Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Fraktálok az iskolában

Szakdolgozat

Írta: Beringer Dorottya

Matematika tanár szak

Témavezető:

Korándi József, műszaki tanár
Matematikatanítási és Módszertani Központ

Budapest
2012

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A szakdolgozatom célja egy olyan szakköri anyag összeállítása, ami érdekes és szép alakzatokon keresztül segíti egyes anyagrészek gyakorlását, illetve a dimenzió-fogalom egy lehetséges értelmezését mutatja be a középiskolások számára.

Amikor gimnáziumba jártam, a matematika füzetem hátuljára a Koch-hópelyhet kezdtem el felrajzolni, az órák során egyre finomítva a rajzot. Azóta megtudtam, hogy több ismerősöm is hasonló alakzatokat rajzolgatott középiskolás korában.
Sok helyen lehet hallani ezekről az alakzatokról, a fraktálokról. Úgy gondolom, ami elsőre felkelti irántuk az érdeklődést, az a szépségük. Aki fogékony a matematika iránt, annak érdemes azonban mélyebben is foglalkozni velük, hiszen nagyon sok érdekes tulajdonságukra deríthetünk fényt.
A szakdolgozatomban rekurzióval előállítható önhasonló halmazokkal foglalkozom. Az első érdekesség, amit észrevehetünk, hogy ilyen módon előállíthatóak olyan korlátos területű síkidomok, amiknek a kerületét tetszőlegesen nagyra választhatjuk. Ezt egy kevésbé ismert fraktált és a Koch-hópehelyhet előállító sorozat tagjairól állapíthatjuk meg. A rekurzióval előállított síkidomok között találhatunk olyanokat is, amelyeknél a területek sorozata 0-hoz tart, ám eközben a kerület folyamatosan növekszik, és végtelenhez tart. Ilyen tulajdonságú síkidomok sorozata állítja elő a Sierpinski-háromszöget és a Sierpinski-szőnyeget.
Eddig síkidomokról volt szó, de léteznek hasonló tulajdonságú alakzatok a számegyenesen, illetve a térben is. A számegyenesen a Cantor-halmazt előállító sorozatot vizsgáljuk meg. Ennek tagjai olyanok, hogy a hosszuk 0-hoz tart, miközben a határpontjainak száma végtelenhez. A térbeli alakzatok közül a Menger-szivaccsal foglalkozunk. Az ezt előállító sorozat esetében a térfogat 0-hoz tart, a felszín azonban végtelenhez.
Mindegyik alakzat esetében lehet értelmezni a határértékként előálló alakzatot, ugyanis a számegyenes, a sík, illetve a tér minden pontjáról egyértelműen eldönthető, hogy benne van-e az így kapott alakzatban. Az eddig is használt nevek valójában ezekhez a határalakzatokhoz tartoznak, nem az azokat előállító sorozat tagjaihoz. A Koch-hópehely esetén ezután a határvonal harmadrészét tekintjük, a többi esetben továbbra is az egész alakzatot. Ezek mindegyike rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy előáll önmagához hasonló, egymással egybevágó alakzatok egyesítéseként, azaz önhasonló alakzat.

A másik matematikai tulajdonságuk az önhasonló alakzatoknak, ami nagyon érdekessé teheti őket, hogy segítségükkel bemutathatjuk a dimenzió fogalmának egy lehetséges kiterjesztését. Megállapíthatjuk, hogy az iskolában tanult alakzatoknak van valamilyen dimenziójuk, és ezekhez a dimenziókhoz tartoznak bizonyos mértékek. Az alakzatokat megpróbálhatjuk megmérni más mértékkel is, mint ami a

dimenziójukhoz tartozik, ám ekkor 0-t vagy végtelent kapunk eredményül. Ha egy alakzatot minden ismert mértékkel megmérve ilyen eredmények adódnak, akkor lehet, hogy az alakzat nem egész dimenziójú. A vizsgált alakzatok is ilyenek.
A dimenziók kiszámolásához a hasonlóság arányának és a megfelelő mérték változásának kapcsolatát használjuk fel. A hasonlóságról 10. osztályban tanult összefüggés kiterjeszthető nem egész dimenziókra is: két hasonló alakzat mértékének aránya (a megfelelő dimenziós mértékkel mérve) a hasonlóság arányának valamilyen hatványa, és ez a hatványkitevő a mérték (és az alakzat) dimenziója.

Természetesen sok hasonló alakzat létezik, másikakat is vizsgálhattam volna. Az első alakzat nem olyan ismert, mint a többi, így remélhetőleg minden gyereknek újdonságot jelent. Ezen kívül jó példát nyújt arra, hogy a területet nem változtatva hogyan lehet a kerületet tetszőlegesen megnövelni. A többi alakzatot azért választottam, mert ezek talán a legismertebbek az önhasonló halmazok közül, mégis kiderülhetnek olyan tulajdonságaik, amelyekről eddig nem is hallottak a gyerekek.

A dolgozat első fejezetében a szakkörön használt fogalmak pontos matematikai hátterét írom le. Először leírom az alakzatok egyértelműségéről szóló tételt, majd definiálom a szakkörön megvizsgált alakzatokat. Ezután a Hausdorff-mérték és a Hausdorff-dimenzió definíciója következik, majd az önhasonló halmazok dimenziójáról szóló tétel.
A második fejezetben írom le a szakköri anyagot. Ebben először külön-külön megvizsgáljuk az önhasonló halmazokat előállító sorozatokat, a határértékként előálló alakzatokat, végül egyes alakzatoknál az egyéb irányba való kitekintés lehetőségét is. Ezután a dimenziókról szóló rész következik, amelyben a középiskolások által ismert fogalmak segítségével kibővítjük az általuk eddig ismert dimenziófogalmat, majd kiszámoljuk az eddig vizsgált önhasonló halmazok dimenzióját.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Korándi Józsefnek a dolgozat elkészítésében nyújtott segítséget.

Köszönettel tartozom továbbá Sáfár Simonnak a dolgozatban szereplő ábrák nagy részének elkészítésében nyújtott segítségéért.

1. fejezet

Matematikai háttér

A szakdolgozatban a dimenzió fogalmának egy lehetséges kiterjesztését mutatom be abból a szempontból, hogy hogyan lehet ennek jelentését konkrét példákon keresztül középiskolások számára is érthetővé tenni. Az ehhez felhasznált alakzatok és tételek leírását tartalmazza ez a fejezet.

1.1. A szakkörön említett önhasonló halmazok

Az alábbi önhasonló halmazok dimenzióját fogjuk megvizsgálni: Cantor-halmaz, Koch-görbe, Sierpinski-háromszög, Sierpinski-szőnyeg, Menger-szivacs. Ehhez először megadjuk az alakzatok pontos definícióját.

A definíciók értelmességét és egyértelműségét az alábbi, itt nem bizonyított tétel segítségével indokolhatjuk:

1.1.1 Tétel: [2][9.1. tétel] Legyenek $S_1, \ldots, S_m$ hasonlóságok $\mathbb{R}^n$-ben, a hasonlóságok arányai legyenek 1-nél kisebb pozitív valós számok. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan $F \subset \mathbb{R}^n$ nem üres, kompakt halmaz, amire

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F).$$

Definiáljuk $\mathbb{R}^n$ nem üres, kompakt részhalmazainak $\mathcal{K}$ halmazán az alábbi transzformációt: legyen $E \in \mathcal{K}$ esetén

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E).$$

Jelölje S^k azt a transzformációt, amit úgy kapunk, hogy az d-et egymás után elvégezzük k-szor, azaz $S^0(E) = E$, és $k \geq 1$ esetén $S^k(E) = S(S^{k-1}(E))$. A fenti egyértelműen meghatározott F halmaz előállítható úgy, hogy ha $E \in \mathcal{K}$ olyan halmaz, amire $S(E) \subset E$, akkor

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E).$$

Az alábbi nevezetes halmazok definícióihoz a tételben szereplő hasonlóságokat és egy megfelelő E halmazt használunk. Így olyan halmazokat kapunk, amelyek önmagukhoz hasonló részek egyesítéseként is előállíthatóak.

1.1.2 Definíció: (Cantor-halmaz) Legyen $E = [0;1] \subset \mathbb{R}$, és legyenek S_1 és S_2 az alábbi hasonlóságok: $S_1(x) = \frac{x}{3}$ és $S_2(x) = \frac{x+2}{3}$. Legyenek d, illetve S^k az 1.1.1. tételben definiált transzformációk. A

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$$

halmazt nevezzük Cantor-halmaznak.

1.1.3 Definíció: (Koch-görbe) Legyen $E \subset \mathbb{R}^2$ az az egyenlő szárú háromszög, aminek alapja a $[-1;1] \times \{0\}$ szakasz, a harmadik csúcsa pedig a $(0; \frac{\sqrt{3}}{3})$ pont. Legyenek S_1, S_2, S_3 és S_4 az alábbi hasonlóságok:

$$S_1((x;y)) = \left(\frac{x-2}{3}; \frac{y}{3}\right), S_2((x;y)) = \left(\frac{x - \sqrt{3}y - 1}{6}; \frac{\sqrt{3}x + y + \sqrt{3}}{6}\right),$$

$$S_3((x;y)) = \left(\frac{x+2}{3}; \frac{y}{3}\right), S_4((x;y)) = \left(\frac{x + \sqrt{3}y + 1}{6}; \frac{-\sqrt{3}x + y + \sqrt{3}}{6}\right).$$

Legyenek d, illetve S^k az 1.1.1. tételben definiált transzformációk. A

$$K = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$$

halmazt nevezzük Koch-görbének.

1.1.4 Definíció: (Sierpinski-háromszög) Legyen $E \subset \mathbb{R}^2$ az a szabályos háromszög, aminek alapja a $[-1;1] \times \{0\}$ szakasz, a harmadik csúcsa pedig a $(0; \sqrt{3})$ pont. Legyenek S_1, S_2, és S_3 az alábbi hasonlóságok:

$$S_1((x;y)) = \left(\frac{x-1}{2}; \frac{y}{2}\right), S_2((x;y)) = \left(\frac{x+1}{2}; \frac{y}{2}\right), S_3((x;y)) = \left(\frac{x}{2}; \frac{y+\sqrt{3}}{2}\right).$$

Legyenek d, illetve S^k az 1.1.1. tételben definiált transzformációk. A

$$H = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$$

halmazt nevezzük Sierpinski-háromszögnek.

1.1.5 Definíció: (Sierpinski-szőnyeg) Legyen $E = [0;1] \times [0;1] \subset \mathbb{R}^2$ egységnégyzet. Legyen $\mathcal{I} = \{0;1;2\}^2 \setminus \{(1,1)\}$, és legyenek $S_{i,j}$, $(i;j) \in \mathcal{I}$ az alábbi hasonlóságok:

$$S_{i,j}((x;y)) = \left(\frac{x+i}{3}; \frac{y+j}{3}\right).$$

Legyen minden $A \subset \mathbb{R}^2$ esetén

$$S(A) = \bigcup_{(i,j)\in\mathcal{I}} S_{i,j}(A),$$

és legyen S^k az 1.1.1. tételben definiált transzformációk. Az

$$N = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$$

halmazt nevezzük Sierpinski-szőnyegnek.

1.1.6 Definíció: (Menger-szivacs) Legyen $E = [0;1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ egységkocka. Legyen $\mathcal{I} = \{0,1,2\}^3 \setminus \{(1,1,1);(0,1,1);(2,1,1);(1,0,1);(1,2,1);(1,1,0);(1,1,2)\}$, és legyenek $S_{i,j,k}$, $(i,j,k) \in \mathcal{I}$ az alábbi hasonlóságok:

$$S_{i,j,k}((x;y;z)) = \left(\frac{x+i}{3};\frac{y+j}{3};\frac{z+k}{3}\right).$$

Legyen minden $A \subset \mathbb{R}^3$ esetén

$$S(A) = \bigcup_{(i,j,k)\in\mathcal{I}} S_{i,j,k}(A),$$

és legyen S^k az 1.1.1. tételben definiált transzformációk. Az

$$M = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(E)$$

halmazt nevezzük Menger-szivacsnak.

