# LOGIKAI FELADATOK
## középiskolásoknak

## – egy játékos logikai szakkör tervezése –

SZAKDOLGOZAT

Horváth Ágnes
matematikatanári szak

témavezető: Komjáth Péter
egyetemi tanár

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Budapest, 2012

# Tartalomjegyzék

# 1. Bevezetés

Szakdolgozatom a matematika egy speciális ágáról, a logikáról, valamint ennek szakköri tanításáról szól. A bevezető fejezetben először néhány mondatban leírom, miről fog szólni és hogyan épül fel a dolgozatom, majd a témaválasztásom motivációit sorolom fel vázlatosan. Kitérek arra is, hogy mik a fő céljaim a dolgozattal, hogy mit szeretnék vele elérni, és hogy ez miért fontos tanítványaim számára.

## 1.1. A szakdolgozat rövid tartalma

Dolgozatom fő témája egy játékos logikai feladatokkal foglalkozó szakkör tervezése 7-11. évfolyamos középiskolásoknak. Ehhez feladatsorokat állítok össze, vázolom az egyes órák tervezett menetét, és szakmai-pedagógiai szempontok alapján elemzem azokat. A szakkör alapjai ismert és kevésbé ismert, néhol beugratós, kreativitást fejlesztő logikai feladványok, valamint főként Raymond Smullyan szórakoztató logikai rejtvényeket tartalmazó könyvei és néhány más hasonló típusú logikai feladat. Ezeken a feladatokon keresztül – külön kiemelve és pontosítva – a kijelentéslogika néhány fogalmát (kijelentés, kvantorok, alapvető logikai műveletek) is megismerik a diákok. Sajnos a dolgozat keretei által meghatározott nyolc szakköri alkalom ennél többre nem elegendő, de ha egyszer megvalósul a szakkör, szívesen folytatnám. Nagyon röviden a folytatás irányáról, lehetőségeiről is szót ejtek a dolgozat egy alfejezetében. Természetesen az egyes órák kidolgozása előtt a szakkörről szóló fejezeben általánosan is írok a szakkörhöz kapcsolódó pedagógiai céljaimról és ezen célok gyakorlati következményeiről. Itt kitérek néhány a szakkört sajátosan érintő pedagógiai kérdésre is: tanítási-tanulási módszerek, óraszervezés, motiváció, értékelés, házi feladat stb. A szakkör megtervezése után egy – a szakkör feladataiból összeállított – foglalkozást a gyakorlatban is kipróbálok két különböző korcsoporttal. A ténylegesen megtartott szakköri foglalkozások tapasztalatait és a tanulságokat külön fejezetben rögzítem.

Mindezek előtt bevezetésképpen a rövid tartalom és a témaválasztás motivációja után általánosabban a logikáról lesz szó. A logika értelmezhető hétköznapi szinten, valamint több tudományágban is fontos szerepe van. A dolgozat tárgya leginkább a matematikai logika, a matematikának egy ága, logikával azonban a nyelvtudomány, a filozófia és az érveléselmélet is foglalkozik, valamint alkalmazza azt a számítástudomány és a fizika. A második fejezetben a logikáról mint több tudomány metszéspontjáról és hétköznapi fogalomról, illetve a logika és a matematika kapcsolatáról is szó esik majd. Itt matematikafilozófiai és metamatematikai kérdések kerülnek elő, mint axiómarendszerek, bizonyítás, ellentmondások a modern logika nézőpontjából. Végül a logika tudományának fejlődéstörténetét foglalom össze vázlatosan.

A dolgozat végén pedig egy rövid visszatekintés található a dolgozat készítésének folyamatára. Összefoglalom a dolgozat írása során szerzett tapasztalataimat, élményeimet, majd a tanulságokat és az elért eredményt. Itt szerepelnek a témával kapcsolatos terveim, céljaim is a továbbiakra nézve.

## 1.2. Témaválasztás, motiváció

Már gyerekkoromban is vonzottak a "logikai feladványok", amelyekkel jellemzően nem a tanórákon, hanem matematikaversenyeken, de még inkább az iskolán kívül lapozgatott könyvekben találkoztam, vagy édesapám adta fel őket. Bár én a matematika többi részét is kedveltem, úgy vettem észre barátaim, osztálytársaim, ismerősem között, hogy logikai feladványokkal azokat is el lehet csábítani, akiket amúgy a matematika nem különösebben érdekel. Ebből a megfigyelésből alakult ki az az ötletem, hogy a logikai feladatok betölthetnék esetleg egyfajta híd szerepét a rejtvény, játék és a matematika között, azaz hogy ezzel talán meg lehet nyerni a matematikának olyan embereket, tanulókat is, akik különben nem érdeklődnének a matematika iránt, vagy egyenesen ellenállnának annak. Raymond Smullyan szavaival élve: „egy csomó emberrel találkoztam, akik azt állították, hogy utálják a matematikát, mégis nagy érdeklődést mutattak azok iránt a logikai és matematikai problémák iránt, amiket feladtam nekik, ha azokat rejtvény formájában tálaltam. Egyáltalán nem lennék meglepve, ha a jó rejtvénykönyvek bizonyulnának a leghatásosabb gyógyszernek az úgynevezett „matekundor” ellen.” [14] Ezek a sorok meglehetősen egybevágnak saját tapasztalataimmal. Ezért, ebből kiindulva gondoltam ki azt a logikai szakkört, amelynek tervezetét dolgozatomban bemutatom.

A logika előfordulása, alkalmazása, felhasználása igen sokrétű mind a mindennapi életben, mind a tudományban. Logikán alapulnak például a különböző modern automata gépek, a számítógép, a fizikában pedig az áramkörökhöz kapcsolható. Az érvelés elmélete is támaszkodik a logikára, és a filozófia részeként is megjelenik. A matematikán kívül tehát más tudományokban is felhasználhatóak a logikai ismeretek.

A logika egyik általános – a tudományos és a mindennapi megközelítést egyesítő – meghatározása lehetne ez: „helyes következtetések levonása rendelkezésünkre álló információkból”. Egyértelmű tehát, hogy a tiszta tudományon és technikai alkalmazásokon kívül mindennapi életünket is áthatja, hiszen nap mint nap számtalan ilyen helyzetbe kerülünk, sőt, tulajdonképpen folyamatosan – sokszor nem is tudatosan – következtetéseket vonunk le verbális, képi vagy egyéb információkból. Tudjuk például, hogy ha gőzölög a víz, akkor forró, és nem szabad hozzányúlni, vagy ha kifogy a benzin a kocsiból, akkor nem tudunk vele továbbmenni.

Mérő László Új észjárások [9] című könyvében szerepel a következő érdekes és tanulságos eszmefuttatás a rejtvényfejtésről:

„A rejtvény lényege, hogy van megfejtése. Aki leül rejtvényt fejteni, biztos lehet benne, hogy ha eléggé eszes és ügyes, célhoz érhet. Valaki megszerkesztette a rejtvényt, tehát valakinek tudnia kell a megfejtést is. De akkor miért fárasztjuk magunkat, miért nem kérdezzük meg tőle? Nem is kell felkutatni a szerzőt, többnyire néhány oldallal később máris olvasható a megfejtés. Össztársadalmi méretekben hatalmas pazarlás folyik. Az egész emberiség együttesen évente sokmilliárd órát tölt rejtvényfejtéssel. Ha ennek a hatalmas pazarlásnak nem lenne valami konkrét haszna az emberiség fennmaradása szempontjából, már régen kialakult volna egy olyan emberfaj, amely nem fejt rejtvényt, és az így megspórolt energia célszerű felhasználásával lesöpörte volna a Föld színéről a készen is megismerhető megfejtések fáradságos újrafelfedezésével bíbelődő rejtvényfejtő homo sapienst. (...) A jól szerkesztett rejtvény hétköznapi gondolkodásunk természetes, de ritkán használt útjait járatja be velünk. Szokatlan, de értelmes asszociációkra késztet; logikus, de ritkán előforduló következtetések levonását követeli meg. (...) Környezetünk, tárgyaink gyakran állítanak bennünket jól szerkesztett rejtvénynek tekinthető feladatok elé. Pontosabban: a problémáknak csak egy kis része ilyen, hiszen különben rájárna az agyunk, és nem bizonyulnának jó rejtvényeknek. De ha csak egy ezreléknyi az olyan probléma, amely rejtvényként is megállná a helyét, akkor már bőven megtalálhatjuk a hasznát a rejtvényfejtéssel szerzett gyakorlatunknak."

A tiszta logika természetesen másfajta információkat használ, és másfajta következtetéseket von le belűlük. A matematikai logika tudományában nem is a következtetések eredményei a fontosak, hanem a *következtetések módja*, a helyes következtetések formája. A logikának, még inkább tágabb értelemben a logikus problémamegoldó gondolkodásnak a diákok aktuális iskolai életében is nagy szerepe van.

Martin Gardner szerint [a Smullyan-könyvek fülszövegében] „Raymond Smullyan olyan személyiségek egyedi összessége, amely magába foglal egy filozófust, egy logikust, egy matematikust, egy zenészt, egy varázslót, egy humoristát, egy írót és egy csodálatos fejtörőket kitaláló fejtörőgyárost".

Szeretnék a szakkör által Smullyan stílusából, szellemiségéből minél többet megmutatni, átadni a diákoknak.

# 2. A logikáról

## 2.1. A logika. A logika kapcsolata a matematikával és más tudományokkal

Ebben a fejezetben általánosságban ejtek néhány szót a logikáról: a szó eredetéről, többféle jelentéséről. Különböző helyekről néhány „definíciót” is összeválogattam. Ezután a hétköznapi logikáról beszélek, majd a logika kapcsolatáról a matematikával (ami a logika egyik fő jelentőségét adja a matematika tudományában, tudományához). Végül bemutatom a logika kapcsolódásait más tudományágakhoz illetve a szerepét ezen tudományágakban. Utóbbi témakör a következő, *A logika fejlődése* című fejezetben is megjelenik majd, hiszen szervesen kapcsolódik a logika kialakulásához.

Mindezekről itt csak röviden tudok említést tenni, hiszen a dolgozat fő témájához – amely a szakkör tervezése és elemzése, majd egy kis részének gyakorlati próbája – bevezetőül szolgálnak csupán, mindazonáltal fontosnak tartottam a szerepeltetésüket itt.

#### Mi is az a logika?

A logika szó a görög *logosz* szóból ered. Ez az ógörög szó többféle, egymással valamelyest rokon jelentéssel bírt: szó, gondolat, beszéd, érv, bölcsesség, fogalom, szabály, törvény jelentésekben volt használatos. Mai jelentéséről összegyűjtöttem néhány ide vonatkozó idézetet különböző forrásokból.

A magyar nyelv értelmező szótára szerint [1]:

*1. A filozófiának az az ága, amely a gondolkodás alapformáit, törvényeit vizsgálja és rendszerbe foglalja.*
*2. Ésszerű, következetes gondolkodás, ill. erre való képesség.*
*3. A dolgok, események, jelenségek között tapasztalható, gondolkodással felismerhető összefüggés, törvényszerűség.*

Annak ellenére, hogy mára a logika egy jól körülhatárolt tudományágat jelöl, mindenkinek egy kicsit mást jelent, esetleg több dolgot egyszerre. Vegyünk szemügyre néhány logikával kapcsolatos a kifejezést a magyar nyelvben: „józan paraszti logika”, „Ez így logikus!”, „a dolgok/természet (saját, belső) logikája”, „logikátlan”, „női logika”, „logikai bukfenc”„ebben van logika!" stb. Ezek a szavak, kifejezések a logika hétköznapi jelentését, jelentéseit illusztrálják. Ebből a néhány példából is kitűnik, milyen gyakran használjuk a *logika* szót a mindennapi életben. Itt általában a hétköznapi logikára gondolunk a szónak a fenti értelmezőszótárbeli 2. és 3. jelentésében.

Egy régi fakultatív gimnáziumi logikatankönyv bevezetőjéből [19]:

*„Mikor szoktuk azt mondani valakire, hogy logikusan gondolkodik, jó logikája van? Általában akkor, ha az illető jól tudja rendszerezni az ismereteit; helyesen ismeri fel az összefüggéseket; nem lehet látszatösszefüggések felállításával, hamis érvelésekkel becsapni."*

Mérő László Új észjárások című könyvében [9] összefoglalóan így fogalmaz:

*„A logika a helyes következtetés tudománya."*

**Hétköznapi logika**

Mindennapi életünkben nap mint nap, szinte minden percben következtetéseket vonunk le rendelkezésünkre álló információkból. Ezek az információk az eseteknek csak egy kis részében verbális jellegűek, sokszor képek, nem verbális hanghatások, vagy akár szagok, tapintásérzet formájában érkezik hozzánk. A következtetéseket legtöbbször nem tudatosan gondoljuk át, Általában ismeretlen, új helyzetekben illetve fontosabb döntések előtt vagyunk tudatosabbak, a jól ismert, régóta berögzült következtetési mintákat szinte automatikusan alkalmazzuk. Nagyon eltérő tehát következtetéseink tudatosságának foka például ha meg kell terveznünk egy ismeretlen útvonalat, illetve ha a közlekedési lámpa zöldre vált, és mi elindulunk az út túloldalára. Az előbbi példa részben szokatlan, új helyzet elé állított minket, az utóbbi mögött hosszú évek automatizmusokká fejlődött tapasztalata húzódik meg.

Ismét Mérő fogalmazásában [9]:

„Ha az autóban nincs benzin, nem indul el. Ezt a következtetést tökéletesen logikusnak tekintjük, definíciónk szerint jogosan, hiszen helyes. Nem is nagyon vizsgáljuk, mitől tekintjük ezt a következtetést helytállónak, annyira magától értetődő számunkra. (...) Elfogadtuk, hogy bizonyos események megléte szükségszerűen maga után von más eseményeket, amelyek vizsgálatával nem érdemes külön vesződni, mivel a dolog természete miatt úgyis igazak. Ebben az esetben a *dolgok logikájáról* beszélhetünk."

„Ha az autó nem indul el, nincs benne benzin. Ezt a következtetést nem tekintjük logikusnak, mert jól tudjuk, hányféle oka lehet még annak, ha egy autó nem indul el. A dolog logikájából ilyen következtetés nem származik."

Hétköznapi gondolkodásunk az erre vonatkozó kísérletek tanúsága szerint nem a formális logika szerint működik ([9] 45-51. o.). A szakkör feladatai között általam is kitűzött „betűs-számos kártyás", illetve a „csekkes" alapfeladatokkal vizsgálták a kérdéskört. Kontrollált kísérleti körülmények között több emberrel oldatták meg ezeket a feladatokat, és feljegyezték a megoldás sikerességét, illetve a megoldáshoz szükséges időtartamokat, ebből pedig statisztikát készítettek, majd elemezték a statisztikákat. Később másfajta hasonló – pontosabban más témájú, de logikailag izomorf – feladatokat is készítettek. Azt találták, hogy az emberek lényegesen sikeresebben és gyorsabban oldották meg azokat a feladatokat, amelyek szövegezése, vagyis a feladatszituáció a hétköznapi élethez közel állt, és jóval lassabban azokat, amelyek hétköznapi szituációktól idegen helyzetekről szóltak. Igen érdekes, úgyszólván „döntő" volt az a kísérlet, amelyben egy olyan szituációt állított a megoldók elé a feladat, ami néhány évtizeddel korábban Magyarországon valóság volt (nyitott borítékra kisebb értékű bélyeg is elég, lezártra nagyobb kell). Ezeknek a feladatoknak a megoldásában óriási különbséget mértek az idősebb emberek, akik átélték ezt a szabályt a valóságban is, tehát a számukra ez mindennapi élethelyzetnek számított, illetve a fiatalabbak között, akiknek ez a szabály kitalált, életidegen volt. A többi feladatnál nem tapasztaltak a korcsoportok között lényeges különbségeket.

Ha alapvetően nem is a formális logika szabályai szerint gondolkozunk, mindennapi életünk során is rendkívül fontos, hogy minél jobban eligazodjunk a helyes és helytelen következtetések között.

A logika azonban nemcsak ebben a mindennapi értelemben használatos, hanem mára egy egzakt tudományágat is jelöl.

### Matematika és logika

A matematika és a logika tudományának kapcsolata sajátságos. Egyrészt a matematikai logika a matematikának egy ága, tehát ebből a szempontból része annak. Másrészt viszont a matematikai logika eszköztárával magáról a matematikáról tudunk olyan tényeket megállapítani, amikhez nélküle a matematikán belül nem tudnánk hozzáférni.

A matematika klasszikus *definíció – tétel – bizonyítás* hármas felépítéséből a bizonyítás mibenléte a legbizonytalanabb a klasszikus matematikában.

Mit jelent pontosan az, hogy bizonyítás? Mikor jó (helyes, érvényes) egy bizonyítás?

Smullyan szereplőinek párbeszéde A hölgy vagy a tigris című könyvében [14]:

„Mert mi is a bizonyítás? Valahogy úgy tűnik, hogy felismerek egy jó bizonyítást, amikor látom, és általában megtalálom a hibát egy rossz gondolatmenetben, de ha arra kérnének, hogy *definiáljam*, mi az, hogy bizonyítás, az fájdalmasan érintene.”

„A gyakorló matematikusok legnagyobb része is így van ezzel. Több mint kilencvenkilenc százalékuk felismeri, hogy jó egy bizonyítás, vagy megtalálja a hibát egy rossz bizonyításban, bár azt nem tudják definiálni, hogy mit értenek bizonyításon. Ez az egyik olyan dolog, ami minket, logikával foglalkozókat érdekel: elemezzünk a „bizonyítás” fogalmát, hogy éppolyan szigorúan körülhatároljuk, mint a matematika más fogalmait. (...) Gyakran előfordult a matematika történetében, hogy bizonyos alapfogalmakat – mint például a folytonosságot – intuitívan már sokkal előbb használtak, mint hogy szigorúan definiálták volna őket. Akárhogy is, a definiált fogalom egy másik dimenziót jelent, tényeket tudunk megállapítani róla, amiket rendkívül nehéz, ha nem egyenesen lehetetlen volna felfedezni egy bizonyos kritérium nélkül, ami megmondja, hogy a fogalom mire vonatkozik és mire nem. A „bizonyítás” fogalma sem kivétel. (...) Másrészt a „bizonyítás” pontos fogalmának megléte különösen kritikus fogalommá válik, ha valaki azt szeretné megindokolni, hogy egy adott axiómarendszerben egy adott matematikai állítás *nem* bizonyítható.”

Márpedig éppen ez az egyik, amire a logikát „használni” szeretnénk; ez a terület az, ahol a legtöbbet „tud segíteni” a logika a matematikának.

Minden matematikai definíció, tétel stb. egy-egy matematikai elmélet része, csak azon belül érvényes. A matematikai elmélet alapját a nem definiált *alapfogalmak* és a bizonyítás nélkül elfogadott, alapvetően igaznak feltételezett állítások, az *axiómák* alkotják. Az (alapfogalmak és) axiómák összessége az *axiómarendszer*. Az axiómarendszerekkel szemben a XX. század elején a matematikusok három kritériumot fogalmaztak meg. Legyen:

1. *független* (egyik axióma se legyen levezethető a többiből)

2. *ellentmondásmentes* (ne legyen ellentmondás levezethető belőlük)

3. *teljes* (az adott matematikai elméletben megfogalmazható bármely állítás bizonyítható vagy cáfolható (azaz a tagadása bizonyítható) legyen.

Ezeknél a kritériumoknál már világosan látszik, miért van szükség a *levezetés* vagy *bizonyítás* fogalmának előzetes tisztázására. Később a tiszta logikai bizonyításfogalom segítségével Kurt Gödel be is bizonyította, hogy ez a három nem teljesülhet egyszerre egy axiómarendszerre. Gödel nemteljességi tétele szerint minden ellentmondásmentes (és még bizonyos szükséges feltételeket teljesítő) axiómarendszerben van megoldhatatlan probléma. Azt is tudjuk, hogy amennyiben egy axiómarendszerből csak egy ellentmondás is levezethető, akkor abban az axiómarendszerben minden állítás is levezethető.

A logikai tételeket, eredményeket a számítógéptudományban is felhasználják: a matematikai logika vizsgálja például az algoritmizálhatóság, programozhatóság feltételeit.

#### A logika kapcsolata más tudományokkal

Számos nem matematikai irányú egyetemi stúdiumban is előkerül azonban a logika, kommunikáció és filozófia szakokon például. Nem meglepő ez a tény, hiszen a logika, később a matematikai logika tudománya az ókori görög humán területekből alakult ki.

A következő fejezetben látni fogjuk, miként fejlődött a retorikából, naiv pszichológiából a filozófián keresztül, hogy aztán a XX-XXI. században a számítógéptudomány és a pszichológia ötvözésével mesterségesintelligencia-kutatásnak is terepet adjon.

## 2.2. A logika fejlődése

Ez az alfejezet a logika történetéről szól, vázolja annak kialakulását és fejlődését, amely fontos kiegészítője a logika témakörének. Az alfejezet teljes egészében szakirodalomból [2] [7] [4] származó információk összegyűjtésével készült.

A logika, illetve később matematikai logika gyökerei – mint sok más tudományéi – az ókori görög kultúráig nyúlnak vissza. Náluk fejlődött ki a korabeli legfontosabb elméleti és gyakorlati ismeretekből, a retorikából és a dialektikából,amit a szónokok, filozófusok és a művelt rétegek tanulmányoztak és használtak. A retorika a szónoklattant, „ékesszólástant” jelentette, azaz eleinte a minél díszesebb, ékes stílusban megfogalmazott és előadott beszédet, később a stílus mellett a meggyőzés, meggyőző érvelés szerepe került előtérbe. Az érvelések és szónoklatok célja pedig a hallgatóság meggyőzése volt. Az érvek helytállósága, *igazsága* mellett vagy helyett tehát más szempontok is szerepet játszottak az érvelésben, mint például a nyelvi megfogalmazás és az emberekre gyakorolt pszichológiai hatás. A dialektika eredetileg szintén vitatkozást, érvelést jelentett, ma egy ellentétekre, ellentétes látásmódokra épülő filozófiai irányzatot jelöl. A görögöknél az ellentétek az érvek-ellenérvek ütköztetésekor jelentek meg. Az első ismert logikáról szóló írásos dokumentum, az i.e. 4-5. század fordulójáról származó *Dissoi Logoi* („ellentétes szavak”) is ezzel a témával foglalkozik. Fő témája mai kifejezésekkel az igaz és hamis állítások és az ellentmondások mibenléte. Már megkülönbözteti egy-egy mondat, érv, állítás meggyőzőerejét annak igaz vagy hamis voltától.

A pszichológiai hatásoktól valamelyest eltekintve vizsgálták az érveléseket, az érvelések mondatait aszerint, hogy melyek azok az érvek, amik a legtöbb embert meggyőzik. Így összegyűjtötték és elemezték a legmeggyőzőbb érvelési formákat. Észrevették ugyanis, hogy a meggyőző érvelésrészletek többsége csoportonként azonos nyelvtani-mondatszerkezeti-logikai formát mutat. Úgy látták, hogy az ilyen „meggyőző" formákba bármilyen mondatot helyettesítenek be, mindig meggyőző lesz az eredményül kapott érvelés. Rájöttek, hogy nem a tartalom, hanem maga a forma garantálja, hogy a következtetés mindig érvényes legyen. Ezek a formák lettek a helyes következtetések alapformái, az ún. *szillogizmusok*. Arisztotelész logikai témájú műveit az i. e. 4. század közepén írta, amelyeket később *Organon* címmel foglaltak össze. Noha ő maga szónoki és költői szövegekkel foglalkozott leginkább, sőt, a logikát írásai tanúsága szerint nem is tartotta valódi tudománynak (valójában a „logika" szót sem használja), máig őt tartjuk a logika első tudós kutatójának, művelőjének, tanítójának. Platón tisztelője volt, az ő tanításait, nézeteit folytatta és fejlesztette tovább. A születő athéni demokráciában virágzott a vita műfaja, az érvek és ellenérvek ütköztetése. Arisztotelész logikai elemzései is vitahelyzetekben felmerülő kérdésekből indulnak ki. A meggyőzőerő helyett egyre inkább az érvek, állítások igazságára kezdett koncentrálni, a pszichológia helyett pedig előtérbe került a nyelvtani szerkezet és a logikai szerkezet kapcsolatának vizsgálata. Így a logika a gyakorlatban használt szubjektív társadalomtudományból lassan objektív tudománnyá kezdett alakulni. Megalapozza a kijelentéslogikát, megfogalmazza a kizárt harmadik elvét. Tanulmányaiban főként fogalomkategóriákkal és szillogizmusokkal foglalkozik, a példái nagyon haaonlók azokhoz, mint amilyenekkel ma is dolgozunk. Rögzítette például azt is, hogy például a „minden állat emlős" tagadása nem „ minden állat nem-emlős", hanem „nem minden állat emlős". Ezt a részleges tagadást ma leginkább „némely állat nem emlős"-ként fogalmazzák társadalomtudományokban, és „van olyan állat, amelyik nem emlős"-ként a matematika logikában, de a logikai tartalma ugyanaz, mint Arisztotelésznél. A szillogizmusok tulajdonképpen tapasztalatból eredő helyes, elfogadott következtetési formák. A következtetés feltételei a premisszák, következménye a konklúzió. Ha az adott premisszákból nem lehet érvényesen az adott konklúzióra következtetni, akkor úgy fogalmazott, hogy „nincs szillogizmus". [2] Arisztotelész után lényegében mintegy kétezer évig az ő logikai rendszerét használták. Közben persze sok újítás, rendszerezés történt, de az alapok változatlanok maradtak. Sokat elmélkedtek, vitatkoztak azon, hogy tulajdonképpen mi a logika, hol a helye a tudományok között. Érvelési és lételméleti kérdések felé is elindultak a logika kapcsán, olyan gondolatok is előkerültek például, hogy mit jelent az *igazság*, a *van*, a *jó*. [2]

A késő antikvitás sztoikus filozófusai a logikát a filozófia részének tekintették. Továbbra is a hétköznapi érvelő szócsatákat vették alapul, a logikát pedig dialektikának hívták. Érdeklődésük három dolog köré csoportosult: paradoxonokat találtak, a modális fogalmak vizsgálták (lehetségesség, szükségszerűség), valamint vitákat folytattak a feltételes állítások természetéről. Olyan típusú paradoxonok jöttek elő, mint például a „Most hazudok." mondat; azután hogy ismerünk-e valakit, ha nem ismerjük fel, amikor csuklyával el van fedve az arca; hogy hány szál haja lehet egy kopasz embernek; hogy amit nem vesztettünk el, az még megvan nekünk, azaz ha nem vesztettünk el szarvakat, akkor vannak szarvaink. Az utóbbiak valójában inkább a szavak jelentéséről, hasonlóságáról, többértelműségéről szólnak, mai értelemben véve nem paradoxonok. A legutolsó pedig arra hívja fel a figyelmet, hogy a kimondott szavakhoz általában kimondatlan előzetes feltevések kapcsolódnak, amik befolyásolják a jelentését. Ez a mai, hétköznapi vitákban, érvelésekben is lényeges. A második témakörben: a szofisták a potencialitást és az aktualitást nem különböztették meg, ami egyrészt teljesen kizár és tagad bármilyen mozgást vagy változást, másrészt a modális szavakat feleslegessé teszi. Foglalkoztak ezzel kapcsolatban a jövő és a múlt idővel is. A harmadik fő témakörük – mint korábban említettem – a feltételes állítások természete volt. Arisztotelész ezekkel nem foglalkozott külön, de szillogizmusaiban felhasznált efféle következtetéseket. Az érvelésekben általánosan elfogadott törvény volt, hogy ha igaz egy A→B típusú állítás, és igaz A, akkor B is igaz. Ezt figyelembe véve Philón javasolta, hogy a „ha A, akkor B" típusú állításokat csak akkor tekintsük hamisnak, ha az előtagja igaz, de az utótagja hamis. Ez a legkevésbé szigorú értelmezés, ha megköveteljük, hogy összhangban legyen a definíció a fenti, széles körben elfogadott szillogizmussal. Ezzel az értelmezéssel meglehetősen furcsa állításokat is kénytelenek vagyunk igaznak elismerni, ennek ellenére ez maradt meg a kijelentéslogikában. [7]

A korai középkor elhanyagolta, sőt megvetette a logikát (és még sok más tudományt is), így ebben az időszakban az nem is tudott fejlődni. Később újra elkezdtek logikával foglalkozni, Cicero például, a híres szónok, szintén a retorika szempontjából vizsgálta a logikát. Írásai őrizték meg nekünk a görögök logikáját, valamint latin szakkifejezéseket alkotott az eredeti görög nyelvűek helyett. Ekkor kezdték a tudósok újra felfedezni a logikát, amelynek fejlődése innentől sokféle és szerteágazó. [7]

Gottfried Wilhelm Leibniz lipcsei matematikus, fizikus és filozófus a 17. és 18. század fordulójának gondolkodója. A következtetéseket vizsgálta, és úgy tartotta, hogy nem minden helyes következtetés írható fel szillogizmus formájában. A sokféle tudás összegyűjtésére törekedett, ezért vett részt az Enciklopédia írásában is. A filozófia, matematikafilozófia és a vallásosság keveredik metafizikai jellegű gondolataiban.

George Boole algebrát épített fel a logikai műveletekkel, ami később a modern számítástechnika elméleti megalapozásának bizonyult. Algebráját „A gondolkodás törvényei" című művében mutatta be, noha természetes gondolkodásunk egészen másként működik. De Morgan és Peirce is foglalkoztak a témával, vizsgálták a relációkat és a logikai függvényeket, de egyikük sem foglalta rendszerbe gondolatait.

