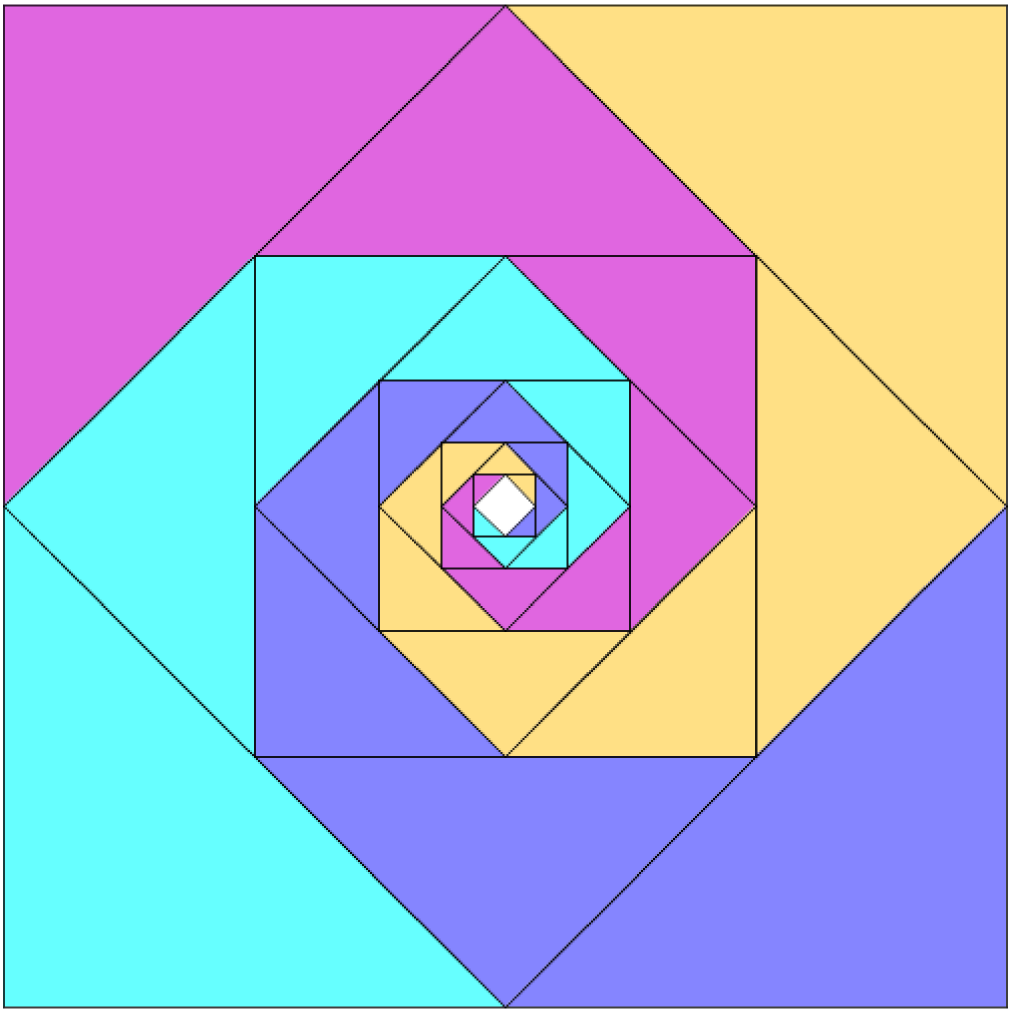
2. ábra[31]

Az előzőhöz hasonlóan a *2. ábrával* is mértani sorozatot tudunk reprezentálni, azzal a különbséggel, hogy a kvóciens értékét $q = \frac{1}{3}$-ra módosítjuk. Így a sorozat tagjai a következők: a_1; $a_2 = a_1 \cdot \frac{1}{3}$; $a_3 = a_2 \cdot \frac{1}{3}$; …; $a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{3}$; …

A háromszög területére vonatkozó képletet is használhatjuk: $T = \frac{m \cdot a}{2}$, ahol m a háromszög magassága, a pedig a szabályos háromszög oldala, ezért m felírható a következő alakban: $m = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$, amiből $T = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$. Így az egész színes terület megközelítőleg $3 \cdot T = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot a^2$

(Ezzel a rajzzal visszautalhatunk egy korábban tanult anyagrészre, a háromszög középvonalának tulajdonságaira is.)

[31] Szeredi, 1979

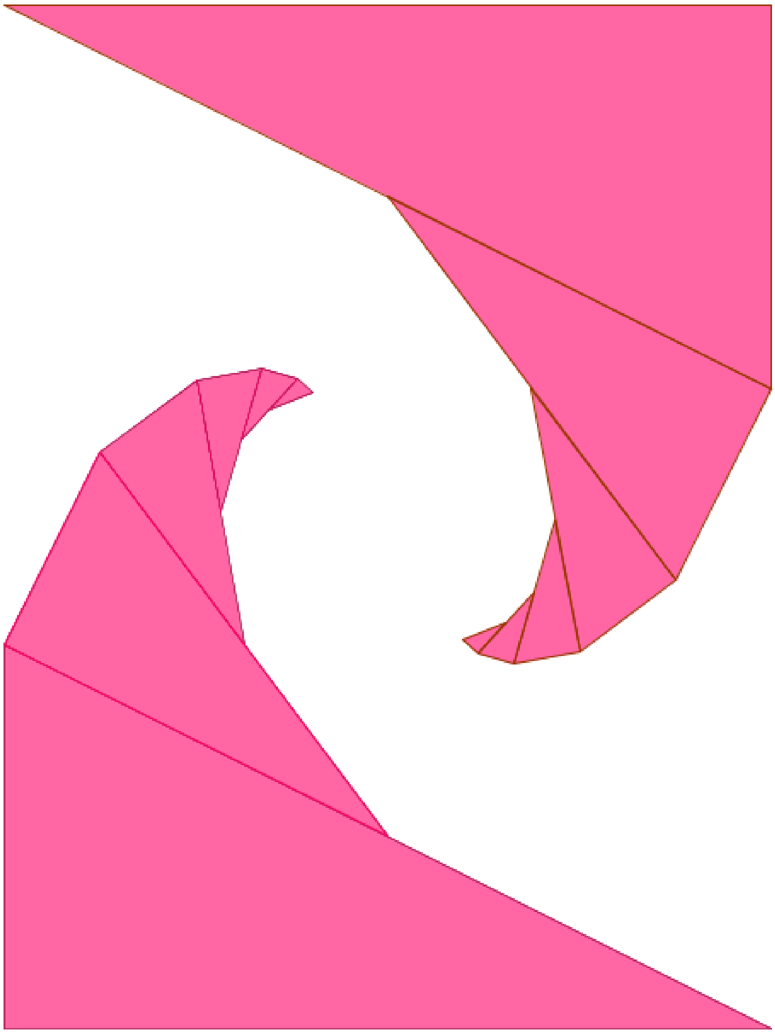


3. ábra[32]

A harmadik kiszínezett alakzat (*3. ábra*) pedig négy azonos kiinduló taggal és hányadossal $q = \frac{1}{2}$ rendelkező végtelen mértani sorozatot ábrázol. Szintén leolvasható (megbecsülhető) róla az egyes (lila, kék, zöld, narancssárga) sorozatok határértékei ($\lim_{n\to\infty} l_n$, $\lim_{n\to\infty} k_n$, $\lim_{n\to\infty} z_n$, $\lim_{n\to\infty} ns_n$), a négy sorozat összegeinek határértéke ($\lim_{n\to\infty} S_l$, $\lim_{n\to\infty} S_k$, $\lim_{n\to\infty} S_z$, $\lim_{n\to\infty} S_{ns}$), a négy végtelen mértani sorozat első n tagjának összege, ami a sorozatok határértékeinek összege is (mivel $|q| < 1$): $\lim_{n\to\infty} S_l + \lim_{n\to\infty} S_k + \lim_{n\to\infty} S_z + \lim_{n\to\infty} S_{ns}$.

A három különböző kvóciensű ábra célja, hogy szemléltesse a tanulók számára, hogy az olyan mértani sorozatoknál, ahol $q < 1$, és értéke állandó, akkor a sorozat végtelen, korlátos, konvergens és határértéke 0.