1.1.7 Megjegyzés: Ezeket az elnevezéseket nem csak a fent megadott halmazokra használjuk, hanem minden hozzájuk hasonló halmazra is. Az ilyen halmazok is önhasonlóak, de a hozzájuk tartozó hasonlóságok nem feltétlenül a fent megadottak. Az viszont mindig igaz, hogy a halmazokat önmagukba vivő hasonlóságok arányai ugyanazok, mint a fenti definíciókban.

Az alakzatoknak lényegében ezt a fenti definícióját használjuk a szakköri feladatsorban, kivéve a Koch-görbe esetén. Megmutatható, hogy a Koch-görbe alábbi, a szakkörön használt definíciója ugyanazt adja, mint a fenti.
A Koch-görbét a szakköri feladatsorban úgy definiáljuk, hogy egy szabályos háromszögből kiindulva minden oldal középső harmadára egy szabályos háromszöget állítunk kifele, majd a kapott alakzatot határoló szakaszokkal ismét ugyanezt tesszük. Így kapunk egy olyan halmazsorozatot, aminél minden halmaz bővebb az előzőnél. Ezek unióját nevezzük Koch-hópehelynek. A Koch-görbét a Koch-hópehely határának azon részeként definiáljuk, amire a kiinduló háromszög csúcsai bontják.

1.2. Önhasonló halmazok dimenziója

A dimenzió fogalmának kiterjesztése a hasonlóság tulajdonságainak segítségével történik. Ennek matematikai háttere egy tétel, ami az önhasonló halmazok Hausdorff-dimenziójáról szól. A Hausdorff-dimenzió fogalma a Hausdorff-mérték segítségével definiálható [2][2. fejezet], [5][4. fejezet].
Minden d nemnegatív valós szám esetén definiálható $\mathbb{R}^n$ bármely részhalmazának az d dimenziós Hausdorff-mértéke.
A definícióhoz bevezetünk két jelölést. Egy $U \subset \mathbb{R}^n$ nem üres halmaz átmérőjét jelölje $|U| = sup\{|x-y| : x, y \in U\}$. Az $\{U_i : U_i \subset \mathbb{R}^n\}$ halmazrendszert az $F \subset \mathbb{R}^n$ halmaz δ*-fedésének* nevezzük, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok halmazt tartalmaz, ezek mindegyikének átmérője kisebb δ-nál és az egyesítésük lefedi F-et: $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$.

1.2.1 Definíció: (A d dimenziós Hausdorff-mérték) Legyen d rögzített nemnegatív valós szám és $F \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges részhalmaz. Minden $\delta > 0$ esetén legyen

$$\mathcal{H}^d_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^d : \{U_i\} \text{ az } F \text{ halmaz egy } \delta\text{-fedése} \right\}.$$

Legyen

$$\mathcal{H}^d(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^d_\delta(F)$$

az F halmaz d dimenziós Hausdorff-mértéke.

Könnyen látható, hogy δ csökkenésével $\mathcal{H}^d_\delta(F)$ monoton növekszik (ugyanis szűkebb halmaznak vesszük az infimumát), ezért a definíció értelmes, létezik a véges vagy végtelen határérték.
Megmutatható, hogy ha d egész szám, akkor $\mathcal{H}^d$ az d dimenziós Lebesgue-mérték konstansszorosa.
A definícióból könnyen látszik az alábbi tulajdonság, aminek az 1, 2 és 3 dimenziós Lebesgue-mértékre vonatkozó esetét középiskolában is tanítják: ha egy F halmazra alkalmazunk egy T hasonlósági transzformációt, aminek az aránya a $\lambda > 0$ valós szám, akkor a képének a mértéke az eredeti halmaz mértékének a λ^d-szerese, azaz

$$\mathcal{H}^d(T(F)) = \lambda^d \mathcal{H}^d(F).$$

Nem nehéz belátni, hogy ha valamilyen d-re $\mathcal{H}^d(F) < \infty$, akkor minden $t < d$ pozitív valós szám esetén $\mathcal{H}^t(F) = 0$. Tehát minden F halmaz esetén van egy olyan d valós szám, aminél a Hausdorff-mértéke „felugrik" 0-ból végtelenbe. Ezt a számot nevezzük a halmaz Hausdorff-dimenziójának.

1.2.2 Definíció: (Hausdorff-dimenzió) Az $F \subset \mathbb{R}^n$ nem üres halmaz Hausdorff-dimenziója

$$d = \sup \left\{ t : \mathcal{H}^t(F) = \infty \right\} = \inf \left\{ t \geq 0 : \mathcal{H}^t(F) = 0 \right\}.$$

A továbbiakban dimenzió alatt Hausdorff-dimenziót értünk.

Az önhasonló halmazok dimenziója bizonyos esetekben kiszámolható a halmazra jellemző hasonlóságok segítségével.
Az erre vonatkozó tétel csak akkor igaz biztosan, ha a hasonlóságok olyanok, hogy az $S_i(F)$ halmazok „majdnem diszjunktak". Ezt fogalmazza meg pontosan a *nyílt halmaz feltétel*: az $S_1, \ldots, S_m$ hasonlóságok teljesítik a nyílt halmaz feltételt, ha létezik olyan $U \subset \mathbb{R}^n$ nem üres, korlátos nyílt halmaz, amire $S_i(U)$ halmazok diszjunktak, és $U \subset \bigcup_{i=1}^m S_i(U)$.
A szakkörön vizsgált halmazoknál a definíciójukban szereplő E halmaz belseje biztosítja a nyílt halmaz feltétel teljesülését.

A vizsgált halmazok dimenziójának kiszámoláshoz az alábbi, itt nem bizonyított tétel egy speciális esetét fogjuk használni:

1.2.3 Tétel: [2][9.3. tétel] Legyenek $S_1, \ldots, S_m$ hasonlóságok $\mathbb{R}^n$-ben, a hasonlóságok arányai legyenek $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 1-nél kisebb pozitív valós számok, és tegyük fel, hogy a hasonlóságok teljesítik a nyílt halmaz feltételt. Legyen $F \subset \mathbb{R}^n$ az a nem üres kompakt halmaz, amire $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$. Ekkor az F halmaz dimenziója az az d szám, amire
$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^d = 1.$$

Az általunk vizsgált alakzatok esetében a hasonlóságok arányai megegyeznek, ezért elég az alábbi speciális esetet alkalmaznunk:

1.2.4 Tétel: Legyenek $S_1, \ldots, S_m$ hasonlóságok $\mathbb{R}^n$-ben, mindegyik hasonlóság aránya legyen $0 < \lambda < 1$, és tegyük fel, hogy a hasonlóságok teljesítik a nyílt halmaz feltételt. Legyen $F \subset \mathbb{R}^n$ az a nem üres kompakt halmaz, amire $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$. Ekkor az F halmaz dimenziója $d = \frac{\log m}{\log \frac{1}{\lambda}}$.

Az 1.1.1. tétel alapján nincs más kompakt halmaz, ami ezekhez a hasonlóságokhoz tartozik, tehát a hasonlóságokról szóló tétel biztosan a vizsgált halmaz dimenzióját adja meg. (A halmazhoz természetesen tartozhatnának más hasonlóságok is. Például a Cantor-halmazt 2 helyett 4 részre is bonthatnánk, és tekinthetnénk a halmazt ezekbe a részekbe vivő hasonlóságokat. A dimenzió kiszámolására használt tétel ebben az esetben is ugyanazt az eredményt adná.)

Az 1.2.4. tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy a Cantor-halmaz dimenziója $\frac{\log 2}{\log 3}$, a Koch-görbe dimenziója $\frac{\log 4}{\log 3}$, a Sierpinski-háromszög dimenziója $\frac{\log 3}{\log 2}$, a Sierpinski-szőnyeg dimenziója $\frac{\log 8}{\log 3}$ és a Menger-szivacs dimenziója $\frac{\log 20}{\log 3}$.

2. fejezet

Fraktálokat előállító sorozatok

A fraktálok egy lehetséges megközelítése a rekurzióval való előállításuk, aminek segítségével az alábbi témakörök vezethetőek be, illetve gyakorolhatóak:

- teljes indukciós bizonyítás
- mértani sorozat összegképlete
- határérték
- logaritmus
- hasonlóság

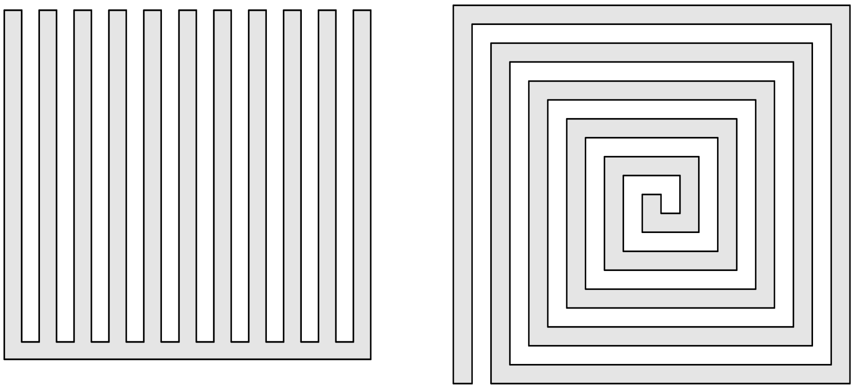
Az alábbi szakkör 11. vagy 12. osztályos tanulók számára tartható meg. Ennél korábban a logaritmus ismeretének hiányában nem lehetne kiszámolni az alakzatok dimenzióját.
A szakkört 11. osztályosok számára megtartható formában írtam le. Ők még nem tanulták a mértani sorozat összegét és a határértéket [6], de ezeknek a feladatoknak a segítségével bevezethető mindkét téma. A határértékkel kapcsolatban az ábrák és a geometriai jelentés segíti a szemlélet kialakítását.

A gyerekek számára a téma hamar látható érdekessége, hogy bizonyos rekurziókkal olyan síkbeli alakzatokat állíthatunk elő, amelyeknek a területe véges, kerülete azonban tetszőlegesen nagy lehet.

Bevezető feladat: Próbáljon meg mindenki minél nagyobb kerületű síkidomot rajzolni a füzetébe! Tudtok-e olyat rajzolni, aminek a kerülete 1 méternél nagyobb? És olyat, aminek a kerülete 1 km-nél nagyobb?