Gottlob Frege jénai matematikus Fogalomírás (Begriffschrift) című 1879-es munkájában egy új logika alapjait fektette le. Kidolgozta a kétértékű logika egy axiomatikus jellegű rendszerét, stílusbeli és nyelvi esetlegességektől végleg megszabadítja-megtisztítja a logikát, általánosítja és továbbfejleszti Arisztotelészt. „Frege *Fogalomírás*a a formális logika első valóban átfogó rendszere." [7] Egyik legfontosabb újítása a kvantorok bevezetése, használata. Műve újszerű, ráadásul szimbolikája miatt nehezen olvasható, ezért megjelenésekor kevesen olvassák, értékelik. Elsőre – saját bevallása szerint – még Russell sem értette meg! Később egyre többen felfedezik és elismerik, és az újítások is lassan kezdenek beépülni a logikába. Russell és mások által felfedezett halmazelméleti ellentmondások, és „ezek kiküszöbölésére irányuló törekvések vezettek a matematikai logika és az axiomatikus módszerek kifejlődéséhez". [4] Az axiómarendszerekkel kapcsolatban aztán Kurt Gödel fogalmazott meg mély és jelentős tételeket. Alonzo Church az algoritmikusan eldönthető problémákkal foglalkozott, amellyel a számítástechnika elméleti alapjait teremtette meg. Alfred Tarski axiómarendszerek különböző modelljeit vizsgálta. [4] A huszadik században új, a hagyományos logika szabályait tagadó vagy annak kereteit szinte a tagadásig kitágító elméletek, irányzatok is születnek.

A logika a filozófiából indult és különült el tehát. Azóta kifejlődött belőle egy új, szigorú tudományág, a matematikai logika, de a következtetések, szillogizmusok ma is megjelennek a társadalomtudományok részeként: a filozófiában, a kommunikációban, az érveléselméletben.

# 3. A szakkörről

## 3.1. Logika az iskolai törzsanyagban. A logika tanításának nehézségei

Ennek a fejezetnek a témája a logika témakör *előfordulása* az iskolai törzsanyagban, illetve a tanításának-tanulásának speciális *nehézségei*, illetve az ezen nehézségekre adandó *megoldási ötletek*, kísérletek. És – hogy a témát mindkét oldalról körbejárjuk –, azt is megvizsgálom, miben *könnyebb* a logika tanítása-tanulása a matematika többi témaköréhez képest. Mindezek előtt azonban általánosabban a matematika tanulásának nehézségeit, még általánosabban pedig a(z iskolai) tanulás nehézségeit általában veszem szemügyre röviden.

Ma a felső tagozatos és középiskolás diákok többsége nem szeret tanulni, iskolába járni is csak a barátok, osztálytársak miatt. Ennek közvetlen és közvetett kiváltó okai valószínűleg a társadalomban, régebbi pedagógiai nézetekben, nevelkedésben gyökereznek, de ezek részletesebb vizsgálata – noha meglehetősen érdekes és tanulságos lenne – túl messzire vezetne itt. Hozzá kell tenni természetesen azt is, hogy ez nem minden egyes tanulóra vonatkozik, igenis vannak felsőbb osztályos diákok is, akik nem szükséges rossznak tekintik az iskolát, és érdeklődőek, szívesen tanulnak új dolgokat, nyitottak a világ dolgaira és mindenféle új ismeretre. Valószínűbb persze, hogy ez bizonyos tantárgyaknál erősebb, másoknál nem annyira jellemző; ekkorra már a legtöbb diáknak kialakulnak kedvesebb és kevésbé kedvelt tantárgyai.

Dolgozatomban megelégszem tehát azzal, hogy az ennek következményeként esetleges érdektelenséget, motiválatlanságot, negatív hozzáállást igyekezzek minél inkább csökkenteni, ellensúlyozni. A probléma leghatékonyabb módja szerintem az érdeklődés felkeltése és folyamatos fenntartása. Ez azonban a leggondosabb tanári felkészülés és odafigyelés mellett sem valósul meg minden esetben minden tanuló részéről, így másfajta motiváció is szerepet kaphat. Fontos még az is, hogy az eredeti pozitív hozzáállást, érdeklődést ne rontsa el a tanár, az iskola, ne vegye el a diákok kedvét, mert sajnos ez is előfordul az iskolában.

A matematika tanulása és tanítása a fenti, minden tantárgyat (bár eltérő mértékben) érintő nehézségeken kívül további hátrányokkal is küzd. Sajnos sok embernek nem tartozik a kedvenc tantárgyai közé, az okok között pedig valószínűleg – a korábban említett érdektelenség mellett – előkelő helyen áll a sikertelenség, a sorozatos kudarcok és az ebből adódó félelem és frusztráció, vagyis a korábbi negatív élmények. Ezt nagyon nehéz enyhíteni vagy visszafordítani, különösen, ha a tanuló emiatt már elveszítette az önbizalmát és az érdeklődését is. A legfontosabb ilyenkor, hogy – akár csak pillanatnyilag is – magunkra és a témára irányítsuk a figyelmét, hogy megpróbáljuk aktivizálni, illetve hogy rendszeresen sikerélményt biztosítsunk neki. Sikerélményt pedig személyre szabott feladatokkal nyújthatunk. Sajnos azonban a matematika felépítése olyan, hogy aki egyszer lemarad, nem ért, nem tanul meg bizonyos részeket, az nehezen kapcsolódik vissza. Ezért fontos a sok ismétlés, illetve ha nagyon nagy a lemaradás, egyéni vagy csoportos konzultáció, korrepetálás is szükségessé válhat.

A matematikán belül a logika szintén különleges helyzetben van. Tekintsük át először a témakör előfordulása szempontjából a Nemzeti alaptantervet [26]. A Nat egy átfogó szabályozó rendszer, amely nem határozza meg konkrétan a tanítandó tartalmakat, inkább csak a tanítás-nevelés főbb elveit, kívánatos szemléletmódját, az elsajátítandó készségeket-képességeket rögzíti modern, a gyakorlathoz és a mindennapi élethez közelítő hozzáállással. A vonatkozó törvényi rendelkezések és általános összefoglaló után kilenc ún. *kulcskompetenciát* sorol fel. Ezek a következők: *anyanyelvi kommunikáció, idegen nyelvi kommunikáció, matematikai kompetencia, természettudományos kompetencia, digitális kompetencia, hatékony és önálló tanulás, szociális és állampolgári kompetencia, kezdeményezőképesség és vállakozói kompetencia, esztétikai-művészeti tudatosság és kifejezőképesség*. Ezek közül sok fejleszthető és fejlesztendő logikaórán, logikaszakkörön is. A matematikai kompetencia adott, bár nem is kifejezetten a klasszikus „számolós” része, hanem inkább a logikus gondolkodás fejleszthető, és matematikafilozófiai említésekkel, utalásokkal a matematikai szemlélet, matematikai műveltség is alakítható. Csoportmunka és vita során az anyanyelvi kommunikáció, a szociális kompetenciák, a kezdeményezőképesség és a kifejezőképesség fejlődik leginkább. Az óra szinte teljes időtartalmában, de főként a feladatok megbeszélése illetve egyéb szakmai beszélgetések kapcsán is előtérben van az anyanyelvi kommunikáció (ami ezen a szinten logikából valóban sokkal közelebb áll az anyanyelvhez, mint a matematikához). Ha pedig – inkább a tanórai logikából – otthon önállóan feldolgozandó kiegészítő anyagrészt, esetleg projektfeladatot kapnak a diákok, vagy kiselőadást tartanak, az otthoni, vélhetően számítógép és internet segítségét is igénybe vevő felkészülésük során a digitális kompetenciájuk is fejlődik. Végül a hatékony önálló tanulás a mindennapi készülés és a házi feladatok írása során – a többi tantárgyhoz és matematikai anyagrészhez hasonlóan – fejlődik.

A logika már az általános iskola alsó tagozatán szerepel játékosabb-szórakoztatóbb formában megfogalmazott logikai feladatokként. Felső tagozaton azután a témakör explicit módon egyáltalán nem jelenik meg a tantervben, de a gondolkodási módok, következtetések, indoklások természetesen folyamatosan jelen vannak ekkor is. Bizonyos típusú tanulmányi versenyeken viszont gyakran előfordulnak logikai feladatok alsó és felső tagozaton egyaránt.

A matematika – szintén újabb keletű – felosztásában a *Gondolkodási módszerek* nagy témakörbe tartozik a logika. A témakör megnevezése is mutatja, hogy itt valójában nem(csak) egy különálló anyagrészről van szó, hanem folyamatosan jelen van a matematikaórai és az azon kívüli gondolkodásunkban. Középiskolában emellett előkerülnek az alapvető logikai fogalmak (mint például a kijelentés, tagadás, konjunkció, diszjunkció) és a logikai alapfeladatok. Az újabb kiadású tankönyvek viszonylag részletesen tárgyalják a témakört. Sajnálatos módon azonban sok esetben mégsem tanulják azt a diákok a tanórán. Több – az elmúlt egy-két évben végzős – tizenkettedik osztályos tanuló is említette a környezetemben, hogy kihagyták, átugrották a logikát. Érdekes még, hogy az általam vizsgált tankönyvcsaládokban is eléggé változatos az, hogy melyik évfolyamba került, és az adott tanév mely szakaszára esik ennek a témakörnek a javasolt feldolgozása. Általában a 12. osztályos tankönyvben szerepel [24] [23] [20], de olyan is van, ahol a 9.-esben és 10.-esben megosztva [18]. Eltérő az is, hogy a logika témakörén belül mely résztémák kerülnek elő, illetve milyen hangsúlyokkal. A logikai alapfogalmak (kijelentés tagadás stb., amik a szakkörben is megjelennek) mindegyikben szerepel, itt a különbség főként az interpretációban van. Némely tankönyv játékosan, szakköri jellegű feladatokkal vezeti be a témát (pl. [24], [18]), némelyik viszont – jellemzően a régebbi könyvek – komolyabbak, hagyományosabbak, tankönyvszerűbbek (pl. [20]). A többi résznél még inkább különbözik, hogy melyik tankönyvbe mi került bele. A Hajnal-tankönyv [23] – a többivel elletétben – például egész részletes történeti áttekintést tartalmaz, valamint a kijelentés fogalmával is bővebben foglalkozik, sok és változatos példaanyaggal arra, hogy mi *nem* kijelentés. A Hajdu-féle könyvben [20] matematikaelméleti kérdések és formális logikai alapfogalmak szerepelnek, és a következtetési szabályok és szillogizmusok is formálisan, névvel együtt. Egy régebbi fakultációs tankönyvben [19] versrészletek, verssorok szolgálnak például a kijelentéseknél, a tagadásnál, a konjunkciónál, diszjunkciónál. Ez a megközelítés nagyon tetszik, és még hasznos lehet matematikaórán, ha a nem matematikai érdeklődésű diákokhoz is közelebb tudjuk hozni így a témát. Egy kevésbé ismert, ezért ritkábban használt, újabb, szintén szimpatikus megközelítésű tankönyvben [21] nem tankönyvszerű, de nem is játékos, hanem hétköznapibb, valóságosabb példák szerepelnek például a következtetési szabályoknál, amik ismertebbek és értelmesebbek is a tanulók számára. A tagadást részletes táblázatban hasonlítja össze az ellentéttel, és a szerzők nagyobb hanhsúlyt helyeznek arra, hogy mikor jelenti ugyanazt két eltérően megfogalmazott mondat. A tizenkettedikes tankönyvek közül néhányban rendszerező összefoglalás is található a könyv végén. Ebben néhol egyáltalán nem szerepel a logika témakör, néhol pedig ez a rész is részletesen foglalkozik vele.

Az érettségi követelmények között – közép- és emelt szinten is – szerepelnek az (elvileg) elsajátított alapfogalmak, illetve a megismert feladattípusok, a konkrét érettségi feladatsorokban azonban egy ilyen típusú, témájú feladat sem szerepel sehol. Ezen feladatsorok megoldójának legfeljebb akkor lehet szüksége a logikára, amikor (például négyszögek tulajdonságaihoz kapcsolódó) állításokról kell eldöntenie, hogy igazak vagy sem, illetve . Itt esetenként előfordulnak nehezebb, kvantorokat tartalmazó állítások is; ezeket azonban a legtöbb tanuló az anyanyelvi kompetenciája segítségével próbálja meg – néha helytelenül – megoldani. Utóbbi két tényen nem is csodálkozhatunk annak az esetében, aki soha nem tanult direkt módon formális logikát.

A közép- és általános iskolai logika egyik vonzereje abban rejlik, hogy közel esik, sőt sokszor át is fed a természetes gondolkodásunkkal és nyelvi kifejezőeszközeinkkel, de az egyik legnagyobb nehézségét is ez adja. A matematika más területeinek tanulmányozásakor a diák jóval könnyebben el tudja különíteni a matematikát a hétköznapi nyelvezettől és gondolkodásmódtól, itt azonban néha meglehetősen összecsúszik a kettő. Másrészt viszont a „tiszta logika", azaz a logika lecsupaszított matematikai logikai része matematikai tanulmányaik többi részénél is elvontabb. Mindenképpen szokatlan tehát a téma, talán főként azáltal, hogy a hétköznapi szavakat és gondolkodást szigorú formába öntjük. További nehézséget okoz – amit a Konjunkció és diszjunkció c. szakköri résznél is említek például –, hogy a szavak és kifejezések egy része egész mást jelent, mint amit a hétköznapi nyelvben megszoktak, illetve mindenképpen szigorúbb a használatuk.

Logikában a definíciók, a feladatmegoldások, az indoklások esetében még az általuk megszokott matematikai gyakorlatnál is hosszabb, bonyolultabb, nehézkesebb a precíz megfogalmazás. Ennek következtében az ilyen szöveget körülményesebb átadni is: a diák részéről a korrekt és pontos megfogalmazás és a megértés, a tanár részéről a minél egyszerűbb, szemléletesebb, de szintén precíz fogalmazásmód és a diákok gondolatmenetének gyors követése kihívás. Tovább nehezíti a megértést és követhetőséget, hogy – különösen a könnyebb vagy kreatívabb feladatoknál – a gondolkodási lépések zöme kizárólag fejben zajlik, ráadásul ezen lépések közül sok annyira magától értetődő és gyors, hogy saját magunk számára is nehéz őket elkülöníteni egymástól. Nincs olyan „nyoma" a gondolatmenetnek, mint egy számításnak, egy algebrai egyenlet megoldásának, vagy egy geometriai ábra elkészítésének és vizsgálatának.

Ezen a problémán sokat segíthet, ha tudatosítjuk a gondolatmenetet, részlépésekre bontjuk az egybefüggő gondolatmenetet. Fontos rögzíteni a következtetési lépéseket, mert ezáltal követhető lesz, utólag újból áttekinthető, akinek pedig nem sikerült azonnal megértenie, az így a későbbiekben még megértheti. A következtetési láncoknak (rövid, de egyértelmű indoklásokkal együtt) is fel kell kerülniük a táblára illetve a füzetekbe is, különösen az ilyen típusú feladatokkal való foglalkozás elején. Ha például egy tanuló a saját megoldását mutatja be, azt a tanárnak a táblán logikai vázlattal érdemes követnie, segítséget nyújtva ezzel a többieknek és saját magának is a megoldás menetének megértéséhez. Ebben az esetben az esetleges tévedéseket is könnyebb észrevenni és javítani. Hosszabb – például sok esetszétválasztást tartalmazó, elágazóbb szerkezetű – gondolatmeneteknél könnyű lemaradni, elveszíteni a fonalat. Ilyen esetekben is hasznos, ha megvan a teljes gondolatmenet, amelynek bármelyik pontjára bármikor vissza lehet térni, tehát a lemaradt tanuló is újra be tud kapcsolódni, vagy utólag végiggondolhatja újra a megoldás menetét. Nagyon gyakran kell állítások igazságáról és hamisságáról szóló következtetésekkel dolgozni. Egy-egy állítás igazsága illetve hamissága kétféle módon következhet az előzményekből: tartalmi illetve logikai kényszerből. Tartalmi kényszernek hívom azt, amikor egy tudottan igaz állítás állít valamit; ekkor ennek a „valaminek" igaznak kell lennie. Logikai kényszer pedig, amikor például bebizonyosodik egy szereplőről, hogy állításának igaznak kell lennie, és ebből következtetünk arra, hogy az adott szereplő igazmondó, vagy amikor egy állítás pusztán a formája miatt csakis igaz lehet. Mindezeket pedig következetes, egységes jelölésekkel kell rögzíteni.

Minden lehetséges szemléltetési lehetőséget ki kell használni: az ábrák, táblázatok segítik az átláthatóságot. A feladat szerkezetét vagy a feladatszituációt tükröző ábra is sokat segíthet, absztraktabb részeknél elengedhetetlen a jobb megértés és az önálló, kreatív feladatmegoldás, gondolkodás segítése. Például a logikai műveleteknél igen hasznos lehet a halmazábrás megjelenítés – természetesen magyarázattal, az analógia megmutatásával együtt. Táblázatok közül kézenfekvő az igazságtáblázatok használata, természetesen bemutatáskor elemzéssel együtt, sok példával illusztrálva. Számos feladatnál nagy segítség a feladat adatainak táblázatba rendezése. Ha ez már jól megy, maguktól is eszükbe juthat ez a fajta elrendezés az olyan feladatoknál is, ahol ez nincs a feladat szövegében megadva, például a nehezebb nyitott feladatoknál („milyen kérdést tennél fel akkor, ha...") vagy az Einsteinnek tulajdonított klasszikus logikai feladatnál, amelyben a fő kérdés, hogy *ki tart halakat*.

Bármilyen ábra és következtetéssorozat azonban kizárólag a tanulók aktív közreműködésével érthető meg és használható számukra. Átgondolás nélkül az ábrák semmitmondóak, nem „gondolhatja át helyettük" a tanár – vagy akár a padtárs.

## 3.2. A szakkör tartalma, céljai

Egy játékos logikai feladatokkal foglalkozó szakkört szeretnék tervezni tehát. Ebben a fejezetben azt szeretném bővebben kifejteni, hogy szakkörömmel a számtalan tanítási-nevelési szempont, fejlesztenivaló közül melyekre szeretnék leginkább fókuszálni, és hogy ezen célokat milyen feladatokkal, óravezetéssel, hozzáállással szeretném elérni.

Egyik legfontosabb célom, hogy a tanulók szívesen járjanak a szakkörre és jól érezzék magukat a foglalkozásokon. Ez önmagában is cél, egy önként választott délutáni órán még hangsúlyosabb ez az elvárás a tanulók részéről is. A szakkör a délelőtti tanórák után egyfajta aktív, értelmes és hasznos pihenés, szórakozás szerepét is szeretné betölteni. Másrészt a hatékony fejlődés, az aktív részvétel, a motivált és eredményes munkavégzés, a merész próbálkozások záloga is a kötetlen, feszültségmentes, kellemes légkör. Ehhez szorosan kapcsolódik az érdeklődés megnyerése és fenntartása, az alapvetően meglévő motiváció – hiszen egy szabadon választott délutáni elfoglaltságról van szó – fenntartása és megerősítése. Ezek megteremtése, megvalósítása érdekében a kitűzött feladatokat úgy fogom összeválogatni és esetleg átfogalmazni, hogy az feltehetően érdekelje a tanulókat, hogy szívesen foglalkozzanak azokkal. A feladatok nehézségét is úgy kell megválasztani – mint ahogy minden más esetben is –, hogy az a tanulók képességeinek, aktuális tudásának megfeleljen, sem a túl könnyű, sem a túl nehéz feladatok nem célszerűek. Az első esetben a tanulónak nincs is dolga a megoldással, illetve ha a feladat ránézésre könnyű, és még hosszú is, hozzá sem fog. A második esetben pedig nagyon kis valószínűséggel fogunk jó megoldást vagy egyáltalán megoldást kapni a diákoktól. Ha azt érzik, hogy erejüket jóval meghaladja a feladat, akkor szintén bele se kezdenek. Azért fontos mindezeket a jól ismert tényeket itt közölni, mert a logikai feladatoknál sokszor nem annyira egyértelmű egy feladat nehézségi szintje. Különösen a kreativitást, ötletet igénylő feladványoknál fordul elő, hogy két hasonló képességű diák közül az egyik pillanatok alatt rájön a megoldásra, a másik meg hosszas gondolkodás után sem. Ha hiányzik neki az az ötletszikra, ami a kezébe adná a megoldás kulcsát, akkor gondolkodhat rajta ítéletnapig is, nem fog neki sikerülni. Így a leggondosabb előzetes mérlegelés ellenére is előfordulhat, hogy „túl gyorsan” vagy a várakozásoknál lassabban halad a csoport, vagy egy-egy tanuló a megoldásokkal. Az egyes foglalkozások részletes leírásánál ezért mindig több olyan feladat is szerepel, amelyeket a tervezett alapfeladatokon kívül, utánuk vagy közöttük megoldhatnak a gyorsabban haladók. A kitűzött feladatok minőségén kívül és azzal egyszerre a legmeghatározóbb a foglalkozás légköre, ami a tanári és tanulói hozzáállásnak és ezek kölcsönhatásának eredménye. Tanári oldalról mindenképpen az elfogadó, nyugalmat és biztonságot sugárzó hozzáállás szükséges, valamint lelkesedés, hiszen mint tudjuk, a lelkesedés ragadós, de az érdektelenség is!

A másik, a tényleges szakmai cél a tanulók gondolkodásmódjának fejlesztése. A gyors, kreatív, módszeres, problémamegoldó gondolkodás tanulmányaik egészében, a magánéletükben és később a szakmájukban is kiemelkedő jelentőségű. Az iskolai matematikaoktatásnak is ez a fő feladata. Úgy gondolom, hogy ennek érdekében minden kínálkozó alkalmat meg kell ragadni és ki kell használni, sőt, alkalmat kell rá teremteni. Így ezen a logikai szakkörön is szeretném a tanulók számára a lehető legtöbb lehetőséget biztosítani és minden segítséget megadni nekik ezen képességük fejlesztésére, illetve azt a nézetet átadni nekik és megerősíteni bennük, hogy gondolkodni jó dolog. Sajnos sok felnőtt sem szívesen gondolkodik, hisz tudjuk, a gondolkodás fárasztó, idő- és energiaigényes tevékenység, és nem is mindig vezet eredményre. A legnagyobb baj – mint minden egyéb hasonló esetben – mégis az, ha meg sem próbáljuk! Elismerem, hogy nem mindig könnyű, néha kényelmesebb (lenne) kikapcsolni az agyunkat, de még a leglustább diáknak is be kell látnia, hogy az életben az elénk kerülő problémákat gyorsabban, egyszerűbben, hatékonyabban oldhatjuk meg logikus gondolkodás segítségével, de legalábbis jobb esélyünk lesz az ilyen problémák megoldásra. A két fő irány tehát mindenféle probléma megoldásának hatékonyabbá tételéhez a kreativitás és a szisztematikus gondolkodás fejlesztése. Az első a megoldás megtalálásához nyújthat segítséget, a másodikat a probléma megértéséhez, az ötletekből a konkrét megoldás kivitelezéséhez és az ellenőrzéshez használjuk. A szakkör feladataival is hasonló a helyzet. A kreativitás fejlesztésére leginkább a szakkör elején nagyobb arányban szereplő ismertebb, hagyományosabb gondolkodtató fejtörők alkalmasak, míg a szisztematikus gondolkodás, a minden eset rendszerező végigtekintése és a következtetési láncolatok végigvitele inkább a valódi logikai feladatokra jellemző. Egyik sem jelent azonban kizárólagosságot: a fejtörők megoldásához – főként amikor magunkat vagy mást akarunk meggyőzni, hogy tényleg az a megoldás – is szükséges a szisztematikus gondolkodás, és a szűkebb értelemben vett logikai feladatokhoz is kell, illetve hasznos a kreatív gondolkodás.

Az attitűdök és képességek alakítása mellett természetesen a logika mint tudományág tartalmi elemei is nagy szerepet kapnak. A logikai lényegi fogalmai, összefüggései, trükkjei mellett szeretném a tanulókkal megismertetni a logikai irodalom közismert feladattípusait és szereplőit (lovagok és lókötők, nyomozásos feladatok, ládikás feladatok, Subidu és Subidam, Alice rejtvényországban, a hölgy vagy a tigris stb.). Mindenképpen előkerülnek majd – főként az első két foglalkozáson, de kisebb arányban a későbbiek során is – a nem tisztán logikai, de a köznyelvben, köztudatban logikai feladványokként élő ismertebb feladatok is. Ezeket ismerhetik a diákok korábbról, de nem feltétlen találkozott mindenki mindegyikkel, így véleményem szerint helyük van a szakkörön. Az ilyen típusú feladatok több pedagógiai kérdést is felvetnek, amelyekkel a szakkör első és második alkalmának leírásánál, majd később a próbaórák elemzésénél foglalkozom.

A minél élvezhetőbb tálalás oltárán részben feláldozom a fogalmak pontos és precíz bevezetését, a hosszas gyakorlást, a száraz definíciók, tételek és bizonyítások egy részét. Természetesen ezt tanórán nem tehetném meg, de mivel ez egy délutáni szakkör, és a tananyagban úgyis szerepel majd a logika témaköre, mindenki meg fogja tanulni a szükséges fogalmakat később a matematikaórán, csak esetleg úgy, hogy már előzetes ismeretei, benyomásai, gyakorlata van a témakörrel kapcsolatban, valamint nem elhanyagolhatóan pozitív tapasztalatai vannak arról. Így remélhetőleg könnyebben, gyorsabban és szívesebben fogja később elsajátítani, árnyalataiban is megérteni a matematikai logika alapjait. Mindez nem jelenti azt, hogy kerülöm a logikai műveleteket, ezek tulajdonságait, vagy hogy ne esne szó például az implikációról. Pusztán annyit jelent, hogy nem a definíciók, elnevezések pontos memorizálása lesz a lényeg, hanem az alkalmazásuk szinte észrevétlenül, a rejtvények megfejtésének lehetséges eszközeként.

A gondolatok pontos, precíz megfogalmazásáról és a gondolatmenet vázlatos rögzítéséről sem mondunk le. A mindennapi élethez közvetlenül kapcsolódó nyereségek közül az anyanyelv és idegen nyelvek értő használata – szövegek alkotása és kész írott vagy hallott szövegek értelmezése – az egyik. Spontán nyelvhasználatunkban, hétköznapi gondolkodásunkban ugyan nem a formális logikát használjuk, mégis jelen vannak benne a logika bizonyos elemei. Ahogy egy középiskolás tanítványom részben találóan megállapította logikai tanulmányairól: „Ez nem is matek, hanem magyar!" Észrevette, hogy a nyelvünkben rendre a logika elemei fordulnak elő, illetve az ő szemszögéből éppen fordítva: a logika a nyelvi elemeket tartalmazza, eleinte látszólag triviális dolgokat, összefüggéseket állapít meg. Valójában mindkét irány magyarázható. Egyik oldalról a logika tudománya a nyelvben (és így a gondolkodásunkban) megtalálható logikai kapcsolatokat izolálta és vizsgálja, másrészt a nyelvben azért vannak jelen, mert éppen ilyen jelentésű szavak szükségesek ahhoz, hogy ki tudjuk fejezni gondolatainkat, amelyek valahogyan eredendően logikai struktúrával rendelkeznek.

Ezek a szavak olykor meglehetősen megtévesztőek is tudnak lenni. Ez nem mindig szándékos, de előfordul, hogy az. A hétköznapi életünkben rengeteg befolyásoló szándékú üzenettel találkozunk, elég itt a rengeteg reklámra gondolni. Sokszor érdekében áll személyeknek vagy csoportoknak, hogy a véleményünket, vélekedésünket megváltoztassa valamilyen dologról vagy elvről. Ennek érdekében általában valamilyen logikusnak tűnő üzenetet fogalmaz meg, és ha ez eléggé meggyőző, akkor el is éri a célját. Ám előfordul, hogy nekünk valójában nem hasznos, rosszabb esetben káros vélekedésünknek a másik fél által kívánt módon való megváltoztatása, így jó, ha észrevesszük az efféle kísérleteket, és minél relevánsabban tudunk dönteni a kérdésben, nem „dőlünk be” minden befolyásolási kísérletnek. [17]

Cél tehát a tanulók kritikus szemléletmódjának kialakítása, alakítása is. Ezzel a hétköznapi élet megtévesztő-befolyásoló helyzeteivel szemben is jobb eséllyel meg tudják magukat védeni, és az iskolai és tudományos életben is engedhetetlen ez a kételkedő attitűd, az indokok, mögöttes tartalmak keresése. Ez jellemez, ennek kell jellemeznie minden saját szakmáját magas szinten művelő embert, köztük a matematikát felhasználó kutatókat, mérnököket. A tiszta matematikai vizsgálódásoknak is ez az alapja. És itt érkeztünk el az utolsónak kiemelt célomhoz, amely a matematika mint tudomány jobb megismerése, átlátása, filozófiai kérdéseinek vizsgálata. A szakkör keretei nem teszik lehetővé a komolyabb belemélyedést, ezért ez főképp a szakkör esetleges folytatásában kapna nagyobb szerepet.

További pedagógiai vonatkozásokat tartalmaz még a következő alfejezet, illetve az egyes témákra, módszerekre, taneszközökre vonatkozó speciális megjegyzések az adott foglalkozások elemzésénél találhatók.

## 3.3. Gyakorlati pedagógiai kérdések

A szakkör konkrét megvalósítása és a miértek nem választhatók el a pedagógiai céloktól, tartalmaktól, és persze a várható intézményi lehetőségektől sem. Ebben a részben főként a technikai kérdésekkel foglalkozom, de természetesen mindenhol megjelenik a pedagógiai cél is.

A dolgozatomban szereplő szakkört heti egy alkalommal, egy 45 perces tanórában tervezem megtartani, ehhez igazítom az időbeosztást. A dolgozat keretei nyolc alkalmat engedtek csak kidolgozni a szakkörből, de tartalmaz utalásokat a lehetséges folytatásra is. Amennyiben pedig tényleg megvalósul a szakkör, és esetleg az iskola vezetése hozzájárulna, akkor az óratervek könnyen átdolgozhatók 60 illetve 2x45 perces foglalkozásokká, illetve kiegészíthető, folytatható újabb félévvel is, de jelen munkámban ezekkel nem foglalkozom, csak az első félév nyolc foglalkozásával.