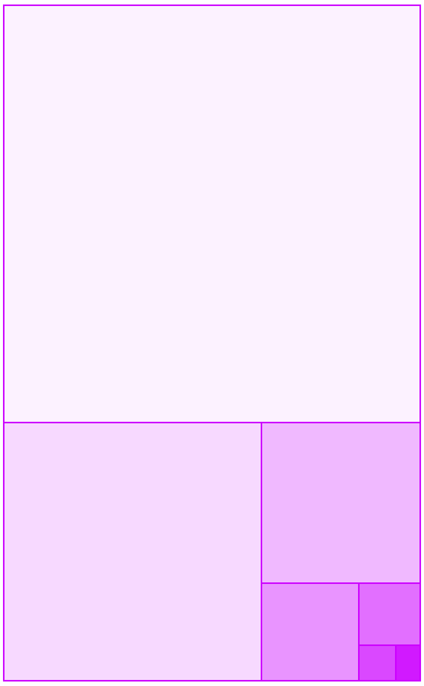
[32] Szeredi, 1978



4. ábra[33]

A *4. ábra* két olyan háromszögekből álló sorozatot reprezentál geometrikusan, melyek oldalainak aránya a sorozatok minden tagjánál állandó, maguk az oldalak $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$; $b_0, b_1, b_2, b_3, , \dots b_n, \dots$; $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$; pedig önmagukban is sorozatot alkotnak. Természetesen az oldalak állandó arányából következik, hogy mindhárom esetben $(a_n; b_n; c_n)$ egy-egy $q = \frac{1}{2}$ kvóciensű végetlen mértani sorozatról van szó. Ez az ábra is kiválóan alkalmas a sorozatok határértékeinek szemléltetésére, de akár visszautalhatunk vele a sokszögeknél tanult területarányokra is. (Oldalak adott arányú csökkentése, növelése mellett hogyan változik a háromszög területének aránya. Ehhez persze érdemes felhasználni a GeoGebra programot, és beskálázott koordináta-rendszerbe elhelyezni a *4. ábrát*.)

[33] Szeredi, 1983


5. ábra

Az *5. ábrán* látható speciális (ún. ”arany”) téglalapot úgy vesszük fel, hogy oldalainak aránya $a:(a+b)=a:b$ legyen. Ekkor az oldalak aránya megegyezik az aranymetszés arányával pl. $b=1$ esetén $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hiszen a távolságra fennáll, hogy $d\geq 0$. Majd az eredeti téglalapból ”levágunk” egy b oldalú négyzetet. Ekkor a keletkező kis téglalap oldalinak arányára is fennáll az iménti aránypár. Ez az eljárást folytatva felírható a következő mértani sorozat: $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_4}{b_4}=\frac{a_5}{b_5}=\cdots$, melynek kvóciense állandó, annak ellenére, hogy a számlálók és a nevezők egy-egy szigorúan monoton csökkenő végtelen sorozatot alkotnak, ahol $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ és $\lim_{n\to\infty}b_n=0$. Bizonyítható, hogy az eljárás ezekkel a paraméterekkel megadva soha nem ér véget, hiszen mivel $a\in\mathbb{Q}^*$és $b\in\mathbb{Q}$ ezért a hányadosukra fennáll, hogy $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}^*$. Természetesen a rajzolás nem csak az eredeti téglalap felosztásával készíthető, hanem az eggyel, kettővel, stb. nagyobb téglalap is ábrázolható a meglévőnek négyzettel való kiegészítésével (a legvilágosabb négyzettel kiegészített téglalap az *5. ábrán*).

A magyar példák mellett szeretnék megemlíteni két ausztrál feladatot is, melyek úgy gondolom, kiemelkednek a többi közül, mivel nagyon praktikusak a sorozatok tanítása során, nem csak a törzsanyag elsajátíttatásában, hanem a matematikán belüli más tananyagrészekkel való összekapcsolásban is.

1. A *Board of Studies* honlap által kínált oktatási segédanyag (syllabus) javaslata szerint a sorozatok jól felhasználhatóak a végtelen szakaszos tizedes törtek tört alakba való átírásához. Például:

$$0.123123123\ldots = \frac{123}{1000} + \frac{123}{10^6} + \frac{123}{10^9} + \cdots = \frac{123}{1000}\left(1 + \frac{123}{10^3} + \frac{123}{10^6} + \cdots\right)$$
$$= 0.123 \times \frac{1}{1-0.001} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$$

2. A teljes indukciós bizonyítási módszert ugyan több magyar tankönyv-család is összefüggésbe hozza a sorozatok tanításával, de az ausztrál segédanyag a háromszögek külső szögeinek összegére vonatkozó tétellel is összekapcsolja a sorozatokat és a teljes indukció módszerét felhasználva bizonyítja azt. Természetesen megtalálható a sillabuszban egy a sorozatok összegére vonatkozó állítás indukciós bizonyítása is, méghozzá az első n páratlan szám összege, de javasolja az első n négyzetszám összegének (és egyéb képletek) bizonyításához is a módszert. A feladatok pontos leírása és magyar fordítása a mellékletben található. (*5.1. melléklet*)

5.2. Versenyfeladatok

A magyar és az ausztrál matematika-oktatásban is jelentős szerepe van a versenyeztetésnek, iskolai, területi, országos, de akár nemzetközi szinten is. Az internet használatának elterjedtével hazánkban is egyre népszerűbb az elektronikus részvétel a versenyekben, és ezáltal az országhatáron túli magyarul – illetve Ausztrália esetében – angolul beszélő diákok is könnyen benevezhetnek, vagy gyakorolhatnak. A világháló segítségével megnyílik az út az elszigetelt farmokon, otthoni oktatásban résztvevő gyermekek számára is, akik ha szeretnének, virtuálisan társulhatnak egy iskola csapatához. A szigetországban ráadásul nem csak angolul, hanem franciául és kínaiul[34] is fogadják az iskolások megoldásait, amivel jelentős mértékben növelik a résztvevők számát, így népszerűsítve a matematikát a környező országok és a bevándorlók körében is.
Az általam választott versenyfeladatok (Australian Mathematics Competition, továbbiakban AMC) készítőinek hármas célkitűzése van:

1. A matematika, mint tantervi tantárgy fontosságának kiemelése

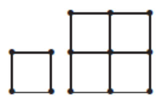
[34] Australian Mathematics Competition, 2007

2. Biztosítani annak a lehetőségét a tanulók számára, hogy felfedezzék a tehetségüket a matematika területén
3. Osztálytermi órák és egyéb matematikai jellegű beszélgetések számára ötleteket, forrást nyújtani

A feladatok összeállítói kihangsúlyozzák, hogy a megoldandó kérdések mindenkinek és bárkinek szólnak, hiszen úgy alkották meg őket (fokozatosan nehezedő sorrendben), hogy minden képességű gyermek számára kihívást jelentsen legalább egy részük.
Összehasonlításként, a közismert magyar feladatsor (KöMaL[35]) célja az alapító Arany Dániel szerint: "tartalomban gazdag példatárat adni tanárok és tanulók kezébe". Ez a több mint egy évszázaddal ezelőtti célkitűzés véleményem szerint inkább egy matematika-feladatgyűjteményhez illik, azonban jelenleg – ha kimondva nem is – biztosan cél a tehetségek felfedezése is (hiszen a KöMaL[36]-nál is publikálják a legszebb megoldásokat, csakúgy, mint az ausztrálok), valamint azt gondolom, nagyon sok középiskolai pedagógus felhasználja a feladatokat órán, szakkörön is.
A versenyeztetés és a siker élménye valószínűleg sok diákot szorosabb kapcsolatba hoz a matematikával, amely tantárgy ismerete nélkülözhetetlen a kötelező iskolai évek lezárásához, az érettségihez. Tehát mindkét verseny célja hasonló, és egyaránt törekszenek a nemzetközi népszerűsítésre is, hiszen a KöMaL[37] is megjelenik angolul, igaz, arról nem találtam információt, hogy angolul is be lehet-e küldeni a megoldásokat. Különbség tehát egyetlen szempontból fedezhető fel, a megcélzott közönség életkorát illetően: az ausztrál verseny már 3. osztálytól kipróbálható, a magyar csak 9.-től.
Az alábbiakban néhány érdekesebb, a sorozatok tanítása során felhasználható versenyfeladatot fogok elemezni, Dr. Ambrus András tanár úr által javasolt részletes szempontrendszer alapján.