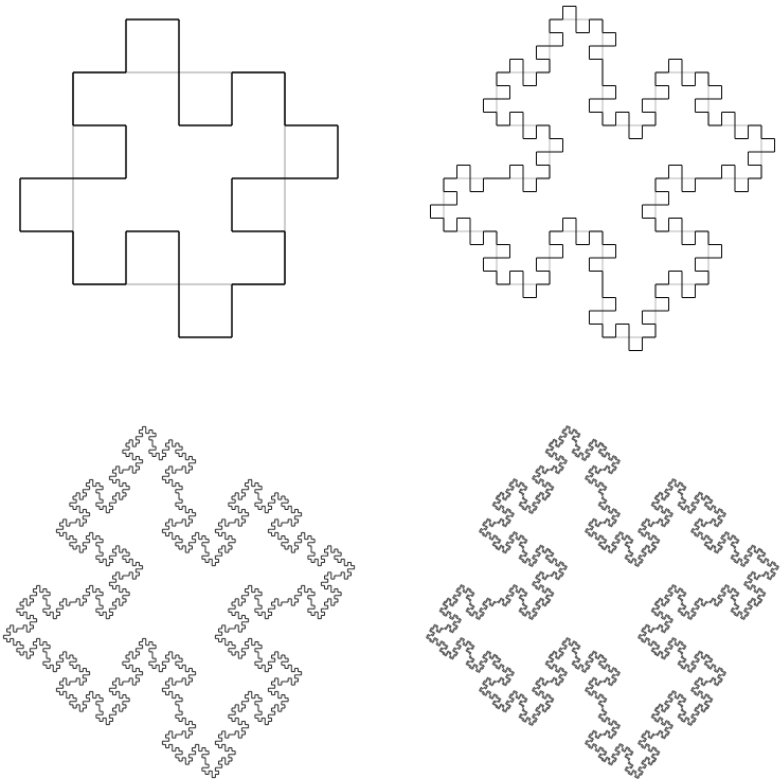
A következő kérdések, megjegyzések, ötletek hangzottak el a diákoktól a feladattal kapcsolatban:

- Szabad-e konkávat is rajzolni?
- Nevezzünk mást 1 cm-nek, és akkor máris nagyobbnak számít a kerület.
- Fésű vagy spirál alakú rajz. (2.1. ábra)
- „Van az a hópehely alakú dolog, az jó lesz?”



2.1. ábra.

2.0.5 Feladat: Mi lehet 2.2. ábrán látható síkidomok előállításának szabálya? Egy 10 cm oldalú négyzetből kiindulva mekkora a kapott síkidom területe és kerülete az első, második, tizedik, n-edik lépés után?



2.2. ábra.

A feladatok megoldásához többféle módszert választhatunk. Ahhoz, hogy kialakuljon valamilyen sejtésünk, érdemes az első néhány esetben felírni a kérdésre a választ, majd megfigyelni a sorozat tulajdonságait. Ezután adnunk kell az áltanunk megfigyelt szabályszerűségre valamilyen magyarázatot, ami bizonyítja a sejtésünket.

Megoldás:

A sorozat tagjainak képzési szabályát általában úgy fogalmazták meg a gyerekek, hogy minden oldal mentén kivágunk egy kisebb négyzetet, és ezt hozzáragasztjuk az oldal egy másik részéhez. Ebből rögtön következik, hogy a síkidom területe a lépések során nem változik.
A sorozat tagjainak képzési szabályát a kerület változásával is megfogalmazhatjuk. Ehhez először bevezetünk egy elnevezést. A kerületet alkotó töröttvonal rövidebb szakaszait nevezzük egységszakasznak (esz.). A sorozat következő elemét mindig úgy képezzük az előzőből, hogy minden egységszakaszát kicseréljük egy töröttvonalra, amely a következő síkidomhoz tartozó 8 egységszakaszból áll.

A síkidom kerülete kezdetben 40, az első lépés után $40 \cdot 2$, a második lépés után $40 \cdot 2^2$. Azt sejthetjük meg ebből, hogy az n-edik lépés után a kerület $40 \cdot 2^n$ cm hosszú. Azt is észrevehetjük, hogy az egyes lépések során minden oldalt egy kétszer akkora hosszúságú töröttvonalra cserélünk ki. Ebből következik, hogy a kerület mindig a kétszeresére változik. Ennek alapján teljes indukcióval bizonyíthatjuk sejtésünket.
A második megoldás kicsit összetettebb, azonban bonyolultabb feladatoknál kevesebb ötlettel is célravezető lehet ez a módszer. Készítsük el az alábbi táblázatot:

lépések száma	esz. hossza	esz.-ok száma	kerület
0	10	4	40
1	$\frac{10}{4}$	32	80
2	$\frac{10}{16}$	$4 \cdot 8^2$	$40 \cdot 2^2$
3	$\frac{10}{4^3}$	$4 \cdot 8^3$	$40 \cdot 2^3$
4	$\frac{10}{4^4}$	$4 \cdot 8^4$	$40 \cdot 2^4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	$\frac{10}{4^{10}}$	$4 \cdot 8^{10}$	$40 \cdot 2^{10}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{10}{4^n}$	$4 \cdot 8^n$	$40 \cdot 2^n$

A táblázat 2. és 3. oszlopát könnyű kitölteni, a megfigyeléseink alapján az n. tagra vonatkozó képletet se nehéz indokolni. A táblázat 4. oszlopának kitöltését a 2. és a 3. oszlop segítségével végezhetjük el értelemszerűen, az azokban található értékeket kell csak összeszorozni. A 4. oszlopban már az egyszerűsítés után kapott értékek szerepelnek.
A későbbi szorzások, osztások, egyszerűsítések érdekében érdemes a táblázat kitöltésénél a számokat már az elejétől kezdve hatványalakban, illetve szorzatalakban írni.

2.0.6 Megjegyzés: A táblázat egyes oszlopainak kitöltése közben könnyebb észrevenni és megindokolni a szabályt, mint az első megoldásnál. A későbbi feladatoknál is jó hasznát vehetjük egy hasonló táblázatnak, amelyből az n-re való általánosítás is könnyen kiolvasható.

Vajon a fenti feladat segít nekünk a bevezető feladatban keresett nagy kerületű, korlátos területű síkidomok előállításában? Az nyilvánvaló, hogy a síkidomok szélessége minden lépésben nő, és az is látszik, hogy minden lépésben egyre kisebb a síkidom szélességének növekedése. Meg kell vizsgálnunk, hogy a feladatban szereplő síkidomok korlátosak-e, azaz a 10 cm oldalú négyzetből kiindulva sok lépés után is ráfér-e még a kapott ábra a füzetlapra?

2.0.7 Feladat: Az előző feladatban szereplő síkidom köré minden lépésben tudunk olyan négyzetet rajzolni, aminek oldalai párhuzamosak a síkidom oldalaival. Mekkorának kell lennie az n-edik lépés után egy ilyen négyzet oldalának?
Egyszerűbben fogalmazva: milyen széles a síkidom az első, második, tizedik, n-edik lépés után?

Megoldás: Az előző feladat megoldásához használt táblázatnak itt is hasznát vehetjük.

lépések száma	esz. hossza	szélesség növekedése
0	10	10
1	$\frac{10}{4}$	$2 \cdot \frac{10}{4}$
2	$\frac{10}{16}$	$2 \cdot \frac{10}{16}$
3	$\frac{10}{4^3}$	$2 \cdot \frac{10}{4^3}$
4	$\frac{10}{4^4}$	$2 \cdot \frac{10}{4^4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	$\frac{10}{4^{10}}$	$2 \cdot \frac{10}{4^{10}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{10}{4^n}$	$2 \cdot \frac{10}{4^n}$

Vegyük észre, hogy a szélesség növekedése az első lépéstől kezdve mértani sorozatot alkot, ezért a szélesség megállapításához egy mértani sorozat tagjait kell összeadnunk. Az erre vonatkozó képlet 12. osztályos tananyag [6], de valójában annak bizonyítási lépéseit felhasználva fogjuk most több konkrét példán kiszámolni az összeget. Ezzel segítjük a későbbi bizonyítás megértését is.

Számoljuk ki a szélességet a 10. lépésben! Ehhez adjuk össze a szélesség növekedéseit az 1. lépéstől a 10.-ig, és jelöljük ezt az összeget x_{10}-szel.

$$\frac{20}{4} + \frac{20}{4^2} + \frac{20}{4^3} + \frac{20}{4^4} + \cdots + \frac{20}{4^9} + \frac{20}{4^{10}} = x_{10}$$

Mindkét oldalt 4-gyel beszorozva kapjuk, hogy

$$20 + \frac{20}{4} + \frac{20}{4^2} + \frac{20}{4^3} + \cdots + \frac{20}{4^8} + \frac{20}{4^9} = 4x_{10}$$

A második egyenletből az elsőt kivonva a bal oldalon majdnem minden kiesik, kivéve a második egyenlet első és az első egyenlet utolsó tagját. Így a kivonást elvégezve a

$$20 - \frac{20}{4^{10}} = 3x_{10}$$

egyenletet kapjuk. Ebből 3-mal való osztás és a a kiiduló négyzet szélességének hozzáadása után a 10. lépés után kapott alakzat szélességére

$$10 + \frac{20}{3} - \frac{20}{3 \cdot 4^{10}} = \frac{50}{3} - \frac{20}{3 \cdot 4^{10}} = 16,666660309 \text{ cm}$$

adódik.

Úgy tűnik, hogyha ugyanezt a számolást a 4. vagy a 20. lépésre végeznénk el, akkor csak annyiban módosulna, hogy 10 helyett 4-et, illetve 20-at kellene írnunk. Ebből az a sejtésünk alakulhat ki, hogy az alakzat szélessége az n. lépés után

$$10 + \frac{20}{3} - \frac{20}{3 \cdot 4^{n}} = \frac{50}{3} - \frac{20}{3 \cdot 4^{n}}.$$

Bizonyítsuk be sejtésünket! Az 1. lépésre kiszámoljuk:

$$\frac{50}{3} - \frac{20}{3 \cdot 4^{1}} = \frac{50}{3} - \frac{20}{12} = \frac{45}{3} = 15 = 10 + \frac{20}{4}.$$

Tegyük fel, hogy a sejtés igaz az n. lépésre, igaz-e ekkor az $n+1$-edikre is? A szélesség növekedése ekkor $\frac{20}{4^{n+1}}$, ezért az $n+1$. szélesség:

$$\frac{50}{3} - \frac{20}{3 \cdot 4^{n}} + \frac{20}{4^{n+1}} = \frac{50}{3} - \frac{80}{3 \cdot 4^{n+1}} + \frac{60}{3 \cdot 4^{n+1}} = \frac{50}{3} - \frac{20}{3 \cdot 4^{n+1}},$$

amivel bizonyítottuk a sejtésünket.

A képletből látszik, hogy a síkidom szélessége semelyik lépésben sem haladja meg az $\frac{50}{3} = 16,\dot{6}$ cm-t.
Ezzel beláttuk, hogy a fenti síkidomok alkalmasak arra, hogy tetszőlegesen nagy kerületű síkidomot rajzoljunk egy A/4-es füzetlapra.

2.0.8 Feladat: Ezeket a számolásokat elvégezhetnénk általánosabban is. Mit kapunk a kerületre, illetve a területre, ha 10 cm helyett tetszőleges a oldalú négyzetből indulunk ki?

Megoldás: Általánosan kiszámolva azt kapjuk, hogy n lépés után a kerület $4a \cdot 2^n = a \cdot 2^{n+2}$ és a szélesség $\frac{5a}{3} - \frac{2a}{3 \cdot 4^n}$.