A szakkör célcsoportja a 7-11. évfolyamos korosztály. Nem egy szűk korcsoport, mert ezekhez a feladatokhoz nem kell semmilyen különösebb matematikai ismeret, így a fiatalabbak is ugyanolyan eséllyel birkózhatnak meg velük, mint a magasabb évfolyamok diákjai. Sőt, a kreativitást igénylő feladatokban a kisebbek általában még eredményesebbek is, hiszen az ő gondolkodásuk még kevésbé van „beszorítva” a szokásos iskolai, matematika gondolkodási sémákba. A konkrét matematikai ismeretek helyett természetesen bizonyos képességek, készségek, a gondolkodásnak bizonyos érettségi foka szükségeltetik a logikai feladatok sikeres megoldásához. Piaget szerint (idézi [3]) az értelmi fejlődés nagyjából 11 éves korban lép a konkrét műveletek szakaszából a formális műveleti szakaszba. A fejlődés üteme természetesen minden tanulónál más és más, és a váltás sem pillanatszerű a szakaszok között, az áttérés fokozatos, további mentális érés eredménye. A fejlődés korábbi szakaszai pedig nem „tűnnek el”, csak a hangsúlyok helyeződnek át. Az egyes szakasz azt jelenti, hogy onnantól képessé válik a tanuló az adott gondolati tevékenységekre, de az összes korábbi szakasz jellemző feldolgozási módjai is mindvégig jelen vannak. Ezek a tanulás, problémamegoldás során együtt, egymást segítve jelennek meg. Megfigyelhető, hogy számunkra ismeretlen, új témakörökben, területeken, vagy egyes problémáknál a felnőttek is korábbi szintekhez nyúlnak vissza. Vannak dolgok, amiket könnyebb megmutatni vagy lerajzolni, mint elmagyarázni, például hogy hogyan kell cipőfűzőt kötni vagy bukfencezni.

A feladatok nagy része viszonylag könnyen átlátható a tanulók számára, ezt a legtöbb esetben táblázatos ábrázolás, átláthatóan rögzített megoldásvázlatok segítik, amit a gyerekek a saját füzetükbe is rögzítenek. Annak ellenére, hogy délutáni „szórakoztató” hatást is nyújtó szakkörről van szó, elengedhetetlen a füzet vezetése a tanulók számára. Így megmarad nekik, hogy mivel foglalkoztunk az egyes órákon, méghozzá átláthatóan rögzítve, nem „száll el” a semmibe a gondolat, később is minden visszakereshető benne, és a diákok a tanórai tanulmányaik sokán is hasznosíthatják az itt tanultakat. Ezeknél a feladatoknáknál is, mint általában a matematikában, a legtöbb esetben a megoldásnál is jó szolgálatot tesz, sőt, valójában nélkülözhetetlen, hogy írásban is rendszerezzük a megoldáshoz vezető gondolatmenetünket. A hagyományos tanórai matematikafeladatokkal ellentétben viszont itt sokkal könnyebb elmulasztani a rögzítést, átsiklani az egyes logikai lépések felett, éppen azért, mert olykor annyira egyszerűnek, maguktól értetődőnek tűnnek, így viszont nagyon könnyű belebonyolódni a feladatokba. Gyakran előfordul az is, hogy az ember elfelejti, amit előzőleg kigondolt, és újra át kell gondolnia, vagy éppen az ellenkezőjével halad tovább annak, mint amire már rájött. Logikában veszélyes ez, hiszen a klasszikus logikai feladatoknál szinte végig az igaz, hamis, igazat mondott, hazudott, lovag, lókötő stb. kifejezésekkel és kötőszavakkal kell dolgoznunk. Ez utóbbiak könnyen összecsúszhatnak a természetes nyelvhasználatunk kötőszavaival, így a logikai jelentésükre is nagyon tudatosan kell figyelnünk. Mindezeket megkönnyítheti a gondolatmenet, esetszétválasztások pontos rögzítése és nyomon követése.

A szakkör nem titkoltan számít a matematika iránt kevésbé érdeklődő, de a témára fogékony tanulókra is. Céljai között előkelő helyen szerepel a pozitív tanulói attitűdök kialakítása, vagy önkéntesen választott szakkörről lévén szó inkább fenntartása, illetve ezek átvitele a matematika többi fejezetére is. Az a tapasztalatom, hogy a logikai feladatok sok olyan tanulót is érdekelnek, akiket a matematika amúgy nem annyira, de amint szárazabb, tankönyvízűbb feladatok kerülnek elő, azonnal elveszítik érdeklődésüket. Csalódnak a logika tanórai tanulásában is, mert mást várnak, és így azonnal visszacsúszik a nemszeretem elfoglaltságok közé a logikával való foglalkozás. Emiatt a szakkört mindvégig játékos formában szeretném tartani. Természetesen előkerülnek és tisztázunk, gyakorolunk is olyan alapvető kijelentéslogikai fogalmakat, mint például kijelentés, logikai érték, negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia stb., csak egy kicsit más formában és kisebb hangsúllyal. Mindenképpen egy játékos feladatnak kell motiválnia a fogalom bevezetését, vizsgálatát. Megfelelően ki kell domborítani, hogy itt egy önálló fogalomról van szó, mert a nyelvi formája nem különül el élesen a nyelv többi elemétől, ráadásul a hétköznapi nyelvezetnek köszönhetően változatos a megjelenési formája is (pl. konjunkció: és, de, csak, viszont, pedig; implikáció: ha, ...akkor, minden..., stb.), a diszjunkció *vagy*-ának köznyelvbeli háromféle jelentéséről már nem is beszélve. Ezeket a fogalmakat tehát mindenképpen tudatosítani és rögzíteni kell, igazságtáblázatokkal is, de játékos feladatból kialakítva, ahhoz kapcsolódó magyarázattal, hasonló példákkal és gyakorlással. Ami pedig a legfontosabb: tét nélkül. A szakkör jó lehetőség arra, hogy a gyerekek oldottabb légkörben, felszabadultabban gondolkozhassanak, próbálkozhassanak, fejlődjenek. Optimális esetben persze tanórán is ilyen a légkör, de ez a mai tanítási gyakorlatban azért nem mindig valósul meg. Még mindig a régi beidegződések élnek gyerekben, tanárban, szülőben, társadalomban, ezek szerint pedig a matematikaóra komoly, rossz, unalmas, értelmetlen, esetleg mindez egyszerre. Nehéz az új elgondolásokat, módszereket elfogadni és átültetni a gyakorlatba, pedig ezek az „új" elgondolások itt vannak már néhány évtizede. Tapasztalataim szerint a gyakorlóiskolák kivételével a matematikaórák közelítőleg olyanok, mint húsz-harminc évvel ezelőtt. De még ha eltekintünk is mindettől, egy tanóra akkor is másfajta foglalkozás, már csak azért is, mert ott osztályzatokat kap a tanuló. Szakkörön ilyenfajta értékelés nincs, sem szigorú követelményrendszer. (Értékelés persze van, hogy milyen formában, arról majd e fejezet egy későbbi pontján részletesebben is szólok.) Az, hogy egy foglalkozás nem kötelező, valamint hogy nem kapnak a diákok osztályzatot, véleményem szerint nagymértékben segít kialakítani és fenntartani még egy jó tanóránál is nyugodtabb, szabadabb légkört.

A feladatok összeválogatása, sorbarakása többféle szempont alapján történik. Természetesen figyelembe kell fenni az esetleges ráépüléseket, amik az új fogalmak megismerésénél fontosak. Ami a matematikai tartalmat illeti, természetesen a kifejezetten kreatív vagy hagyományosan ismert feladatokon kívül a logikai tartalom elsődleges. A szakmai-logikai tartalmon kívül a következőket tartottam szem előtt az egyes foglalkozások feladatainak kiválasztásánál. Az egyik lényeges jellemzője egy feladatnak a nehézségi szintje. Tudjuk, hogy a nehézséget ideális esetben úgy kellene megválasztani, hogy ne legyen se túl könnyű – mert akkor unalmas, és a tanuló nem motivált a megoldására –, se a tanulók képességeit és pillanatnyi tudását meghaladóan nehéz – mert ebben az esetben valószínűleg eredménytelenek lesznek a megoldási kísérletek, ha a tanuló egyáltalán hozzáfog a feladat megoldásához. Általában a leginkább motiváló és fejlesztő hatású az a feladat, ami a közepesnél egy kicsit nehezebb, amit a tanuló nem túl könnyen, de képes megoldani. Csakhogy valójában már ez is egyéni személyiségjegyek kérdése, hogy ki milyen nehézségű feladatot szeret megoldani. Van, aki ha nem tud elindulni a megoldáshoz vezető úton, hamar feladja a próbálkozást, de van olyan is, akinek ha rögtön van megvalósíthatónak tűnő ötlete, megoldottnak tekinti a feladatot, és halad tovább. A szakkör esetében valószínűbb az utóbbi hozzáállás a diákok részéről, így a feladatoknak valódi kihívást kell nyújtaniuk számukra. A feladatok nehézségi szintje azonban önmagában sem egyértelmű. A meglévő képességeken, ismereteken és a feladat összetettségén kívül például függ a megfogalmazástól is, és attól is, közvetlenül milyen feladatok előzték azt meg. Utóbbit használjuk fel a rávezető feladatsorozatok alkalmazásánál, vagyis amikor a könnyűtől kezdve egyre nehezedő feladatokon keresztül jutunk el az adott feladatig, amelyet ha önmagában adtunk volna fel, előzmények nélkül, valószínűleg megoldhatatlanul nehéznek bizonyult volna. Megelőző feladatokkal módszereket is lehet sugallni, megoldási ötletet adhat. Ezen elv alapján nehezíteni is tudjuk a feladatot, ha más megoldási módszerű feladat előzi meg, és emiatt esetleg tévútra vezet. A megfogalmazás is lehet szándékosan félrevezető (beugratós feladatok), de az is nehezíthet a feladaton, ha ugyanazt a tartalmat körülményesebben, bonyolultabban, vagy szokatlanabbul fogalmazzuk meg. Természetesen általában nem az a cél, hogy a megfogalmazással összezavarjuk a feladat megoldóját, de logikai feladatok esetében lehet az is a feladat, hogy ki kell hámozni a körülményesebben megfogalmazott szövegből a valódi logikai tartalmat. Néhol pedig a precizitás miatt tűnik bonyolultnak egy szöveggel megfogalmazott állítás vagy kérdés, amely logikai szimbólumok vagy táblázat használatával leegyszerűsödik. A feladat megfogalmazásával a megoldási hajlandóságot, kedvet is befolyásolhatjuk. Egy érdekesen megfogalmazott, a tanulókhoz közelebb álló, vagy épp szokatlanabb feladat motiválóbb hatású, mint egy tankönyvízű típuspélda. Akit pedig jobban érdekel a feladat, az szívesebben fektet bele nagyobb energiát, így valószínűbben sikerül is neki megoldania. Látszik tehát, hogy nemcsak a nehézség hat a motivációra, hanem a motiváció is a nehézségi szintre. Mindezeken kívül az is befolyásolhatja a nehézséget, hogy szerepel-e benne felesleges adat, illetve a nyitott feladatok (ahol a megoldás menete vagy maga a cél nem adott egyértelműen/pontosan) nehezebbek általában a zártaknál (amelyekben egyértelmű a kiindulási helyzet és a cél, valamint a célhoz vezető módszer is). Törekedtem arra is, hogy a feladatok változatosak legyenek, próbáltam alkalmasan váltogatni – nem logikailag, hanem a feladat szerkezetében, szövegezésében – a témákat, a tanulásszervezési módokat (frontális munka, egyéni munka, páros munka, csoportmunka), a tanulói aktivitások formáját (passzív figyelés, interaktív figyelés, kreatív önálló munka, szisztematikus önálló munka).

A értékelés fontos momentuma bármely emberi aktivitásnak. Pedagógiai értelemben az iskolai tevékenységekhez kapcsolódik. Szakköri foglalkozásokon nincs osztályzás vagy bármely ehhez kapcsolódó pontozás, illetve dicséret és büntetés sem. Ezeket tehát nem lehet alkalmazni értékelésként. Rendelkezésre állnak viszont az értékelésnek az iskolai tanórán is alkalmazott, az osztályozást kiegészítő formái, például a szóbeli dicséret, elismerés, megerősítés vagy éppen a szóbeli elmarasztalás. Ez utóbbi természetesen nem szakmai tévedés, hanem esetleges fegyelmezetlenség, mások munkájának zavarása miatt következhet be. Pozitív értékelésként jelenhet még meg apróbb ajándéktárgyak (csokoládészelet, matrica stb.) kilátásba helyezése és az azt kiérdemlőknek ajándékba adása, illetve a nonverbális jelzések is. Kiemelkedő teljesítményre akár még ellenőrzőbe beírt szaktanári dicséret is kaphat a jól teljesítő diák. Csoportmunka esetén is többféle értékelési lehetőség kínálkozik a feladattól és az aktuális pedagógiai céltól függően. A munka végeztével meg kell beszélni, mire jutott egy-egy csoport. Ez megvalósítható akár úgy, hogy egy (csoport által választott vagy tanár által kijelölt) tanuló adja elő, akár úgy, hogy a beszámoló egyes részeit a csoporttagok között megosztjuk, vagy ők osztják meg egymás között. Szóba kerülhet a munka folyamata is: hogyan szervezték a feladatokat, ki mennyire volt aktív, választottak-e vezetőt stb. Tanári értékelésre, összefoglalásra is szükség van a végén. Az értékeléshez hasonlóan – és részben annak következményeképp – a házi feladat adásának is speciális helyzete van a foglalkozás délutáni, önkéntesen választott szakkör jellegéből adódóan. Mivel nincs osztályozásos értékelés, vagy olyan pontozásos, amelynek eredményéből aztán osztályzat alakul ki. Főként pedig ez a szakkör mint iskolai szakköri foglalkozás tulajdonképpen átmenetet képez a szabadidős tevékenység és az iskolai tanóra között. Ezek miatt nem lehet és nem is lenne célszerű hagyományos, gyakorlásra szolgáló, kötelező házi feladatot adni. Véleményem szerint hasznos és kívánatos viszont nem kötelező, de a szakkör témájához, feladataihoz kapcsolódó feladatokat adni otthonra plusz gondolkodási lehetőséget adva ezzel azoknak, akik szeretnének ilyen feladatokkal foglalkozni. Minden foglalkozás végén adok tehát néhány "Gondolkodtató feladatok"-nak nevezett feladványt, amelyek megoldása nem kötelező, nem épülnek rá a soron következő feladatok, nem elengedhetetlen sem az előző óra megértéséhez, sem a következők követéséhez. Semmi hátránya nem származik tehát senkinek abból, ha nem csinálja meg, de akinek van hozzá kedve és van rá ideje, annak előnye származik belőle. Érdekes, szórakoztató elfoglaltság, agytorna, és ha rájön a megoldásra, még sikerélményt is okoz neki. További, illetve az egyes foglalkozásokra vonatkozó speciális kérdésekről, illetve a felhasznált eszközökről az egyes foglalkozások elemzésénél lesz szó.

## 3.4. A szakkör felépítése és esetleges folytatása

Mint a tartalomjegyzékből látható, az első két bevezető óra főként általánosabb, tágabb értelemben vett logikai feladatokból áll. Ezek egyszerűbb vagy ötletet igénylő vegyes feladatok. Úgy válogattam őket össze, hogy elméleti logikai előismeretek nélkül is megoldhatók legyenek. Ezek egy része közismert feladat, a többi a [5] [8] [9] [10] [12] könyvekből származik illetve néhány közülük a későbbi foglalkozások alapját adó Raymond Smullyan-könyvekben [13] [14] [15] [16] szerepel.

A további foglalkozásokon az „elméleti" és a játékos órák váltakoznak. Az elméleti szó azért került idézőjelbe, mert ezek a foglalkozások is nagyrészt játékos logikai feladatokból állnak, de ezeken a játékos feladatokon keresztül néhány logikai alapfogalommal is megismerkedünk: a kijelentés, logikai érték, tagadás; az egzisztenciális és univerzális kvantor; a konjunkció és diszjunkció, valamint az implikáció és az ekvivalencia fogalma fog előkerülni. A három elméleti jellegű foglalkozás a következőképp épül fel. Bevezetésnek és motiváció gyanánt néhány feladatot oldunk meg néha együtt, néha a tanulók egyénileg vagy párban. Ezek a bevezető feladatok valamilyen formában tartalmazzák már a bevezetendő új ismeretet, de részben hétköznapi logika segítségével is megoldhatók, amelyik pedig esetleg nem, az éppen a fogalom bevezetéséhez, tisztázásához szolgáltat motivációt. Ezután következik – megbeszélés formájában, a tanulók aktív részvételével – az új fogalom kialakítása és rögzítése tanári magyarázat, példák és igazságtáblázat segítségével. Az elméleti „kitérőt" követően újabb feladatok következnek, ezek már az új ismeretek alkalmazására és gyakoroltatására irányulnak, de továbbra is a korábbi játékos szövegezésű feladatok formájában. Otthonra pedig néhány gondolkodtató feladatot kapnak a diákok, ami nem kötelező házi feladat, de aki szeretne vele foglalkozni vagy felkeltette az érdeklődését a feladat, annak lehetősége van plusz feladatokat megoldani otthon. Ezek a feladatok nem mindig kapcsolódnak szorosan az éppen tanultakhoz.

Az elméleti órák között és után egy-egy játékos foglalkozás lazítja tovább a szakkört. Ilyenkor ülepszik az új ismeret, illetve gyakorlásra és más típusú feladatok megoldására, valamint hosszabb időt igénylő feladatsorozatokra és csoportmunkára is lehetőség nyílik.

Igyekeztem a szakkörhöz, illetve az egyes foglalkozásokhoz is változatos feladatanyagot összegyűjteni. A feladatok kiválogatásánál, egy-egy foglalkozáshoz rendelésénél, illetve a feladatok sorrendjének megállapításánál a fentieken kívül figyelembe kellett venni a tematikus és az elméleti-logikai egymásra épüléseket is. Raymond Smullyan könyveiben sok feladattípus és feladatkörnyezet szerepel, például olyan feladatok, amelyben lovagok és lókötők szerepelnek, aztán olyanok, amelyekben lovagok, lókötők és normálisak (a normálisan néha igazat mondanak, néha pedig hazudnak, kedvük szerint); azután ezektől függetlenül lehet valaki farkasember is egy bizonyos feladatcsoportban; megismerkedünk Alice-szel, az Oroszlánnal és az Egyszarvúval a Feledékenység Erdejében, valamint a Subidam és Subidu ikrekkel; rendelkezésünkre álló információk alapján választanunk kell három ládika közül, amelyek közül valamelyikben ajándékot rejtettek el, majd két ajtó közül, amelyek mögött hölgyek vagy tigrisek lapulnak; sokféle bűnügyi esetet is meg fogunk oldani. Ezek a feladathelyzetek elsőre szokatlanok, de könnyen bele tud helyezkedni az ember egy-egy ilyen mikrovilágba, különösen, ha már korábbról ismerős neki. Ezért igyekeztem minden típust viszonylag korán előhozni, hogy aztán már a szituáció megértése ne okozzon problémát, és a nehezebb logikai struktúrájú feladatoknál ne vonja el a figyelmet a logikáról – és ne vegyen el túl sok időt – magának a feladatnak a megértése. Előfordul az is, hogy a megfogalmazás ugyan más, de a szituációk rokon vonásokat mutatnak. Így például az Igazság, a Hazugság és a Diplomácia isteneiről szóló feladat megalapozza a lovagok, lókötők és normálisak szigetén játszódó feladatokat; a szakkör elején szereplő Behemótról szóló feladat (ő minden hétfőn, szerdán és pénteken hazudik, a hét többi napján igazat mond) pedig megalapozza az Oroszlánról és Egyszarvúról szólókat (ők is bizonyos napokon igazat mondanak, bizonyosokon pedig hazudnak), és később a Sudidamról és Subiduról szóló feladatok is ezekhez kapcsolhatók. Még később szerepel egy feladatcsokor, amelyben felmerül a lehetősége annak, hogy Subidunak és Subidamnak van egy harmadik ikertestvére is, Subidi.

Az interneten egy helyütt olvastam – sajnos nem tudom szó szerint idézni, de a tartalma igen fontos és a dolgozatba illő – egy középiskolás tanuló véleményét, miszerint a matematikatanáruk Smullyan könyveiből, feladataiból tartotta nekik a logikaórákat, és ezek voltak élete legjobb matekórái. Sok hasonló véleménnyel találkoztam még, de ez volt a leghatározottabb és a leginformatívabb számomra, mint a témával foglalkozó tanár számára. Kiemelte még a véleményező hozzászólás szerzője, hogy a feladatokat szigorúan a könyv eredeti összekötő szövegeinek megtartásával kapták. Nem meglepő, hiszen ezek a szövegek nemcsak érthetőbbé teszik, kontextusba ágyazzák a feladatokat, de gyakran tartalmaznak humoros (helyenként filozofikus, elgondolkodtató) elemeket is. Ezért aztán úgy gondolom, hogy bár időigényesebb, s ami pedagógiai szempontból még fontosabb: meghatározza a feladatok sorrendjét, ha megfelelő alkalom kínálkozik, érdemes egy-egy rész feladatait eredeti formájában kitűzni a tanulóknak. Több feladatsorozatot tehát így, eredeti formájában tűzök ki.

A szűkös keretek miatt csak ezt a nyolc foglalkozást tudtam kidolgozni de rengeteg téma és feladat maradt még, amivel folytatnám a szakkört. Külön órát érdemelnének például a paradoxonok, a helyes és helytelen következtetések, a mindennapi érvelések és érvelési hibák, érveléses játékok. Az általam feldolgozott négy Smullyan-könyvben is nagyon sokféle történet és feladat kínálkozik még a folytatáshoz. Mindenképp feldolgozásra érdemes például a Smullyan által *kényszerlogikának* elnevezett témakör, egy elmegyógyintézetben játszódó feladatgyűjtemény vagy az Álmodók szigete, a Kérdezők szigete fejezetek feladatai, valamint még számtalan feladat, ami az első nyolc foglalkozásba nem fért bele.

A paradoxonoknál mindenképpen szerepelne Raymond Smullyan önéletrajzi tényként feltüntetett „Bolonddá tettek?" című párbeszéde a *Mi a címe ennek a könyvnek?* bevezetőjében ([13] 13. o.). Érdemes lenne megvizsgálni ismert és szórakoztató paradoxonokat, álbizonyításokat [11] (vagy egy-egy paradoxonnak vélt mondatról kimutatni, hogy valójában nem is paradoxon, például ez: „Minden krétai hazudik."). Valódi kártyákként is elkészíthetők – valójában némelyiket már el is készítettem – például az „Ez a mondat hamis."; egy kártyán egymás alatt: „A következő mondat igaz. Az előző mondat hamis."; egy kártya két oldalán: „A kártya túloldalán álló mondat igaz." és „A kártya túloldalán álló mondat hamis."

Szerepelhet egy író, Karinthy Frigyes kapcsolódó párbeszéd keretében megírt gondolatmenete [25]:

„Ohó, álljunk csak meg. Ön azt mondja, a rögeszmém, hogy őrült vagyok. De hiszen tényleg az vagyok, az imént mondta. De hiszen akkor ez nem rögeszme, akkor az egy logikus gondolat. Tehát nincs rögeszmém. Tehát mégse vagyok őrült. Tehát csak rögeszme, hogy őrült vagyok, tehát rögeszmém van, tehát őrült vagyok, tehát igazam van, tehát nem vagyok őrült. Mégiscsak gyönyörű dolog a tudomány!"

Csoportmunka során feldolgozhatók a következő esetek, történetek, majd szervezett tanórai viták generálhatók belőlük:

**1. Ki a gyilkos?** A, B és C egy karavánnal a Szaharán vonul át. A gyűlöli C-t, és elhatározza, hogy megöli őt úgy, hogy mérget tesz a kulacsába, C pedig máshonnan nem juthat vízhez. Ettől függetlenül B is elhatározta, hogy megöli C-t, anélkül, hogy tudta volna, hogy C vize már mérgezett. Egy pici lyukat ütött C kulacsán, hogy a víz lassan elfolyjon belőle, emiatt C néhány nappal később szomjan halt. Ki a gyilkos, A vagy B ?

**2. Borbély-paradoxon** [10] „Egy faluban azt a törvényt hozzák, hogy a faluban lakó egyetlen borbély köteles minden falubelit borotválni, aki maga nem borotválkozik, de (időkímélés céljából) tilos neki olyan személyt borotválnia, aki maga borotválkozik. A kérdés : ki borotválja a falu borbélyát ?”

Ugyanez matematikai megfogalmazásában, Russell-paradoxonként is szerepelhet matematikaibb beállítottságú tanulók esetén.

A helyes és helytelen következtetések témakörhöz :

**3.** Helyesek-e a következő következtetések ?

1.

Van olyan sárkány, ami egyfejű.

Süsü egyfejű.

---

Süsü sárkány.

2.

Minden mackó szereti a mézet.

Micimackó szereti a mézet.

---

Micimackó mackó.

Mindenképpen feldolgozásra érdemes az Alice Rejtvényországban két ikerpárjáról, Subiduról és Subidamról szóló, a korábbiaktól eltérő két feladatsor, a *Piros és Fekete*, illetve a *Narancs és Lila*. Itt Subidu és Subidam attól függően mondanak igazat illetve hazudnak, hogy miylen színű kártyalap van éppen náluk. A helyzeteket lehet valódi kártyákkal is utánozni, ezzel is érdekesebbé téve az órát. A *Piros és Fekete* című játékban akinél piros lap van, az igazat mond, akinél fekete, az hazudik. Egy mintafeladat ezek közül :

**4.** Az egyik testvér azt mondta : „Subidam vagyok és fekete kártya van nálam.”

Ki volt ő ?

A fentieken kívül pedig még számtalan további feladat vár a szakkör folytatására.

# 4. A szakkör egyes foglalkozásai

Ebben a fejezetben részletesen leírom a szakkör egy-egy foglalkozásának feladatait, vizsgálom ezeket, és pedagógiai, óravezetési megjegyzésekkel látom el. A terjedelmi és időbeli keretek miatt a nyolc szakköri alkalom közül nincs valamennyi teljes részletességgel elemezve. Némelyik elemzése bővebb, egyes foglalkozások leírása viszont szinte csak az elvégzendő feladatokat tartalmazza. Ez utóbbiakat sem szerettem volna az idő és a terjedelem miatt kihagyni a dolgozatból, mert úgy érzem, így együtt alkotnak egy egészet. Ismét hozzátenném persze, hogy a bővítés, folytatás lehetősége mindenhol fennáll mélységében, egymás mellé rendelt feladatok számában, variációiban is, valamint új témakörök is beemelhetők közbeékelve vagy folytatásként, mint ahogy ezt az előző részben kifejtettem. A fejezet tehát a szakköri alkalmak feladatsorait és elemzésüket tartalmazza.

## 4.1. 1. Fejtörők I.

Az első alkalom bevezető jellegű. Az ismerkedés, technikai információk stb. mellett már a legelején elkezdődik a feladványok megoldása, megvitatása. Ezeknek a feladatoknak legfőbb célja az érdeklődés felkeltése, a kreativitás előcsalogatása és fejlesztése, valamint az, hogy előjöjjenek jól ismert, köznapi értelemben vett „logikai feladatok” is. Ezek – a korábbiak szerint – nem szigorú értelemben vett „logikai” (a logika fogalmaira, következtetéseire, logikai állítások igaz vagy hamis voltára épülő) feladatok, hanem a matematika más ágait felhasználó (aritmetika, geometria) vagy hétköznapi „józan ésszel” megoldható, általában rövid, meglepő eredményre vezető, esetleg beugratós kérdések. A kiválasztott feladatok között sokfajta szerepel. Törekedtem arra, hogy minél színesebb legyen a feladatsorozat. Egy alkalomba természetesen nem fér bele az összes feladattípus ezen a kategórián belül, ezért a második alkalom is ilyen feladatokkal foglalkozik majd, és a további órákon is elő-előjönnek kreatív vagy csattanós megoldású problémák. Nézzük akkor az első foglalkozást: az óraszervezést, a feladatokat és a hozzájuk kapcsolódó megjegyzéseket, kiegészítéseket.

Az óra legelején rögtön néhány feladattal kezdünk. Ez azért jó, mert figyelemfelkeltő és azonnal aktivizál. A délutáni órán fáradtabbak a tanulók már, egész nap az iskolapadban ültek, figyeltek, koncentráltak. Valószínűleg nem volt sok idejük pihenni, kikapcsolódni, ezért ezekhez a körülményekhez kell alkalmazkodni tanulónak is, tanárnak is. Passzívan figyelni nehezebb (és nem is olyan izgalmas), mint érdekes feladatokat önállóan megoldani, ezért most és a továbbiakban is ez lesz a jellemző a szakkörre. Megnyugtatásképp persze előtte közlöm velük, hogy nemsokára megbeszéljük a megbeszélnivalókat, csak előtte nézünk néhány bevezető feladatot, hogy ne legyen bennük bizonytalanságérzés az *in medias res* kezdés miatt.

Először közösen oldunk meg néhány rövid feladatot. (Az első alkalom feladatait a [13] [9] [12] könyvekből választottam.)

**1.** Egy hajó oldalához van rögzítve egy hatfokú létra, amelynek fokai 1-1 láb távolságra vannak egymástól. Apálykor a víz alulról a második fokig ér. Ezután a víz két lábnyit emelkedik. Hányadik fokig ér most a vízszint ?

**2.** Egy palack bor 10 dollárba kerül. A bor maga 9 dollárral többe kerül, mint a palack.
Mennyi a palack ára ?

**3.** Egy csikkszedő négy csikkből tud magának egy cigarettát sodorni. Egy este talál 16 csikket. Hány cigarettát tud elszívni aznap este ?