AMC – Junior korosztály, 7.-8. évfolyam

Készítsünk egy 1×1-es négyzetet négy szál gyufából. Alkossunk 2×2-eset 12 szálból, az ábrán látható módon, úgy, hogy az összes egység négyzetet kirakjuk belül is. 20×20-as négyzet készítéséhez – melybe belerakjuk a belső kis négyzeteket is – a következő számú gyufaszál szükséges:



[35] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 2011
[36] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 2011
[37] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 2011

(A) 800 (B) 820 (C) 840 (D) 860 (E) 880

1. A feladat megértése:

a. <u>szükséges előzmények:</u>
   i. síkgeometriai alapfogalmak ismerete
   ii. ezen belül különösen a négyzet fogalmának, tulajdonságainak, kiterjedésének, területének, kerületének ismerete
   iii. rekurzív sorozatok ismerete

b. <u>előkészítő feladatok:</u>
   i. Milyen geometriai alakzat készíthető $1, 2, 3,$ stb. darab azonos méretű pálcikából? Mik a közös tulajdonságaik?
   ii. Adott $1\,a$ oldalú négyzet; készítsük el a $2{\cdot}a$ illetve a^2oldalú négyzeteket. Hogyan változnak a kerületek illetve a területek, mik azok aránya?
   iii. Adott $1\,a$ oldalú négyzet, milyen hosszúságúak az oldalfelező merőlegesek (miért?), és hány darab van belőle?

c. <u>ábra, vázlat készítése:</u>

az alakzat tovább is rajzolható, (ez valószínűleg sokaknak nélkülözhetetlen, illetve nagy segítség), de akár a valóságban is szemléltethető (legalább egy része), ha a gyerekek nehezen értik meg az algoritmust vagy a procedúrát nem tudják elképzelni.

2. A megoldás ötletének megtalálása, megoldási terv készítése:

a. ha találkoztam már ilyen feladattal, akkor azt veszem alapul
b. a feladat részproblémákra osztása: vizsgáljuk meg a kérdést 1×1-es, 2×2-es, 3×3-as, stb. alakzat esetén!
c. rekurzió alkalmazása: a feladat megoldása a részfeladatokból
d. saját szavakkal való megfogalmazás (illetve játékosabb, a gyermekekhez közelebb álló megfogalmazás). Például: Ha egy ilyen négyzetrácsos kerítést szeretnénk építeni, akkor hány doboz kis falécre van szükség az áruházból, ha tudjuk, hogy minden gyári dobozban 50 darab léc van?
e. sejtés: páros számú gyufaszálra lesz szükség, illetve kb. $20{\cdot}20{\cdot}2 = 800$ pálcikára lesz szükség

f. célirányos okoskodás: konkrét kiszámolással

g. mire lehet következtetni az ismert adatokból? a sorok és oszlopok paritása bármely n-re megegyezik, hiszen négyzetről van szó, valamint az ún. belső pálcikák száma is páros. Ebből arra lehet következtetni, hogy a megoldásszám páros lesz. Úgy tűnik, hogy ez minden egyes lépés esetén is elmondható.

h. miből lehet a keresett mennyiséget meghatározni? felírom a részeredményeket, és megsejtek egy mintát, képletet, amelyet minden eddigi adat kielégít.

3. A megoldási terv végrehajtása:

a. <u>megoldási lehetőségek:</u>

I. megoldás:

<u>Rekurzióval és képlettel:</u>

Ha észrevesszük, hogy az egyes esetekben szükséges külső pálcikák száma mindig néggyel nő, akkor megsejthető, hogy a keretet alkotó gyufaszálak száma $n \cdot 4$, ahol n a négyzetoldal egysége.

Hasonlóképpen, ha észrevesszük, hogy az egyes esetekben szükséges belső pálcikák száma mindig felírható a következő alakban:

	n, a négyzetoldal egysége	a szükséges belső pálcikák száma
1.	1	$1 \cdot 0 = 0$
2.	2	$2 \cdot 2 = 4$
3.	3	$3 \cdot 4 = 12$
4.	4	$4 \cdot 6 = 24$
5.	5	$5 \cdot 8 = 40$

akkor megsejthető, hogy a belső gyufaszálak száma:

$n \cdot (2 \cdot n - 2) = 2 \cdot n^2 - 2 \cdot n = 2 \cdot n(n-1)$, ahol n a négyzetoldal egysége.

Ezek alapján egy 20×20-as négyzethez szükséges pálcikák száma a következő módon számítható ki: $x = (n \cdot 4) + \big(2 \cdot n(n-1)\big) = 20 \cdot 4 + (2 \cdot 20 \cdot 19) = 840$.

Tehát 840 darab gyufaszálra van szükség egy 20×20-as négyzet elkészítéséhez.

II. megoldás:

Végigszámolással:

	n, a négyzetoldal egysége	a szükséges külső pálcikák száma	a szükséges belső pálcikák száma	a szükséges pálcikák száma összesen
1.	1	4	0	4
2.	2	8	4	12
3.	3	12	12	24
4.	4	16	24	40
5.	5	20	40	60
. . .				
20.	20	80	760	840

A rácsozathoz szükséges gyufaszálak száma = a külső + a belső pálcikák számával. Tehát 840 darab gyufaszálra van szükség egy 20×20-as négyzet elkészítéséhez.

b. várható tanulói hibák:

- a feladat meg nem értése
- nem tudják elképzelni a feladatot
- elszámolás
- a képlet hibás alkalmazása
- nem ismerik fel a mintát a feladatban

4. Visszatekintés, reflexió:

a. a megoldás fő ötletének kiemelése:

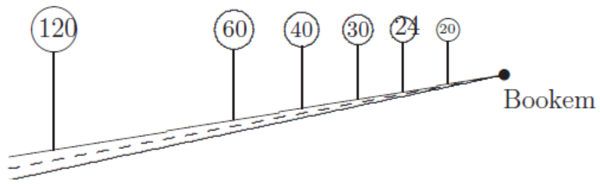
- a kérdés visszavezetése 1×1-es, 2×2-es, 3×3-as, stb. alakzatra
- minta felfedezése

b. feladatvariáció:

Osztott ablakkereteket szeretnénk készíteni kis falécekből. Tudjuk, hogy minden kis faléc 10 cm hosszú, és hogy minden dobozban 100 lécet szállítanak a gyártók. Hány dobozra van szükség ahhoz, hogy a házon lévő mind a 8 ablakkeretet összeállíthassuk, ha minden ablak $1{,}6 \times 0{,}8$ méteres?

AMC – Középhaladó korosztály, 9.-10. évfolyam (5pont):

Bookem város környékén nagyon furcsák a sebességhatárok. A várostól 1 km-re elhelyeztek egy 120 km/h-s táblát, $\frac{1}{2}$ km-re egy 60 km/h-sat, $\frac{1}{3}$ km-re egy 40 km/h-sat, $\frac{1}{4}$ km-re egy 30 km/h-sat, $\frac{1}{5}$ km-re egy 24 km/h-sat és végül $\frac{1}{6}$ km-re egy 20 km/h-sat.



Hány percbe telik eljutni a 120 km/h-s táblától a városig, ha mindenhol a maximálisan megengedett sebességgel közlekedünk?

(A) $30s$ (B) 1 min 13.5 s (C) 1 min 42 s

(D) 2 min 27 s (E) 3 min

1. A feladat megértése:

a. <u>szükséges előzmények:</u>
   i. fizikai alapfogalmak ismerete: sebesség, út, idő viszonya, $s = v \cdot t$ képlet
   ii. óra, perc, másodperc illetve km, m közötti váltószámok ismerete, esetleg átváltás km/h-ból m/s-ba
   iii. közös nevezőre hozás
   iv. tört szám átírása perc, másodperc formátumba

b. <u>előkészítő feladatok:</u>
   i. Írd át km/h-ból m/s-ba: 30, 90, 130!
   ii. Mekkora átlagsebességgel haladt az az autó, ami az 56 km-es Budapest-Székesfehérvár távot 1 óra alatt teszi meg?
   iii. Írd fel percben a következőket: 123 mp, 2 óra, 61 mp!

c. <u>ábra, vázlat készítése:</u>

Talán hasznos lehet egy más (pl. vízszintes) perspektívából történő ábrázolás, amelyből könnyebben kigyűjthetők az adatok.

2. A megoldás ötletének megtalálása, megoldási terv készítése:

a. ha találkoztam már ilyen feladattal, akkor azt veszem alapul
b. a feladat részproblémákra osztása: az első, majd a második, harmadik, stb. útszakasz megtételéhez szükséges idő kiszámolása!
c. rekurzió alkalmazása: a feladat megoldása a részfeladatokból
d. saját szavakkal való megfogalmazás (illetve játékosabb, a gyermekekhez közelebb álló megfogalmazás): Jelen esetben nem gondolom, hogy szükség lenne a feladat átfogalmazására, ugyanis 14-15 éves korban a diákok valószínűleg rendelkeznek némi közlekedési ismerettel, legalább utasként. Hasznos lehet viszont a feladat többszöri átgondolása, esetleg animációval, vagy kis játékautóval történő szemléltetése.
e. sejtés: az eredmény $\frac{1}{2}$ perc és 3 perc között lesz, hiszen a maximális (120 km/h) illetve a minimális (20 km/h) sebességgel számolva ezt a két adatot kapjuk.
f. célirányos okoskodás: konkrét kiszámolással
g. mire lehet következtetni az ismert adatokból? Mivel az útszakasz és a sebesség egyenesen arányosan változik $120:1$; $\frac{120}{2}:\frac{1}{2}$; $\frac{120}{3}:\frac{1}{3}$; $\frac{120}{4}:\frac{1}{4}$; stb. ezért a részeredmények várhatóan valamilyen számsorozatot fognak alkotni.
h. miből lehet a keresett mennyiséget meghatározni? felírom a részeredményeket, és megsejtek egy mintát, képletet, amelyet minden eddigi adat kielégít.