2.0.9 Feladat: Hányadik lépés után lesz a fenti síkidom kerülete 1 km-nél nagyobb?

Megoldás: Azt az n-et keressük, amire az n-edik lépés után a síkidom kerülete nagyobb, mint 1 km= 100000 cm. Írjuk fel az egyenlőtlenséget a két mennyiség között:

$$40 \cdot 2^n \geq 100000$$

amit 40-nel osztva és mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve, majd az egyenletet $\lg 2$-vel osztva megkapjuk n értékét:

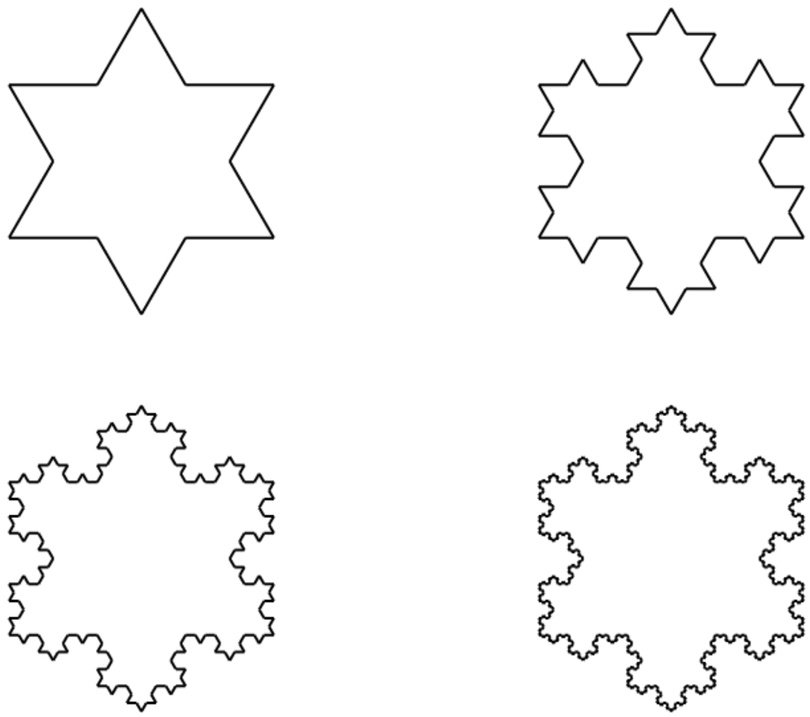
$$n \lg 2 \geq \lg 2500 \Rightarrow n \geq \frac{\lg 2500}{\lg 2} \approx 11,29,$$

tehát a síkidomok kerülete a 12. lépéstől kezdve nagyobb 1 km-nél.

2.0.10 Megjegyzés: A feladat eredménye lehet, hogy kicsit meglepő. Az ilyen feladatok alkalmasak arra, hogy a hatványozás által okozott növekedés sebességét érzékeltessék.

2.0.11 Megjegyzés: Észrevehetjük, hogy a síkidomok minden lépésben „egymáshoz illeszthetőek”, azaz a négyzet oldalhosszával vízszintes vagy függőleges irányba eltolva a síkidomot, az eredetivel csak a határvonalukon metszik egymást.

2.1. Koch-hópehely



2.3. ábra.

2.1.1 Feladat: Mi lehet 2.3. ábrán látható síkidomok előállításának szabálya? Egy 10 cm oldalú szabályos háromszögből kiindulva mekkora a kapott síkidom területe és kerülete az első, második, tizedik, n-edik lépés után?

Megoldás: A síkidomok előállításánál az egyes lépésekben minden oldal középső harmadrészéhez egy olyan szabályos háromszöget illesztettünk, aminek oldala az eredeti oldal harmadrésze. Az így kapott síkidom minden oldala egyenlő hosszú, és harmadrésze az előzőének.

Ennél az alakzatnál a kerület kiszámítása a könnyebb feladat. A kerületet alkotó minden szakaszt négy olyan szakaszra cserélük ki, amelyek hossza az eredetiének a harmadrésze. Ebből kapjuk, hogy a kerület minden lépésben a $\frac{4}{3}$-szorosára változik, így az n-edik lépés után a kapott síkidom kerülete $30 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Ezt teljes indukcióval bizonyíthatjuk.

A területről rögtön látszik, hogy folyamatosan növekszik. A növekedés, és így a terület kiszámolásához érdemes táblázatot használnunk. A táblázatban az egyszerűbb jelölések kedvéért a kiinduló háromszög területét t_0-lal jelöljük, azaz $t_0 := 25\sqrt{3}$.

lépések száma	új $\triangle$-ek száma	új $\triangle$-ek területe	T növekedése
0	1	t_0	t_0
1	3	$\frac{t_0}{9}$	$\frac{3t_0}{9}$
2	12	$\frac{t_0}{9^2}$	$\frac{3t_0 \cdot 4}{9^2}$
3	$3 \cdot 4^2$	$\frac{t_0}{9^3}$	$\frac{3t_0 \cdot 4^2}{9^3}$
4	$3 \cdot 4^3$	$\frac{t_0}{9^4}$	$\frac{3t_0 \cdot 4^3}{9^4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	$3 \cdot 4^{10}$	$\frac{t_0}{9^{10}}$	$3t_0 \cdot \frac{4^9}{9^{10}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$3 \cdot 4^n$	$\frac{t_0}{9^n}$	$3t_0 \cdot \frac{4^{n-1}}{9^n}$

Az új háromszögek számához azt kell észrevenni, hogy mindig annyi új háromszög keletkezik, mint amennyi szakaszból a kerület az előző lépésben állt. A sorozat képzési szabálya alapján a kerület minden szakaszát 4 új szakaszra cseréljük ki az egyes lépésekben, ezért a szakaszok száma, és így az új háromszögek száma is minden lépésben a négyszeresére változik.

A terület növekedése az első lépéstől kezdve itt is mértani sorozatot alkot. Az előző feladathoz hasonlóan kiszámolhatjuk a 10., majd az n. tag területét, ezekre

$$T_{10} = 30\sqrt{3} - 5\sqrt{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{10},$$

majd teljes indukciós bizonyítás után

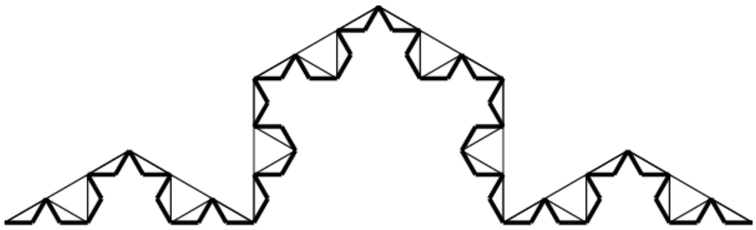
$$T_n = 30\sqrt{3} - 5\sqrt{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n}$$

adódik.

2.1.2 Feladat: A kapott alakzatok megfelelő példák-e a bevezető feladatban keresett síkidomokra? Azaz a kapott síkidomsorozat korlátos-e, létezik-e olyan korlátos síkidom, amit a kapott alakzat köré rajzolhatunk minden lépésben?

MEGOLDÁS: A sorozat első néhány elemének felrajzolása után úgy tűnik, hogy mindegyik síkidom az első lépés után kapott sokszög konvex csúcsai által meghatározott szabályos hatszögön belül marad. Nem nehéz végiggondolni, hogy ez valóban így van.
Rajzoljunk az 1. lépésben kapott sokszög oldalaira kifelé olyan egyenlő szárú háromszögeket, aminek az alapja az eredeti oldal, és a szárszögei 30°-osak. Nevezzük az

ilyen típusú háromszöget „lapos háromszögnek”. A következő lépésben az alakzathoz rajzolt szabályos háromszögek oldalon kívüli csúcsa egybeesik a lapos háromszög alappal szemközti csúcsával, így az új háromszög a lapos háromszögön belül helyezkedik el. A következő lépésben megrajzolt új háromszögek ismét a megfelelő lapos háromszögön belül vannak (2.4. ábra).Az újabb lapos háromszögekről a szögek vizsgálatával könnyen belátható, hogy az előző lapos háromszögön belül vannak. Az új háromszögek tehát mindig a megfelelő lapos háromszögön belül maradnak, ami pedig része a korábban megrajzolt lapos háromszögnek, és így a második lépésben kapott hatszögnek is.



2.4. ábra.

2.1.3 Feladat: A számolásokat megint elvégezhettük volna kicsit általánosabban, 10 cm oldalú szabályos háromszög helyett a oldalúból kiindulva. Hogyan módosulnának ekkor az eredményeink?

2.1.4 Feladat: Hányadik lépés után lesz az előző feladatban szereplő síkidom kerülete nagyobb, mint 1 km?

2.1.5 Feladat: Milyen síkidomot kapunk végtelen sok lépés után? Melyek azok a pontok, amik biztosan az alakzathoz tartoznak? Melyek azok, amik biztosan nem tartoznak hozzá? Mekkora a kerülete és a területe?

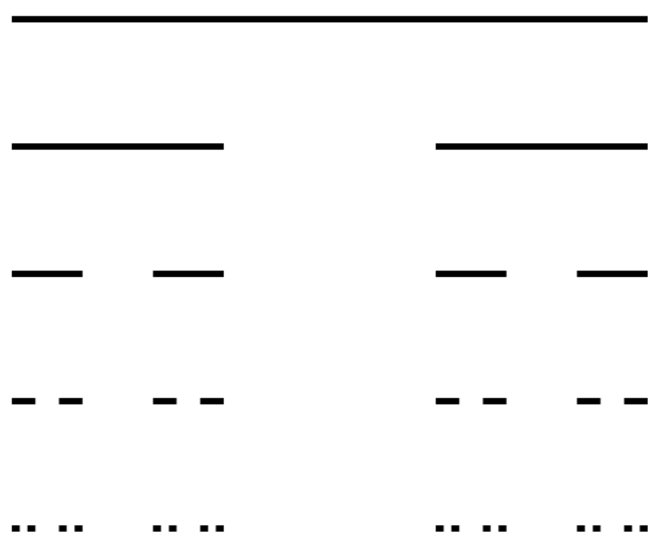
Megoldás: A végtelen sok lépés után kapott alakzatot nevezzük Koch-hópehelynek. Ez az alakzat egyértelműen meghatározott, hiszen minden pontra igaz, hogy vagy belevesszük valamelyik lépésben, és akkor hozzátartozik az alakzathoz, vagy nem vesszük bele semelyik lépésben sem, és akkor nem tartozik hozzá az alakzathoz.
Biztosan az alakzathoz tatozó pontokat könnyen mondhatunk, hiszen amit egyszer belevettünk, az a Koch-hópehelyhez fog tartozni.
Olyan pontokat, amik biztosan nem tartoznak az alakzathoz, a 2.1.2. feladat megoldásában szereplő lapos háromszögek segítségével kaphatunk. Ott megállapítottuk, hogy az egyes lépések után már csak az oldalakra emelt lapos háromszögeken belül keletkeznek új háromszögek. Tehát ha valamelyik lépésben minden oldalra megrajzoljuk a megfelelő lapos háromszögeket, akkor az azokon kívüli pontok már biztosan a Koch-hópelyhen kívül lesznek.

A Koch-hópehely kerületére azt mondhatjuk, hogy az minden olyan síkidom kerületénél nagyobb, ami az előállításban szerepel, ezért a kerület végtelen.

A területre kapott képletből látszik, hogy az semelyik lépésben se nagyobb $30\sqrt{3}$ cm^2-nél, de minden lépésben nagyobb az előző területnél, azaz minden $30\sqrt{3} - 5\sqrt{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$ alakú számnál nagyobb. Ezek a számok olyanok, hogy $30\sqrt{3}$ cm^2-ből egyre kisebb számot vonunk ki, a kivonandók egyre közelednek 0-hoz. A végtelen sok lépés után kapott alakzat területére is igazak a fenti megállapítások, azt mondhatjuk, hogy annak területe pontosan $30\sqrt{3}$ cm^2. Úgy is fogalmazhatunk, hogy ekkor a terület kiszámításakor $30\sqrt{3}$ cm^2-ből 0-t vonunk ki.

2.1.6 Megjegyzés: A Koch-hópelyhet máshogyan is előállíthatjuk. Induljunk ki a szabályos hatszögből, amit az első lépés után kapott síkidom konvex csúcsainak összekötéséből kapunk. A megfelelő lapos háromszögeket berajzolva azt tapasztaljuk, hogy azokat a hatszögön kívüli részt, amit biztosan kihagyunk, kiegészíthetjük 6 szabályos háromszöggel. Ezek a hatszög oldalainak közepére befelé rajzolt szabályos háromszögek, amelyeknek oldala a hatszögének a harmada. Az újabb lapos háromszögek rajzolásakor ismét szabályos háromszögekkel egészül ki a kimaradó rész, ezek oldalai az előzőekének harmadrészei, és az előző lépésben kapott alakzat minden oldala mentén megjelenik egy ilyen, befelé rajzolva.
Tehát a hatszögből kiindulva, az első konstrukcióhoz nagyon hasonló módon, mindig az oldalközepi egyharmad oldalú szabályos háromszögeket kihagyva ismét kapunk egy síkidomsorozatot. Az első néhány lépést felrajzolva az a sejtésünk támad, hogy ilyen módon is a Koch-hópelyhet állítjuk elő. Bebizonyítható, hogy ez valóban így van.