Ezek a feladatok közös megbeszélésre alkalmasabbak, mert viszonylag könnyűek, egyszerűek, csak egy-egy beugratós csavar van bennük. Jó példák ezek a feladatok arra, hogy hajlamosak vagyunk „gondolkodás nélkül számolni”, ha olyan könnyűnek tűnik a feladat, szinte automatikusan végezzük el a műveleteket a rendelkezésünkre álló számok alapján. Ezzel a módszerrel azután a végeredmény nem mindig fog stimmelni.

A megoldások röviden :

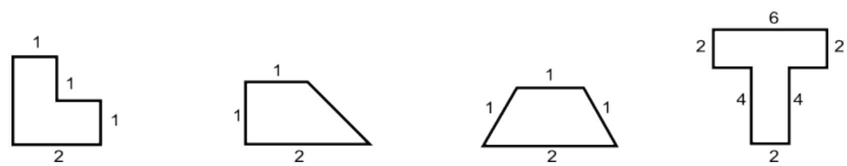
1. Most is alulról a második fokig ér a víz, hiszen a hajó és a hozzá rögzített létra a vízzel együtt emelkedik.
2. A palack 0,5, a bor 9,5 dollárba kerül. (Az automatikus válasz az 1 és 9 dollár.)
3. Első ránézésre 4 cigarettát tud elszívni, de ha elszívja őket, azokból is keletkezik 4 csikk, amiből egy ötödik cigarettát tud sodorni.

Ezek a feladatok beugratósak, de ha az ember rájött a megoldásra, akkor egészen biztosan tudja, hogy az a megoldás jó. Várhatóan ezért aki először tévedett, a jó megoldást vagy maga is hamar kitalálja, vagy elfogadja mások megoldását, nem alakul ki vita a feladatokkal kapcsolatban. De elkezdődött a munka, beindult a gondolkodás, és mindenkinek van már vagy sikerélménye, ha jól oldotta meg a feladatokat, vagy rádöbbenésélménye, ha beugrott valamelyik trükkösen megfogalmazott feladványnak. Folytatódhat tehát a foglalkozás.

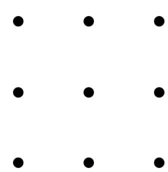
A következő blokk az egyéni munkára kitűzött feladatok blokkja. Ezeknek a feladatoknak egy része konkrét geometriai konstrukciókkal foglalkozik, amiket a tanulók egyénileg a saját füzetükben tudnak megoldani. A másik két feladat önálló átgondolást igényel, ezért egyéni munkára megfelelő. A feladatmegoldást követően a feladatokat közösen megbeszéljük.

**4.** Tizenkét ember van egy teremben. Közülük hatnak a lábán van zokni, négynek cipő, és hárman vannak, akik zoknit is, cipőt is viselnek. Hányan vannak mezítláb?

**5.** Az ábrákon látható síkidomokat vágd szét négy egybevágó részre!




**6.** Az ábrán látható 9 pontot kösd össze a ceruzád felemelése nélkül négy egyenes vonallal!

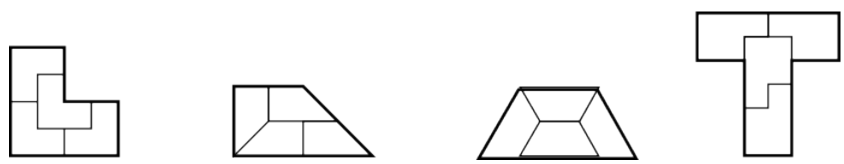


Megoldások és megjegyzések:

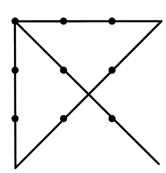
4. Ez a feladat egy tréfás formában megfogalmazott halmazos feladat. A halmazelmélet témakörénél halmazábrával – két metsző halmazt Venn-diagramon ábrázolva – a megadott adatokat a halmazábra megfelelő részeibe beírva a kérdezett szám könnyen megadható. Amelyik tanuló már tanult ilyet és felismeri a feladatban ezt a típusfeladatot, valószínűleg így fogja (sikeresen) megoldani. Aki viszont nem tanulta, vagy nem jut éppen eszébe, az logikus következtetésekkel, ábra nélkül is megkaphatja a helyes megoldást: A cipőt viselők számából kivonjuk a cipőt-zoknit viselőket, ezen az egy emberen van csak cipő, a zoknit viselők közül szintén három cipőt is visel, tehát csak zokni $6 - 3 = 3$ emberen van. A jelenlévő 12 ember közül így 3-an viselnek csak zoknit, 1 fő csak cipőt, 3 cipőt és zoknit is, a maradék 5 ember mezítláb van. (Feltesszük, hogy ők egyéb lábbelit sem viselnek.) Másik, szita-módszer jellegű okoskodással: akin van cipő vagy zokni, az összesen $6 + 4 = 10$ ember, de itt kétszer számoltuk azokat, akiken mindkettő

van. Tehát azoknak a számát le kell vonni ebből az összegből, azaz 7 ember lábán van zokni vagy cipő, a maradék 5 van mezítláb.

5. A gyerekek általában szeretik a geometriai konstrukciókat, szeretnek rajzolgatni, próbálkozni. Előfordulhat, hogy néhányan gyorsan rátalálnak a megoldásra, mert „belelátják” a kisebb alakzatokat a nagyokba, mások pedig nehezebben látják. Segíthet nekik, ha kiszámolják, mekkorának kell lennie a keresett alakzatnak (mondjuk négyzetrácsos papírra rajzolva hány kis négyzet területűnek), és/vagy az alakzatokba négyzet- vagy háromszögrácsot rajzolnak bele maguknak. Ezt természetesen nekik kell kitalálniuk. Ha valaki nagyon elakad és nincs ötlete új ábra rajzolása és újrapróbálkozás után sem, akkor a fenti két ötlettel lehet neki segíteni.
A (lehetséges) megoldások:



6. Ez egy ismert feladat. Aki ismeri, az az egyik (ennél a feladatnál lefektetett és a későbbiekben is betartandó) alapszabályunk értelmében nem „lövi le a poént”, nem árulja el a megoldást, hanem hagyja a többieket is rájönni. Nem biztos, hogy mindenki egyedül rájön a megoldásra ennyi időn belül. A megoldás nehézsége abban rejlik, hogy ez a 9 pont egy pontrácsot ad meg, és ez az ember gondolkodását hajlamos a rácsnégyzeten belülre szorítani. A megoldáshoz ezzel szemben ki kell lépni a négyzetből, a következő ábra egy alkalmas összekötést mutat:

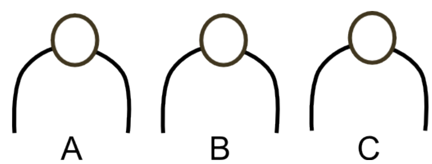


Az ilyen és ehhez hasonló feladatok megoldására az embernek – ha nehezebben „ugrik be” a jó megoldás – akkor van esélye, ha a kézenfekvő próbálkozások sorozatos kudarcai után rájön, hogy mivel így nem fogja tudni megoldani, valamilyen szokatlan, váratlan ötletre van szükség. És amikor már az ilyen ötletek között keresgél, hirtelen megtalálja a jó megoldást. Hasonló elven lehet rájönni a következő foglalkozáson kitűzött pénzérmés feladat megoldására. Az a feladat éppen azért nem ezen a helyen szerepel, hiszen egy ilyen feladat után az ember kételkedőbb, trükköt gyanít a következő feladatban is, és ezzel elveszne az a gondolkodási folyamat, amin a pénzérmés feladat megoldása közben újból végig kell majd menniük a tanulóknak. Ha többször jön elő ilyen típusú feladat, és nem csoportosítva, akkor jobb eséllyel fogja felismerni és helyesen megoldani az ilyen jellegű feladatokat.

Az előbbi feladatok megbeszélése után újabb feladványok következnek.

**7.** Behemót hétfőn, szerdán és pénteken igazat mond, a hét többi napján hazudik. Melyik nap hangozhat el tőle a következő mondat?
„Holnap igazat fogok mondani.”

**8.** Három istenség ül a jósdában egymás mellett: az Igazság istene, a Hazugság istene és a Diplomácia istene. Meglehetősen egyforma a külsejük, így aztán senki nem tudja egymástól megkülönböztetni őket. Azt azonban mindenki tudja, hogy az Igazság istene mindig igazat mond, a Hazugság istene mindig hazudik, a Diplomácia istene pedig néha hazudik, néha igazat mond.
Egyszer egy matematikus érkezik a jósdába, hogy kiderítse, melyik istenség melyik. Először a bal kéz felől ülő istenségnek tesz fel egy kérdést:
– Ki ül melletted, hatalmas isten?
– Ő az Igazság istene – felelte az isten méltóságteljesen.
Ezután a matematikus a középen ülő istentől kérdezett:
– Ki vagy te, dicsőséges isten?
– A Diplomácia istene vagyok – így a válasz.
Végül a jobb kéz felé ülő isten következett:
– És melletted ki ül, egeknek ura?
– A Hazugság istene – válaszolta az isten.
Melyik istenség melyik?




Megoldások, megjegyzések

7. A következő táblázat azt mutatja, melyik napokon mond igazat (i) illetve hazudik (h) Behemót.

| H | K | Sze | Cs | P | Szo | V |
|---|---|---|---|---|---|---|
| i | h | i | h | i | h | h |

A „holnap igazat fogok mondani” kijelentést csak olyan napon mondhatja, amikor igazat mond, és másnap is igazmondó napja van, illetve amikor hazudik és másnap is hazudós napja lesz. Összefoglalva: amikor két ugyanolyan „típusú” napja következik egymás után. Ilyen pedig egyedül a szombat-vasárnap, a kérdéses napon tehát szombatnak kell lennie.
Ezt könnyű átgondolni még táblázat nélkül is, de a táblázatos megjelenítésből azonnal látszik, nem nehéz feladat. Valójában későbbi feladatok előkészítéseként szerepel, ismerkedés a feladat-szituációval.

8. Az Igazság istene természetesen igazat mond, így ő nem állíthatja *a másikról*, hogy ő az Igazság istene. Mindhárom istenség a középsőről állít valamit, ezek az állítások pedig egymásnak ellentmondanak. Ebből következik, hogy két hamis állítás szerepel közöttük, a Diplomácia istene tehát hazudott. A középső isten azt állítja magáról, hogy ő a Diplomácia istene, de mivel tudjuk, hogy a Diplomácia istene hazudik, nem állíthat saját magáról igazat. A középső isten nem a Diplomácia istene, és nem is az Igazságé (ő nem hazudna magáról), tehát csak a Hazugság istene lehet. Így a jobb oldali, C jelű az Igazság, az A jelű pedig a Diplomácia istene.

A feladat természetesen más úton is megoldható, feltehető például az első állításról, hogy igaz, és ebből kiindulva egyenes következtetésekkel, az ellentmondó ágakat kizárva eljutni végül a megoldásig. A logikai feladatoknál is – ahogyan a matematika más ágaiban – gyakran előfordul, hogy a megoldáshoz egy tanulócsoportban akár három-négy különbözőféle megoldás születik. Ezeket – ha van rá idő – külön-külön el lehet mondatni, esetleg felíratni a táblára a tanulókkal. Persze előtte célszerű tisztázni, mennyire eltérőek a megoldások, illetve hogy jó-e egyáltalán. Nagyon fontos bemutatni a többféle megoldási lehetőséget, hogy mindenki számára természetes legyen az a szemlélet, hogy egy feladat megoldásában többféle úton is el lehet indulni, többféle „jó” út is lehet, az egyik megoldás adott esetben lehet gyorsabb, célszerűbb, de az is elképzelhető, hogy a két lényegesen különböző megoldás közül egyik sem jobb a másiknál, egyszerűen csak mindkettő jó.

**9.** Egy országban az a törvény érvényes, hogy az a 18 éven aluli személy, aki nyilvános helyen alkoholt fogyaszt, szabálysértést követ el. Egy kocsmában néhány vendégről a következőket látjuk:
Kiről kell közülük további vizsgálatot végezni ahhoz, hogy eldönthessük, szabálytalankodik-e?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 éves | bort iszik | 24 éves | kólát iszik |

**10.** Van három zacskónk, mindegyikben két szaloncukorral. Az egyikben két zöld, a másikban két kék, a harmadikban pedig egy zöld és egy kék csomagolású. A zacskókon feliratok is vannak: „2 zöld”, „2 kék”, „1 zöld, 1 kék”; de egyik zacskóban sem az van, amit a rajta lévő felirat mond. Az egyik zacskóból kivehetsz egy szaloncukrot, és megnézheted, milyen színű. Ebből kell kitalánod, melyik zacskóban milyen szaloncukrok vannak.
Hogyan oldod meg a feladatot?

**Gondolkodnivaló otthonra**

**1.** Egy kereskedő vásárolt valamit 7 dollárért, eladta 8 dollárért, visszavásárolta 9 dollárért, majd újra eladta 10 dollárért. Mekkora volt a nyeresége?

**2.** Folytasd a következő betűsorozatot!
E, K, H, N, Ö, H, ...

**3.** Egy zsákban 100 babszem van: 75 fekete és 25 fehér. Van még egy dobozunk is, nagyon sok fekete babbal. Azt játsszuk, hogy kiveszünk két szem babot a zsákból, és ha mindkettő fekete, akkor az egyiket visszatesszük a zsákba, a másikat lerakjuk az asztalra. Ha két fehéret húztunk, akkor mindkettőt az asztalra rakjuk, és helyettük egy fekete babot teszünk a zsákba a fekete babos dobozból. Ha az egyik kihúzott bab fekete, a másik pedig fehér, akkor a fehéret rakjuk vissza, a feketét pedig kirakjuk az asztalra. Így minden lépésben eggyel csökken a zsákban lévő babszemek száma. Ezt addig folytatjuk, amíg már csak egy babszem van a zsákban. Mekkora az esélye, hogy ez az egy babszem fehér?

A gondolkodnivalók megoldása

1. Az első két tranzakción együtt (vásárlás és eladás) 1 dollár haszna keletkezett, a második vétel és eladás kombináción is 1 dollár, azaz összesen 2 dollár a nyeresége. A különböző megközelítésekből esetleg eltérő eredmények születhetnek, ezekből akár kisebb vitát is lehet rendezni.

2. A felsorolt betűk a magyar sorszámnevek kezdőbetűi: Egy, Kettő, Három, Négy, Öt, Hat, a folytatás így H, Ny, K stb. A feladat meglehetősen szokatlan, a megoldás bosszantóan egyszerű. Az Ö betű árulkodó lehet és a H ismétlődése is, ez a kettő segíthet a megoldás ötletének megtalálásában.

3. A feladat elsőre különösen ijesztőnek tűnik, így biztatni kell a tanulókat, hogy a feladat csak látszólag nehéz, valójában csak végig kell gondolni. Ezzel persze nem segítettünk sokat, de

legalább megpróbáltuk rávenni őket arra, hogy próbálják megoldani, valamint –remélhetőleg – lebeszéltük őket arról, hogy hosszas számolgatásba bonyolódjanak. A végső megoldás ismét csattanósan egyszerű.

Nézzük, mi történik a zsákban lévő fehér és fekete babszemek számával az egyes lépésekben.

I. Két feketét húzunk: a feketék száma eggyel csökken, a fehéreké nem változik.

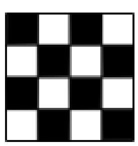
II. Egy feketét és egy fehéret húzunk: a feketék száma eggyel csökken, a fehéreké nem változik.

III. Két fehéret húzunk: a feketék száma eggyel nő, a fehéreké kettővel csökken.

Figyeljük most a fehér színű babszemek változását! Feltűnő, hogy a számuk az első két esetben nem változik, csak a harmadik esetben, amikor is kettővel csökken. Mivel eredetileg 25 db (páratlan számú) fehér babszemünk volt, és a számuk csak 2-vel (vagy 0-val) tud változni, a végére is szükségképpen páratlan számú fehér babunk lesz, vagyis a végén megmaradt egy babszemnek fehérnek *kell* lennie.

## 4.2. 2. Fejtörők II.

**1.** Képzelj el egy a hagyományoshoz hasonló 4x4-es sakktáblát. Dominó alatt pedig értsünk egy olyan lapocskát, ami pontosan akkora, mint a sakktáblának két szomszédos mezője együtt.
Egy sakktábla lefedhető 2x1-es dominókkal.



**a)** Kivágjuk a sakktáblából a bal felső sarokban lévő mezőt. Lefedhető-e így a (maradék) sakktábla 2x1-es dominókkal?

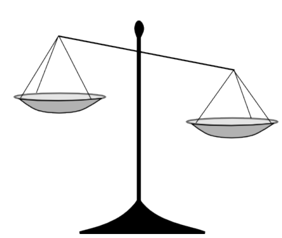
**b)** Kivágjuk a sakktáblából a bal felső és a mellette lévő mezőt. Megoldható-e így a lefedés?

**c)** Kivágjuk a sakktáblából a bal felső és a jobb felső mezőt. Most mi a helyzet?

**d)** Kivágjuk a sakktáblából a bal felső és a jobb alsó mezőt. Ezúttal lefedhető-e a kívánt módon?

**2.**

**a)** Három pénzérme közül valamelyik hamis, de nem tudjuk, hogy melyik. A hamis érme egy kicsit könnyebb a többinél. Hogyan tudnád eldönteni egy kétkarú mérleg segítségével minél kevesebb mérésből, hogy melyik a hamis érme?



**b)** Most kilenc érménk van, amelyek közül egy hamis. A hamis érme most is könnyebb a többinél. Ismét a fenti mérleggel, a lehető legkevesebb méréssel kell megtalálnunk a hamis érmét. Hogyan mérjünk?

**3.** Mikor Alice belépett a Feledékenység Erdejébe, nem felejtett el mindent, csak bizonyos dolgokat. Gyakran nem jutott eszébe a neve, és a leggyakrabban azt felejtette el, hogy milyen nap van. Az Oroszlán és az Egyszarvú sűrűn látogatották az erdőt. Ezek ketten furcsa teremtmények: az *Oroszlán* minden hétfőn, kedden és szerdán hazudik, és a hét többi napján igazat mond, az *Egyszarvú* pedig csütörtökön, pénteken és szombaton hazudik, és a hét többi napján igazat mond.

**a)** Egy napon Alice összetalálkozott az Oroszlánnal és az Egyszarvúval, akik egy fa alatt pihentek. A következőket állították:
Oroszlán: Tegnap hazudós napom volt.
Egyszarvú: Tegnap nekem is hazudós napom volt.

Ebből a két állításból Alice (aki nagyon okos lány volt) meg tudta állapítani, hogy milyen nap volt.
Milyen nap volt?

**b)** Egy másik alkalommal Alice csak az Oroszlánnal találkozott. Az a következőket állította:
1. Tegnap hazudtam.
2. Holnap*utánután* megint hazudni fogok.
Milyen nap volt?

**4.** Három testvér, Luca, Eszter és Máté édesanyja észrevette, hogy eltűnt az az öt tábla csokoládé a kamrából, amit hétvégén vásárolt. Kérdőre vonta a gyerekeket, de mindhárom ezt felelte:
Luca: Én nem vettem el egy csokit se!
Eszter: Én nem vettem el egy csokit se!
Máté: Én nem vettem el egy csokit se!
Édesanyjuk azonban jól tudta, hogy más nem vehette el a csokikat, és tovább faggatózott. Az alábbiak hangzottak el:
Luca: Eszter többet vett el, mint Máté!
Eszter (Lucának): Hazudsz!
Máté: A lányok vették el mindet!
Luca (Máténak): Hazudsz!
A végső tisztázásnál kiderült, hogy mindegyik gyerek pontosan annyiszor vallott hamisan, ahány tábla csokoládét elvett.
Ki mennyi tábláért felelős?

Megoldások és megjegyzések:

1. Az első három eset eléggé egyértelmű: az a)-beli fedés nem valósítható meg, mert páratlan számú mező marad így, amit nem lehet 1x2-es dominókkal lefedni, a b) és c) esetben pedig jól láthatóan megvalósítható a lefedés. A d) eset érdekesebb: itt első ránézésre nincs gond a fedéssel, mert páros számú mező van, de a próbálkozások a lefedésre rendre kudarcba fulladnak. (Ez a feladat eredetileg 8x8-as sakktáblával szerepelt, a megtartott próbaóra tanulságai alapján változtattam meg 4x4-esre, hogy ne vegyen el feleslegesen annyi időt a próbálkozás). A sikertelen próbálkozásokból kialakulhat az a sejtés, hogy mégsem megvalósítható a keresett lefedés. Itt bizonyos időt hagyva néhányaknak eszébe juthat a megoldás, ha viszont nem, akkor lehet segíteni azzal a megjegyzéssel, hogy gondoljanak a sakktábla színezésére... innen pedig már többen be tudják fejezni a feladatot.

2. Az a) feladatban csak három db érménk van és egy kétkarú mérlegünk, természetesen adódik az ötlet, hogy tegyünk egy-egy érmét a mérleg serpenyőibe. Amikor azután elemzik a kimeneteleket, akkor valószínűleg maguktól rájönnek, hogy ez az egy mérés elegendő is volt, hiszen ha valamelyik serpenyő lesüllyed, akkor a másik serpenyőbe helyezett érme volt a könnyebb, ha pedig egyensúlyban vannak, akkor a kimaradt harmadik érme az.
A b) rész már nehezebb, de közvetlenül a (segítő) a) feladat után arra viszonylag gyorsan rá lehet jönni, hogy három érme közül már ki tudjuk választani a hamisat. A nehezebb lépés itt következik, hogy hogyan jutunk el odáig, de visszafelé gondolkodással jó eséllyel sokan rájönnek a megoldásra, miszerint először három hármas csoportot csinálunk az érmékből, két csoportot felrakunk, és az első esethez hasonlóan járunk el velük. Ebből kiderül, melyik csoportban van a hamis érme, amely hármasból pedig egy újabb mérés segítségével az a) esettel pontosan megegyező módon kiválaszthatjuk az egy darab hamis érmét. Felmerülhet, hogy esetleg egy méréssel is megvalósítható volna a feladat. Akinek erre van tippje, az elmondhatja, mi pedig mondunk neki egy olyan lehetőséget a hamis pénz „hollétére”, ami alapján biztosan nem találhatta meg ebből az egy mérésből. A lehetetlenség korrekt bizonyítása bonyolultabb.

3. Ennek a feladatnak „előzménye” az előző foglalkozásban kitűzött egyik feladat, amelyben a szereplő a hét néhány napján hazudik, néhány napján pedig igazat mond. Ilyen típusú feladat kezelése tehát már nem okoz gondot valószínűleg a diákoknak. A folytatásban pedig szerepelni fog még ilyen feladattípus, amikor a konjunkciót vezetjük be, akkor pedig már fontos lesz, hogy az alapfeladattal ne legyenek problémák, ne vonja el a figyelmet a lényegről.

a) A következő táblázat mutatja, hogy melyik napokon mond igazat illetve hazudik az Oroszlán és az Egyszarvú:

| | H | K | Sze | Cs | P | Szo | V |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Oroszlán | h | h | h | i | i | i | i |
| Egyszarvú | i | i | i | h | h | h | i |

Ha valaki azt állítja, hogy „tegnap hazudós napom volt”, akkor biztos, hogy tegnap és ma ellentétes napjai vannak (azaz tegnap hazudott és ma igazat mond, vagy fordítva). Ebben a feladatban mindkét szereplő ilyen kijelentést tett, így a kérdéses napon és azt megelőzően ellentétes mindkettőnek ellenttées napjai kell, hogy legyenek. Az Oroszlánnak csak Sze-Cs és V-H egymást követő ellentétes napjai, az Egyszarvúnak pedig Sze-Cs és Szo-V. Ezek közül csak a Sze-Cs esik egybe, így a kérdéses napon csütörtök volt.
b) Az Oroszlánnak tegnap és ma szintén ellentétes napjai vannak, a második feltételből pedig – az előzőekhez hasonlóan – az következik, hogy ma és holnapután után is ellentétes napjai vannak. Az elsőt láttuk, hogy Sze-Cs és V-H esetében valósulhat meg, vizsgákjuk tehát csak ezt a két esetet a második feltétel szempontjából. Az első esetben (ha ma csütörtök van), akkor holnapután után vasárnap, és az Oroszlán mindkét napon igazat mond, így ez az eset nem lehetséges. Ha ma hétfő van, akkor holnapután után csötörtök lesz, az Oroszlán pedig hétfőn hazudik, csütörtökön igazat mond, ezek valóban ellentétes napok tehát, így ez a megoldás.
A tanulók kis szerencsével rátalálnak erre a gondolatmenetre, ha pedig nem, akkor több eset végigpróbálgatásával kapják meg a megoldást. A feladat megbeszélésénél itt is többféle megoldási út előkerülhet.

4. Az utolsó két mondatpár mondatai ellentmondanak egymásnak (egy gyerek állít valamit, a másik pedig azt állítja, hogy az illető hazudik). Ezek közül tehát az egyik mondatnak igaznak kell lennie, a másiknak pedig hamisnak. Az utolsó négy mondat közül így kettő igaz, kettő pedig hamis. Összesen pontosan öt hamis állításnak kell lennie, hiszen ennyi csoki tűnt el, és a feltétel szerint mindenki annyiszor vallott hamisan, ahány csokit elvett, összesen tehát a hamis mondatok számának meg kell egyeznie az elvett csokik számával. Mindebből következik, hogy az első három állítás (amelyekben mindenki tagadja a bűnösségét) közül mindhárom hamis, vagyis mindegyik gyerek vett el valamennyi csokit.
Ha így áll a helyzet, akkor viszont Máté második állítása hamis (hiszen ő is elvett valamennyit, nemcsak a lányok), Luca ezt követő állítása pedig igaz. Máténak most már mindkét állításáról kiderült, hogy hamis, így ő pontosan két csokit vett el.

Luca második állítása szerint Eszter több csokit vett el, mint Máté. Mivel Mátéról már tudjuk, hogy kettőt vett el, így ha ez igaz, akkor Eszternek legalább hármat kellett volna elvennie, ám ekkor Lucának (aki szintén elvett valamennyit) már nem maradt volna csoki. Így tehát Lucának ez az állítása hamis volt, Eszter második mondata pedig igaz.
Összesen tehát Lucának két hamis állítása van, Eszternek egy, és Máténak kettő, így Luca és Máté két csokit vettek el, Eszter egyet, és ezzel a megoldással minden állítás stimmel.

Másik megoldás: Mivel az utolsó négy mondat közül kettő-kettő egymásnak ellentmond, a négy mondat közül pontosan kettő igaz, és kettő hamis. És mivel összesen 5 db hamis állításnak kell lennie, a többi mondat mind hamis. Ekkor Lucának és Máténak 2 mondata, Eszternek egy mondata hamis, és ha ennyi csokoládét vett el mindenki, akkor valóban igazak illetve hamisak a megfelelő állítások.

Az óra ezen pontján többféle feladattípus is következhet attól függően, hogy az eddigiek hogyan alakultak. Ha gyorsan mentek általában, és úgy tűnik, van még kedvük hasonló feladatokhoz, akkor feladható a következő, 5-ös feladat, ha viszont elhúzódott az idő, közeleg az óra vége, illetve a diákok láthatóan fáradtak, „kikapcsolódásra” vágynak az órán belül, akkor a 7-8-9-es feladatok egyikével lehet folytatni a foglalkozást. Ez utóbbi feladatok trükkösek, ötletet igénylők, így a megoldáshoz szükséges idő még nehezebben jósolható meg, arról nem beszélve, hogy egy diákcsoport egyes tagjai esetében óriási különbségek lehetnek. Ha pedig a helyzet valahol a kettő között van, akkor egy bűnügyi történetről szóló, némiképp újszerű feladat következhet, mint a 6-os sorszámú.
Az időbeosztásról egyébként az a véleményem, hogy csak igen hozzávetőlegesen lehet (és érdemes) előre beosztani, hiszen egy órán annyi váratlan helyzet adódhat, illetve nem látható előre a tanulók pillanatnyi állapota, munkakedve, élénksége, hogy egy szigorúan időre beosztott óravázlat szükségszerűen borulni fog. Valójában az óra közben kell folyamatosan figyelni az időt, kérdésekkel gyorsítani illetve lassítani a megoldást, az éppen unatkozó tanulóknak pedig külön feladatot adni. Persze fontos, hogy ez utóbbit ne büntetésként éljék meg, erre a szerepre még érdekesebb feladatokat fogok választani. A most következő 7-8-9-es feladatok ilyen „időkitöltő” jutalomfeladatoknak is kiválóan alkalmasak. Egyetlen hátrányuk lehet, hogy aki megkapta a feladatot, és rájön, az hangosan mondja a megoldást, és ezzel „lelövi”, még akkor is, ha a többiek nem is ismerik a feladatot még. Ezt a tanulókkal érdemes előre tisztázni, de természetesen csak bizonyos idő elteltével fog valóban jól működni, egy fontos nevelési feladat ez is.

**5.**

**a)** Hatalmas mennyiségű árut loptak el egy áruházból. A tettes (vagy tettesek) autóval szállította (vagy szállították) el a zsákmányt. Három jól ismert bűnözőt vittek be a Scotland Yardba kihallgatni, A-t, B-t és C-t.

A következők derültek ki:

1. A-n, B-n és C-n kívül senki nem vehetett részt a rablásban.
2. C sosem dolgozik A (és esetleg más tettestársak) nélkül.
3. B nem tud autót vezetni.

Bűnös-e A?

**b)** Egy újabb rablás: A-t, B-t és C-t megint kihallgaták, és a következők derültek ki:

1. A-n, B-n és C-n kívül senki nem vehetett részt a rablásban.
2. A sosem dolgozik bűntárs nélkül.
3. C ártatlan.

B ártatlan vagy bűnös?