3. A megoldási terv végrehajtása:

a. megoldási lehetőségek:

I. megoldás:

Végigszámolással:

	mely 2 tábla között haladok	maximális megengedett sebesség	megtett út km-ben	a szükséges idő percben
1.	$120-60$	120km/h	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
2.	$60-40$	60 km/h	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3.	$40-30$	40 km/h	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$
4.	$30-24$	30 km/h	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$
5.	$24-20$	24 km/h	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{12}$
6.	20 – város	20 km/h	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
Σ			1	$1\,\frac{27}{120}$

Az 1 km-es táv megtételéhez szükséges idő = a résztávolságok megtételéhez szükséges idők. Vagyis $x=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{2}=\frac{294}{240}=\frac{147}{120}$ perc, azaz $1\,\frac{27}{120}$ perc. Tehát 1 perc, 13,5 másodpercre van szükség a 120 km/h-s táblától eljutni a városig.

II. megoldás:

Rekurzióval és képlettel:

Észrevehető, hogy a megtett út felírható $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ alakban, ahol n jelentse, hogy hányadik útszakaszt tesszük meg.

Ekkor, az első 5 szakasznál a szükséges idő: $\frac{1}{2(n+1)}$. Sajnos az utolsó szakasz megtételére nem alkalmazható ez a modell sem a megtett út hosszára, sem a szükséges idő mennyiségére.

	mely 2 tábla között haladok	maximális megengedett sebesség	megtett út km-ben	a szükséges idő percben
1.	$120-60$	120km/h	$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
2.	$60-40$	60 km/h	$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3.	$40-30$	40 km/h	$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$
4.	$30-24$	30 km/h	$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$
5.	$24-20$	24 km/h	$\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$	$\frac{1}{12}$
6.	$20-$ város	20 km/h	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
Σ			1	$1\ \frac{27}{120}$

Ezek alapján kiszámolható, hogy $\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{2(n+1)}=\frac{174}{240}$, amiből $\frac{174}{240}+\frac{1}{2}=1\ \frac{27}{120}$.

c. várható tanulói hibák:

- a feladat meg nem értése
- nem tudják elképzelni a feladatot
- elszámolás
- kerekítésből adódó elszámolás, törtek helyett tizedes törtekkel való számolás esetén
- a fizikai és a matematikai megsejtett képlet hibás alkalmazása
- nem ismerik fel a mintát a feladatban
- átváltási számok nem helyes ismerete, alkalmazása

4. Visszatekintés, reflexió:

c. a megoldás fő ötletének kiemelése:

i. a kérdés visszavezetése a résztávok megtételéhez szükséges idő kiszámolására

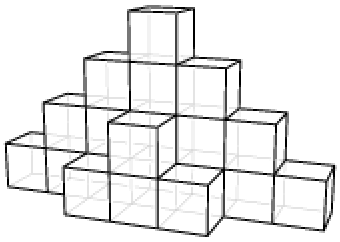
ii. minta, egyenes arányosság felfedezése

d. feladatvariáció:

Vajon mennyi időbe telik az út megtétele fordított sebességhatárokkal? (Tehát $\frac{1}{2}$ km-t 20 km/h-val, $\frac{1}{6}$ km-t 120 km/h-val megtéve, stb.). Becsüljük meg, több vagy kevesebb idő kell-e hozzá?

KöMaL – 2008. március/ K. 166. feladat[38]:

Sanyi egybevágó kockákból az alábbi minta szerint induló piramist építi (ragasztóanyagot nem használ, a kockákat egyszerűen csak egymásra, illetve egymás mellé teszi):



A soron következő függőleges réteg mindig két kockányival magasabb az előzőnél, és az ábrának megfelelően lépcsőzetesen halad felfelé mindkét irányból. Sanyi amikor elérte a 10 kockányi magasságot, az előző szabályok szerint két kockányival csökkentve fejezi be a „piramist". Hány kockát használ fel összesen a munkája során?

1. A feladat megértése:

a. szükséges előzmények:

i. térgeometriai alapfogalmak ismerete

ii. ezen belül különösen a kocka fogalmának, tulajdonságainak, kiterjedésének, térfogatának ismerete

iii. rekurzív sorozatok ismerete

iv. térlátás

b. előkészítő feladatok:

i. Milyen hosszú az a élű kocka lapátlója, testátlója, körülírt és beírt gömbjének sugara? Határozzuk meg a kocka csúcsainak az egyik testátlótól való távolságát is!

[38] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 2011

ii. A ”déloszi probléma”: Délosz szigetén pestis járvány van, ezért a lakók a delphoi jósdához fordulnak tanácsért. Azt a választ kapják, hogy ha meg akarnak szabadulni a pestistől, akkor cseréljék ki Apolló kocka alakú oltárkövét kétszer akkorára, mint az eredeti. Határozzuk meg az olyan kocka élét, melynek térfogata kétszer akkora, mint egy adott kockáé!

iii. Egy kocka éle 2 méterrel hosszabb, mint egy másiké. Térfogatuk különbsége 26 m^3. Mekkorák az egyes kockák élei?

c. ábra, vázlat készítése:

a kockák ”piramisa” tovább is rajzolható, illetve a valóságban is szemléltethető (legalább egy része), ha a gyerekek nehezen értik meg az algoritmust vagy a ”piramist” nem tudják elképzelni.

2. A megoldás ötletének megtalálása, megoldási terv készítése:

a. ha találkoztam már ilyen feladattal, akkor azt veszem alapul
b. a feladat részproblémákra osztása: vizsgáljuk meg a kérdést egy, két, három, stb. ”réteg” esetén!
c. rekurzió alkalmazása: a feladat megoldása a részfeladatokból
d. saját szavakkal való megfogalmazás (illetve játékosabb, a gyermekekhez közelebb álló megfogalmazás). Például: Ha egy ilyen ”várat” szeretnénk építeni, akkor a játék során hány tanuló kockáira van szükség, ha tudjuk, hogy mindenkinek 70 darab kockája van?
e. sejtés: páros számú kockára lesz szükség, illetve kb. $5 \cdot 2 \cdot 40 = 400$ kockára lesz szükség
f. célirányos okoskodás: konkrét kiszámolással
g. mire lehet következtetni az ismert adatokból? a sorok magassága páros, az alsó sor páratlan számú kockából áll minden esetben és páratlan számú ”réteg” van. Ebből arra lehet következtetni, hogy a megoldásszám páros lesz. Úgy tűnik, hogy minden egyes ”réteg” számossága is páros.
h. miből lehet a keresett mennyiséget meghatározni? összeadom a részeredményeket, miután külön-külön kiszámoltam az egyes ”rétegekhez” szükséges elemek számát.

3. A megoldási terv végrehajtása:

a. <u>megoldási lehetőségek:</u>

I. megoldás:

<u>Rekurzióval és képlettel:</u>

Ha észrevesszük, hogy az egyes réteghez szükséges kockák száma mindig négyzetszám, akkor megsejthető, hogy egyes réteghez szükséges kockák száma a következő módon számítható ki:

$x = (n \cdot 2)^2$, ahol n a piramis függőleges rétegeit jelöli, $n \cdot 2$ pedig a réteg magasságát.