2.2. Cantor-halmaz



2.5. ábra.

A 2.5. ábrán a Cantor-halmazt előállító sorozat szerepel, az első kérdés ismét az, hogy mi lehet a sorozat előállításának a szabálya.

A válasz az, hogy a meglévő intervallumoknak mindig kihagyjuk a középső harmadát, a megmaradó szakaszok alkotják a következő alakzatot.
Fontos hozzátenni, hogy a kiinduló szakaszhoz hozzátartoznak a végpontjai, azaz ha az alakzatokat a számegyenes részhalmazaiként vizsgálnánk (amit a későbbiekben meg is teszünk), akkor egy zárt intervallumból indulunk ki, majd az egyes lépések során nyílt intervallumokat hagyunk el belőle, így minden lépésben egy zárt intervallumokból álló halmazt kapunk.

2.2.1 Feladat: Induljunk ki egy 10 cm hosszú szakaszból. Hány szakaszból áll az alakzat 4, 10, n lépés után? Hány végpontja van az alakzatnak? Mekkora az alakzat összhossza?

MEGOLDÁS: A sorozat képzési szabálya alapján minden lépésben minden szakasz helyett két másikat kapunk, ezért a szakaszok száma minden lépésben megduplázódik. A kiinduló alakzat egy szakasz volt, így a szakaszok száma n lépés után 2^n.
Ezután könnyű összeszámolni az alakzat végpontjait, ugyanis minden szakasznak két végpontja van, így a végpontok száma n lépés után 2^{n+1}.
Az alakzat összhosszát kétféleképp is meghatározhatjuk. Egyrészt az alakzatot alkotó szakaszok hossza minden lépésben a harmadrészére változik, így az n. lépés után a szakaszhossz $\frac{1}{3^n}$. Az első kérdésre adott válasz alapján a szakaszok összhossza n lépés után $\frac{2^n}{3^n}$.
Másképp gondolkodva rögtön észrevehetjük, hogy az egyes lépésekben minden szakasz helyett két olyat veszünk, amelyek összhossza a szakasz hosszának $\frac{2}{3}$-szorosa, így a szakszok összhossza minden lépésben $\frac{2}{3}$-szorosára változik.

2.2.2 Feladat: Megint elvégezhettük volna a számolást általánosabban, 10 cm-es szakasz helyett a hosszú szakaszból kiindulva. Hogyan változtak volna ekkor az eredményeink?

2.2.3 Feladat: Egy 1 km hosszú szakaszból kiindulva hányadik lépés után lesz a kapott alakzat összhossza kisebb 1 mm-nél?

2.2.4 Megjegyzés: A Cantor-halmazt előállító sorozatról elmondhatjuk, hogy a szakaszok, illetve a végpontok száma egyre növekszik, és bármekkora számnál nagyobb tud lenni, azaz végtelenhez tart.
Eközben a szakaszok összhossza minden lépésben csökken, és egyre közeledik 0-hoz.

2.2.5 Feladat: Mit kapunk, ha elvégezzük az összes, végtelen sok lépést? Marad egyáltalán valami, vagy minden pontot kihagyunk valamikor?

MEGOLDÁS: Könnyű végiggondolni, hogy azokat a pontokat, amik valamelyik lépésnél egy szakasz végpontjai, semelyik lépésben se hagyjuk ki. Az n-edik lépésben 2^{n+1} ilyen végpontunk van, ezek száma végtelenhez tart. A végtelen sok lépés elvégzése után tehát kapunk végtelen sok olyan pontot, amit egyik lépésben sem hagytunk ki, ezért a megmaradó halmaznak biztosan végtelen sok pontja van.

2.2.6 Megjegyzés: A Cantor-halmaznál tehetünk egy kitérőt a számrendszerek felé.

A gyerekek valószínűleg még csak az egész számok körében találkoztak számrendszerekkel. A Cantor-halmaz kapcsán szemléltethetjük a számrendszerek jelentését nem egész számok esetén is. Ehhez először értelmezzük a harmadostörteket, megtanuljuk az átváltásukat. Erre többféle módszert is használhatunk. Több példát is hozunk a végtelen szakaszos harmadostörtekre, és megbeszéljük, hogy egy szám harmadostört-alakja nem mindig egyértelmű, mint ahogyan a tizedestört alakja sem.
A Cantor-halmaz vizsgálatához a $[0;1]$ intervallumból indulunk ki, és ebből állítjuk elő a halmazt. Megvizsgáljuk, hogy mit mondhatunk el az egyes lépésekben elhagyott számok harmadostört-alakjáról. A kétféle harmadostört-alakkal rendelkező számok végtelen alakját is figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy pontosan azok a számok vannak benne a Cantor-halmazban, amiknek van olyan alakja, amiben csak a 0 és a 2 számjegyek szerepelnek.
Már láttuk korábban, hogy a szakaszok végpontjait nem hagyjuk ki egyik lépésben sem, ezért a Cantor-halmaznak van végtelen sok pontja. Ezek a pontok egy megszámlálhatóan végtelen számosságú halmazt alkotnak. A harmadostört alakok vizsgálatából látszik, hogy nem csak a szakaszok végpontjai maradnak meg. Ennél több is mondható: a Cantor-halmaz minden pontjának megfeleltethető az a kettedestört, aminek a számjegyeit úgy kapjuk, hogy a 0-k megmaradnak a számban, a 2-k helyett pedig 1-t írunk. Így megkapjuk az összes $[0;1]$ intervallumbeli kettedestörtet. Tehát a Cantor-halmaz pontjainak számossága ugyanannyi, mint a $[0;1]$ intervallum pontjainak számossága, amiről tudjuk, hogy kontinuum számosságú.

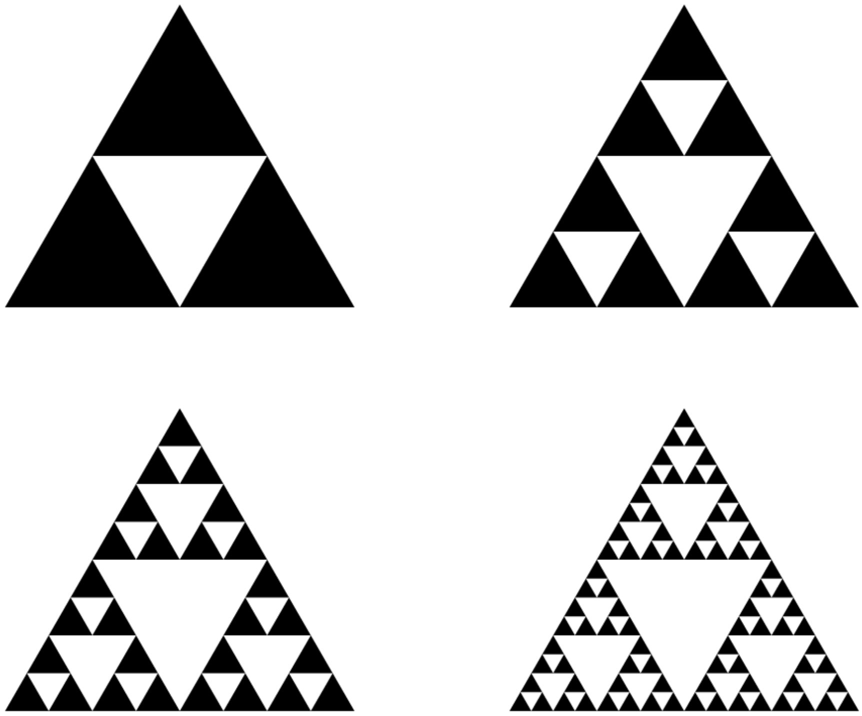
2.3. Sierpinski-háromszög

A 2.6. ábrán a Sierpinski-háromszöget előállító síkidom-sorozat első néhány tagja szerepel. Az első kérdés itt is a sorozat előállításának a szabálya. A következő síkidomot mindig úgy állítjuk elő, hogy az alakzatot alkotó (az előző lépésekben megtartott) szabályos háromszögek mindegyikét felosztjuk 4 egybevágó háromszögre, és ezek közül a középsőt elhagyjuk.

2.3.1 Megjegyzés: A sorozat szabályához hozzá kell tennünk, hogy a megmaradó alakzathoz mindig hozzátartozik a határa is, azaz zárt alakzatból indulunk, és mindig nyíltat hagyunk ki belőle.

2.3.2 Feladat: Mekkora a kapott síkidom kerülete és területe 4, 10, n lépés után egy 10 cm oldalú szabályos háromszögből kiindulva?

Megoldás: A kerületet az összes háromszög összes oldala alkotja együtt. A háromszögek száma minden lépésben a háromszorosára változik, az alakzatot alkotó háromszögek kerülete pedig minden lépésben a felére csökken. Így az alakzat kerülete összesen mindig $\frac{3}{2}$-szeresére változik. Így azt kapjuk, hogy n lépés után az alakzat kerülete a kiinduló háromszög kerületének a $\left(\frac{3}{2}\right)^n$-szerese, azaz $30 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$.
A kerületet természetesen máshogy is kiszámolhattuk volna. Mivel minden szakasz, ami a kerülethez tartozik, az a további lépésekben is a kerület része marad, ezért a kerület növekedését is kiszámolhattuk volna az egyes lépésekben, majd ezt



2.6. ábra.

összeadva is megkaphattuk volna a kerületet.

A terület kiszámolásához azt kell végiggondolnunk, hogy az egyes lépésekben a meglévő területek mindegyikét 4 egybevágó részre osztjuk, és abból hármat tartunk meg, így minden lépésben az előző terület $\frac{3}{4}$ része marad meg. Így n lépés után a terület az eredetinek $\left(\frac{3}{4}\right)^n$-szerese, azaz $25\sqrt{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

2.3.3 Feladat: Milyen eredmények jöttek volna ki az n. lépés után, ha 10 cm oldalú háromszög helyett a oldalú háromszögből indultunk volna ki?

2.3.4 Feladat: Hányadik lépés után lesz a kapott alakzat területe 1 mm^2-nél kisebb? Hányadik lépés után lesz a kapott alakzat kerülete 1 km-nél nagyobb?

2.3.5 Feladat: Próbáld meg elképzelni, hogy milyen alakzatot kapunk végtelen sok lépés után! Mik azok a pontok, amik biztosan megmaradnak? Mekkora a kapott alakzat kerülete és területe?

Megoldás: A végtelen sok lépés után kapott alakzatot nevezzük Sierpinski-háromszögnek. Ez az alakzat egyértelműen meghatározott, mivel az egyes lépések során csak elhagyunk pontokat a kiinduló háromszögből, így azok a pontok alkotják a Sierpinski-háromszöget, amelyeket semelyik lépésben nem hagytunk ki.
Azokat a pontokat, amelyek valamelyik lépésben a kerületet alkotják, a további lépések során nem hagyjuk el, ezek tehát benne maradnak az alakzatban.
Ezeknél az alakzatoknál azt tapasztaljuk, hogy a kerület a lépések során növekszik, és bármilyen számnál nagyobb kerületet megkaphatunk elég sok lépés után, a

Sierpinski-háromszög kerülete tehát végtelen. A területe folyamatosan csökken a lépések során, ezért minden $25\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$ alakú számnál kisebb, így csak 0 lehet.