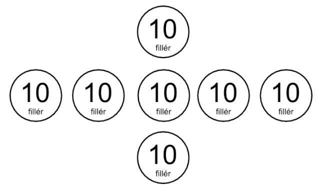
Megoldások

5. a) Mivel B nem tud autót vezetni, ő egyedül nem követhette el a rablást, ezért A vagy C bűnös. Ha C bűnös, akkor A is, ha C sem, akkor A-nak annak kell lennie, ezért A mindenképpen bűnös.

A diákok ezt a feladatot a próbaórán szinte magától értetődő könnyedséggel oldották meg. Valószínűleg a feladat szövegezése miatt, hiszen a Mérő-féle „csekkes" feladathoz hasonlóan a szituáció jól ismert, könnyen elképzelhető, még akkor is, ha betűket használnak nevek helyett (ez egyébként átláthatóbbá teszi a szöveget), és az előforduló formálisabb feltételek ellenére is. A következtetési láncok így könnyen és gyorsan hozzáférhetőek voltak a számukra, akár – mint azt láttuk az első fejezetben – a Mérő-féle „csekkes" feladatban.

b) Mivel A nem dolgozik egyedül, és hármukon kívül más nem vett részt a rablásban, B vagy C mindenképp bűnös. És mivel C ártatlan, B-nek bűnösnek kell lennie.

**6.** Helyezz el hét pénzérmét az asztalon az alább látható módon. Két pénzérme elmozdításával kell elérned, hogy vízszintesen és függőlegesen is öt-öt pénzérméd legyen egy sorban. Hogyan oldod meg a problémát?



**7.** Egy hajó észak felé halad és a korlátjánál két matróz áll. Az egyik kelet, a másik nyugat felé néz. Mindketten a tenger hullámait bámulják. Egyszer csak így szól az egyik a másikhoz:
– Egy kis korom van az orrodon!
A másik válaszol:
– Érdekes, neked is!
Hogyan látták egymás arcát a matrózok? Nem fordultak meg, és semmilyen segédeszközt, pl. tükröt vagy tükröző felületet nem használtak.

Megoldások:
6. A vízszintes sor szélső két érméjét rárakjuk a középső tetejére.
7. Egymással szemben álltak, háttal a korlátnak támaszkodva.

A fenti feladatok közül tehát az óra aktuális menetéhez igazítva fogok válogatni. Ha véletlenül mindegyikre sor kerül, és még ez után is van idő, akkor a következő feladatok jöhetnek. Erre azonban gyakorlatilag minimális esély van, csak a biztonság kedvéért szerepelnek itt ezek a feladatok.
Itt térnék ki a szakköri feladatok, pótfeladatok és „gondolkodnivaló otthonra” felosztásra. Az egyes foglalkozásoknál általában az egy tanórán reálisan feldolgozható feladatmennyiséghez képest több feladat szerepel. Részben azért, hogy válogatni lehessen a fent vázolt szempontok alapján óra közben, részben pedig azért, mert bármikor előfordulhat, hogy a várakozáshoz képest jóval gyorsabban haladunk a feladatokkal (noha általában ennek az ellenkezője szokott történni), így mindig szükség van plusz feladatokra. A mindenképpen feladandó feladatokat a szakköri feladatok elejére helyeztem, a végefelé az opcionális feladatok szerepelnek, a pótfeladatoknál pedig olyanok, amiket akkor adnék fel, ha a többin már mind túlvagyunk. Az otthoni gondolkodnivalók közé olyan feladatokat válogattam, amik időbeli terjedelmük vagy összetettségük miatt nem férnének bele a tanórai keretekbe, otthon viszont valószínűleg sikeresen megoldhatóak.

Pótfeladatok:

**8.** Hogyan lehet egy 3 és egy 4 perces homokórával 5 percet lemérni?

**9.** Két üvegben ugyanolyan mennyiségű bor, illetve víz van. Kitöltünk egy kávéskanálnyi bort, és beleöntjük a vízbe, jól összekeverjük, majd kitöltünk belőle egy kávéskanálnyit, és visszatöltjük a borba. Vajon a borban van több víz, mint amennyi bor a vízben, vagy fordítva?

Megoldások

8. Egyszerre elindítjuk a 3 és 4 perces homokórát, majd amikor a 3-as lejárt, akkor kezdődik az 5 perc. Ekkor a 4-esben még 1 percnyi homok van, megvárjuk, míg ez lepereg, majd megfordítjuk a 4-es órát, és amikor lejár, akkor telik le az 5 perc.

9. Mivel a keverés után mindkét edényben ugyanannyi folyadék van, így pontosan annyi bor hiányzik az egyikből, amennyi a másikban van, azaz amennyi víz hiányzik a másikból. Ugyanannyi bor van tehát a vízben, mint víz a borban.

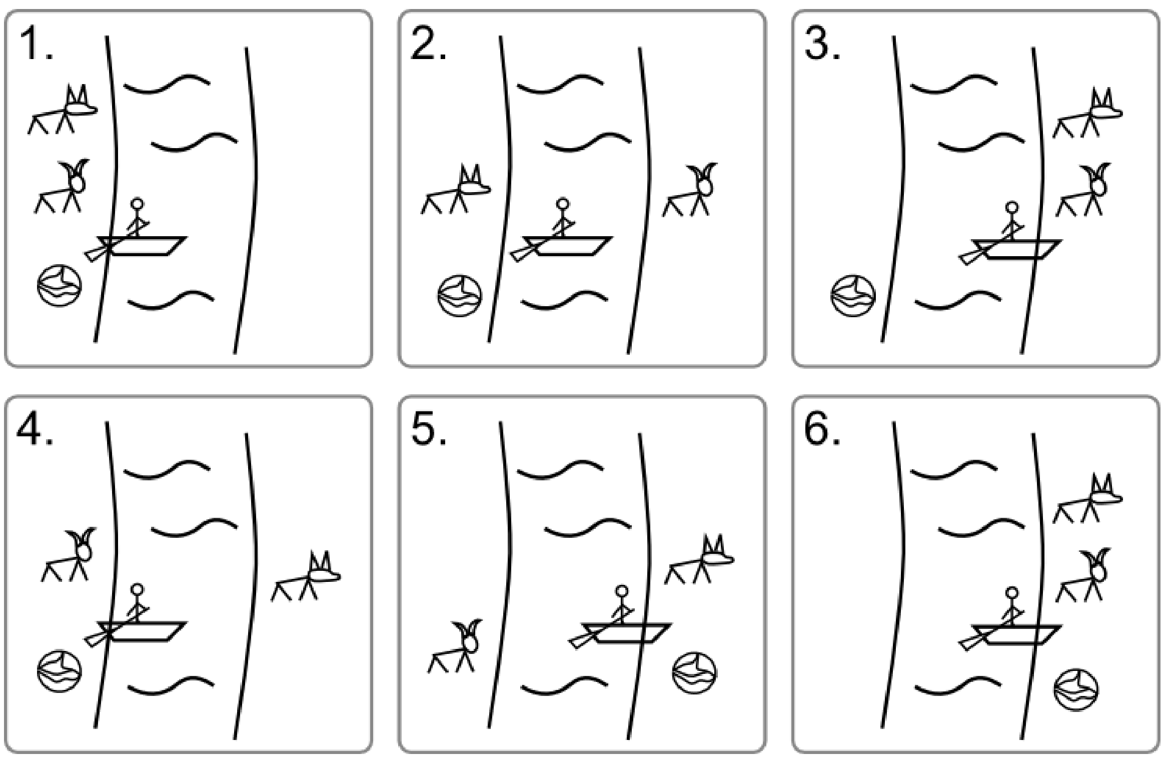
**Gondolkodnivaló otthonra**

**1.** Egy klasszikus feladat: Egy révésznek egy folyón kell átszállítania egy kecskét, egy káposztát és egy farkast. A csónak olyan kicsi, hogy a révész mellett egyszerre csak az egyik fér el. A másik probléma, hogy ha a kecske és a káposzta együtt emberi felügyelet nélkül marad, akkor a kecske megeszi a káposztát, ha pedig a farkas és a kecske marad felügyelet nélkül valahol, akkor a farkas megeszi a kecskét. Hogyan tudja a révész átszállítani a rábízott dolgokat úgy, hogy minden épségben maradjon?

**2.** Az éjszaka sötétjében egy keskeny és rozoga híd előtt 4 katona álldogál, ugyanis át szeretnének menni. De a hídon egyszerre csak ketten tudnak átmenni, többet a híd nem bír. Ugyanakkor elemlámpa is szükséges az átkeléshez, amiből csak eggyel rendelkeznek. A katonák között van néhány sérült is, aki nem tud olyan gyorsan haladni a hídon. Az egyik katona egymagában 1 perc alatt ér át, a másik 2 perc alatt, a harmadik 5, a negyedik pedig 10 perc alatt tud átmenni a hídon. Ha ketten mennek együtt, közülük a lassabb sebességével haladnak mind a ketten.
A híd viszont 18 perc múlva felrobban. Át tudnak érni mégis mindannyian?

A Gondolkodnivalók megoldása

1. A feladat ismert, és a megoldása sem túl nehéz, de konstrukciós készséget igényel.
Mivel a kecske a káposztával sem, és a farkassal sem maradhat egyedül, és egyszerre csak egy „árut” tud átszállítani a révész, biztosan a kecskét kell átvinni először. Arra is gyorsan rá lehet jönni, hogy az a természetes gondolat, miszerint a révész visszamegy, és áthozza a második dolgot, majd megint visszamegy a harmadikért, nem fog működni, ugyanis a kecske mellett nem hagyhat semmi mást magára. Ezek után szinte adódik az az ötlet, hogy miután visszament egy másik dologért (a káposztáért vagy a farkasért) és lerakta a túlparton, a kecskét visszaviszi magával. Ezzel a gondolattal már be is fejezhető a feladat, hiszen ha a kecske után pl. a farkast átvitte, majd a kecskét visszavitte magával, és kirakta a partra, átviheti a káposztát, a kecske egymagában nem csinál semmi bajt. Ezután a túlparton hagyja a farkast és a káposztát, visszamegy a kecskéért, átviszi, és ezzel átszállította a teljes rakományt.




Az ilyen típusú feladatok rajzosan, az egyes lépésekben történő változások feltüntetésével követhetők a legkönnyebben. Egyéni megoldás közben és a megoldás passzív megismerésénél is ez a legcélszerűbb, legkönnyebben áttekinthető út. Ez a feladat a kényszerlépések miatt a könnyebbek közé tartozik, ezekre pedig nemcsak elméleti meggondolással lehet rájönni, rövid próbálkozás után „magától” is kiderül. Lényegében a kulcsötlet az, hogy amit egyszer átvittünk, azt utána vissza is lehet (és értelmes is) vinni. A legtöbb hasonló feladat ezen az ötleten alapul, csak általában nem egyértelmű, hogy mikor, mire, hányszor kell alkalmazni.

2. Az előző feladattípus egy nehezített variációja. Itt időfaktor is szerepel, ami miatt első ránézésre lehetetlen a feladatot megoldani a megadott időkorláton belül, valamint a feltételek között szerepel az is, hogy lámpa nélkül senki sem mehet át a hídon. A megoldásra rátalálást nehezíti még, hogy itt nincsenek kényszerlépések, bárki elindulhat bárkivel. Néhány (sikertelen) próbálkozás után az ember már jobban érti, miről van szó a feladatban, illetve melyik feltétel milyen lépéseket zár ki. Így kiderül, hogy az első átkelés után a lámpának vissza kell kerülnie a híd innenső oldalára, mert anélkül nem kelhetnek át a többiek. Természetes ötlet, hogy a leggyorsabb, az 1 perc alatt átérő katona kísérje át a többieket egyenként és szállítsa vissza minden alkalommal a lámpát, ekkor viszont a teljes átjutáshoz 19 percre lenne szükség. Szembetűnő lehet, hogy a 10 és 5 perc alatt átérő katonák lassítják leginkább az átjutást, így azzal lehetne időt spórolni, ha ők együtt mennének, hiszen ekkor nem kell külön telik el 10 illetve 5 perc. Arról nem lehet természetesen szó, hogy közülük valamelyik hozza vissza a lámpát, azt mindenképp a gyorsabbakra kell bízni. Körvonalazódik tehát a megoldás: A két gyorsabb katona átmegy a lámpával, a leggyorsabb visszahozza azt, ez eddig 3 perc. Most átmegy a két lassabb, ez 10 perc, eddig összesen 13. A 2 perc alatt átérő visszahozza a lámpát, majd ketten átkelnek a túloldalon várakozó leggyorsabbal. 17 perc alatt átjutnak tehát, így még maradt is egy percük, hogy a robbanó hídtól minél messzebbre jussanak (a két lassú persze már korábban is elindulhatott messzebbre, bár ez már nem tartozik szorosan a feladathoz). Az lényegtelen, hogy a két gyorsabb közül melyik szállítja először a lámpát visszafelé, mindkét esetben egyszer az egyik, másodszorra a másik hozza, így összesen 3 perc a kétszeri visszaszállítás, az utolsó lépésnél pedig mindenképp a 2 perc alatt átjutó sebességével haladnak.

## 4.3. 3. Kijelentés, logikai érték, tagadás, kvantorok

Az első két alkalom bevezető jellegű feladatai után – amik azért már elkezdték előkészíteni a harmadik foglalkozást, és a későbbieket is – ezen a foglalkozáson a logika alapfogalmainak megértése kerül előtérbe, természetesen az eddigiekhez hasonló játékos megfogalmazásban, főként feladatokon keresztül. Már eddig is sokat használtuk az „igaz”, „hamis” címkéket. Ezek már alsó tagozatos feladatokban is szerepelnek. A hétköznapi életben is sokat használjuk ezeket a fogalmakat, esetleg más szavakat használunk – „a hamis”-t inkább a „nem igaz” szókapcsolattal fejezzük ki. Tehát a fogalom régóta él bennünk, ezért egyértelműnek, magától értetődőnek érezzük anélkül, hogy tisztában lennénk a kijelentés, logikai érték fogalmakkal. Úgy tűnik, ha rendelkezünk a megfelelő háttérismeretekkel, minden (kijelentő értelmű) mondatról el tudjuk dönteni, hogy igaz vagy hamis. Vannak azonban olyan rendhagyó mondatok, amelyekről nem lehet ezt eldönteni, vagy azért, mert szubjektív, nem egyértelműen meghatározott, amit „állít”, vagy mert akár azt feltételezzük, hogy igaz, akár azt, hogy hamis, ellentmondásra jutunk. Utóbbi típusú mondatok a paradoxonok. Meg fogom tehát mutatni, pontosabban tapasztaltatni a gyerekekkel, hogy nem csak „egyértelmű típusú” állítások léteznek. Előkészítésnek néhány egyszerű – most szigorú értelemben vett – logikai feladatot oldanak meg a tanulók. Ezeket Raymond Smullyan könyvéből [13] válogattam. A könyvben található rengeteg feladat közül a legegyszerűbb valóban logikai feladatok alkalmasak erre a bevezető szerepre. Olyan feladatok kellenek, amelyekben egyrészt nem szerepel semmiféle explicit konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia, legfeljebb olyan megfogalmazásban, hogy azt spontán is helyesen lehessen értelmezni. Másrészt a feladat logikai szerkezete is legyen egyszerű, jól áttekinthető, és a fogalmazásmód se vonja el túlságosan a figyelmet a valódi logikai tartalomtól.

A következő feladatsorozatot választottam ki erre a célra:

**1.** Abdul boltját kirabolták, de a zsákmány előkerült. Három gyanúsított volt, úgy hívták őket, Abu, Ibn és Haszib. A tárgyaláson a következőket állították:

Abu: Nem én követtem el a rablást.
Ibn: Nem Haszib volt.
Haszib: De, én voltam.
Később ketten közülük bevallották, hogy hazudtak. Ki volt a tettes?

**2.** Nemsokára újabb rablás történt, és ugyanaz a három gyanúsított – Abu, Ibn és Haszib – került bíróság elé, ahol a következőket állították:

Ibn: Nem Haszib volt.
Haszib: Ez igaz.
Abu: Ibn ártatlan.

Különös, hogy a tényleges bűnös igazat mondott, de nem mondott mindhárom gyanúsított igazat. Ki volt a tettes?

**3.** Megint Abu, Ibn és Haszib állt bíróság előtt, de csak pontosan egyikük volt bűnös. Abu azt állította, hogy ő ártatlan; Ibn egyetértett ezzel; Haszib pedig bűnösnek vallotta magát. Mint kiderült, a tettes hazudott. Ezúttal ki követte el a rablást?

Megoldások, megjegyzések

1. Tudjuk, hogy (legalább) ketten hazudtak. Mivel az utolsó két állítás ellentmond egymásnak, ezek közül az egyiknek igaznak, a másiknak hamisnak kell lennie. Az első állítás ezért szükségképpen hamis, vagyis Abu volt a tettes (és ekkor a második állítás igaz, a harmadik pedig hamis).

2. Most azt tudjuk, hogy van igaz és hamis állítás is a vallomások között (valamint hogy a bűnös igazat mondott). Az első és a második mondat ugyanazt állítja, ezért ezek közül vagy mindkettő igaz, vagy mindkettő hamis. Másrészt Haszib lényegében tagadja saját bűnösségét, és mivel tudjuk, hogy a bűnös igazat mondott, így ő nem lehetett a bűnös. Következésképp Ibn és haszib igazat mondanak, Abu pedig hazudik. Ekkor Ibn a bűnös, és tényleg igazat mondott.

3. Haszib nem lehet bűnös, hiszen tudjuk, hogy a bűnös hazudott, így bűnösként nem vallhatta volna bűnösnek magát. Az első két állítás pedig megint ugyanazt mondja, így ezek egyszerre igazak vagy hamisak. Igazak nem lehetnek, mert akkor senki nem lehetne bűnös (hiszen tudjuk, hogy a bűnös hazudott, Haszib pedig nem lehetett az), ezért az első két állítás (is) hamis, Abu tehát nem ártatlan, vagyis ő a bűnös.

## Kijelentés

A fenti feladatok megoldása és megbeszélése után még egy lépést teszünk a kijelentés fogalmának felfedezése és megértése felé.

**4.** Igazak vagy hamisak a következő mondatok?
a) A Föld lapos.
b) Kettő meg három egyenlő hattal.
c) A víz 0 °C-on megfagy.
d) Ebben a teremben most több mint 6 ember van.

**5.** Egy gép minden állításról, amit beírnak neki, el tudja dönteni, hogy igaz vagy hamis. Ha igaz mondatot gépelünk be neki, akkor zöld fénnyel jelez, ha hamisat, akkor pirossal.

**a)** Mondjatok egy olyan mondatot, amire a gép zöld fénnyel válaszol !
**b)** Mondjatok egy olyat, amire pirossal !
**c)** Ki tud mondani egy olyan mondatot, amivel összezavarja a gépet ?

Először csak az a) és a b) feladatok kapják a tanulók, amihez igaz és hamis állításokat fognak gyűjteni. Rövid megbeszélés (néhány példa elhangzása) után kapják a c) feladatot. Ennél a pontnál esetleg nem lesz mindenki számára egyből világos, mit is kíván a feladat. Ha többen jelzik, hogy nem értik, mit akar ez jelenteni, néhány szóban – tanári rávezető kérdésekkel természetesen – megbeszéljük a problémát, ezután pedig időt kapnak a feladat önálló megoldására. Pár perc elteltével megvitatjuk, ki mire jutott. Ekkor (reményeim szerint) elő fog jönni, hogy mivel olyan mondat kell, amiről nem tudja eldönteni a gép, hogy igaz, vagy hamis ; talán kérdéseket fognak írni, vagy olyan mondatokat (ha találnak), ami se nem igaz, se nem hamis, illetve nem egyértelműen eldönthető az igazsága ; vagy esetleg olyan mondatot, ami értelmetlen. Így összegyűjtjük, milyen típusú mondatokkal lehet probléma, és kialakul a „nem kijelentés”, illetve a „kijelentés” fogalma. Ekkor röviden tudatosítjuk, mélyítjük a fogalom megértését úgy, hogy tanári és tanulói példákat hozunk kijelentésre és nem kijelentésre, amelyek fel is kerülnek a táblára két oszlopba. A kijelentéseknek vizsgáljuk az igazságértékét is. Természetesen itt ugyanaz történik, mint az előző gépes feladat a), b) és c) pontjaiban, de most már az új fogalom tudatában. Itt következik a „logikai érték” említése. Mivel ezt a fogalmat már ismerik valójában, a precíz bevezetés pedig nem célja a szakkörnek, ezért ennyi elég a fogalom kialakításához és kellő szintű tisztázásához, valamint a későbbiek során elő fog még jönni ez, illetve természetesen végig arra biztatom a tanulókat, hogy ha valamit nem értenek, nyugodtan kérdezzenek, akár óra után.

### A tagadás

A következő fogalom az állítás tagadása. A bevezető feladatok során ösztönösen, a hétköznapi gondolkodásra, logikára támaszkodva használják a *tagadás* ; *igaz, nem igaz* fogalmakat.

**6.** Egy gyilkossági pernek két gyanúsítottja van : Péter és Pál. Négy tanút hallgatnak ki.
Az első így vall : Péter ártatlan
A második így : Pál ártatlan.
A harmadik : Az első két vallomás közül *legalább* az egyik igaz.
A negyedik : A harmadik tanú hamisan vallott.
És a tények a negyedik tanút igazolják. Ki a tettes ?

**7.** A lovagok és lókötők szigetének egy lakója így nyilatkozik magáról :

„Lókötő vagyok.”
Lovag vagy lókötő az illető?

**8.** Ebben a régi feladatban három lakos, A, B és C együtt álldogál egy kertben. Egy arra járó idegen megkérdezi A-t: "Ön lovag vagy lógötő?" Ő válaszol, de olyan érthetetlenül, hogy az idegen nem tudja kivenni, mit is mondott. Megkérdezi B-t: "Mit mondott A?" B válasza: A azt mondta, hogy ő lókötő. Ekkor közbeszól C, a harmadik ember: Ne higgyen B-nek, hazudik!
Milyen típusú B, illetve C?

Megoldások, megjegyzések:

6. Mivel a negyedik tanú igazat mondott, eszerint a harmadik tanú állítása hamis. Azaz az első két vallomás mindegyike hamis, tehát Péter sem, és Pál sem ártatlan, vagyis együtt követték el a gyilkosságot.

7. Tegyük fel, hogy az illető tényleg lókötő. Ekkor igazat mondott, de egy lókötőnek hazudnia kéne, így ez nem lehetséges.
Most tegyük fel, hogy lovag! Ekkor viszont hazudna, de mivel lovag nem hazudhat, így lovag sem lehet. Vagyis ezt a mondatot sem lovag, sem lókötő nem mondhatja.

8. Az állítások:
A: xxx
B: A azt mondta, hogy ő lókötő.
C: B hazudik.

Ahogy az előbb láttuk, senki nem mondhatja magáról, hogy lókötő, így A sem mondhatta ezt, B hazudik, így C igazat mond. B tehát lókötő, C lovag, A-ról pedig nem tudunk semmit.

**9.** Egy sivatagban vándorolsz, nemsokára elfogy az utolsó kulacs vized is, amikor egy útelágazáshoz érsz. Tudod, hogy az egyik út a legközelebbi oázishoz vezet, ha azt eléred, akkor megmenekülsz, a másik út viszont a sivatagba vezet, de nem tudod, melyik melyik. Azt is tudod, hogy az elágazást egy ikerpár őrzi, akik közül az egyik mindig igazat mond, a másik mindig hazudik. Felváltva őrzik az elágazást, így amikor odaérsz, egyikük ott áll, de nem tudod, melyik teljesít éppen szolgálatot. Az ikrek elég szűkszavúak is, mindössze egyetlen kérdésedre hajlandóak válaszolni. Mit kérdeznél, hogy megtudd, melyik út vezet az oázishoz?

Ez a feladat a legismertebb logikai feladványok közé tartozik. Előzmények nélkül azonban – főként a feladat nyitott jellege miatt – önállóan nagyon nehéz rátalálni a megoldáshoz szükséges ötletre, és ha az ember véletlenül rá is talál, mindenképpen kevésbé tudatosak a próbálkozásai, mint a rutinosabb logikaifeladat-megoldónak. Utóbbi esetben a feladat több sikerélménnyel kecsegtet, gyorsabb, de kevésbé jelent kihívást a megoldása. A megoldás kulcsa a kettős tagadás, erre kell rákényszeríteni a hazudós testvért, hogy ő is igazat feleljen a feltett kérdésünkre.

**10.** Egy testvérpár egyik tagját Johnnak hívják (a másikat nem). Valamelyik mindig hazudik, valamelyik pedig mindig igazat mond. Tegyük fel, hogy találkozol velük, és meg szeretnéd tudni, melyikük John. Ennek kiderítésére egyetlen legfeljebb háromszavas kérdést tehetsz fel az egyiknek. Mit kérdeznél ?

Ez a feladat nagyon hasonlít az előzőhöz. Az egyik különbség, hogy itt a kitalálandó „tulajdonság" magukra a válaszolókra vonatkozik, ezért nem izomorf logikailag a két feladat. A másik pedig, hogy három szóban van maximálva a feltehető kérdés hossza, így összetett mondatokkal nem lehet trükközni. Az utóbbi feltétel jelentős könnyítést is ad, hiszen három szóba nem sok fér bele, ha ezzel a mondattal valóban ki szeretnénk találni, melyik testvér lehet John. A Smullyan-könyv [16], amelyben a feladat szerepel, párbeszédes formában mutatja meg a feladat feladását és a megoldási kísérleteket is. A találgatások, amelyek elhangzanak, nagyon jellemzőek, a valóságban is ilyesmi megoldási kísérletek fordulnak elő, így felsorolom őket.

1. *Te John vagy ?*
Erre sajnos attól függően fogunk választ kapni, hogy John hazudós-e. Ha őt kérdeztük és hazudik, akkor letagadja, ha viszont ő az igazmondó, akkor bevallja.
2. *A víz nedves ?*
Ebből a kérdésből kiderül ugyan, melyikük a hazudós, de semmilyen információnk nincs arról, melyikük John.
3. *Te hazudós vagy ?*
Ebből még az sem derül ki, hogy hazudik-e, hiszen erre a kérdésre mindketten nemet válaszolnak, arról pedig szó sem esett, hogy melyikük John.
Egy lehetséges megoldás :
4. *John igazat mond ?*

Természetesen a többi variációra is rákérdezhetünk, így hasonlóan jó megoldás a „John mindig hazudik ?", a „John testvére hazudik ?" vagy a „John testvére igazmondó ?" kérdés is. A feladatok megoldását a leírtakhoz hasonlóan, beszélgetős formában képzelem el. A feladat kitűzése után – külön gondolkodási idő nélkül – ötletek felvetése- és nyilvános megvitatása-, elemzéseként. A „nem igaz az, hogy John hazudik” a „John hazudik” állítás tagadása, vagyis az az állítás, hogy John nem hazudik (azaz igazat mond). Egy állítás tagadása pontosan akkor igaz, ha maga az állítás hamis (és így pontosan akkor hamis, ha az eredeti állítás igaz. Ezt táblázattal ábrázolva:

| **A** | ¬A |
|---|---|
| i | h |
| h | i |

Ezt a táblázatot a „tagadás” művelet igazságtáblázatának hívjuk; a ¬ a tagadás jele, tehát az A állítás tagadását ¬A jelöli.

### Az egzisztenciális és az univerzális kvantor

Ezek a megnevezések természetesen nem fognak elhangzani a gyerekek előtt, ahogy később a negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció és ekvivalencia sem. Sajnos a kifejezések szerepelnek a legtöbb tankönyvben, de én úgy gondolom, hogy felesleges idegen szavakkal elvonni a gyerekek figyelmét a fogalmak lényegéről. Abból a szempontból lehet(ne) esetleg hasznos, hogy így kellőképpen elválasztja a „nem”, „és”, „vagy” stb. matematikai logikai szakszavakat a hétköznapi jelentésüktől, ennek ellenére nemhogy a szakkörön – amin fiatalabb tanulók is részt vehetnek ráadásul –, a tanórán sem használnám az idegen kifejezéseket. Nehéz őket megjegyezni, elkülöníteni egymástól, úgyis össze fogják keverni, és elvonja a figyelmet a logikai tartalomról. Úgy gondolom, hogy ezen fogalmak szakszerű idegen nevét elegendő az egyetemi tanulmányokhoz, tanulmányok folytatása közben megtanulni.
A „minden” és a „van olyan” logikai jelentésének ismerete és pontos megértése, használata alapvető fontosságú. Ezekkel a kifejezésekkel gyakran találkozunk – különféle megfogalmazásokban – a mindennapi életben állító és tagadó formában is. Valamiért mégis hajlamosak a diákok a „mindenki”-t „senki”-ként tagadni, azaz tagadásként az ellentétét mondják. Kérdezték már tőlem, hogy a „Mindenki részt vett az előadáson.”-nak miért nem a „Senki sem vett részt az előadáson.” a tagadása, amely kérdésre elmagyaráztam, hogy a tagadás azt jelenti, hogy mindig igaz, ha az eredeti állítás nem igaz, na mármost ha pl. ketten részt vettek, de 25-en nem, akkor nem igaz, hogy mindenki részt vett, de az sem, hogy sneki. Aztán megkérdeztem, hogy mi a „fehér” tagadása, mire jött reflexből a „fekete” válasz, aztán persze rájött magától is, hogy ami nem fehér, az éppenséggel piros is lehet. Így különbséget tudtunk tenni ellentét és tagadás

között, és világosabb lett a fogalom. Valószínűleg itt a kezdeteknél még nem értik teljesen, de főként – ahogy ez teljesen természetes – nem szokták meg, nem tudják készségszinten kezelni a tagadás fogalmát. Ezt a problémát úgy lehet megelőzni, vagy legalább csökkenteni, hogy előtte a tagadást több oldalról körüljárjuk, több megfogalmazásban, példákkal, feladatokkal. Igazán elmélyülni – a tagadással és a többi fogalommal együtt – a későbbiekben, sok-sok feladat megoldása, többszöri megjelenés és főként önálló használat során fog.