Innen:

$2 \cdot (4 + 16 + 36 + 64) + 100 = 340$

II. megoldás:

<u>Végigszámolással:</u>

sor	magas-ság	eddig felhasznált összes darab kocka	legalsó sorhoz szükséges kockák száma
1.	2	$1 + 3 = 4$	3
2.	4	$1 + 3 + 5 + 7 = 16$	7
3.	6	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$	11
4.	8	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64$	15
5.	10	$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100$	19

A ”piramishoz” szükséges kockák száma: az 1.-9., 2.-8., 3.-7., 4.-6. rétegekhez ugyanannyi kocka kell, ezért $2 \cdot 4 + 2 \cdot 16 + 2 \cdot 36 + 2 \cdot 64 + 100 = 340$ kocka kell az építményhez.

d. <u>várható tanulói hibák:</u>

- térlátás hiánya
- a feladat meg nem értése
- nem tudják elképzelni a feladatot

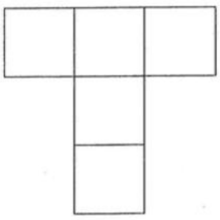
— elszámolás
— a képlet hibás alkalmazása
— nem ismerik fel a mintát a feladatban

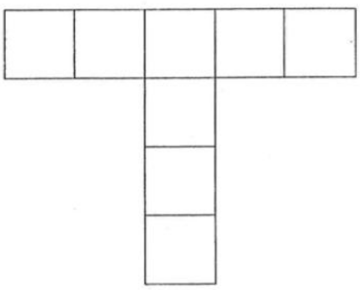
4. Visszatekintés, reflexió:

a. <u>a megoldás fő ötletének kiemelése:</u>
   i. a kérdés visszavezetése egy, két, három, stb. rétegre
   ii. minta felfedezése

b. <u>feladatvariáció:</u>

1. Térbeli alakzatot szeretnénk készíteni megadott formájúra. Minden gyermeknek van 65 darab építőkocája, melyek szabályosak és egyforma méretűek. Egy gyermek hány rétegből álló ”piramist” tud kirakni? Hány gyermeknek kell jelen lennie, hogy egy megadott építmény elkészülhessen?
2. Ausztrál feladatvariáció: Alkossunk „T”-alakzatot kis négyzetekből, majd növeljük az alakzatot újabb négyzetek hozzáadásával, úgy hogy a „T” betű mindhárom ”szárára” rakjunk egy kis négyzetet az ábrákon látható módon:





Hány kis négyzetre van szükségünk, ha egy 15 egység magas „T”-alakzatot szeretnénk létrehozni?

A megoldáshoz használd az algebrai tudásod és készíts

- diagrammot
- táblázatot az eredményekről
- grafikont, ha lehetséges
- leírást a szabályokról, előforduló mintákról
- sejtéseket és ellenőrzéseket
- bizonyítást a helyesnek vélt szabályokról

- összefoglalást és önértékelést arról, hogy tetszett-e a feladat, mit tanultál belőle és mire jöttél rá a feladat során, stb.?

Ezt a feladat variációt azért mutattam be, mert követendőnek tartom a feladatok egyszerű megoldása mellett az ábrázoltatásra való ösztönzést. Ha egy feladat szövege lehetővé teszi, rendkívül hasznos a későbbiekben (leendő munka során) is, de természetesen az adott feladat jobb megértéséhez is, a diagram, ábra, grafikon, vázlat készítése. Nyilvánvalóan nem a műszaki pontossággal való ábrázolás a cél, hanem a vázlat összehasonlítása a megoldással, esetleg egy sejtés megfogalmazása az ábrából. Habár a magyar érettségi feladatoknál jellemzően kérik valamilyen szemléltetés készítését, a tantervből, tanmenetekből hiányolom a fontosságuk olyan szintű kiemelését, mint ahogy azt az ausztrál *Core Curriculum*-ban tapasztalhatjuk.

Valamint kiemelném a fenti feladat szövegéből az önértékelésre vonatkozó kérdést. A visszatekintés, (ön)reflexió, a feladat utólagos újbóli áttekintése rendkívül hasznos nem csak a további matematika feladatok megoldása esetén, hanem valódi pszichológiai előnyei is vannak. A munkánknak e szempontok alapján történő (ön)elemzése Dr. Ambrus András javaslataiból is kitűnik, sőt a tanár úr magyarázattal is szolgál: Egy később előforduló hasonló probléma esetén rengeteget profitálhatunk abból, ha már megoldottunk hasonló feladatot. A megoldás lépéseinek, fő ötleteinek összefoglalása segít a tanultak rögzítésében és a majdani felidézésben. A helyes önértékelés, képességeink valós ismerete pedig nem csak a (köz)oktatásban, de életünk során nagyon fontos és hasznos.

Azokra a kérdésekre, hogy „tetszett-e a feladat, mit tanultál belőle és mire jöttél rá a feladat során” válaszolva a diák megérti, hogy mire volt jó az adott feladat, mi lehetett vele a tanárának célja. Abból pedig, hogy milyen jellegű feladatok érdeklik, melyek tetszenek nekik, a pedagógusok útmutatást adhatnak számukra akár a pályaválasztást illetően is, és abban is nagy segítségünkre lehet, hogy legközelebb milyen témájú, jellegű feladattal tudjuk motiválni a diákot.

5.3. Alkalmazási feladatok

Az ausztrál nemzeti alaptanterv szerint a matematika oktatás egyik leghangsúlyosabb célja, hogy a gyermekek felnőve aktív, értékes tagjai legyenek a gazdasági, pénzügyi társadalomnak, és ehhez nélkülözhetetlennek tartják a matematika tananyag minden részének lehető legszéleskörűbb összekapcsolását más tudományágakkal. Hiszik, hogy ezáltal a diákok felismerik és megértik a matematika nélkülözhetetlenségét, és hogy az alkalmazhatósági feladatok sora lehetőséget ad arra, hogy a tanulók maguk is rájöjjenek a matematika használhatóságára a jövőben, és bátran éljenek is ezzel a lehetőséggel.

Magyarországon sajnos még mindig nagyon sok feladatgyűjtemény és példatár sablonos feladatokat tartalmaz, kevés a valódi problémával szolgáló tankönyv. Örömmel vettem, hogy a tanárképzés során volt módom olyan órán részt venni, ahol kifejezetten az volt a cél, hogy egyszerű feladatokból valóság-közelieket készítsünk. A sorozatok tekintetében olyan széles a lehetőségek tárháza, hogy azt mindenképpen érdemes kihasználnia a pedagógusnak.

Az alábbiakban ezért néhány alkalmazással kapcsolatos, életszerű példát fogok elemezni, természetesen ismét magyar és ausztrál forrásból is merítve.

Leggyakoribbak természetesen a kamatos kamat számításos feladatok, amelyek bőségesen megtalálhatóak mindkét ország tanmeneteiben, tankönyveiben. Mivel a feladatok szövege csak kis mértékben tér el egymástól, ezért csak egy magyarországi típust mutatok be, és a szigetországból egy olyan példát választottam, amihez hasonlóval itthon nem találkoztam.

KöMaL

2009. február/ C. 977. feladat[39]:

Egy vállalkozó 12 millió Ft kedvezményes hitelt vett fel évi 8%-os fix kamattal. Mennyi lesz a tartozása 10 év múlva, ha évente 1,2 millió forintot tud törleszteni?

1. **A feladat megértése:**
   a. szükséges előzmények:
      i. kamatos kamat számításának ismerete
      ii. hatványozás ismerete
      iii. százalékszámítás ismerete
      iv. kamat, törlesztő részlet, fix kamat definíciójának ismerete
      v. számtani, mértani sorozat, és összegképletük ismerete
      vi. nyitott egyenlet ismerete (pl.: $\Big(\big((12\cdot 1{,}08-1{,}2)\cdot 1{,}08-1{,}2\big)\cdot 1{,}08 \ldots\Big)\cdot 1{,}08-1{,}2$

[39] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 2011

b. előkészítő feladatok:

   i. Egy számtani sorozat különbsége 5, az első n tagjának összege -56, $n.$ tagja $n.$ Adja meg a sorozat első n tagját!

   ii. Egy mértani sorozatban $a_4 - a_2 = a_2 + a_3 + a_4 = -6$. Mennyi a_1 és q?

   iii. Egy farmernek gépesítéssel sikerül a terméshozamait növelnie. Ha az első évi hozam 100%, akkor az ötödik évben 180%-ot ér el. Ha mértani sorozat szerint nőtt a hozam, akkor mekkora volt a közbülső években? Mekkora volt a farmer összes bevétele, ha az árak közben évről évre 6%-kal nőttek és kezdetben $14{,}2$ millió forintért adta el a termést?

c. állítások szimbólumokkal való felírása:

$$x = \Big(((((((((12\cdot 1{,}08 - 1{,}2)\cdot 1{,}08 - 1{,}2)\cdot 1{,}08 - 1{,}2)\cdot 1{,}08 - 1{,}2)\cdot 1{,}08 - 1{,}2)\cdot 1{,}08 - 1{,}2)\cdot 1{,}08 - 1{,}2)\cdot 1{,}08 - 1{,}2)\cdot 1{,}08 - 1{,}2)\Big)\cdot 1{,}08 - 1{,}2$$