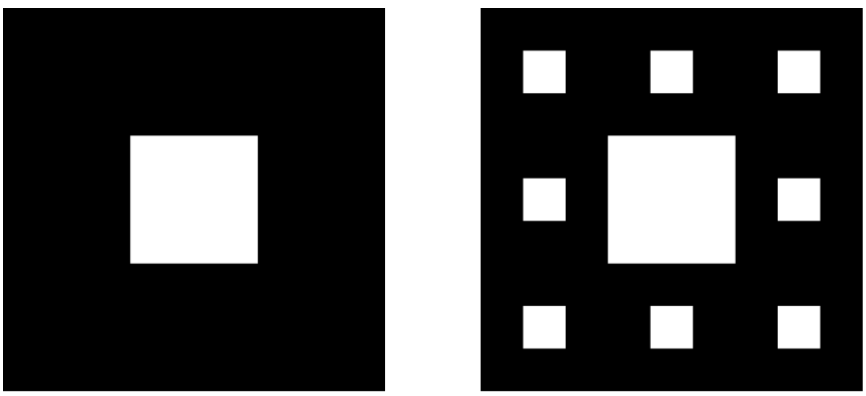
2.3.6 Megjegyzés: A sorozatot szabályos háromszög helyett tetszőleges háromszögből is képezhettük volna. Ezekben az esetekben is ugyanazt az eredményt kapnánk a kerület, illetve a terület változásaira az egyes lépések során. A végtelen sok lépés után kapott alakzat is ugyanúgy értelmezhető.

2.3.7 Feladat: Rajzold fel a Pascal-háromszög első 8 sorát. Színezd be a páratlan számokat! Mit veszel észre? Hányadik sorig kell megrajzolni a Pascal-háromszöget, hogy egy ehhez hasonló ábrát kapj?

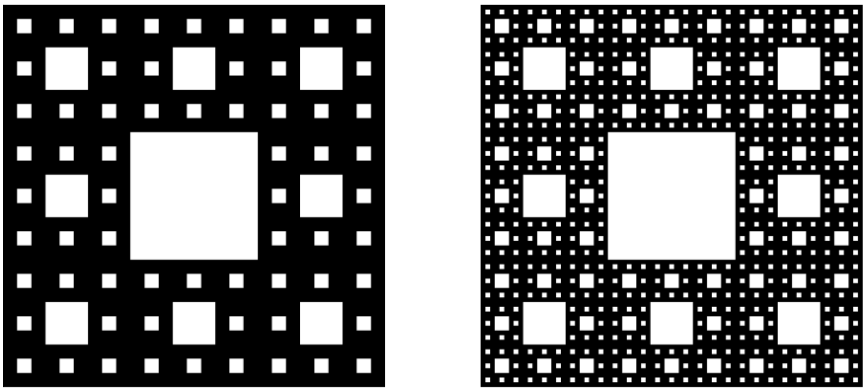
Megoldás: Azt tapasztaljuk, hogy a beszínezett mezők a Pascal-háromszög előállításakor a 3. lépésben kapott alakzathoz hasonlót állítanak elő. Ha a 16. sorig rajzoljuk fel a Pascal-háromszöget, akkor a 4. lépésben kapotthoz hasonló ábrát kapunk.
Úgy is elképzelhetjük mindezt, hogy ha rajzolunk egy szabályos háromszöget, minden oldalát felosztjuk 2^n részre, majd ezeket a pontokat a háromszög oldalaival párhuzamos egyenesekkel összekötve egy háromszögrácsot kapunk. Ha ennek a rácsnak a felfelé álló háromszögeibe (amelyeknek a vízszintes oldallal szemközti csúcsuk az oldal fölött van) értelemszerűen beleírjuk a Pascal-háromszög számait, majd a páratlan számokat tartalmazó háromszögeket beszínezzük, akkor megkapjuk az n. lépés utáni ábrát.

2.3.8 Megjegyzés: A Pascal-háromszöget kiszínezhetjük más maradékok szerint is. Színezhetjük a különböző maradékokat többféle színnel, vagy a nem 0 maradékú számokat mind ugyanazzal. Ezekben az esetekben szintén szép és érdekes minták keletkeznek. A négyes maradékok szerinti színezés feladatként szerepel [1] 72. oldalán, számelmélet témakörben.

2.4. Sierpinski-szőnyeg



2.7. ábra.



2.8. ábra.

A 2.7. és 2.8. ábrákon a Sierpinski-szőnyeget előállító síkidom-sorozat első néhány tagja szerepel.
Az első kérdés itt is a sorozat előállításának szabálya. A következő ábrát mindig úgy kapjuk az előzőből, hogy az alakzatot alkotó (az előző lépésekben megtartott) négyzetek mindegyikét felosztjuk 3×3 egybevágó négyzetre, és ezek közül a középsőt elhagyjuk.

2.4.1 Megjegyzés: A sorozat szabályához hozzá kell tennünk, hogy a megmaradó alakzathoz mindig hozzátartozik a határa is, azaz zárt alakzatból indulunk, és mindig nyíltat hagyunk ki belőle.

2.4.2 Feladat: Mekkora a kapott síkidom kerülete és területe 4, 10, n lépés után egy 10 cm oldalú négyzetből kiindulva?

Megoldás: Ezeknél az alakzatoknál a terület kiszámolása az egyszerűbb feladat. Minden négyzetet 9 egybevágó részre bontunk, és ebből 8-at tartunk meg, így a terület minden lépésben a $\frac{8}{9}$ részére változik. Így n lépés után a terület az eredetinek a $\left(\frac{8}{9}\right)^n$-szerese, azaz $100 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n$.
A kerület kiszámítása valamivel bonyolultabb. Ennél az alakzatnál érdemes a kerület növekedését vizsgálni, majd a kapott növekményeket összeadni. Ehhez ismét segítséget nyújthat, ha táblázatot készítünk:

lépés	új négyzetek száma	új négyzetek kerülete	kerület növekedése
0	0	40	40
1	1	$\frac{40}{3}$	$40 \cdot \frac{1}{3}$
2	8	$\frac{40}{3^2}$	$40 \cdot \frac{8}{3^2} = 5 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2$
3	8^2	$\frac{40}{3^3}$	$40 \cdot \frac{8^2}{3^3} = 5 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^3$
4	8^3	$\frac{40}{3^4}$	$40 \cdot \frac{8^3}{3^4} = 5 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	8^9	$\frac{40}{3^{10}}$	$40 \cdot \frac{8^9}{3^{10}} = 5 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{10}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	8^{n-1}	$\frac{40}{3^n}$	$40 \cdot \frac{8^{n-1}}{3^n} = 5 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^n$

A táblázat alapján a 10. lépés után a területet az alábbi számolással kaphatjuk meg:

$$K_{10} = 40 + 5 \cdot \frac{8}{3} + 5 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \cdots + 5 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{10} = 40 + 5x,$$

ahol

$$x = \frac{8}{3} + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{8}{3}\right)^2.$$

Ezt szorozzuk be $\frac{3}{8}$-dal, majd a kapott egyenletet vonjuk ki a fentiből, így azt kapjuk, hogy

$$\frac{5}{8}x = \left(\frac{8}{3}\right)^{10} - 1 \Rightarrow x = \frac{8}{5}\left(\left(\frac{8}{3}\right)^{10} - 1\right),$$

amiből adódik, hogy a 10. alakzat kerülete

$$K_{10} = 40 + 5 \cdot \frac{8}{5}\left(\left(\frac{8}{3}\right)^{10} - 1\right) = 32 + 8 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{10}.$$

Ebből azt sejthetjük, hogy az n. alakzat kerülete

$$K_n = 32 + 8 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{n}.$$

Sejtésünket teljes indukcióval bizonyíthatjuk.

2.4.3 Feladat: Hogyan lehetne a kapott képleteket átírni általánosabb esetre, amikor egy a oldalú négyzetből indulunk ki?

2.4.4 Feladat: Hányadik lépés után lesz a kapott alakzat területe 1 mm^2-nél kisebb? Hányadik lépés után lesz a kapott alakzat kerülete 1 km-nél nagyobb?

2.4.5 Feladat: Próbáld meg elképzelni, hogy milyen alakzatot kapunk végtelen sok lépés után! Mik azok a pontok, amik biztosan megmaradnak? Mekkora a kapott alakzat kerülete és területe?

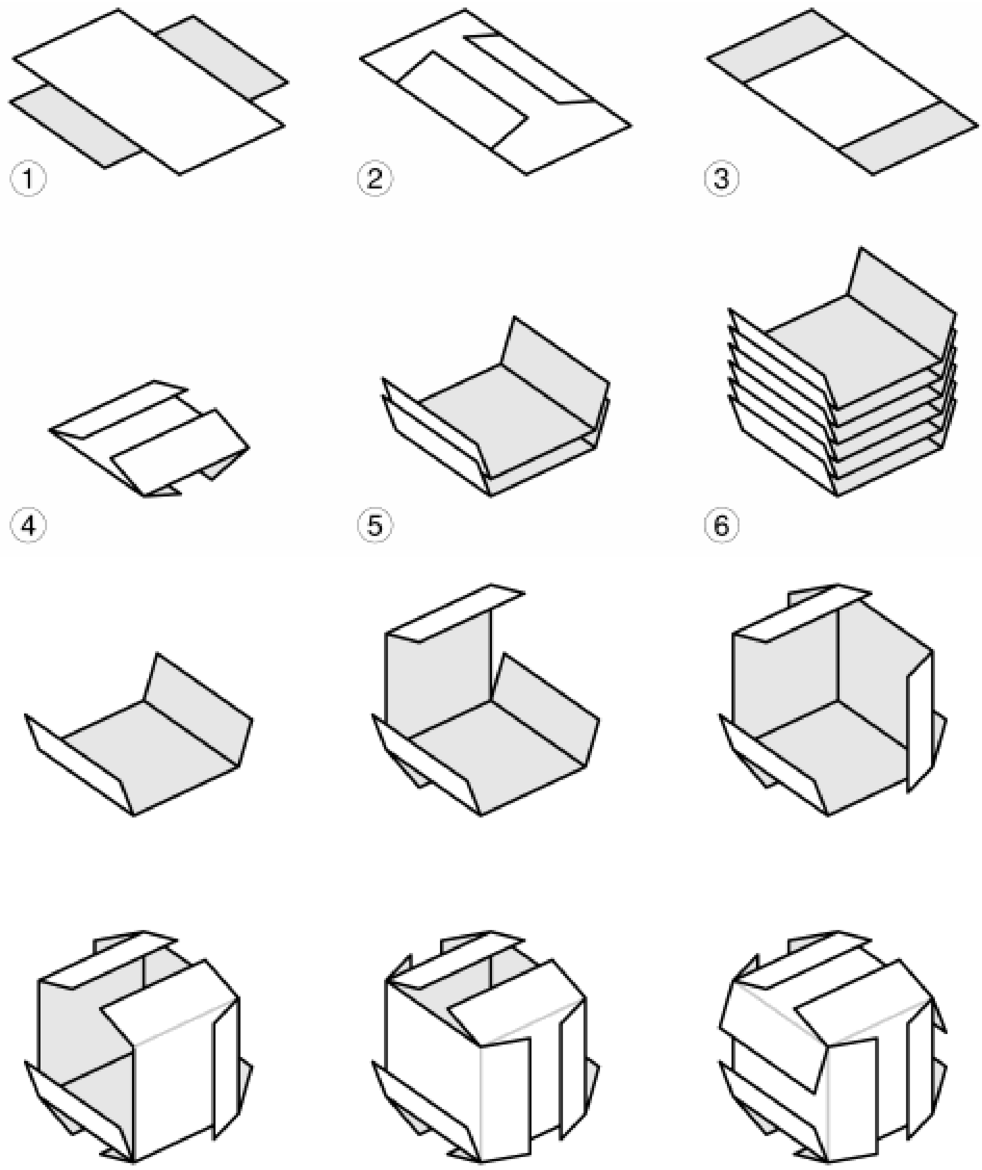
Megoldás: A végtelen sok lépés után kapott alakzatot nevezzük Sierpinski-szőnyegnek. Ez az alakzat egyértelműen meghatározott, mivel az egyes lépések során csak elhagyunk pontokat a kiinduló négyzetből, így azok a pontok alkotják a Sierpinski-szőnyeget, amelyeket semelyik lépésben nem hagytunk ki.
A valamelyik lépésben a meglévő négyzeteket 3×3 kisebb négyzetre osztó vonalakat a további lépések során nem hagyjuk el, ezek pontjai tehát benne maradnak az alakzatban.
Ezeknél az alakzatoknál azt tapasztaljuk, hogy a kerület tetszőlegesen nagy lehet megfelelő számú lépés után, a Sierpinski-szőnyeg kerülete mindegyik lépésben kapott kerületnél nagyobb, tehát végtelen.
A terület a lépések során folyamatosan csökken, és akármilyen kicsi lehet. A Sierpinski-szőnyeg területe a sorozat minden tagjáénál kisebb, azaz 0.