**11.** A feladat két szereplője A és B, mindkettő vagy lovag, vagy lókötő. A a következőt állítja:
A: Legalább egyikünk lókötő.
Milyen típusú A illetve B?

**12.** Most három szereplőnk van, A, B és C. A következőket állítják:
A: Mindnyájan lókötők vagyunk.
B: Pontosan egy lovag van köztünk.
Milyen típusú A, B és C?

Megoldások:

11. Ha A lókötő lenne, akkor állítása (tartalmilag) igaz lenne, lókötő viszont nem állíthat igazat. Így A lovag, és (igaz) állítása szerint legalább egyikük lókötő, tehát B lókötő.

12. A nem lehet lovag, mert akkor igazat kellene mondania, ebben az esetben viszont nem igaz, hogy mindnyájan lókötők. A tehát lókötő, így az állítása hamis, azaz van köztük lovag. Ha B lovag, akkor igazat mond, pntosan egy lovag van köztük, aki ő, C így csak lókötő lehet. Ha B lókötő, akkor nem igaz, hogy pontosan egy lovag van köztük, azaz C nem lehet egyedül lovag, tehát ő is lókötő. De ekkor a lókötő A-nak igaz lenne az állítása, ami lehetetlen. Az egyetlen érvényes lehetőség tehát, hogy A és C lókötők, B pedig lovag.

**13.** Hogyan tagadnád a következő mondatokat?

**a)** Nyikorog a szekér.
**b)** A rablást nem lovag követte el.
**c)** A hó fehér.
**d)** Amelyik kutya ugat, az nem harap.
**e)** Minden mackó szereti a mézet.
**f)** Van valami, amit tudnod kell.

**g)** Akinek nem kell korán kelnie, az sokáig alszik.
**h)** Kinga haja szőke.
**i)** Minden városka lakatlan.

**Gondolkodnivaló otthonra**

**1.** Egy lapon a következő 100 állítás olvasható:

Ezen a lapon pontosan 1 hamis állítás van.
Ezen a lapon pontosan 2 hamis állítás van.
Ezen a lapon pontosan 3 hamis állítás van.
. . .
Ezen a lapon pontosan 99 hamis állítás van.
Ezen a lapon pontosan 100 hamis állítás van.

Mely állítások igazak és melyek hamisak?

**2.**
**a)** Egyszer, amikor ellátogattam a lovagok és lókötők szigetére, találkoztam két lakossal, akik egy fa alatt heverésztek. Megkérdeztem egyiküket: „Lovag valamelyikük?” Ő válaszolt, és én tudtam, hogy mi a helyes válasz kérdésemre.
Milyen típusú volt az az ember, akit megkérdeztem? És a másik?

**b)** Tegyük fel, hogy te látogatsz el a Lovagok és lókötők szigetére. Találkozol két lakossal, akik lustán heverésznek a napon. Megkérdezed egyiküktől, hogy a másik lovag-e. Kapsz valamilyen (igen-nem) választ. Ekkor megkérdezed a másiktól, hogy lovag-e az első. Kapsz valamilyen (igen-nem) választ. Szükségszerűen ugyanaz-e a két válasz?

**3.** Mr. McGregor, egy londoni boltos felhívta a Scotland Yardot, hogy kirabolták a boltját. Három gyanúsítottat hallgattak ki, A-t, B-t és C-t. A következők derültek ki:
1. A, B és C mindegyike járt a boltban a rablás napján, és senki más nem volt aznap a boltban.
2. Ha A bűnös, akkor pontosan egy bűntársa volt.
3. Ha B ártatlan, akkor C is az.
4. Ha pontosan két tettes volt, akkor A az egyik.
5. Ha C ártatlan, akkor B is az.
Vajon kit vádolt Craig felügyelő?

Megoldások

1. A lapon 100 db egymást páronként kizáró állítás szerepel, ezért közülük legfeljebb egy lehet igaz. Ha egyik sem lenne igaz, akkor az azt jelentené, hogy 100 hamis állítás szerepelne a lapon, ám akkor az utolsó állítás mégis igaz lenne. Így csak az lehet, hogy pontosan egy állítás igaz, és pontosan 99 állítás hamis a lapon, tehát az utolsó előtti mondat igaz, az összes többi pedig hamis.

2. Ez a két rejtvény a metarejtvények közé tartozik. Érdekes ez a rejtvénycsoport, mert azt használja fel, hogy a feladat szereplője tud valamit, amit mi nem, mi viszont tudunk valamit arról, hogy ő ebből a tudásból mire tud következtetni. Ilyenkor természetesen (és általában máskor is) feltesszük, hogy a szereplők tökéletes logikával tudnak gondolkodni.
a) Tegyük fel, hogy a kérdezett *igennel* válaszolt. Ekkor ha ő lovag, akkor a helyes válasz tényleg igen a kérdésre, ha viszont lókötő, akkor a helyes válasz a nem lenne. Mivel tudjuk, hogy a kérdező a válasz alapján el tudta dönteni, mi a helyes válasz a kérdésére, ezért a kérdezett nem válaszolhatott igennel. Nemmel válaszolt tehát. Ebből következik, hogy nem lehet lovag, hiszen ha az lenne, akkor van köztük lovag, ő pedig igazat felelne. A kérdezett tehát lókötő, így állítása hamis, azaz van köztük lovag. Az pedig nem lehet más, csak a társa.
b) A lehetséges eseteket, illetve az egyes cellákon belül függőleges vonallal elválasztva az első illetve a második kérdésre kapott választ mutatja a következő táblázat. Nevezzük az első válaszolót A-nak, a másikat B-nek.

| | **A lovag** | **A lókötő** |
|---|---|---|
| **B lovag** | igen \| igen | nem \| nem |
| **B lókötő** | nem \| nem | igen \| igen |

Látható tehát, hogy a két kérdésre minden lehetséges esetben ugyanaz a válasz.

3. Tegyük fel, hogy A bűnös! Ekkor 2. miatt volt bűntársa, aki az 1. miatt csak B vagy C lehetett. 3. és 5. miatt nem lehetett azonban csak B vagy csak C, tehát mindkettő A bűntársa kellett, hogy legyen, ami viszont ellentmond 2.-nek.
Tegyük fel most, hogy A ártatlan. 3. és 5. miatt B és C nem lehetnek külön-külön bűnösek, csak egyszerre, ha tehát B bűnös, akkor C is, ha pedig C bűnös, akkor B is. Pontosan B és C nem lehet bűnös 4. miatt, A-ról már láttuk, hogy nem lehet bűnös, így az az egyetlen eset maradt, hogy A, B és C közül egyik sem bűnös.

Craig felügyelő tehát feltehetően Mr. McGregort vádolta a hatóság félrevezetése és biztosítási csalás elkövetésének kísérletével.

## 4.4. 4. Logikai játékok I.

A menetrend a szokásos: ha igénylik a megbeszélést, akkor valaki röviden elmondja a megoldásokat indoklással, ha sokan nem értik, akkor esetleg beszélünk róla hosszabban, ha csak egy-két ember, akkor óra után megbeszéljük.
Ettől a foglalkozástól kezdve nem mindenhol fogom feltüntetni a feladatok megoldását, általában nagyon hasonló a megoldás menete az előzőekben tapasztalthoz. Valamelyik állításról feltesszük, hogy igaz vagy hamis, illetve valamelyik szereplőről, hogy lovag vagy lókötő, és ebből vonunk le következtetéseket. Ahol nem egyértelmű a folytatás, ott megint esetszétválasztásra van szükség, így előbb-utóbb minden esetet végigvizsgálunk, és kiderül, melyek az érvényes lehetőségek. A megoldás során igyekszünk észrevenni olyan összefüggéseket, amelyek csökkentik a külön-külön megvizsgálandó esetek számát.

**Bemelegítő feladatok**

**1.** Van három zsákunk. Az egyikben van két alma, a másikban egy alma és egy barack, a harmadikban két barack, de nem tudjuk, melyik zsákban melyik. A zsákokon feliratok vannak. Az egyiken "2 alma", a másikon "1 alma, 1 barack", a harmadikon "2 barack". Tudjuk, hogy egyik zsákban sem az van, ami a címkéjén olvasható. A felcímkézett zsákok bármelyikéből (de csak 1-ből) egyetlen gyümölcsöt kivehetsz, és megnézheted, mi az. Ebből kell kitalálnod, melyik zsákban milyen gyümölcsök vannak. Melyik zsákhoz érdemes nyúlni?

**2.** A következő rablás gyanúsítottjai ismét Abu, Ibn és Haszib voltak. Az egyikük egy lovat lopott, a másik egy öszvért, a harmadik pedig egy tevét. Végül mindhármukat elkapták, de azt nem tudták, melyikük mit lopott. A tárgyaláson a három tolvaj a következőket állította:
Abu: A lovat Ibn lopta. Haszib: Nem, Ibn az öszvért lopta. Ibn: Mindketten hazudnak! Egyiket sem én loptam.
Amint kiderült, aki a tevét lopta, az hazudott, és aki a lovat lopta, az igazat mondott. Ki melyik állatot lopta el?

**Csoportmunka**

**3.** Subidam és Subidu sűrűn látogatták az Erdőt. Egyikük olyan volt, mint az Oroszlán, minden hétfőn, kedden és szerdán hazudott, a hét többi napján igazat mondott. Másikuk olyan volt, mint az Egyszarvú, csütörtökön, pénteken és szombaton hazudott, de a hét többi napján igazat mondott. Csakhogy Alice nem tudta, hogy melyikük olyan, mint az Oroszlán, és melyikük, mint az Egyszarvú. Hogy még rosszabb legyen a dolog, a testvérek annyira hasonlítottak egymásra, hogy Alice meg sem tudta különböztetni őket (kivéve, ha a hímzett gallérjukat viselték, de ez ritkán fordult elő). Mindez nagyon zavarba ejtette szegény Alice-t. Íme Alice néhány kalandja Subidammal és Subiduval.

Egy napon Alice együtt találta a testvéreket, akik a következőket állították:

*Egyik*: Subidam vagyok.
*Másik*: Subidu vagyok.
Igazából melyikük volt Subidam, és melyikük volt Subidu?

**4.** Egy másik alkalommal Alice összetalálkozott a testvérekkel, és megkérdezte egyiküket: „Hazudsz vasárnaponként?" - „Igen" – válaszolta az. Ekkor Alice feltette a másiknak is ugyanezt a kérdést. Ő mit válaszolt?

**5.** Egy napon a testvérek a következőket állították:
*Egyik*: 1. Szombaton hazudok. 2. Vasárnap hazudok.
*Másik*: Holnap hazudni fogok.
Milyen nap volt?

**6.** Megoldódik a rejtély! E nevezetes alkalommal Alice három nagy rejtélyt oldott meg. Összetalálkozott a két testvérrel, akik vigyorogva álltak egy fa alatt. Alice remélte, hogy most majd rá fog jönni három dologra:
1. Milyen nap van;
2. Kettejük közül melyik Subidam;
3. vajon Subidam az Oroszlánra vagy az Egyszarvúra hasonlít hazudozási szokásában (az az igazság, hogy ezt már régóta szerette volna tudni!)
A két testvér a következőket állította:
*Egyik*: Ma nincs vasárnap.
*Másik*: Pontosabban hétfő van.
*Egyik*: Holnap Subidunak hazudós napja lesz.
*Másik*: Az Oroszlán tegnap hazudott.
Alice tapsikolt örömében, a rejtély ezennel teljesen megoldódott.
Mi a megoldás?

3. Ez a két állítás vagy egyszerre igaz, vagy egyszerre hamis. Mivel nincs olyan nap, amikor mindketten hazudnak, mindkettő igaz, tehát tényleg az első Subidam és a második Subidu, és vasárnap van.
4. Mivel vasárnaponként mindkettő igazat mond, az első állítás hamis, így a másiknak biztosan igazmondó napja van, így igazat fog válaszolni. És mivel vasárnap mindkettő igazat mond, az igaz válasz bármelyikük esetében az „igen”, így a második kérdezett igennel fog felelni a feltett kérdésre.
5. A „vasárnap hazudok” kijelentés mindkét testvér szájából hazugság, ezért az első megszólalónak hazudós napja van. Neki így az első állítása is hamis, vagyis szombaton is igazat mond. Ő tehát Oroszlán-típus, azaz hétfőn, kedden és szerdán hazudik, ezen napok közül az egyiken zajlik a beszélgetés. Testvérének igazmondó napja van, tehát ő másnap tényleg hazudni fog, azaz nem lehet más nap, csak szerda.
6. A „Ma nincs vasárnap.” kijelentés biztosan igaz, hiszen ha hamis lenne, akkor vasárnap hazudott volna valamelyikük, ami lehetetlen. Tehát *Első* igazat mond, vagyis az ő második állítása is igaz, azaz Subidu holnap hazudik. Mivel nincs vasárnap, *Második* ma hazudik, tehát az ő állításai hamisak, azaz nincs hétfő, az Oroszlán pedig tegnap igazat mondott. Figyelembe véve, hogy nincs se hétfő, se vasárnap, az utóbbi tényből következik, hogy péntek vagy szombat van. A ma igazat mondó *Első* tehát az Oroszlánra hasonlít, a *Másik* pedig az Egyszarvúra. Mivel tudjuk, hogy Sudibu holnap hazudik, nem lehet szombat sem (vasárnap minden szereplő igazat mond), így péntek van, Subidu pedig az Egyszarvúra hasonlít, így ő a *Második*, Subidam az *Első*.

### Egyéni feladatok

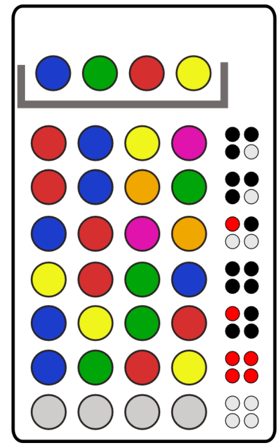
**7.** Három emberrel beszélsz a Lovagok és lókötők szigetén, A-val, B-vel és C-vel, és tudod, hogy pontosan egyikük farkasember. A következőket állítják:
A: C farkasember.
B: Nem vagyok farkasember.
C: Közülünk legalább ketten lókötők.

a) Lovag vagy lókötő a farkasember?
b) Ha útitársul kellene választanod egyiküket, és fontosabb az, hogy útitársad ne legyen farkasember, mint az, hogy ne legyen lókötő, akkor melyiküket választanád?

## Mastermind

Az óra második felében a *Mastermind* nevű (Mesterlogikának fordított) logikai játékkal játszunk.

Ebben a játékban két játékos játszik egymással. Az egyik „elrejt” egy négy hosszúságú színsort, amit a másiknak ki kell találnia. Ehhez a rendelkezésre álló hat (más változatokban nyolc) színt használhatja, és egy színt többször is, akárhányszor felhasználhat a kódban. A másik játékosnak az elrejtett színsort kell kitalálnia oly módon, hogy a játéktáblában elhelyezett színfigurák segítségével ő is négy hosszú színsorokat rak ki, a másik pedig fehér és fekete bábukkal „válaszol”, vagyis jelzi, hogy az éppen kirakott színkódból hány szín van ugyanazon a helyen, mint az általa elrejtettben, illetve hány olyan szín van benne, ami szerepel ugyan az elrejtettben is, de másik helyen.



A játék megkezdése előtt megbeszéljük, ki ismeri, ki nem ismeri ezt a játékot, illetve hogy aki ismeri, azok közül ki az, aki kedveli, és ki az, aki kevésbé. Aki nagyon nem szeretne ilyet játszani, az esetleg kaphat másik feladatot. Elvégre ez egy szakkör, a játék nem kötelező, más (témába vágó) feladatokkal is foglalkozhat az, aki nem kedveli a *Mastermind*-ot. Még az is elképzelhető, hogy a többiek játéka felkelti majd az érdeklődését és később csatlakozik valamelyik pároshoz. A játékot párokban (esetleg hárman) fogják játszani. Ha nagyjából megfelelőek az arányok, olyan párokat alakítunk, hogy legalább a párok egyik tagja ismerje a játékot, így ő el tudja magyarázni a párjának a szabályokat. Ha a társaság több mint fele nem ismeri, akkor közösen megbeszéljük a játék menetét.

Ez a játék hasznos, mert fejleszti a logikus gondolkodást, és rendkívül szórakoztató is tud lenni. Iskolai környezetben pedig még erősebb hatása van annak, ha egy olyan játék előkerül, amit „iskolán kívülről” ismer, vagy amivel általában iskolán kívül szokott játszani, egy szóval amit nem az iskolához köt. Ez érdekessé teheti ezt a foglalkozást, motiválóan hat a tanulókra. A játék maga meglepetés lesz, de óra elején megkérem majd a csoportot (esetleg egy konkrét tagját külön is), hogy szóljanak 20 perccel az óra vége előtt, mert valamit fogunk utána csinálni, amihez több idő kell. Ezzel nyilván felkeltem majd az érdeklődésüket, de annyira nem fognak azért izgulni, hogy emiatt ne tudjanak koncentrálni az óra első felére.

Miközben zajlik a játék, folyamatosan figyelem őket, odamegyek hozzájuk, megbeszéljük, ki hogyan áll, miből mire következtet, milyen feltevésekkel próbálkozik. Így tudatosítjuk is a játékot, és nem csak találomra rakosgatnak a gyerekek. Ebben a játékban a logika, logikai következtetések szinte tiszta formában vannak jelen.

A játékot eredeti táblán vagy papíron játsszuk. Lesz egy valódi játék is biztosan (beviszem az enyémet), de azzal maximum egy pár tud játszani. Esetleg lehet előre kérni, hogy akinek van ilyen játéka, hozza be, de ezzel elvész a „meglepetés”, másrészt így sem biztos, hogy összegyűlik elegendő. Harmadrészt pedig, és ez a legfontosabb: az eredeti, táblás változatban egy-egy színből elég kevés figura van. Így ha a színek a saját rekeszükben vannak, nagyon látványos, hogy melyik színből maradt kevesebb az „elrejtés” után, ez pedig sokat segíthet, mert ebből már tudható majdnem biztosan, miylen színek szerepelnek a kódban. Ha pedig egy színből több is szerepel, az még árulkodóbb. Ezen lehet ugyan segíteni mondjuk úgy, hogy a színeket összekeverbe egy nagyobb dobozban tároljuk. Összesen viszont így is kevés van egy-egy színből, így előfordulhat, hogy elfogy, még mielőtt a játékos kitalálná a megfejtést. Mindezeket a problémákat áthidalja, ha papíron, színes ceruzákkal játszunk, esetleg egyszínű tollal/ceruzával, a színek kezdőbetűit használva.

(A Mastermind játék online, számítógépes formában is létezik egyébként például a *http://www.web-games-online.com/mastermind* vagy a *http://www.mah-jongg.ch/mastermind/mastermind.html* oldalon. Ezek tanórai használatra kevésbé alkalmasak, viszont ha megtetszik valakinek a játék, otthon egyedül is folytathatja.) A játék szakköri megvalósítására vonatkozó saját ötletemet Havas Katalin könyve [6] erősítette meg.

**Gondolkodnivaló otthonra**

Ezen az órán az otthoni gondolkodnivaló kiosztása még a játék előtt történik, utána nehezebb lenne összeszedni a figyelmet. Sőt, valószínűleg nem is egyszerre fogják elhagyni a termet a tanulók, akinél még nem ért véget az aktuális parti, az esetleg be akarja fejezni (ha nem siet, és szabad még a terem, ahol a szakkör folyik).

**1.** Egy vonaton Smith, Robinson és Jones a fűtő, a fékező és a mozdonyvezető, de nem feltétlenül ebben a sorrendben. A vonaton utazik továbbá három üzletember, akiket ugyanígy hívnak: Mr. Smith, Mr. Robinson és Mr. Jones. A következőket tudjuk:

1. Mr. Robinson Detroitban lakik.
2. A fékező pontosan félúton lakik Chicago és Detroit között.
3. Mr. Jones pontosan 20 ezer dollárt keres évente.
4. A fékező közvetlen szomszédja, az egyik utas pontosan háromszor annyit keres, mint a fékező.
5. Smith billiárdban meg szokta verni a fűtőt.

6. A fékezővel azonos nevű utas Chicagóban lakik.

Melyik vasúti dolgozót hogy hívják?

**2.** Egy várat egy olyan sárkány őriz, aki minden állításról el tudja dönteni, hogy igaz vagy hamis. Mindenkinek, aki megpróbál bemenni, mondania kell egy mondatot. Ha valaki igazat mond, akkor az illetőt megégeti, ha hazudik, akkor megeszi. Arra megy egy vándor, mond valamit a sárkánynak, mire az beengedi őt a várba. Mit mondott a vándor?

## 4.5. 5. Konjunkció és diszjunkció

Ahogy a szakkört bevezető fejezetben említettem, a kijelentéslogika fogalmait, így a konjunkció és diszjunkció fogalmát is feladatokon keresztül szeretném bemutatni a diákoknak, megismertetni azokat velük. A negációhoz, azaz a tagadáshoz hasonlóan a konjunkció és a diszjunkció is szerepel a természetes nyelvi logikában. Ezért vannak olyan feladatok, amik használják ezeket, és mégis megoldhatók a fogalmak pontos matematikai definíciójának ismerete nélkül, pusztán a hétköznapi jelentésükre támaszkodva. Ám az egyszerű (kvantort nem tartalmazó elemi) kijelentések tagadásához képest itt általában bonyolultabb, s így bizonytalanabb is a helyzet. Az első problémák ott szoktak előjönni, hogy mikor hamis az *és*-t tartalmazó kijelentés, illetve mikor igaz a *vagy*-ot tartalmazó. Az *és* esetében pedig egyértelmű a köznapi szóhasználat is, és használata megegyezik a logikai jelentéssel, mégis valahogy szokatlan a logikában járatlan nyelvhasználók számára.

A következő két bevezető feladatban már szerepelnek az új fogalmak, de a feladatok – reményeim szerint – „hétköznapi logikával" megoldhatók. Mégis néhányakban, akár kimondatlanul, felvetődik már talán a kérdés, mit értsünk például az alatt, hogy „X vagy Y bűnös", illetve mikor igaz, mikor hamis az „X és Y nem bűnösek mindketten". A fogalmak további kibontására, majd tisztázására a foglalkozás többi feladata szolgál.

**1.** Egy alkalommal két vádlott állt egy kicsiny sziget bírósága előtt. A legkülönösebb az volt az esetben, hogy az ügyészről köztudott volt, hogy lovag vagy lókötő. A következőket mondta a bíróságon:
1. X bűnös.
2. X és Y nem bűnösek mindketten.
Ha tagja lennél az esküdtszéknek, mire következtetnél ebből?

**2.** Tegyük fel, hogy az előbbi helyzetben a fentiek helyett az ügyész a következőket állítja:
1. X vagy Y bűnös.
2. X nem bűnös.
Mire következtetsz ebből?

**3.** Térjünk vissza a Feledékenység erdejébe. A hét melyik napján lehetséges, hogy az Oroszlán a következő két kijelentést teszi:
1. Tegnap hazudtam.
2. Holnap megint hazudok.
(Emlékeztető: Az Oroszlán minden hétfőn, kedden és szerdán hazudik, a hét többi napján igazat mond.)

**4.** A hét melyik napján lehetséges, hogy az Oroszlán a következőket kijelentést teszi: Tegnap hazudtam, és holnap megint hazudni fogok.

Az utóbbi két feladatot külön-külön, de közvetlenül egymás után kapják meg a tanulók. Miután az elsőt megoldották, és kiderült, hogy nincs megoldása, következik a második. Ez első pillantásra ugyanannak a feladatnak tűnik, mint az előző, ezért egy-egy tanulóban felvetődhet a kérdés, hogy nem ugyanaz-e véletlenül. Valószínűleg tehát valaki meg fogja kérdezni (vagy csak „bekiabálja”, hogy szerinte ez ugyanaz). Ebből kiindulva meg lehet beszélni, hogy ki szerint ugyanaz, ki szerint nem, és ki miért gondolja azt, amit gondol. Ha sokan nem értik, mi a különbség, akkor itt tisztázhatjuk az „és” műveletet. Megbeszéljük, hogy kijelentéseket kapcsol össze, illetve hogy mikor tekintjük igaznak és hamisnak, hétköznapi életből vett példákkal illusztrálva. Ezután táblázattal is megjelenítjük a megbeszélteket.

A két *és*-sel összekapcsolt kijelentést – az egyszerűség kedvéért – nevezzük A-nak és B-nek. Ekkor logikailag négy különböző eset lehetséges A és B logikai értékét tekintve: A és B egymástól függetlenül lehet igaz vagy hamis. Táblázatban összefoglalva, és feltüntetve, hogy az egyes esetekben az „A és B” – logikai jelöléssel A ∧ B – igazságértékét is:

| **A** | **B** | A ∧ B |
|---|---|---|
| i | i | i |
| i | h | h |
| h | i | h |
| h | h | h |

A fenti táblázat a logikai *„és”* művelet *igazságtáblázata*.

A *vagy* kötőszó esetében még összetettebb a helyzet. Ezt a kötőszót ugyanis a magyar nyelv háromféle különböző jelentésben használja ([10] nyomán), de ezt a három jelentést tudatosan nem különböztetjük meg egymástól a nyelvhasználat során. Legtöbb esetben automatikusan kiválasztjuk a helyzethez illő jelentésárnyalatot. A háromfajta jelentés:

1. *„Döntsd el, hogy bejössz vagy kint maradsz!”* – Miközben a beszélő épp becsukja egy helyiség ajtaját.
A két lehetőség kizárja egymást, és valamelyik mindenképp bekövetkezik, más lehetőség nincs.

2. *Bármikor be tudunk menni, anyánál vagy nálam mindig van kulcs.*
Valamelyik mindenképp teljesül, esetleg mindkettő is.

3. *„Ön dönt: iszik vagy vezet!”*
A kettő kizárja egymást (a felszólítás szerint), de egyik sem kötelező.

A matematikában, matematikai logikában a diszjunkció ezek közül a másodiknak felel meg, azaz az összetett kijelentés igaz, ha a *vagy*-gyal összekapcsolt kijelentések közül *legalább* az egyik – azaz vagy az egyik, vagy a másik, vagy mindkettő, de az egyik mindenképpen – igaz. (A fenti példák a szakkörön nem feltétlenül jelennek meg, csak nyelvi háttérként szerepelnek itt.) Az A vagy B kapcsolatot a logikai szimbólummal jelöljük, ezzel a jelöléssel a *vagy* igazságtábázata:

| **A** | **B** | A ∨ B |
|---|---|---|
| i | i | i |
| i | h | i |
| h | i | i |
| h | h | h |

Folytatásként tekintsük a következő két feladatot. Az elsőben konjunkció szerepel új nyelvi formában, a második pedig már a diszjunkció bevezetését kívánja. Mindkettőt előzetes megbeszélés nélkül kapják a tanulók. Ha már felismerték az új logikai műveletet, akkor vezetjük be az új fogalmat. A bevezetéshez szolgáltat újabb, az előző feladatokhoz képest szokatlan, meghökkentő, elvontabb példát a 7-es számú feladat.

**5.** Tegyük fel, hogy A ezt mondja:
A: Én lókötő vagyok, de B nem az.
Milyen típusú A illetve B?

**6.** Ezúttal két szereplő van, A és B. Csak A szólal meg:
A: Lókötő vagyok vagy B lovag.
Milyen típusú A illetve B?

**7.** Tegyük fel, hogy A ezt mondja: Lókötő vagyok, vagy 2 meg 2, az 5. Mire következtetne ebből?

**8.** A királylány olyan emberhez szeretne férjhez menni, aki lovag, szereti őt, és még okos is. Kihirdeti hát a király, hogy ahhoz adja a lányát feleségül, aki úgy tud szerelmet vallani a lánynak egyetlen mondattal, hogy abból kiderül az is, hogy lovag, és az is, hogy szereti a királylányt.
Mi lehetne egy ilyen mondat?

**Gondolkodnivaló otthonra**

**1.** Egyik nap Alice csak az egyik testvérrel találkozott. Az a következőt állította: „Ma hazudok és Subidu vagyok."
Melyikük volt?

**2.** Tegyük fel, hogy a fentiek helyett ezt mondta: „Ma hazudok vagy Subidu vagyok."
Megtudhatjuk-e ebből, hogy melyikük volt?

**3.** Hogyan tagadnád a következő mondatokat?
a) Hideg van és fúj a szél.
b) Lovag vagy lókötő vagyok.
c) Ma sem az Oroszlán, sem az Egyszarvú nem hazudik.
d) Minden lovag igazat mond és minden lókötő hazudik.
e) Van olyan tanuló az osztályban, aki szereti a fizikát vagy a kémiát.
f) Nyikorog a szekér és minden városka lakatlan.

## 4.6. 6. Logikai játékok II.

**1.** Van valahol két szomszédos város. Az egyik város lakói állandóan hazudnak, a másik város lakói pedig mindig igazat mondanak. Egyszer a két város vásárt rendez, és a lakosok a két városból összekeverednek úgy, hogy az igazmondóknak egy része elmegy a hazugok városába, és a hazugok egy része elmegy az igazmondók városába. Te betévedsz az egyik városba, és meg szeretnéd tudni, hogy melyik városban vagy, de csak egy embert szólíthatsz meg az utcán, és csak egyetlen kérdést tehetsz fel neki. Mi az a kérdés, amire ha választ kapsz, mindegy, milyen ember mondja (hazug vagy igaz), biztosan megtudod, hogy melyik városban vagy a kettő közül ?

A következő feladatsort a tanulók egyéni munka keretében oldják meg, kiadott lapról. (A bevezető és a feladatok közötti összekötő szövegek szándékosan szerepelnek itt, és a tanulók által kapott lapon is szerepelni fognak eredeti formájukban. Egyrészt kellenek a feladatok megértéséhez, másrészt – mint azt a szakkörről szóló bevezető fejezetben már kifejtettem – így szórakoztatóbbak, élvezetesebbek is a feladatok.)