2. A megoldás ötletének megtalálása, megoldási terv készítése:

a. ha találkoztam már ilyen feladattal, akkor azt veszem alapul

b. a feladat részproblémákra osztása: vizsgáljuk meg a kérdést egy, két, három, stb. év esetén!

c. rekurzió alkalmazása: a feladat megoldása a részfeladatokból

d. saját szavakkal való megfogalmazás. Például: mennyivel többet fizetek be a banknak, mint $10\cdot 1{,}2$ millió forint? (ha egy baráttól kértem volna kölcsön, kamatmentesen, akkor tíz év alatt vissza tudnám fizetni a tartozásom, míg a bank felé még mindig tartozom ($x \approx 8{,}5$ millió forinttal).

e. sejtés: 5 millió forint lesz a tartozás tíz év után.

f. célirányos okoskodás: konkrét kiszámolással

3. **A megoldási terv végrehajtása:**

   a. megoldási lehetőségek:

I. megoldás:

Képlettel:

$x = \left(\left((12 \cdot 1{,}08 - 1{,}2) \cdot 1{,}08 - 1{,}2\right) \cdot 1{,}08 \ldots\right) \cdot 1{,}08 - 1{,}2$

$x = 12 \cdot 1{,}08^{10} - \frac{1{,}2 \cdot (1{,}08^{10} - 1)}{1{,}08 - 1} = 8{,}523$

II. megoldás:

Rekurzióval:

1 évre $x = 12 \cdot 1{,}08 - 1{,}2$

2 évre $x = (12 \cdot 1{,}08 - 1{,}2) \cdot 1{,}08 - 1{,}2$

10 évre $12 \cdot 1{,}08^{10} - 1{,}2(1{,}08^9 + 1{,}08^8 + 1{,}08^7 + \cdots + 1{,}08^0)$-t kell fizetni.

Legyen $a_1 = 1{,}08^9$, $n = 10$ és $\mathrm{q} = \frac{1}{1{,}08}$

Mivel egy sorozatról van szó ezért ezt az eredményt kapjuk:

$S_n = 1{,}08^9 - \frac{\mathrm{q}^{10} - 1}{\mathrm{q} - 1} = 14{,}479$ millió forint.

A sorozat végösszegének és a törlesztett hitel különbségének összege: 8,52 millió forint.

Tehát 10 év múlva a tartozása 8,52 millió forint lesz.

III. megoldás:

Végigszámolással:

év	*kezdő összeg*	*kamattal megnövelve*
1.	12000000	12960000
2.	11760000	12700800
3.	11500800	12420864
4.	11220864	12118533
5.	10918533	11792015
6.	10592015	11439377
7.	10239377	11058527
8.	9858527	10647209
9.	9447209	10202986
10.	9002986	9723225
11.	**8523225**	

Ez a táblázat mutatja, hogy melyik évben mekkora összeggel indul a kölcsön, ez évvégére megnövekedik a kamattal, az 1,08-szorosára. Ha ebből levonjuk a törlesztést (1,2 millió forint), akkor megkapjuk a következő év kezdő összegét. A 10. év elején 9002986 Ft a tartozás, év végére 9723225 Ft lesz, de ha a 10. évi törlesztő részletet befizeti a vállalkozó, akkor 8523225 Ft lesz a tartozás.

b. várható tanulói hibák:
   - a képlet hibás alkalmazása
   - a feladat félreértelmezése (mi, mikor, hogyan kamatozik)
   - elszámolás
   - a nyitott egyenlet téves átalakítása zárttá
   - az egyenlet elejéről a $(12 \cdot 1{,}08)$ elhagyása
   - az utolsó lépés, azaz az *1,2* millió forint kivonásának elmulasztása.

4. Visszatekintés, reflexió:

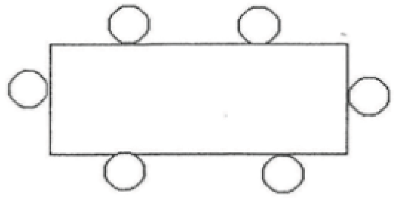
1. a megoldás fő ötletének kiemelése:
   i. nyitott egyenlettel felírjuk, hogy mi történik
   ii. felírjuk az első, második, harmadik, stb. évre az egyenletet pontosan, majd ezekből az adatokból egy ”általános év” –et fogalmazunk meg

2. feladatvariáció:

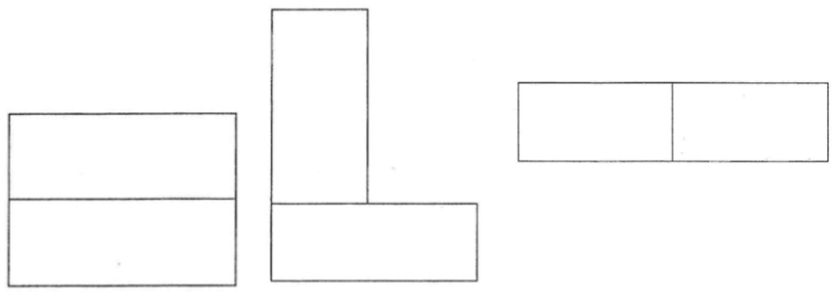
Kata 1990. január 1-jén 00 óra 05 perckor született, így ő volt abban az évben Magyarországon az első baba. Ezért az államtól 1 millió forintot kapott, amit legkorábban a 18. születésnapja után vehet ki a bankból. Mikor Kata egyetemre kezd járni, és havonta szeretne valamekkora összeget kivenni a bankból, és tanulmányait finanszírozni az összegből. Mennyi pénzt vehet ki, ha tudjuk, hogy a képzése 6 féléves és minden hónapban ugyanakkora összeget akar elkölteni (nyáron is), és a pénze felét lekötötte 2 évre, évi fix 9,18%-os kamatra, míg a másik felét havi fix 4,95%-os kamatozásra?

ACARA – A pincér rémálma, 8. osztályos feladat[40]

Egy téglalap alakú asztalhoz 6 vendéget tudnak leültetni, az ábra szerint:



Két téglalap alakú asztalhoz különböző számú vendég ülhet, az asztalok elrendezésétől függően (az asztalokat a szokásos ésszerű éttermi elrendezéseknek megfelelően tolhatjuk össze, az extrém esetektől eltekintünk a feladat során):



Az „L”-alakú elrendezés esetén 9 fő tud helyet foglalni.

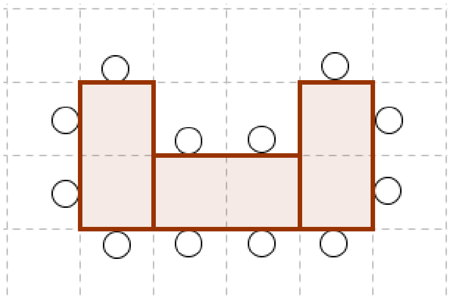
Kérdések:

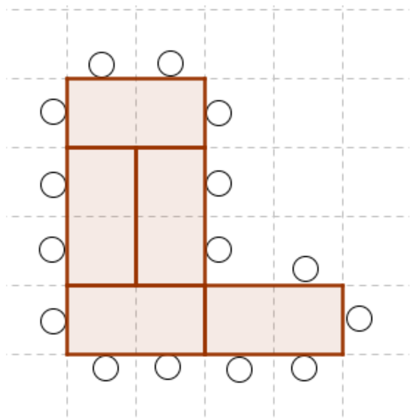
1. Rajzold be, hol ülhetnek a vendégek a különböző 2-asztalos elrendezés esetén!
2. Hány különböző elrendezés lehetséges 3 illetve 4 asztal egymás mellé rakása esetén?
3. Jegyezd le a legkevesebb és a legtöbb férőhellyel rendelkező elrendezéseket 1,2,3 és 4 asztal esetén is.
4. Sejts meg egy formulát, amivel ki lehetne számolni a legkevesebb és a legtöbb férőhelyet 10, 20, 50 és n darabszámú asztalra!

A feladathoz csatolt megoldás (*5.3. melléklet*) menetét és a hozzá fűzött jegyzeteket nagyon jól használhatónak tartom a matematika tanítás során, természetesen nem csak a sorozatok esetében. A feladat ábrázolása, visszavezetése részproblémákra és az indukció alkalmazása – vagyis néhány eset vizsgálatából következtetés az általános szabályra – láthatóan minden (ebben a fejezetben bemutatott) feladatnál célravezető volt.