2.4.6 Feladat: Szerepel-e a Sierpinski-háromszögben a Cantor-halmaz? Próbáljatok meg keresni az ábrán ilyen részeket!

MEGOLDÁS: A négyzet középvonala és átlója mentén is találhatunk Cantor-halmazt. Ezen kívül például a szemközti oldalak negyedelőpontjait összekötő szakasz mentén három egymás mellé helyezett Cantor-halmazt vehetünk észre. Ezeken kívül még számos Cantor-halmaz található az ábrában.

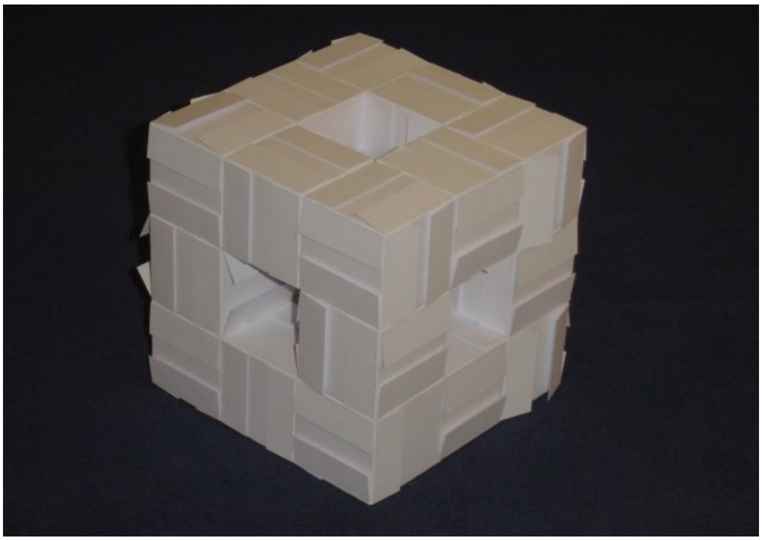
2.5. Menger-szivacs

A következő alakzatot hajtogatással készítettük el a táborban, kicsit keményebb papírból, 2.9. ábrának [8] megfelelően. Először hajtogattunk 6 darabból ragasztás nélkül összeállítható kockákat. Ezeket minden gyerek meg tudta csinálni, nem kellett hozzá nagy kézügyesség.



2.9. ábra.

A kockák a kilógó fülek segítségével ragasztás nélkül stabilan egymáshoz illeszthetőek, ezekből elkészítettük a Menger-szivacs előállításánál első lépésként kapott testet (2.10. ábra, [7]). A hajtogatott elemekből a Menger-szivacsot közelítő sorozat további elemei is elkészíthetőek [9].



2.10. ábra.

2.5.1 Feladat: Hogyan áll elő a kapott test egy kockából? Hogyan néznének ki a további lépéseknél kapott alakzatok?

MEGOLDÁS: A testet egy kockából úgy állíthatjuk elő, hogy a kockát $3 \times 3 \times 3$ kisebb kockára bontjuk, és ezek közül kihagyjuk a középsőt és a lapok középpotjait megjelenő kiskockákat.
A következő testet úgy kapjuk ebből, hogy a megmaradt kiskockák mindegyikén ugyanezt a lépést hajtjuk végre.

2.5.2 Feladat: Egy 10 cm élű kockából kiindulva a kapott testnek mekkora a térfogata és felszíne 4, 10, n lépés után?

MEGOLDÁS: A térfogatra az előző megoldásokéhoz hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy n lépés után $1000 \cdot \left(\frac{20}{27}\right)^n$ cm^3 nagyságú.
A felszín kiszámolása sokkal összetettebb feladat, mint az eddigiekben, nem csináltuk meg a gyerekekkel, aki akart, gondolkodhatott rajta.
A felszín kiszámolásához vegyük észre, hogy:

1) a felszínhez mindig hozzáveszünk új részeket: amikor a kockák belsejéből elhagyunk kiskockákat, akkor az így keletkező lyukak mentén új lapok keletkeznek,

2) a meglévő felszínnek minden lépésben elhagyjuk az $\frac{1}{9}$-ed részét: a meglévő négyzetek mindegyikét 9 kisebb négyzetre bontjuk, és ebből a középsőt elhagyjuk.

Jelöljük T_k-val, hogy a k-adik lépésben mekkora részt veszünk hozzá a felszínhez. A kiinduló alakzat felszíne 600 cm^2, azaz $T_0 = 600$. Ha $k \geq 1$, akkor a k-adik lépésben a felszínt alkotó négyzetek területei egyenként $\frac{100}{9^k}$ nagyságúak, és az előző alakzatot alkotó 20^{k-1} kiskocka mindegyikének a belsejében keletkezik 24 új négyzetlap. A k-adik lépésben az alakzathoz hozzávett új felszín nagysága tehát

$$T_k = 24 \cdot 20^{k-1} \cdot \frac{100}{9^k} = 120 \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^k.$$

Jelölje $T_{k,n}$, hogy a T_k területből mennyi maradt meg az n-edik lépés után. A k-adik lépésben meglévő felszínből a következő lépésben csak a $\frac{8}{9}$-szerese, l lépés múlva pedig csak a $\left(\frac{8}{9}\right)^l$-szerese marad meg. Tehát

$$T_{k,k} = T_k, \quad T_{k,k+1} = \frac{8}{9} \cdot T_k, \quad T_{k,k+2} = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot T_k, \quad \ldots$$

$$T_{k,n} = \left(\frac{8}{9}\right)^{n-k} \cdot T_k = 120 \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^k \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{n-k} = 120 \cdot \frac{20^k \cdot 8^{n-k}}{9^n}.$$

Ahhoz, hogy megkapjuk az alakzat felszínét n lépés után, a $T_{k,n}$-eket kell összeadnunk. Az összeg tagjai $T_{1,n}$-től kezdve mértani sorozatot alkotnak, aminek a hányadosa $\frac{20}{8}$. Azt kapjuk, hogy az alakzat felszíne n lépés után

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} T_{k,n} = 600 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} 120 \cdot \frac{20^k \cdot 8^{n-k}}{9^n} = 200 \cdot \frac{20^n + 4 \cdot 8^n}{9^n}.$$

2.5.3 Feladat: Próbáld meg elképzelni, hogy milyen alakzatot kapunk végtelen sok lépés után! Mik azok a pontok, amik biztosan benne vannak? Mekkora a kapott alakzat felszíne és térfogata?

Megoldás: A végtelen sok lépés után kapott alakzatot nevezzük Menger-szivacsnak. Ez egyértelműen meghatározott, mert minden lépésben csak elveszünk pontokat a kiinduló kockából, ezért az alakzatot pontosan azok a pontok alkotják, amelyeket semelyik lépésben sem hagytunk el.
Azokról a pontokról látszik biztosan, hogy nem hagyjuk el őket semelyik lépésben sem, amelyek valamelyik lépésben az alakzat egy élének pontjai. Ezeken kívül még az egyes oldalakat 3×3 részre osztó vonalakról is hasonlóan látszik, hogy sosem hagyjuk el őket.
A sorozatban szereplő testek felszíne folyamatosan növekszik, és bármilyen nagy számnál nagyobb tud lenni megfelelő számú lépés után. A Menger-szivacs felszíne ezekénél mind nagyobb, ezért végtelen.
A térfogat az egyes lépések során folyamatosan csökken, és bármilyen pozitív számnál kisebb tud lenni. A Menger-szivacs térfogata ezekénél mind kisebb, tehát csak 0 lehet.

2.5.4 Feladat: A Menger-szivacsban több helyen is megjelenik a Sierpinski-szőnyeg és a Cantor-halmaz. Próbáljatok benne keresni ilyen alakzatokat!

2.6. Önhasonló halmazok dimenziója

Először megbeszéltük a gyerekekkel, hogy mit gondolnak, mi az a dimenzió. Megbeszéltük, hogy milyen 0, 1, 2, illetve 3 dimenziós alakzatokat ismernek, és

hogy ezeket milyen mértékekkel mérjük. Megállapítottuk, hogy ha egy alakzatra alkalmazunk egy hasonlóságot, akkor a dimenziója nem változik meg.
Azt is megbeszéltük, hogy valaminek a mértéke nem lehet negatív, és hogy diszjunkt alakzatok egyesítésének a mértéke mindig a mértékeik összege. Ez akkor is igaz, ha a halmazok, amiket egyesítünk, „majdnem diszjunktak”, azaz a közös részük annyira kicsi, hogy a mértéke 0. Az is mindig igaz, hogy egybevágó alakzatok mértéke megegyezik.
Mi történik, ha valamit nem a hozzá tartozó mértékkel próbálunk meg megmérni? Mekkora egy szakasz területe? Mekkora egy négyzet hossza? Megállapítottuk, hogy ha valamit a sajátjánál nagyobb dimenzióhoz tartozó mértékkel mérünk, akkor akármilyen kicsi méretű alakzatba belefér, tehát a mértéke minden pozitív számnál kisebb, azaz 0. Ha kisebb dimenzióhoz tartozó mértékkel mérjük, akkor akárhány mérést végzünk egymás után, mindig marad része az alakzatnak, amit még nem mértünk meg, tehát a mértéke minden valós számnál nagyobb, azaz végtelen.
Fontos megjegyezni, hogy ha valaminek a mértéke 0 vagy végtelen, akkor ebből nem következik biztosan, hogy „rossz” mértékkel mérjük. Például egy egyenes 1 dimenziós, mégis végtelen az 1 dimenziós mértéke, azaz a hosszúsága.

Ennek alapján megvizsgáltuk az eddig szerepelt alakzatokat, és megállapítottuk, hogy a Koch-görbe kerülete lehet, hogy több, mint 1 dimenziós, a Cantor halmaz lehet, hogy kevesebb, mint 1 dimenziós, a Sierpinski-szőnyeg és a Sierpinski háromszög lehet, hogy kevesebb, mint 2 dimenziós, és a Menger-szivacs lehet, hogy kevesebb, mint 3 dimenziós.