**2. Az első rab.** Az első napon három rabot tettek próbára. Mindhármuknak elmagyarázta a király, hogy a két szoba mindegyikében vagy egy hölgy, vagy egy tigris található. az is lehet, hogy mindkettőben tigris van, az is, hogy mindkettőben hölgy, és persze az is, hogy az egyikben hölgy, a másikban tigris. „Tegyük fel, hogy mindkét szobában tigris található – mondta a rab. – Akkor mi van ?"„Akkor peched van !" – válaszolta a király. „És ha mindkettőben hölgy ?" – kérdezte a rab. „Akkor természetesen szerencséd van – felelte a király. – Ezt igazán kitalálhattad volna magadtól is !" „Na és ha az egyik szobában hölgy van, a másikban pedig tigris – érdeklődött a rab –, akkor mi történik ?" „Az teljesen attól függ, melyiket választod, nem ?" „Honnan tudjam, hogy melyiket válasszam ?" – kérdezte a rab. A király rámutatott a szobák ajtaján levő feliratokra :

| | |
|---|---|
| I. EBBEN A SZOBÁBAN HÖLGY VAN, A MÁSIKBAN PEDIG TIGRIS | II. EGYIK SZOBÁBAN HÖLGY VAN, A MÁSIKBAN PEDIG TIGRIS |

„És ezek a feliratok igazak ?" – kérdezte a rab.
„Az egyik igaz, de a másik hamis" – válaszolta a király.
Melyik ajtót nyitnád ki, ha te lennél a rab (feltéve persze, hogy jobban szeretnél a hölggyel találkozni, mint a tigrissel) ?

**3. A második rab.** Ezúttal, ahogy azt a király elmagyarázta, vagy mindkét felirat igaz, vagy mindkettő hamis. Íme a feliratok:

| | |
|---|---|
| I. EBBEN A SZOBÁBAN TIGRIS VAN, VAGY A MÁSIK SZOBÁBAN HÖLGY VAN | II. A MÁSIK SZOBÁBAN HÖLGY VAN |

**4. A harmadik rab.** Új szabály lép életbe! A király mindenkinek elmagyarázta, hogy ezentúl ha a bal oldali szobában (I. szoba) hölgy van, akkor az ajtaján levő felirat igaz, ha viszont ott tigris van, akkor a felirat hamis. A jobb oldali szobával (II. szoba) éppen ellenkező a helyzet, ha hölgy van a szobában, akkor az azt jelenti, hogy a felirat hamis, ha tigris van a szobában, akkor az azt jelenti, hogy a felirat igaz. Most is lehetséges, hogy mindkét szobában hölgy van, az is, hogy mindkettőben tigris, és az is, hogy az egyikben hölgy, a másikban tigris.
Miután elmagyarázta a király az előbbi szabályokat a rabnak, megmutatta a feliratokat:

| | |
|---|---|
| I. MINDKÉT SZOBÁBAN HÖLGY VAN | II. MINDKÉT SZOBÁBAN HÖLGY VAN |

**5. A negyedik rab.** A király különösen kedvelte ezt és a következő rejtvényt. Továbbra is az új szabályok érvényesek.
A feliratok:

| | |
|---|---|
| I. MINDEGY, MELYIK SZOBÁT VÁLASZTOD | II. A MÁSIK SZOBÁBAN HÖLGY VAN |

Mitévő legyen a rab?

**6. Az ötödik rab.** A feliratok:

| | |
|---|---|
| I. NEM MINDEGY MELYIK SZOBÁT VÁLASZTOD | II. JOBBAN JÁRSZ, HA A MÁSIK SZOBÁT VÁLASZTOD |

Mitévő legyen a rab?

**Létezik-e Subidi?** A következő feladatsort a tanulók csoportmunkaként kapják.

Alice legfurcsább kalandja a Subi testvérekkel a következő volt: egyik nap Dingidungi összetalálkozott Alice-szel, és ezt mondta: „Gyermekem, szeretnék neked elmondani egy nagy titkot. A legtöbben nem tudják, de Subidunak és Subidamnak van még egy testvére, akinek a neve Subidi. Távoli vidéken él, de alkalmanként ide látogat. Pontosan annyira hasonlít Subidura és Subidamra, mint amennyire Subidu és Subidam hasonlít egymásra.” „Milyen napokon hazudik Subidi?” „Subidi mindig hazudik” - válaszolta Dingidungi. Alice elsétált magában tűnődve. Lehet, hogy az egészet csak Dingidungi találta ki – gondolta. Nagyon gyanúsan hangzik. Mégsem hagyta nyugodni az a gondolat, hogy igaz is lehet. Négy különböző beszámolóm van arról, hogy ezután mi történt, és el is mondom mindegyiket. Arra kérem az olvasót, hogy két dolgot mindenképpen higgyen el:
1. Ha tényleg van egy Subidamtól és Subidutól különböző egyén, aki látszatra megkülönböztethetetlen tőlük, akkor azt tényleg Subidinek hívják.
2. Ha ilyen egyén létezik, akkor az tényleg mindig hazudik.

**7. Első változat** Alice egyedül találta az egyik testvért az erdőben, aki legalábbis úgy nézett ki, mintha Subidam vagy Subidu lenne. Alice elmesélte neki Dingidungi történetét, majd megkérdezte: „Ki vagy te valójában?” A válasz: „Subidu vagy Subidam vagyok és ma hazudós napom van.” – válaszolta az rejtélyesen. A kérdés az, hogy vajon tényleg létezik Subidi, vagy csak Dingidungi találta ki?

**8. Második változat** Ebben a változatban Alice mindkét testvérrel találkozott (legalábbis úgy néztek ki). Megkérdezte az egyiket: "Ki vagy te valójában?" A következő választ kapta.:
*Egyik*: Subidi vagyok.
*Másik*: Igen, ő az.
Mire következtetsz ebből?

**9. Harmadik változat** Ebben a változatban Alice csak egyikükkel találkozott. Az a következőt állította: "Ma hazudós napom van."
Mire következtetsz ebből?

**10. Negyedik változat** Ebben a változatban Alice mindkét testvérrel találkozott, legalábbis úgy néztek ki, egy hétköznapon. Megkérdezte: Tényleg létezik Subidi? A következő választ kapta:
*Egyik*: Subidi létezik.

*Másik*: Létezem.
Mire következtetsz ebből?

**11. Epilógus** Nos, vajon mi az igazság, létezik Subidi vagy nem? Négy ellentmondó változatot mondtam el arról, hogy mi is történt. De honnan a négy változat? Őszintén szólva, nem magam találtam ki ezeket a történeteket, személyesen Gruffacsórtól hallottam mindegyiket. Az Alice és Dingidungi közti beszélgetés valóban megtörtént, ezt maga Alice mesélte nekem, és Alice mindig igazat mond. De a négy változatot arról, ami ezután volt, Gruffacsór mondta el. Tudom, hogy Gruffacsór ugyanazokon a napokon hazudik, mint az oroszlán, (hétfőn, kedden és szerdán), és ezeket a történeteket négy egymást követő hétköznapon mesélte. (Tudom, hogy hétköznapok voltak, mert szombaton és vasárnap lustálkodom, az egész napot átalszom). Ugyanolyan sorrendben mondta el ő is, ahogy én.
Ezek után te is könnyen kiderítheted: vajon létezik-e tényleg Subidi, vagy Dingidungi hazudott?

**12.** A Lovagok, lókötők és normálisak szigetén ez a háromféle ember él. A lovagok továbbra is mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak, a normálisok pedig néha igazat mondanak, néha hazudnak. Ez és a következő két feladat a Lovagok, lókötők és normálisok szigetén játszódik.
Adott három ember ember, A, B és C. Közülük az egyik lovag, a másik lókötő, a harmadik pedig normális (nem feltétlenül ebben a sorrendben). A következőket állítják:
A: Normális vagyok.
B: Ez igaz!
C: Nem vagyok normális.

Milyen típusú A, B és C?

**13.** Ezúttal két ember, A és B, a következőket állítja:
A: B lovag.
B: A nem lovag.

Bizonyítandó, hogy legalább egyikük igazat mond, de nem lovag.

**14.** Ezúttal A és B a következőket mondja:
A: B lovag.
B: A lókötő.

Bizonyítandó, hogy vagy egyikük igazat mond, de nem lovag, vagy egyikük hazudik, de nem lókötő.

**Gondolkodnivaló otthonra**

**1.** Alább négy igaz állítás olvasható.
1. Aki szeret moziba járni, az nem unatkozik.
2. Aki nem szeret színházba járni, az unatkozik.
3. Aki nem szeret olvasni, az nem szeret színházba járni.
4. Aki szeret színházba járni, az szeret moziba is járni.

Mit tudunk arról az emberről, aki szeret moziba járni ?

**2.** Ez az eset a lovagok, lókötők és normálisok szigetén játszódik. Az eset főszereplői a vádlott, az ügyész, és a védőügyvéd. Az első érdekessége az ügynek, hogy tudni lehetett, hogy közülük az egyik lovag, a másik lókötő, a harmadik pedig normális, de nem lehetett tudni, hogy melyikük melyik. És ami még furcsább, a bíróság tudta, hogy ha a vádlott nem bűnös, akkor a tettes vagy a védőügyvéd, vagy az ügyész volt. Azt is lehetett tudni, hogy a bűnös nem lókötő. Főszereplőink a következőeket állították :

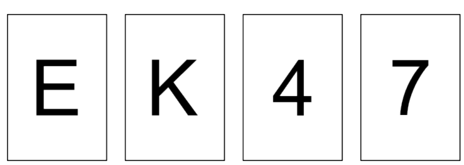
*Vádlott* : ártatlan vagyok !
*Védőügyvéd* : Védencem tényleg ártatlan !
*Ügyész* : Nem igaz, a vádlott bűnös !

Ezek az állítások elég természetesnek hangzanak. Az esküdtek összeültek, de nem tudtak döntésre jutni. A bizonyítékok nem voltak elegendőek. Craig felügyelő néhány héttel később megérkezett, és az esetet újratárgyalták. Craig felügyelő elhatározta, hogy annyi kérdést tesz fel, amennyi csak kell ahhoz, hogy minden tisztázódjon. Először is megkérdezte az ügyésztől : „Véletlenül nem ön a bűnös ?” Az ügyész válaszolt. Craig felügyelő gondolkodott egy darabig, majd megkérdezte a vádlottat : „Bűnös az ügyész ?” A vádlott válasza után Craig felügyelő már mindent tudott. Ki volt a bűnös, ki a normális, ki lovag és ki lókötő ?

## 4.7. 7. Implikáció, ekvivalencia

Ez a két művelet az előzőeknél nehezebben érthető-értethető meg. A műveletek bonyolultságát részben az adja, hogy a mondatok formailag eleve következtetések, így nehezebb egy egységként kezelni a következtető állítást, valamint nehezebb átlátni és megfogalmazni is az ilyen típusú logikai érvelést. Tekintsük először az implikációt. A nyelvünkben is szerepel a „ha ..., akkor ...” fordulat, de ezt lényegében csak arra az esetre használjuk, ha az első tag igaz, illetve gyakran beleértjük, hogy ha az első tag nem igaz, akkor a második se, tehát valójában itt a logikai ekvivalencia értelmében használjuk az implikáció alakú mondatot. Ekvivalenciamondatokat a hétköznapi életben nem szoktunk fogalmazni, csak a matematikai szaknyelvben fordul elő az „akkor és csak akkor” vagy „pontosan akkor” megfogalmazás. Ez utóbbi a kifejezések a hétköznapi nyelvben használva megmosolyogtatóak; tudományoskodó, precízkedő hatást keltenek. A hétköznapi nyelvben, és így a gyerekek nyelvhasználatában, spontán logikájában is összecsúszhatnak ezek a fogalmak, nem a megfelelő matematikai logikai fogalmakat fedik. Ez veszélyesen megtévesztő tud lenni, hiszen azt hiheti az ember, hogy ismeri az ilyen alakú mondatokat, és mégsem; illetve logikai értelemben nem. Hasonló probléma a kvantoroknál és a *vagy* műveletnél is előfordult már, azok mégis könnyebben megvilágíthatók, a gyerekek számára is „értelmessé” tehetők. Az implikáció szabályait általában nehezen fogadják el az emberek. Az elfogadtatáshoz segítségül hívható a „hamisból bármi következik” elve, aminek segítségével az óra végén be fogom bizonyítani a gyerekeknek – Smullyan nyomán [13] –, hogy *én vagyok a pápa*.

Általában elmondható, hogy abban az esetben nem okoz nehézséget az implikáció kezelése, ha tudjuk, hogy igaz az előtagja: a „ha A, akkor B” és tudjuk, hogy „A”, tehát „B” következtetési forma nem szokott gondot okozni az embereknek [9]. A többi lehetőség már problematikusabb. A következő négy kártya fekszik előttünk az asztalon:




Tudjuk, hogy minden kártya egyik oldalán egy szám, a másik oldalán egy betű van. Legalább hány kártyát kell megfordítanunk ahhoz, hogy ellenőrizni tudjuk, igaz-e a következő állítás:

„Ha egy kártya egyik oldalán magánhangzó van, akkor a másik oldalán páros szám áll.”

Mindezek előtt bevezetőnek és ráhangolódásképpen néhány olyan bűnügyi esetet választottam, amelyben implikáció szerepel, de van olyan megoldása, ahol az implikációt csak abban az esetben kell vizsgálni, ha igaz, és az előtagja is igaz, így egy nyilvánvaló következtetéssé egyszerűsödik. Ehhez a feladat többi részéből kell kikövetkeztetni, hogy az implikációt tartalmazó állítás csak igaz lehet, valamint valahonnan azt is tudjuk, hogy az előtag igaz.

**1.** Egy kicsiny szigeten bűnténnyel vádolnak egy embert. A bíróság tudta, hogy a vádlott a Lovagok és lókötők szigetén született (így maga is lovag vagy lókötő). A vádlott csak egyetlen mondatot mondhatott saját védelmében. Gondolkodott egy darabig, majd ezzel a mondattal állt elő: „Aki ezt a bűntényt elkövette, lókötő." Bölcs dolog volt tőle, hogy ezt mondta? Segített vagy ártott? Vagy mindegy volt?

**2.** Ez az eset három ember tárgyalásán történt. A-t, B-t és C-t rablásban való részvétellel vádolták. A következő két tény derült ki:
1. Ha A ártatlan vagy B bűnös, akkor C bűnös.
2. Ha A ártatlan, akkor C ártatlan.
Megállapítható-e valamelyikük bűnössége?

**3.** Ebben az esetben négy vádlott szerepel, A, B, C és D. A következők derültek ki:
1. Ha A és B mindketten bűnösek, akkor C bűntárs.
2. Ha A bűnös, akkor B és C közül legalább az egyik bűntárs.
3. Ha C bűnös, akkor B bűntárs.
4. Ha A ártatlan, akkor D bűnös.
Kik azok, akik biztosan bűnösök, és kik azok, akiknek kétséges a bűnösségük?

**4.** Ebben az esetben ismét négy vádlott szerepel, A, B, C és D. A következők derültek ki:
1. Ha A bűnös, akkor B bűntárs.
2. Ha B bűnös, akkor vagy C bűntárs, vagy A ártatlan.
3. Ha D ártatlan, akkor A bűnös és C ártatlan.
3. Ha D bűnös, akkor A is az.
Ki ártatlan és ki bűnös?

A „Ha A, akkor B." alakú mondatok gyakoriak a matematikában és a hétköznapi nyelvben is. Néhány tanári példa után a tanulók sorolnak fel további példákat, olyanokat is, amelyek nem igazak, esetleg értelmetlenek. Megbeszéljük, melyik igaz szerintük, illetve hogy a logikában melyiket tekintjük igaznak. Itt gond szokott lenni, nehezen fogadják el, hogy hamis állításból igaz, illetve hamisból hamis (ahol esetleg semmi köze az előtagnak az utótaghogy, vagy éppen ellentmondanak egymásnak)). itt annyit lehet mondani, hogy ez a definíció, így fogadták el a matematikusok, illetve itt jöhet elő a „hamisból bármi következik” közkeletűbb elv. Az implikáció jelölése és értelmezése a következő igazságtáblázatból leolvasható.

| **A** | **B** | A→B |
|---|---|---|
| i | i | i |
| i | h | h |
| h | i | i |
| h | h | i |

A rövid megbeszélés után további feladatok következnek:

**5.**

a) Két szereplőnk van, A és B. Mindkettőjük egymástól függetlenül vagy lovag, vagy lókötő. Tegyük fel, hogy A ezt állítja:
„Ha én lovag vagyok, akkor B is az.”
Meg lehet-e mondani, hogy milyen típusú A illetve B ?

b) Adott két ember, A és B. A ezt mondja: „Ha B lovag, akkor én lókötő vagyok.”
Milyen típusú A és B ?

**6.** Valaki megkérdezi A-tól: „Ön lovag ?” Ő ezt válaszolja: „Ha lovag vagyok, akkor megeszem a kalapomat !”
Bizonyítandó, hogy A kénytelen megenni a kalapját.

**7.** A ezt mondja: „Ha lovag vagyok, akkor kettő meg kettő, az négy.”
Lovag vagy lókötő A ?

**8.** A ezt mondja: „Ha lovag vagyok, akkor kettő meg kettő, az öt.”
Mire köveztetsz ebből ?

**9.** Két ember, X és Y áll a bíróság előtt, rablásban való részvételért. A és B tanúk, mindketten (egymástól függetlenül) lovagok vagy lókötők. A tanúk a következőket állítják:
A: Ha X bűnös, akkor Y is az.
B: X ártatlan vagy Y bűnös.
Biztos-e, hogy A és B azonos típusú ?

**10.** A lovagok és lókötők szigetén kikérdeznek három lakost, A-t, B-t és C-t. A és B a következőket állítják:
A: B lovag.
B: Ha A lovag, akkor C is az.
Meg lehet mondani, hogy milyen típusú A, B és C?

**11.** Egy nap a két testvér, Subidu és Subidam a következőket állította:
*Egyik*: Subidam vagyok.
*Másik*: Ha ez igaz, akkor én Subidu vagyok.
Melyikük melyik?

**12.** Egy másik napon Alice ismét mindkettőjükkel talákozott. A következőket állították:
*Egyik*: Ha Subidam vagyok, akkor ő Subidu.
*Másik*: Ha ő Subidu, akkor én Subidam vagyok.
Megtudhatjuk-e ebből, hogy melyikük melyik, és milyen nap volt?

**13.** Rablásban való részvétellel vádoltak egy embert. Az ügyész, illetve a védőügyvéd a következőket mondták:
Ügyész: Ha a vádlott bűnös, akkor volt bűntársa.
Védőügyvéd: Ez nem igaz!
Miért volt ez a lehető legrosszabb, amit csak mondhatott a védőügyvéd?

Most pedig – illusztrálandó azt a tényt, hogy hamis állításból bármi következik –, Raymond Smullyan nyomán [13] be fogom bizonyítani, hogy ha 1+1=3, akkor én vagyok a pápa.
(Táblára felírva a kiindulási egyenlőséget): Tehát feltesszük, hogy 1+1=3. Ekkor az egyenlőség mindkét oldalából 1-et kivonva kapjuk, hogy 1=2. Én meg a pápa, az kettő. De kettő egyenlő eggyel, vagyis én meg a pápa, az egy. Tehát én vagyok a pápa!

Hasonló trükkel bizonyítható az is, hogy létezik a Mikulás [13]. A bizonyítás lényege a következő mondat: „Ha ez a mondat igaz, akkor a Mikulás létezik.” Előadható a következő párbeszéd formájában:
- A Mikulás létezik, ha nem tévedek.
- Ha nem téved.
- Tehát állításom igaz.
- Természetesen!

- Akkor hát nem tévedtem, és Ön elismerte, hogy ha nem tévedek, akkor létezik a Miklás. Tehát a Mikulás létezik!

### Ekvivalencia

Az ekvivalencia tulajdonképpen a két irányú implikáció konjunkciója, azaz A ↔ B (A ekvivalens B-vel) pontosan akkor igaz, ha A→B és B→A is igazak. Ez a megközelítés a matematikai tételek megfogalmazásánál, bizonyításánál célszerű, az ekvivalencia bevezetéséhez azonban szerencsésebb közvetlenül fogalmazni. A ↔ B pontosan akkor igaz, ha A és B egyszerre igazak vagy hamisak, azaz ha vagy mindkettő igaz, vagy mindkettő hamis. Nyelvi megfogalmazása: „akkor és csak akkor", „pontosan akkor".

Az ekvivalencia – valószínűleg a szimmetriájából adódóan – sokkal könnyebben megérthető, feldolgozható, alkalmazható fogalom az implikációnál. Igazságtáblázata:

| **A** | **B** | A↔B |
|---|---|---|
| i | i | i |
| i | h | h |
| h | i | h |
| h | h | i |

**14.** A lovagok és lókötők egyik szigetéről azt beszélik, hogy valahol a szigeten arany van elásva. Az egyik szigetlakó, A – aki mindent tud szigetéről – így nyilatkozik: „Akkor és csak akkor van arany a szigeten, ha lovag vagyok." Érdemes-e aranyat keresni a szigeten?

**15.** Két szomszédos szigetről – ahol csak lovagok és lókötők élnek – megtudod, hogy az egyiken páros, a másikon páratlan számú lovag él. Azt is elárulják, hogy azon a szigeten, ahol páros számú lovag él, van arany, a másikon nincs. Találomra kiválasztod az egyik szigetet, és meglátogatod. Minden lakos tudja, hogy hány lovag és hány lókötő él a szigeten. Három lakost megkérdezel, akik a következőket állítják:

A: Ezen a szigeten páros számú lókötő él.

B: Pillanatnyilag páratlan számú ember van a szigeten.

C: Akkor és csak akkor vagyok lovag, ha A és B azonos típusú.

Feltéve, hogy te nem vagy lovag és lókötő sem, és hogy pillanatnyilag te vagy az egyetlen látogató a szigeten, van arany a szigeten vagy nincs?

**Gondolkodnivaló otthonra**

**1.** A következő négy kártya fekszik előtted az asztalon:

| | | | |
|---|---|---|---|
| E | K | 4 | 7 |

Tudjuk, hogy minden kártya egyik oldalán egy szám, a másik oldalán egy betű van. Legalább hány kártyát (és melyeket) kell megfordítani ahhoz, hogy ellenőrizni tudjuk, igaz-e a következő állítás:
„Ha egy kártya egyik oldalán magánhangzó van, akkor a másik oldalán páros szám áll.”

**2.** Ezt a példát állítólag Einstein találta ki, szerinte az emberek 98%-a nem tudja megoldani... A tények:

Öt ház áll egymás mellett, mindegyik különböző színű.
Minden házban él egy-egy ember, mindegyik más nemzetiségű.
Az öt tulajdonos különböző italokat fogyaszt, különféle sportot űz, és más-más állatot tart.
Nincs két olyan tulajdonos, aki ugyanazt az állatot tartaná, ugyanazt a sportot űzné, vagy ugyanazt az italt inná.
A brit a piros házban lakik.
A svéd kutyát tart.
A dán teát iszik.
A zöld ház a fehér ház bal oldalán van.
A zöld ház tulajdonosa kávét iszik.
Az a személy, aki kosárlabdázik, madarat tart.
A sárga ház tulajdonosa teniszezik.
Az az ember, aki középen lakik, tejet iszik.
A norvég az első házban lakik.
Az, aki macskát tart, a golfozó mellett lakik.
A teniszező amellett lakik, aki lovat tart.
Az, aki kocog, sört iszik.
A német focizik.
A norvég a kék ház mellett lakik.

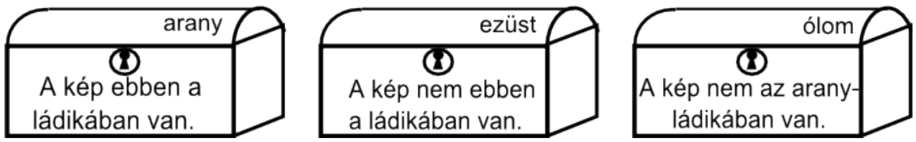
A golfozó a vizet ivó szomszédja.

KI TART HALAT ?

## 4.8. 8. Logikai játékok III.

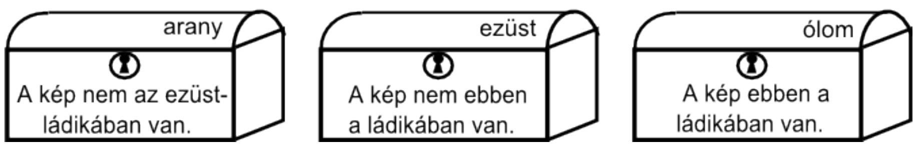
Ezen a foglalkozáson a tanulók egész órán csoportban dolgoznak, méghozzá egy csapatverseny keretében. Így még inkább versenyszerűvé tehető a tevékenység, általában a csapatok kinevezése önmagában motiváltabbá teszi az embert a nyerésre. Ilyen esetben nem csak önmagunkért, nemcsak a saját eredményünkért vagyunk felelősek, hanem a többiek, a csapattársak sikerei is rajtunk múlhatnak. Büszkeség tölt el minket, ha hatékonyan segíthetünk saját csapatunknak, az ellenfelet pedig szintén izgalmasabb és szebb legyőzni, ha csapatok küzdenek egymással egyének helyett. Egyéni versenyben az emberek egy része nem szeretné legyőzni a másikat, sőt, kellemetlen is lenne neki egyedüliként nyerni. A szakkör által érintett diákok korosztályánál ebben is nagy különbségek lehetnek. A fiatalabbakban (7-8-9. osztály) még erősebb a játékosság, a versenyszellem egyéni versenyekben is, a 10-11. osztályos korcsoportnál már általában kisebb az érdeklődés az ilyenfajta versenyek iránt. A szakkör ebből a szempontból azért speciális helyzetben van, ide várhatóan eleve a játékosabb kedvű, és így versenyzésre is fogékonyabb tanulók jönnek. A megelőző foglalkozásokon volt már alkalom csoportmunkára. Persze ez a néhány alkalom nyilvánvalóan nem elegendő a tevékenység elsajátítására, de minden további lehetőség segít abban, hogy minél ügyesebben, hatékonyabban megoldják az efféle helyzeteket is.
Ezúttal – létszámtól függően – három vagy négy 3-4 fős heterogén csoportot alakítunk ki. Minden csoport kap egy színt, ez lesz a csoport neve. A tudnivalók ismertetése után egy négy feladatból és egy bónuszfeladatból álló feladatsorral kezdünk. Az öt feladatot egyszerre kapják meg, mindenki külön a teljes feladatsort. Csapatonként egy-egy (csapatnévvel ellátott) írólapra kell kidolgozni a feladatokat, amin szerepelnie kell vagy a megoldás menetének, vagy a megoldásnak rövid indoklással. A négy feladat egyenként 3-3 pontot ér, a bónuszfeladat (amely ötletet igényel, és amelynek időkitöltő szerepe van, hogy a gyorsabb csapatoknek legyen feladatuk, amíg a többiek még dolgoznak) 1 pontot. A feladatokra 10 perces időkorlát van, annyi feladatot értékelünk, amennyit ennyi idő alatt megoldottak. A gyorsaságért plusz pontok kaphatók : az elsőnek elkészült csapat a feladatok pontszámához 5 pontot kap pluszban, a második csapat 3-at, a harmadik 2-t. A további pontozás a foglalkozás leírásának végén, a feladatok után szerepel. A feladatok a következők :

**1.** Egy királylány elhatározta, hogy csak ahhoz a kérőjéhez megy feleségül, aki helyesen megold egy logikai rejtvényt, amit ő felad neki. Volt három ládikája, egy ólom, egy ezüst és egy arany. A királylány az egyikben saját képét helyezte el, a másik kettő pedig üres volt. A kérőnek a ládikákon elhelyezett feliratok alapján kellett kitalálnia, melyikben van a királylány képe.




A királylány annyit mondott a kérőjének, hogy a három állítás közül legfeljebb egy igaz.

**2.**




A királylány annyit mondott a kérőjének, hogy a három állítás közül legalább egy igaz, és legalább egy hamis.

**3.** Egy eltévedt vándor Maya szigetét keresi. Azt tudja, hogy a szigeteket lovagok és lókötők lakják. Az elsőnek kipróbált szigeten két bennszülöttel találkozik, A-val és B-vel, akik a következőket állítják:
A: B lovag, és ez Maya szigete.
B: A lókötő, és ez Maya szigete.
Ez Maya szigete?

**4.** A második szigeten két bennszülött, A és B a következőket állítja:
A: Mindketten lókötők vagyunk, és ez Maya szigete.
B: Ez igaz.
Ez Maya szigete?

**5.** Egy egyenes, üres cső két végébe belenéz két macska, de mégsem látják egymást.
Miért nem?

A következő két feladatot ismét egyszerre kapják papíron, de előtte közösen röviden megbeszéljük ennek a feladattípusnak a szabályait. Ez is írólapon adandó be, a helyes megoldás feladatonként ismét 3-3 pontot ér. Most is lehet plusz pontokat kapni a gyorsaságra, mint az előzőekben, és 5 perc az időkorlát. Amíg ezen dolgoznak, ellenőrzöm a beadott feladatokat.

**6.** A Feledékenység erdejében Alice találkozott a Hercegnővel. „Az itteni lények fele teljesen bolond" – mondta a Hercegnő. „Teljesen hiú ábrándok rabjai : minden hiedelmük téves, az igazat hamisnak gondolják, a hamisat viszont igaznak. Errefelé az épeszű emberek viszont száz százalékig megbízhatóak : minden igazról tudják, hogy igaz, és minden hamisról tudják, hogy hamis."
Vegyük például a Hernyót és a Gyíkocskát ! A Hernyó azt hiszi, hogy ők mindketten bolondok. Melyikük bolond valójában ?

**7.** Aztán ott van a Szakácsnőm és a Fakutya. A szakácsnő azt hiszi, hogy legalább egyikük bolond.
Mit mondhatunk a Szakácsnőről és a Fakutyáról ?