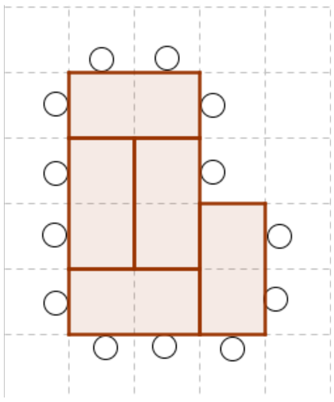
Habár megemlíteném, hogy a megoldáshoz készült rajzok közül hiányzik az ”U”-alakú elrendezés 3 asztal esetén, amikor 12 férőhely van illetve 5 asztal esetén a 15 férőhelyes elrendezés.

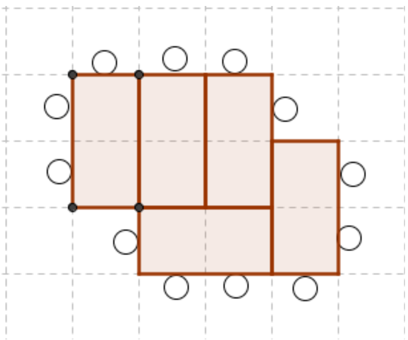
[40] The Australian Curriculum, 2000





Nem használható elrendezés miatt a következő eseteket elhagyjuk:





A megoldás menetében több közös vonás fedezhető fel Dr. Ambrus András javaslataival egy feladat részletes megoldását illetően, amelyeket a dolgozat ezen fejezetében végig követtem. A feladat elkészítése előtt található rövid leírás gyakorlatilag a megoldási tervnek, míg a lapszéli megjegyzések visszatekintésnek, a megoldás fő ötleteinek kiemelésének felelnek meg, valamint az ábra, táblázat készítése szintén közös jellemző. Véleményem szerint ezeket a mindkét országban javasolt feladat-megoldási lépéseket mindenképpen érdemes alkalmaznunk és alkalmaztatnunk tanárként, az első kettőt legalább szóban. A részletes feladat megoldás többi eleme (előkészítő feladatok, többféle megoldás, feladat variáció, várható tanulói hibák) inkább a pedagógusi ”háttér munka” részét képezi, amelyet a diákok nem látnak, azonban – legalábbis kezdő tanárként – nem szabad kihagynunk.

6. Eredmények, összefoglalás

Az összehasonítás alapján azt gondolom, a magyar tantervek és (a MOZAIK kiadó által) javasolt tanmenetek részletesebben fogalmazzák meg a követelményeket, mint az ausztrál változatok, segítve ezzel főként a kezdő pedagógusok munkáját.

A kutatás során azt a választ kaptam, hogy a sorozatok tanítása lényegében azonos struktúrával, módszerrel folyik az általam elemzett két országban. Különbség a tananyag felosztásában fedezhető fel, azaz, hogy a magyar tantervben folyamatosan, fokozatosan, évfolyamonként haladva építik fel a sorozatok 12. osztályos tanításához szükséges előzményeket, míg Ausztráliában csak bizonyos évfolyamokon foglalkoznak a témakörrel, majd csak a kiegészítő évek alatt teljesedik ki a tananyag. Sőt, az idő alatt az ún. Higher School Certificate-hoz, és a továbbtanuláshoz olyan ismereteket is meg kell szerezniük kalkulusból, amely itthon csak a felsőoktatás részét képezi. A középiskolai és az egyetemi szintű matematika oktatás között Magyarországon nagyobb szintkülönbséget fedeztem fel, mint Ausztrália esetében.

Egy szigetország-beli tanmenetrészlet (Syllabus) alapján megfigyeltem, hogy Ausztráliában a sorozatok tanításakor kevés szerepet kap a definiálás, a fogalmak tisztása, viszont jelentősek az alkalmazási feladatok. Ezt a szemléletmódot csak részben tartom követendőnek, kiindulásként foglalkozhatunk több gyakorlati példával, az érdeklődés felkeltése céljából, majd onnan folytatva a hagyományos magyar eljárásokat.

A 12 évfolyam alatt elsajátítandó magyarországi matematika tananyagban szoros összefüggés figyelhető meg a függvényekkel, és ezenkívül kapcsolat fedezhető fel a halmazokkal és a közepekkel is. Ausztráliában – ettől eltérő módon – nem szerepel a tantárgyi felosztásban az analízis, és a függvények helyett más tananyagrészekkel kapcsolják össze a sorozatokat.

A két országban nagyrészt megegyezik a tankötelesség végéig (Magyarország: 12 évfolyam, Ausztrália: 10évfolyam) tanított fogalma listája. Különbség abban mutatkozik, hogy a szigetországban a kötelező (egységes követelményű) 10 évfolyam utáni felsőoktatásra is felkészítő két kiegészítő évfolyamon olyan fogalmakkal is megismerkednek a diákok, melyekkel Magyarországon csak a felsőfokú tanulmányok során.

A vizsgálódás során kiderült, hogy mindkét országban egyaránt a matematikával foglalkozók rendelkezésére állnak jól használható, praktikus számítógépes programok, melyek segítségünkre lehetnek a közoktatásban is.

Végül a feladatok tekintetében elmondható, hogy bár előfordulnak szinte azonos vagy nagyon hasonló kérdések a két országban, Ausztráliában több a valóság-közeli probléma, és az önreflektálásra való ösztönzés, azonban ugyanolyan nagymértékben javasolt a gyermekek versenyeztetése matematikából, melyhez rengeteg lehetőség adott.

Felhasznált irodalom:

1. Ambrus András. (2004). *Bevezetés a matematika-didaktikába*. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest.
2. The Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority. (2009). *Phase 1 - The Australian Curriculum, Mathematics*. A letöltés dátuma: 2011. április 20. from http://www.acara.edu.au/curriculum/phase_1_-_the_australian_curriculum.html
3. The Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority. (2009). *Shape of the Australian Curriculum: Mathematics*. A letöltés dátuma: 2011. április 20. from http://www.acara.edu.au/verve/_resources/Australian_Curriculum_-_Maths.pdf
4. The Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority. (2000). *The Australian Curriculum online*. A letöltés dátuma: 2011. április 20. from http://www.australiancurriculum.edu.au/Home
5. *Australian Mathematics Competition*. (2007). Australian Mathematics Trust. A letöltés dátuma: 2011. május 19. from http://www.amt.canberra.edu.au/amcfact.html
6. Board of Studies, New South Wales Government. (2006). *Syllabuses for Kindergarten to Year 6*. A letöltés dátuma: 2011. április 25. from http://k6.boardofstudies.nsw.edu.au/go/mathematics
7. Board of Studies, New South Wales Government. (2008). *Syllabuses for High School, Year 7-10*. A letöltés dátuma: 2011. április 25. from http://www.boardofstudies.nsw.edu.au/syllabus_sc/mathematics.html
8. Board of Studies, New South Wales Government. (2008). *Syllabuses for Higher School Certificate, Year 11-12*. A letöltés dátuma: 2011. április 25. from http://www.boardofstudies.nsw.edu.au/syllabus_hsc/mathematics-advanced.html
9. Falus Iván (szerk.). (2003). *Didaktika. Elméleti alapok a tanítás tanulásához*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
10. *Fibonacci-számok*. (2011). Wikipedia, a szabad enciklopédia. A letöltés dátuma: 2011. május 18. from http://hu.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-sz%C3%A1mok
11. *Matematika érettségi követelmények*. Oktatási Hivatal. (2010) A letöltés dátuma: 2011. május 18. from http://www.oh.gov.hu/letolt/okev/doc/erettsegi_40_2002_201001/matematika_vk_2010.pdf

12. *Maxima, a Computer Algebra System*. (2009). A letöltés dátuma: 2011. május 17. from http://maxima.sourceforge.net/

13. MOZAIK. (2009). *Kerettantervrendszer az általános iskolák számára, Matematika, 1-4. évfolyam*. A letöltés dátuma: 2011. április 22. from http://www.mozaik.info.hu/Homepage/Mozaportal/MPtmttsa.php?type=TT

14. MOZAIK. (2009). *Kerettantervrendszer az általános iskolák számára, Matematika, 5-8. évfolyam*. A letöltés dátuma: 2011. április 22. from http://www.mozaik.info.hu/Homepage/Mozaportal/MPtmttsa.php?type=TT

15. MOZAIK. (2009). *Kerettantervrendszer a gimnáziumok számára, Matematika, 9-12. évfolyam*. A letöltés dátuma: 2011. április 22. from http://www.mozaik.info.hu/Homepage/Mozaportal/MPtmttsa.php?type=TT

16. MOZAIK. (2009, 2010). *Matematika tanmenetek 1-12. osztály*. A letöltés dátuma: 2011. április 22. from http://www.mozaik.info.hu/Homepage/Mozaportal/MPtmttsa.php?type=TM

17. *A Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 243/2003 (XII. 17.) Korm. rendelet (a 202/2007. (VII. 31.) Korm. rendelettel módosított, egységes szerkezetbe foglalt szöveg), A magyar Nemzeti alaptanterv 2007. július 29.* Nemzeti Erőforrás Minisztérium. (2007). A letöltés dátuma: 2011. április 18. from http://www.nefmi.gov.hu/letolt/kozokt/nat_070926.pdf

18. Papp-Varga Zsuzsanna: *GeoGebra, interaktív matematika mindenkinek*, 1-2. oldal (letöltve a http://www.cleverproducts.hu/inspiracio_2010_6_12.pdf honlapról) *in* Répásy Nóra. (2011). GeoGebra használata az általános iskolától a gimnáziumig – Szakdolgozat.