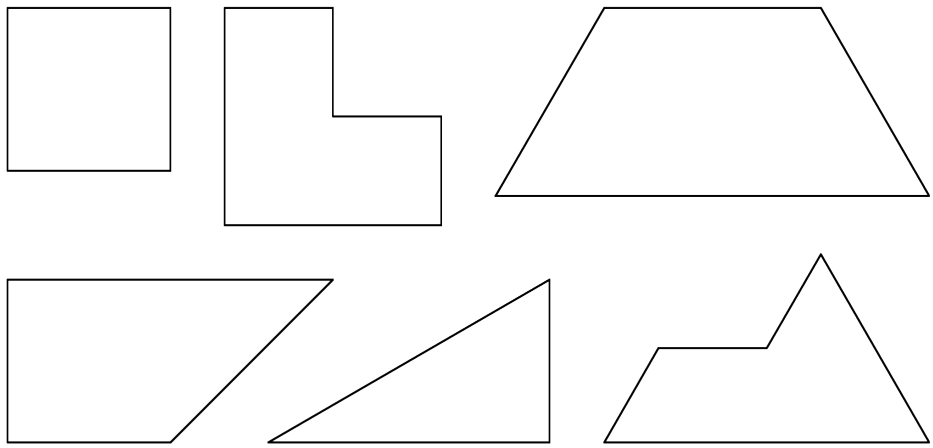
A dimenziót ezek alapján nem tudjuk pontosan meghatározni, valamilyen más módszerre van szükség. A hasonlóságnál, 10. osztályban tanultuk, hogy ha egy F alakzatra egy λ arányú hasonlóságot (jelölje ezt T) alkalmazunk, akkor hogyan változik a hossza, kerülete, területe, felszíne, térfogata. A d dimenziós mértéket $\mathcal{L}^d$-vel jelölve ezt az összefüggést úgy írhatjuk, hogy

$$\mathcal{L}^d(T(F)) = \lambda^d \mathcal{L}^d(F).$$

Léteznek más dimenziós mértékek, amelyekre ugyanez az összefüggés igaz, de a d szám ekkor nem feltétlenül egész. Egy alakzatot a sajátjánál nagyobb dimenziós mértékkel mérve 0-t, kisebb dimenziós mértékkel mérve végtelent kapunk eredményül. Ezekben az esetekben a fenti összefüggés természetesen teljesül, mivel egy pozitív valós számot 0-val, illetve végtelennel szorozva 0-t, illetve végtelent kapunk. A dimenzió kiszámolásához azt használjuk, hogy ennek az összefüggésnek akkor is teljesülnie kell, amikor az alakzat $\mathcal{L}^d$ szerinti mértéke nem feltétlenül 0 vagy végtelen, azaz amikor a saját dimenziójához tartozó mértékkel mérjük.

A hasonlóság aránya és a terület változása közötti kapcsolat rögzítésére alkalmas az alábbi feladat. Az alakzatok egy része megtalálható például [3] 117. és [4] 119. oldalán. Ez a feladat segítséget nyújthat a szakkörön eddig vizsgált alakzatok felbontásához.

2.6.1 Feladat: Bontsd fel az alábbi síkidomokat az eredetihez hasonló, egymással egybevágó alakzatokra! Hány alakzatra tudtad felbontani? Mi a hasonlóság aránya?



Először a Cantor-halmazt vizsgáltuk meg, mert talán ott a legegyszerűbb megtalálni a dimenzió megállapításához szükséges hasonlóságot. Jelöljük a Cantor-halmaz dimenzióját d-vel. Nagyítsuk a halmazt az egyik végpontjából a háromszorosára, és "mérjük meg" a saját dimenziójához tartozó mértékkel. A kinagyított alakzat mértékét a fenti gondolatmenet alapján úgy kaphatjuk meg, hogy az eredeti halmaz mértékét 3^d-nel szorozzuk. Másrészt a kinagyított alakzatot az eredeti halmaz, és egy azzal egybevágó, tőle diszjunkt halmaz egyesítéseként is megkaphatjuk, így a mértéke ezek mértékének összege, azaz az eredeti halmaz mértékének a kétszerese. Ebből a két állításból következik, hogy $3^d = 2$, amiből $d = \frac{\lg 2}{\lg 3} \approx 0,631$ a Cantor halmaz dimenziója. Ez valóban kisebb 1-nél, ahogyan sejtettük.

Ezután a Sierpinski-háromszöget vizsgáltuk meg. Most a kétszeresére nagyítjuk az alakzatot az egyik csúcsából. Ekkor a mértéke egyrészt a 2^d-szeresére változik, másrészt a kinagyított alakzat három, az eredetivel egybevágó alakzat egyesítése, így a mértéke az eredeti alakzatának a 3-szorosa. Ebből a két állításból $2^d = 3$, azaz $d = \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx 1,585$ következik, ami 1 és 2 közötti szám, ahogyan sejtettük.
Itt észrevehetjük, hogy ez az egyesítés nem diszjunkt halmazok egyesítése, ugyanis a három háromszögnek egy-egy csúcsa közös. Ettől még a számolásaink eredménye helyes, mivel az egyesítéskor keletkező közös rész véges sok pontból áll, így a d dimenziós mértéke 0.

A Sierpinski-szőnyeget a háromszorosára nagyítjuk, az így kapott alakzat az eredeti alakzat 8 példányának egyesítése. Ebből az előzőekhez hasonlóan adódik, hogy $3^d = 8$, azaz a dimenziója $d = \frac{\lg 8}{\lg 3} = 1,893$, ami szintén 1 és 2 közötti szám. Ismét van közös részük az egyesítéseknek, de ezek a részek 1 dimenziósak, így a d dimenziós mértékük 0.

A Menger-szivacsot szintén háromszorosára nagyítjuk. Az így kapott alakzat az eredeti alakzat 20 példányának egyesítéseként is előállítható, ezért a mértékének 3^d-szerese megegyezik a mértékének a 20-szorosával. Azt kaptuk tehát, hogy $3^d = 20$, amiből a dimenziójára $d = \frac{\lg 20}{\lg 3} \approx 2,727$ adódik, ami 2 és 3 közötti szám. Az egyesítéskor fellépő közös részek itt is nullmértékűek, ezért ezek nem okoznak gondot.

A Koch-hópehely területe pozitív és véges, dimenziója 2. A kerületének hossza azonban végtelen, ezért itt a határoló alakzat dimenzióját vizsgáljuk meg.
A dimenzió megállapításához a határ harmadrészét érdemes megvizsgálni. Ezt az alakzatot Koch-görbének nevezik. Figyelmesen nézve felismerhetjk a hozzá tartozó hasonlóságokat: a görbe 4 olyan egybevágó részre bontható, amelyek mindegyike hasonló az eredetihez. A hasonlóság felismerésében segít a görbét megadó rekurzió is: azzal a négy szakasszal, amelyekből a második lépésben áll, ugyanazokat a lépéseket hajtjuk végre a továbbiakban, mint az egész görbével. Ezért ezekből az eredetihez hasonló alakzatot kapunk végtelen sok lépés után. Azt mondhatjuk tehát, hogy ha a görbét a háromszorosára nagyítjuk, akkor egy olyan alakzatot kapunk, ami négy, az eredeti görbével egybevágó alakzat egyesítése. Ebből az következik, hogy a mértékének 3^d-szerese megegyezik a mértékének a 4-szeresével, azaz $3^d = 4$. Ebből a dimenziójára $d = \frac{\lg 4}{\lg 3} \approx 1,262$, ami 1 és 2 közötti szám, ahogyan sejtettük.

3. fejezet

Összegzés

A fraktálokról szóló szakköri anyagot egy hét különbséggel két nyári táborban is megtartottam. A csoportokban 11. és 12. osztályos, jó képességű, érdeklődő diákok voltak. Az egyhetes tábor alatt négy másfél órás alkalom állt rendelkezésemre, így kitérőkre is volt idő. Azt tapasztalatam, hogy az anyag valóban alkalmas a mértani sorozatok összegképletének és a határérték fogalmának bevezetésére. Az első két mértani sorozat összegzésénél néhány gyereknek még szüksége volt a táblánál történő levezetésre, utána azonban már mindenki egyedül el tudta végezni az eljárást. Azt gondolom, hogy ezután nem fog nekik gondot okozni 12. osztályban a bizonyítás megértése sem.

A határértékkel rendelkező sorozatok vizsgálatánál voltak gyerekek, akik hamarabb mondták, hogy a sorozat *hova tart*, mint ahogyan ezt a kifejezést használni szerettem volna. Úgy tűnt, hogy mindenki megértette, hogy a határérték mit jelent ezeknél a konkrét példáknál. A legtöbben maguktól rájöttek, hogy mi az a szám, amit a sorozat tetszőlegesen megközelít.

Ennél a témakörnél azt tapasztaltam, hogy nagyon vigyázni kellett bizonyos kifejezések helyes használatára, és jelentésük megkülönböztetésére. Sok gyerek használta a végtelenhez tartó sorozatok tagjaira a „végtelen nagy” kifejezést. Ez természetesen egyik tagra sem igaz, figyelni kellett rá, hogy a sorozatra csak azt jelenthetjük ki, hogy akármilyen számnál van nagyobb tagja, azaz a tagjai „akármilyen nagyok lehetnek”. A gyerekek megértették a különbséget, és hamar elsajátították a helyes szóhasználatot is. A sorozatok határértékénél gondot szokott okozni, ha a határérték nem jelenik meg sehol, a sorozat egyik tagja se éri el, a sorozatnak egy elvont, megfoghatatlan jellemzője csak. Ezeknél a példáknál a határértékhez hozzá lehetett kapcsolni egy alakzatot, a határértékként előálló számok ennek az alakzatnak bizonyos mértékei voltak. Így kevésbé volt zavaró az a probléma, hogy a sorozatnak nincsen vége, hiszen a határalakzat segített a számsorozatok határértékének szemléltetésében. Ugyanígy az önhasonló halmazok sorozattal történő előállítása segítette annak megértését, hogy a halmaz bizonyos mértékei a kiterjedés korlátossága ellenére lehetnek végtelenek, senkinek sem okozott problémát ennek elfogadása.

A dimenzióról szóló rész segíti a hasonló alakzatok kerületének, területének, térfogatának arányáról szóló ismeretek rögzítését és elmélyítését. A középiskolás könyvekben csak néhány feladat erejéig foglalkoznak ezzel a témával, így pedig egy új jelentéssel bővülhetnek a gyerekek mértékekről szóló ismeretei.

A fraktálok nagyon sok lehetőséget nyújtanak arra, hogy segítségükkel többféle témakör iránt is felkeltsük az érdeklődést. Más számrendszerek vizsgálata segít mélyebben megérteni a racionális számok jelentését. A Sierpinski-háromszögnél tehetünk egy kitérőt a számelmélet irányába. Az így megrajzolt érdekes alakzatok segítik a maradékok viselkedésének szemléltetését.

A táborban nem jutott rá idő, de egy további feladat lehetne, hogy a gyerekek maguk találjanak ki újabb önhasonló alakzatokat. Ez fejleszti a kreativitásukat és a részletek pontos átgondolása iránti igényüket, továbbá lehetőséget kapnak az iskolában tanult hasonlóságok egy újabb felhasználására.

Úgy gondolom, a fraktálok olyan alakzatok, amik a szépségükkel szinte mindenki érdeklődését felkeltik. Érdemes kihasználni a lehetőséget, és az így felkeltett érdeklődés segítségével megmutatni a gyerekeknek a matematika egyéb területeinek szépségét is.

Irodalomjegyzék

[1] Csatár K.: *Matematika tankönyv 6. osztályosok számára*, Apáczai Kiadó, 2003.

[2] Falconer, K.: *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications.* Second Edition. John Wiley & Sons, 2003.

[3] Hajdu S. (szerk.): *Matematika 5., B változat, Műszaki Könyvkiadó*, 2003.

[4] Kosztolányi J., Kovács I., Pintér K., Urbán J. Dr., Vincze I.: *Sokszínű matematika, 10. osztály*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2003.

[5] Mattila, P.: *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics No. 44, Cambridge University Press, 1995.

[6] Mozaik kerettantervrendszer a gimnáziumok számára, NAT 2003, Mozaik Kiadó, Szeged, 2004.

[7] http://hektor.umcs.lublin.pl/ mikosmul/origami/business-card.html (letöltés dátuma: 2012.05.09.)

[8] http://nedbatchelder.com/text/cardcube.html (letöltés dátuma: 2012.05.09.)

[9] http://www.theiff.org/oexhibits/menger02.html