19. Reid, Alan. (2003). *The National Curriculum Story*. A letöltés dátuma: 2011. május 2. from http://www.dest.gov.au/archive/research/fellowship/docs/Alan_Reid/AlanReid_July03.rtf

20. Sain Márton. (1993). *Matematikatörténeti ABC*. Nemzet Tankönyvkiadó – TypoTEX, Budapest.

21. Van Der Waerden, B.L. (1977). *Egy tudomány ébredése, egyiptomi, babiloni és görög matematika*. Gondolat Kiadó, Budapest.

22. Vass Vilmos. (2009). *A magyar Nemzeti Alaptanterv implementációja, 2008. március.* Nemzeti Erőforrás Minisztérium. A letöltés dátuma: 2011. április 18. from http://www.nefmi.gov.hu/letolt/kozokt/nat_implement_090702.pdf

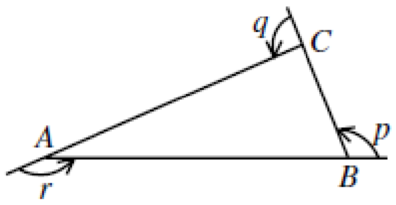
23. *The Free Software for Numerical Computation*. (2011). A letöltés dátuma: 2011. május 17. from http://www.scilab.org/products/scilab

Tankönyvek, példatárak:

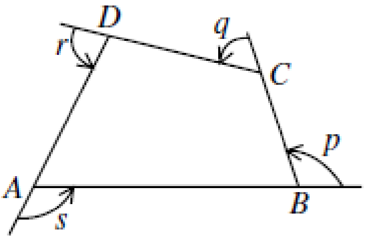
1. Czapáry Endre – Gyapjas Ferenc. (2004). *Matematika a középiskolák 12. évfolyama számára*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. (pp 5-35)
2. Gádor Endréné – Gyapjas Ferencné – Hárspatakiné Dékány Veronika – Dr. Korányi Erzsébet – Pálmai Lóránt – Pogáts Ferenc – Dr. Reiman István – Dr. Scharnitzky Viktor. (1998). *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
3. Hajnal Imre – Számadó László – Békéssy Szilvia. (2004). *Matematika 12.* a gimnáziumok számára. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. (pp 5-38, 166-170)
4. Hortobágyi István – Marosvári Péter – Pálmay Lóránt – Pósfai Péter – Siposs András – Vancsó Ödön. (2002). *Egységes Érettségi Feladatgyűjtemény, Matematika I., II.* Konsept-H könyvkiadó, Piliscsaba.
5. *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok.* (2011). A letöltés dátuma: 2011. január 12. from http://www.komal.hu/info/bemutatkozas.h.shtml
6. Kosztolányi József – Kovács István – Pintér Klára – Urbán János – Vincze István. (2002, 2003, 2004). *Sokszínű matematika 9., 10., 11., 12.* Mozaik Kiadó, Szeged. (pp 36-64)
7. Laczkovich Miklós – T. Sós Vera. (2005). *Analízis I.* Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Budapest.
8. Szeredi Éva – Imrecze Zoltánné – Kovács Csongorné – Sz. Földvári Vera. (1978, 1979, 1980, 1983). *Matematika, általános iskola 5., 6., 7., 8.* Tankönyvkiadó, Budapest.
9. Takács Gábor – Takács Gáborné (1992). *Matematika 1. osztály: I-II. kötet, 2. osztály: I-II. kötet*, Tankönyvkiadó, Budapest.
10. Dr. Vancsó Ödön – Bölcskei Attila – Kaposiné Pataki Krisztina – Dr. Szabadi László – Szokol Ágnes. (2000). *Matematika 5.-6. osztályosok számára*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest. (pp 324-346)
11. Dr. Vancsó Ödön – Bölcskei Attila – Kaposiné Pataki Krisztina – Dr. Szabadi László – Szokol Ágnes. (2002). *Matematika 7.-8. osztályosok számára*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest. (pp 117-172)

5.1. melléklet

Szerkesszünk egy ABC háromszöget és mérjük meg a külső szögeit (az ábrán p, r, q-val jelölve.) Azt az eredményt kapjuk, hogy $p + r + q \approx 360°$.



Szeresszünk konvex négyszöget (pl. parallelogrammát vagy az alábbi ábrán látható ABCD négyszöget) és mérjük meg a külső szögeit. Ismét arra jutunk, hogy $p + r + q + s \approx 360°$.



Általában, ha szerkesztünk egy konvex n oldalú sokszöget, és vesszük a külső szöget összegét $360°$- ot várunk, az következők miatt. Ha egy adott csúcsban állunk az egyi él felé fordulva, és egyszer körbejárjuk a poligont, amíg körbe nem érünk, vissza a kiinduló csúcshoz, az eredeti irányba nézve, akkor pontosan egy teljes kört tettünk meg ($360°$), ami az egyes csúcsoknál tett egyes külső szögek mértékével való fordulsokból áll.

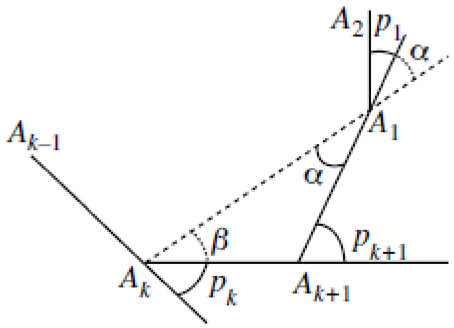
Ahhoz, hogy ezt teljes indukcióval bizonyítsuk, tegyük fel, hogy $n \geq 3$ és legyen $S(n)$ az az állítás, hogy ”a külső szögek összege egy n oldalú konvex sokszög esetén $360°$. Most két lépésben bizonyítjuk az állítást.

i. Először bizonyítanunk kell, hogy $S(3)$ igaz. Az ábrára gondolva, bizonyítani kell, hogy $p + r + q = 360°$. Felhasználva a háromszög belső szögeinek ismert összegét, tudjuk, hogy $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.

   Vagyis $(180° - p) + (180° - q) + (180° - r) = 180°$ azaz

$360° = p + r + q$. Tehát $S(3)$ igaz.

ii. Most tegyük fel, hogy $S(3)$, $S(4)$, …, $S(k)$ igaz és bizonyítsuk be, hogy $S(k+1)$ igaz. Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$ rendre a $k+1$ oldalú négyszög csúcsai, és a külső szögek rendre $p_1, p_2, \dots, p_{k+1}$. A bizonyítandó állítás: $p_1 + p_2 + \dots + p_{k+1} = 360°$.



Kössük össze A_k-t A_1-el és alkalmazzuk $S(k)$-t a k-oldalú konvex $A_1, A_2, \dots, A_k$ sokszögre. A külső szögek összege így $360°$. De az A_1-beli külső szög $A_1 = \alpha + p_1$ és A_k-ban $A_k = \beta + p_k$ (lásd az ábrán) és a többi csúcsban $A_2, \dots, A_{k-1}$és a külső szögek megegyeznek az eredeti poligon külső szögeivel.

Így $(\alpha + p_1) + p_2 + \cdots p_{k-1} + (\beta + p_k) = 360°$ vagyis

$p_1 + p_2 + \cdots p_k + (\alpha + \beta) = 360°$. (*)

De $\Delta A_1 A_k A_{k+1}$-ben az A_{k+1}-nél lévő külső szög egyelő a nem mellette fekvő belső szögek összegével, vagyis $p_{k+1} = \alpha + \beta$, mivel az A_1-nél lévő szög α. Behelyettesítve ezt az eredményt a (*)-be azt kapjuk, hogy $p_1 + p_2 + \cdots p_k + p_{k+1} = 360°$.

Tehát $S(k+1)$ igaz. Az első és második lépésekből arra jutottunk, hogy $S(n)$ igaz minden $n \geq 3$ esetén.