A következő feladatok szoros kapcsolatban vannak egymással. Először egy – az előzőeknél nehezebb – ládikás feladat következik. Itt minden csapatnak lesz külön három-három ládikája, távolabb tőlük, a csapat színjelzésével. A három láda közül az egyikben lesz a következő feladat. A feladat instrukciói segítségével kell megtalálniuk a három közül azt, amelyikben a feladat van. A következő feladat három borítékkal együtt van a ládában, ugyanis ezúttal a három boríték közül kell az újabb feladat segítségével kitalálniuk, hogy melyikben van a harmadik feladat. Ha a lánc valamely pontján elakadnak, illetve rossz ládát vagy borítékot nyitnak ki, akkor természetesen nem tudnak továbbhaladni, lemaradnak a következő feladatról vagy feladatokról. Így túlságosan lemaradnának a pontversenyben, ráadásul nem tudnának mit csinálni addig, amíg a többiek dolgoznak, ezért a többi ládikában is feladatok vannak, csak kevésbé izgalmasak és kevesebb pontért. Ezt ők nem tudják előre, csak akkor fog kiderülni számukra, amikor kinyitják a „rossz" ládát vagy borítékot. (A ládákban négy-négy, a borítékokban két-két ilyen feladat lesz üzenettel és instrukciókkal együtt.) Ezeknél a feladatoknál nem szükséges indokolni a választ. Így tulajdonképpen tippelni is lehetne, de talán nem fognak vele próbálkozni. Ha mégis, és szerencséjük van, akkor jól jártak, de lemaradtak a feladatról, őgy gondolom, ennél jobban fogja őket édekelni a feladat ilyen helyzetben, és a győzelem is ahhoz, hogy ne kockáztassanak. A versenyhangulat persze fokozható a felvezetéssel, vonzó nyeremény kilátásba helyezésével, illetve

azzal is, ha az előző órán már jelezzük nekik, hogy csapatverseny várható. Ha unják, nem érdekli őket vagy nem szeretik, akkor elképzelhető, hogy tippeléssel választanak, ha viszont megvan bennük a versenykedv, akkor biztos, hogy legjobb tudásuk szerint igyekeznek majd megoldani a feladatokat. Erre a három feladatra (illetve több, ha a pótfeladatokat oldja valaki) maximálisan 25 percet kapnak a tanulók. (Ha az időket szigorúan betartjuk, és a feladatok közötti megbeszélések, technikai információk gyorsan zajlanak, ez akkor is eltart már óra végéig, amennyiben 45 perces foglalkozásokkal számolunk. Ha 90 percessel, akkor kiegészíthető feladatokkal pluszban, kaphatnak több időt a tanulók ezekre a feladatokra, esetleg csak az óra egy részében van a verseny, előtte belefér esetleg házi feladatok vagy korábbiak megbeszélése.)
A feladatok:

**8.** Mindhárom ládikán két mondat áll, és az egyikben van a következő feladat. Elárulom, hogy valamelyik ládikán mindkét felirat igaz, egy másikon mindkettő hamis, a harmadikon pedig az egyik igaz, a másik hamis. Melyik ládikában van a következő feladat?

**arany** 1. A feladat nem ebben a ládikában van. 2. A feladat az ezüstládikában van.
**ezüst** 1. A feladat nem az aranyládikában van. 2. A feladat az ólomládikában van.
**ólom** 1. A feladat nem ebben a ládikában van. 2. A feladat az aranyládikában van.

**9.** A három boríték (X, Y és Z) közül (csak) az egyikben van a következő feladat, ezt keressük. Öten sgeítenek megtalálni a jó borítékot, ám ők mindannyian lovagok vagy lókötők. Melyik a jó boríték?
A: X a jó boríték.
B: Y a jó boríték.
C: A és B nem mindketten lókötők.
D: A lókötő, vagy B lovag.
E: Lókötő vagyok, vagy C és D azonos típusúak (mindketten lovagok vagy mindketten lókötők).

**10.** Most te is a sziget lakója vagy. Ráadásul bűntény történt a szigeten, és téged gyanúsítanak vele. Bíróság elé állítanak, és a tárgyaláson egyetlen mondatot mondhatsz saját védelmedben. Meg kell győznöd az esküdteket arról, hogy ártatlan vagy.

**a)** Tegyük fel, hogy ismert a tény: a tettes lókötő. Azt is tegyük fel, hogy te is lókötő vagy (bár a bíróság ezt nem tudja), de ebben a bűntényben teljesen ártatlan. Milyen mondattal győznéd meg őket, hogy ártatlan vagy? (Arról nem kell meggyőzni őket, hogy nem vagy lókötő.)

A „nem nyerő” ládikákban és borítékokban található feladatok (a ládákban mind a négy, a borítékokban csak a második kettő, hiszen ekkor csak egy feladatról maradnak le a csapatok):

**11.** A szigeten A és B ezt mondta:
A: Legalább egyikünk lókötő, és ez Maya szigete.
B: Ez igaz.
Ez Maya szigete?

**12.** A szigeten két bennszülött, A és B, ezt mondta:
A: Mindketten lókötők vagyunk, és ez Maya szigete.
B: Legalább egyikünk lókötő, és ez nem Maya szigete.
Ez Maya szigete?

**13.** A szigeten két bennszülött, A és B, ezt mondta:
A: Mindketten lókötők vagyunk, és ez Maya szigete.
B: Legalább egyikünk lovag, és ez nem Maya szigete.
Ez Maya szigete?

**14.** A szigeten két bennszülött, A és B, a következőket állította:
A: B lovag, vagy ez Maya szigete.
B: A lókötő, vagy ez Maya szigete.
Ez Maya szigete?

**Pótfeladat:** Ismét egy rabot tesz próbára a király. „Hiszen nincsenek is feliratok az ajtókon!” - kiáltott fel a rab.
„Teljesen igazad van” - mondta a király. - „A feliratok épp most készültek el, és még nem volt időm felrakni őket. Itt vannak.”

| |
|---|
| I. EBBEN A SZOBÁBAN TIGRIS VAN |

| |
|---|
| II. MINDKÉT SZOBÁBAN TIGRIS VAN |

„És melyik felirat melyik ajtóra való?” – kérdezte a rab. „Ezt nem kell elárulnom” – válaszolta a király –, „enélkül is megoldható a feladat. Csak ne felejtsd el, hogy ha hölgy van a bal oldali

szobában, akkor az ajtaján levő felirat igaz, ha tigris, akkor hamis, és hogy a jobb oldali szobára pedig ennek az ellenkezője teljesül.”
Mi a megoldás?

**Pontozás**

I. feladatcsoport:

Helyesen megoldott feladatonként 3-3 pont, a bónuszfeladat 1 pont.
A gyorsaságért 5, 3 illetve 2 plusz pont kapható.

II. feladatcsoport

Helyesen megoldott feladatonként 3-3 pont.
A gyorsaságért 5, 3 illetve 2 plusz pont kapható.

III. feladatcsoport

8. feladat: 8 pont, 9. feladat: 7 pont, 10. feladat: 6 pont.
A négy másik feladat: 2-2 pont.
A gyorsaságért 5, 3 illetve 2 plusz pont kapható.

Esetleges pótfeladatok:

A verseny állását végig a táblán is vezetjük.

A foglalkozáshoz szükséges eszközök:
- 12 db doboz vagy ládika
- 20 db boríték
- feladatok, feladatsorok papíron

# 5. Egy szakköri foglalkozás megvalósítása a gyakorlatban

Dolgozatom fő témáját a logikai szakkör megtervezése adja. Így mindenképpen szerettem volna a gyakorlatban is kipróbálni legalább egy foglalkozást, további hasznos és fontos tapasztalatokhoz jutva ezzel. A rendelkezésemre álló lehetőségek figyelembevételével úgy döntöttem, hogy csak egy alkalmat tartok meg, de azt több különböző csoportnak is, így összehasonlításra is lehetőségem adódik. Mivel a szakkör célcsoportja a 7-11. évfolyamos korosztály, legalább egy 7.-es és egy 9-10.-es csoporttal terveztem kipróbálni a foglalkozást. Néhány sikertelen próbálkozás után végre lehetőséget is kaptam egy kilencedikes és egy hetedikes csoporttal kipróbálni egy alkalmat egy-egy tanórán. Ebben a fejezetben az órákra való felkészülésemet, az óráról való beszámolót és a tanulságokat foglalom össze. Elsőként egy kilencedikes csoportnak tarthattam meg egy szakkörszerű órát.

## 5.1. Kilencedikes csoport

### Előkészületek

A megtartandó foglalkozás kiválasztásánál a következő szempontokat vettem figyelembe. Egyrészt – mivel csak egy alkalmat tartok, előzmények nélkül – nem választhattam olyat, ami korábbi alkalmak ismereteire épül, így például konjunkció-diszjunkció, implikáció nem szerepelhetett benne. Az ezeket felhasználó logikai játékok sem jöhettek szóba emiatt. A 45 perc rövidsége miatt egyetlen alkalom megtartásakor nem akartam elméletet tanítani, hogy több idő jusson a feladatokra. Szerettem volna azt is, hogy ebbe az egy alkalomba minél többféle feladat, feladattípus beleférjen, egyrészt azért, hogy érdekesebb legyen a tanulóknak, másrészt azért, hogy többféle feladat kiadását, a megoldás folyamatának segítését és a megbeszélést is ki tudjam próbálni. Az első feltételből adódott, hogy csak az első néhány alkalom jöhet szóba, a másodikból pedig az, hogy pl. ne az első foglalkozást tartsam meg egy az egyben, hiszen ebben nem szerepel a később előkerülő feladattípusok közül egy sem. Arra jutottam tehát, hogy egy külön feladatsort állítok össze a szakkör azon feladataiból, amelyek megoldásához nincs szükség különösebb logikai előismeretekre.
A feladatok összegyűjtése, kiválogatása és alkalmas sorrendbe rakása után megterveztem az órát óraszervezés, óravezetés és az alkalmazott módszerek szempontjából. Így kialakult az óraterv vázlata. Az időtényezőt csak hozzávetőlegesen tudtam figyelembe venni, hiszen a valódi órán sok tényezőtől függ a feladatokhoz szükséges illetve a feladatok között eltelő idő mennyisége. Ezért főként rövidebb feladatokkal készültem, valamint sok pótfeladattal is, arra az esetre, ha

a vártnál sokkal gyorsabban haladnánk. Ennek volt persze kisebb az esélye; lassabb haladás esetén viszont csak kimarad néhány betervezett feladat, ezt könnyebb a helyszínen korrigálni.
Megvolt tehát a tervezett feladatsor. A feladatokat megfelelő számban sokszorosítani kellett. Fontos, hogy mindenkinek jusson, mindenki tudjon önállóan is gondolkodni rajtuk, mindenki jól hozzáférjen a feladatok szövegéhez. Ha több tanulónak kell ugyanazt a papírdarabkát néznie, az nagymértékben hátráltatja a megoldást, illetve akadályozza azt is, hogy mindenki önállóan gondolkodjon. Érdekesebbé, színesebbé teendő az órát, a tervezettek közül néhány feladatot nemcsak papíron, hanem valódi tárgyakkal is szerettem volna megoldatni, illetve a megoldásokat bemutatni, ellenőrizni velük. Ezt nem tudja minden tanuló kipróbálni, ki kell tehát választani azokat a tanulókat, akiknek lehetőséget kapnak erre. Ezt például időbeli versenyeztetéssel lehet megtenni: aki először megoldja/rájön/kitalálja, az kijöhet a táblához/asztalhoz és megmutathatja. Ehhez megfelelő eszközök kellettek: három egyforma zacskó feliratokkal, három egyforma doboz cserélhető felirattal és kártyák. A dobozos (eredetileg ládikás) feladatoknál – amelyekre sajnos nem maradt idő a megtartott órán – ajándéknak szántam a szaloncukor mellé a paradoxonkártyákat. Az egyiken csak annyi szerepelt, hogy "EZ A MONDAT HAMIS", egy másik egyik oldalán ez: „A KÁRTYA TÚLOLDALÁN ÁLLÓ MONDAT HAMIS.” A másik oldalán pedig: „A KÁRTYA TÚLOLDALÁN ÁLLÓ MONDAT IGAZ.” Ezeket a kártyákat találták volna ajándékként a dobozokban. A kártyák megbeszélése egyénileg az óra közben, vagy ha erre nem lett volna alkalom, óra után történt volna. Mindezekhez a szükséges eszközöket magam készítettem el, illetve szereztem be.
Az órát megelőző napon megnéztem a csoportot egy matematikaórájukon. Erre több szempontból is szükség volt. Amiatt például, hogy ne az órán lássuk először egymást, így ők sem teljesen idegenként kezeltek az órán, és nekem is voltak már tapasztalataim velük kapcsolatban. Nem sok ugyan, de hosszas, több órás hospitálással nem szerettem volna zavarni sem a tanulókat, sem a tanárt. Így megtudtam a neveket, néhányat arcokhoz is tudtam kapcsolni, láttam a csoport működését, habitusát a matematikaórán. Egy kicsit beleláttam a matematikaórai szokásaikba (megnyilvánulások, szereplés, pluszok adása stb.) Egy viszonylag csendes, de kellően aktív csoportról van szó. Semmi fegyelmezési probléma nem volt órán, ezért reméltem, hogy majd velem sem lesz. Tájékoztattuk a gyerekeket a tanárukkal arról, hogy másnap játékos logikai feladatos matekórájuk lesz velem, valamint megkértük, hogy legyen mindenkinek névkártyája erre az alkalomra.

**A megtartott foglalkozás és a tanulságok**

A foglalkozás megtartására egy pénteki nap harmadik órájában került sor. A 16 fős csoportból 12-en voltak jelen. Az órát a csoport szaktanárának jelenléte nélkül, egyedül tartottam. Azért választottam ezt a módot, mert az illető tanár nagyon kedvelt, karakteres, humoros tanáregyéniség, és úgy gondoltam, elvonná a gyerekek figyelmét a jelenléte, és zavarná a vele való viszonyuk az általam tartott órát. Erre szerencsére lehetőséget is kaptam a tanártól. Becsengetéskor bejött azért velem az adminisztráció (hiányzók számbavétele) és a rend megalapozása (bemutatás és a névtáblák elővetetése) miatt. Ez nem vett sok időt igénybe, egy perc volt talán, ezután pedig kiment a teremből és elkezdhettem az órát.
Először is bevezetésként röviden vázoltam, hogy ki vagyok és mit szeretnék ezzel az órával, hogy a szakdolgozatomhoz szeretném kérni a segítségüket, és hogy egy logikai feladatokról szóló órát fogok nekik tartani – ez utóbbit már előző nap is mondtuk nekik különben. Egy kérdésre megnyugtatásképp elmondtam azt is, hogy nem ők vannak tesztelve, viszont aktív együttműködést szeretnék tőlük az órán.
Bemelegítésként három egyszerűbb, de beugratós feladattal kezdtem. Ezeket egyenként tálaltam nekik szóban, a tanári asztal előtt állva. Jeleztem, hogy most szabad bekiabálni.

**1.** *Egy hajó oldalához van rögzítve egy hatfokú létra, amelynek fokai 1-1 láb távolságra vannak egymástól. Apálykor a víz alulról a második fokig ér. Ezután a víz két lábnyit emelkedik. Hányadik fokig ér most a vízszint ?*

A feladatra azonnal háromféle reakció érkezett : 1. *4* ; 2. *2* ; 3. *nem értem*. Utóbbi a visszajelzések alapján azért lehetett, mert nem tudták elképzelni a helyzetet, némelyeket pedig az apály-dagály kifejezések zavartak meg. (Előtte én a "láb" mértékegység szerepeltetése miatt aggódtam.) Megszavaztattam a két megoldást, nem sokan válaszoltak, de aki 4-et mondott, őt addigra meggyőzték, hogy a 2 a jó megoldás. Végül egy diákkal elmondattam hangosan, szerinte miért a 2 a jó válasz, majd jeleztem, hogy valóban így van, ez a feladat megoldása.
Ezek alapján kihagynám a megfogalmazásból az apály, dagály fogalmakat, és csak annyit mondanék, hogy megemelkedik a víz szintje. Így talán érthetőbb lesz a feladat mindenki számára, és nem terelődik el a figyelmük ebbe az irányba.

**2.** *Egy csikkszedő négy csikkből tud magának egy cigarettát sodorni. Egy este talál 16 csikket. Hány cigarettát tud elszívni aznap este ?*

Itt érkezett egy a feladat szereplőjének bőrszínét firtató – nyilván viccnek szánt – kérdés. Ha

nem próbaórán lettünk volna, hanem a saját tanítványaimnak tartom az órát, valószínűleg tettem volna egy rövid kitérőt ezen a ponton arról, hogy szerintem az emberek bőrszíntől függetlenül szednek avagy nem szednek csikkeket, de ezen próbaóra alkalmával nem akartam ilyen irányba terelni a cselekményt. Érdekes egyébként, hogy ezt a feladatot nevelési szempontból a cigaretta miatt tartottam némiképp aggályosnak, végül úgy döntöttem, hogy ezek a játékos logikai feladatok látványosan mesevilágokban játszódnak, így talán nem okoz ez gondot. A feladat szövegének a valóságban elhangzott vonatkozására nem gondoltam előre. Abban maradtunk, hogy a bőrszíne kék, de mivel ez most nem lényeges, talán foglalkozzunk a valódi feladattal.
Érkeztek kitérő megoldási kísérletek, mint például "0-t, mert meghal", és jogos gyanakvással álltak a kézenfekvő *4* válaszhoz. Mivel ezután csönd lett, nem volt több releváns ötlet, ezért segítettem egy picit, hogy a 4 elindulásnak jó, de mi történik utána... ezután már könnyen kitalálták, hogy 5 a helyes válasz (érkezett azért egy 6-os tipp is az 5 előtt).

**3.** *Egy palack bor 10 dollárba kerül. A bor maga 9 dollárral többe kerül, mint a palack. Mennyi a palack ára?*

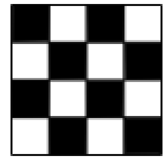
Ez egy egyszerűbb, kevésbé csattanós feladat. Egy tanuló válaszolt rá hangosan, a többiek pedig elfogadták a megoldást. Időkímélés céljából ez a feladat akár kihagyható is lett volna.

**Egyéni feladatok**

A következő feladatokhoz a tanulóknak papírra is szükségük van, így megkértem őket, hogy nyissák ki a füzetüket.
Az első feladatot szóban tűztem ki, figyelve arra, hogy mindenki megértette-e. A táblára csak a feladat 1-es sorszáma és a „sakktábla” szó került emlékeztetőül. Eredetileg ezt és a következő kettőt egyszerre szerettem volna kiadni – valószínűleg szerencsésebb is lett volna úgy –, de elfelejtettem szólni, hogy most több feladat fog következni, ezért ahogy elmondtam, már el is kezdtek gondolkodni a megoldáson, amit már nem akartam a másik két feladat kiadásával megzavarni. A második feladat ábráit eközben felrajzoltam a táblára és hozzátettem, hogy aki az elsővel kész vagy épp van ideje rá, az másolja le, majd egy kicsit későbbi alkalmasnak tűnő pillanatban a gyerekek figyelmét összegyűjtve elmondtam, mi a feladat ezekkel az ábrákkal, és ezt fel is írtam a táblára.

**4.**

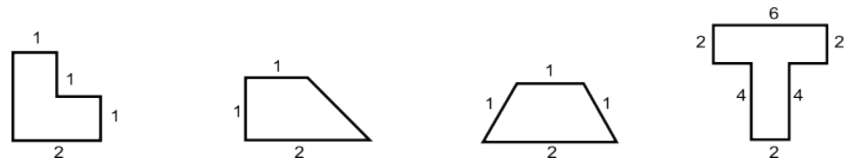
*Képzelj el egy hagyományos 8x8-as sakktáblát. Kivágjuk a sakktáblából a bal felső és a jobb alsó mezőt. Lefedhető-e így a (maradék) sakktábla 2x1-es dominókkal?*



Ennek a feladatnak a megoldása túlságosan elhúzódott. Pedig az eredetileg négy alfeladatból – éppen időkímélési szempontokból – csak egyet, a legérdekesebbet hagytam meg. Ez amiatt történhetett – amivel sajnos nem számoltam, pedig illett volna –, hogy nem egyből arra keresnek bizonyítást, miért *nem* lehet elvégezni a kívánt lefedést, hanem először megpróbálják megkonstruálni azt. Ez természetes is abban az esetben, ha így fogalmazom meg a kérdést, és nem úgy, hogy „miért nem lehet lefedni...”. Így aztán mindenki hosszas rajzolgatásba kezdett, és néhányan jelentkeztek is, hogy megvan a lefedés. Mivel elég nagy a sakktábla, sok dominót kellett (volna) berajzolni, így aztán nem volt annyira precíz és teljes az ábra, nem látszott egyértelműen mindenhol a hiba. Az egyik téves próbálkozásnál kiderült, hogy mégse stimmelt, mert találtam benne egy három mezőből álló L alakú bezárt részt, a másiknál pedig két nem szomszédos mező kimaradt a fedésből, és mivel egy szellemes próbálkozás után megbeszéltük, hogy a dominókat nem lehet elvágni, így a megoldási kísérlet gazdája is belátta, hogy így nem lesz jó a fedése. A sok sikertelen próbálkozás után kezdték néhányan megsejteni, hogy nem megvalósítható a kívánt fedés, de a bizonyításig vagy magyarázatig nem jutottak el. Ezek után segítettem annyit, hogy gondoljanak a sakktábla színezésére. Ennek segítségével az egyik legügyesebb srác (aki éppen akkor jelentkezett valamilyen matematikaversenyre is) elég gyorsan rájött a lehetetlenség bizonyítására is. Erről úgy győződtem meg, hogy odamentem hozzá, és halkan elmondta nekem a helyes megoldását. A többiek közül ekkor néhányan már a következő (darabolós) feladaton gondolkoztak – ők feladták vagy megunták a sakktáblás feladatot –, néhányan pedig még a sakktábla lefedését próbálták megvalósítani rajzban.

Ez a feladat tehát nem egészen úgy sikerült, ahogy szerettem volna, mert túl sok idő ment el vele. Ezen úgy lehetne segíteni, hogy kisebb „sakktáblával” adom fel a feladatot. (A „sakktábla” szó szerepeltetése a színezésre való asszociálás lehetősége miatt fontos.) Egy 4x4-es sakktábla esetében talán viszonylag hamar rájöttek volna, hogy nem lehetséges a kívánt lefedés, és a saját hibáikat is könnyebben észreveszik, esetleg nem is követik el, mert ekkora ábrát végig lehet rajzolni különösebb időveszteség nélkül.

**5.** *Az ábrákon látható síkidomokat vágd szét négy egybevágó részre!*



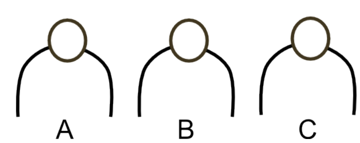

A feladat megoldása az előzővel párhuzamosan zajlott. Az első és a negyedik ábrára viszonylag sok megoldás született végül, de ezek is elég sok időt vettek igénybe, a másodikra egyetlen megoldás érkezett, a harmadikra egy sem. Ez akkor derült ki, amikor megbeszéltük a feladatokat, azaz jelentkezés alapján egy-egy tanuló szimultán rajzolta fel a megfelelő darabolásokat a táblán már szereplő ábrákba. Ekkor már több feladat megoldása is zajlott egyszerre, mert elkezdtem a következő és a következő utáni feladatokat is papírdarabokon kiosztani azoknak, akik más feladatokon (is) szerettek volna gondolkozni. Így egy kicsit nehéz volt már átlátni a csoportot, hogy ki hol tart és kinek milyen segítségre volna szüksége. Időközben többen is rájöttek arra, hogy segít, ha alkalmasan "berácsozzák" az ábrákat és/vagy kiszámolják, mekkora területűnek kell lennie egy-egy darabnak. Ez a berácsozás a kockás füzetből részben adódik, de ki is emeltem, csak sajnos kicsit későn, a feladatra szánt idő legvége felé. Az ellenőrzésnél, megbeszélésnél, amikor a tanulók a táblán oldották meg az egyes feladatokat, történt egy apró félreértés. Ugyanis két diák is, aki kiment, a 4-es ábra darabolását akarta felrajzolni. Nem tudom, hogy közülük valamelyik, vagy én értettem félre valamit, mindenesetre az a tanuló, aki így lecsúszott arról, hogy megmutathassa a megoldást, csalódott volt. Ennek ellensúlyozására a következő feladat megoldását ő mondhatta el. (Jelentkezett rá, és mások is; és mivel ő az egyik legjobb matekos a csoportban, valószínűleg az incidens nélkül nem őt választottam volna.)
A megoldások számából, és az egyes ábrákkal töltött próbálkozási időket is figyelembe véve arra jutottam, hogy itt elég lett volna az első és a negyedik ábrát feladni egy ilyen vegyes, sok és többféle feladatot is megoldatni szándékozó óra keretében.

A következő három feladatot a tanulók külön papírdarabkákon kapták meg egyesével, az egyéni haladási ütemüknek megfelelően.
**6.** *Hatalmas mennyiségű árut loptak el egy áruházból. A tettes (vagy tettesek) autóval szállította (vagy szállították) el a zsákmányt. Három jól ismert bűnözőt vittek be a Scotland Yardba kihallgatni, A-t, B-t és C-t.*
*A következők derültek ki:*
*1. A-n, B-n és C-n kívül senki nem vehetett részt a rablásban.*

*2. C sosem dolgozik A nélkül.*
*3. B nem tud autót vezetni.*
*„A” bűnös vagy ártatlan?*

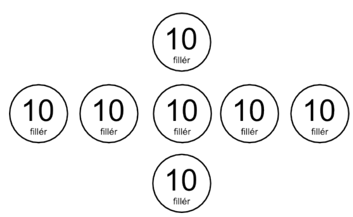
Ez a feladat – az előzőekkel ellentétben – igen gyorsan, és gyakorlatilag teljes sikerrel megoldódott. Ez az eredmény részben megfelel a várakozásoknak, de azért jelentősen túlszárnyalta azt. Ez az első a hasonló típusú feladatok sorában. Automatikusan pillanatszerűen megtalálták azt az állítást, amiből célszerű elindulni, és a következő pillanatszerű következtetéspárral – egy esetszétválasztást is közbeiktatva – mindenki kivétel nélkül rájött, hogy A-nak mindenképpen bűnösnek kell lennie.
Szándékosan könnyű feladattal szerettem volna kezdeni ezt a feladattípust, de jó lett volna még egy-két hasonlóval folytatni. Időhiány miatt eredetileg is ezen kívül csak egy ilyen feladat – a Függelékben csatolt feladatsor 9-es feladata – szerepelt, de sajnos arra az órán már nem maradt idő. Utólag a már tárgyalt változtatásokkal felszabaduló idő segítségével pluszban, esetleg a következő feladat helyett ezt az elmaradt feladatot és még egy hasonló típust tűznék ki egymás után feladatsorozatként.

**7.** *Három istenség ül a jósdában egymás mellett: az Igazság istene, a Hazugság istene és a Bölcsesség istene. Meglehetősen egyforma a külsejük, így aztán senki nem tudja egymástól megkülönböztetni őket. Azt azonban mindenki tudja, hogy az Igazság istene mindig igazat mond, a Hazugság istene mindig hazudik, és a Bölcsesség istene pedig néha hazudik, néha igazat mond. Egyszer egy matematikus érkezik a jósdába, hogy kiderítse, melyik istenség melyik. Először a bal kéz felől ülő istenségnek tesz fel egy kérdést:*
*– Ki ül melletted, hatalmas isten?*
*– Ő az Igazság istene – felelte az isten méltóságteljesen.*
*Ezután a matematikus a középen ülő istentől kérdezett:*
*– Ki vagy te, dicsőséges isten?*
*– A Bölcsesség istene vagyok – így a válasz.*
*Végül a jobb kéz felé ülő isten következett:*
*– És melletted ki ül, egeknek ura?*
*– A Hazugság istene – válaszolta az isten.*
*Melyik istenség melyik?*



Ez is sikerfeladat volt. Mindenki, aki megoldotta (és láttam is a megoldását), helyes következtetésre jutott. A megoldás menetének elmondása és végigvezetése már okozott gondokat, de ez adódhat abból is, sőt valószínűleg abból adódik, hogy szóban, egyesével, gyorsan próbálták végigmagyarázni a megoldási módjaikat, lehetőleg úgy, hogy más ne hallja. Ami viszont valódi probléma, hogy a legtöbben nem nézték végig szisztematikusan az összes lehetőséget abban az esetben, ha már rátaláltak egy jó megoldásra. A másik „irány” viszont működött magától, vagyis ha egy feltevésből ellentmondásra jutottak, azt felismerték és belőle helyesen a feltevés hamis voltára következtettek. Az első spontán megoldásokba persze belefér a matematikusi precizitás hiánya. A szakkör egyik feladata lehet a későbbiekben kialakítani a precizitás igényét megfelelően választott feladatokkal.
Sajnálatos módon hiányzott az órából ezeknek a logikai következtetési láncokon keresztül megoldható feladatoknak a részletesebb megbeszélése és a megoldás menetének írásban (a táblán és a füzetekben) való rögzítése. Az idő rövidsége és a két feladat könnyűsége nem kedveztek az írásos, lépésenkénti rögzítésnek, de talán egy ilyen kiragadott, önmagában álló próbaórán nem is feltétlenül szükséges. Ennek ellenére a szakkörön mindenképpen rögzítenünk kell a feladatok megoldását általában, hiszen ezzel válik átláthatóbbá és utólag is követhetővé a megoldás logikai menete, így tanulható, fejleszthető ez a fajta gondolkodás.

**14.** Helyezz el hét pénzérmét az asztalon az alább látható módon. Két pénzérme elmozdításával kell elérned, hogy vízszintesen és függőlegesen is öt-öt pénzérméd legyen egy sorban.




Ismét egy trükkösebb ötletet igénylő feladat. Mivel mindenki máshol tartott a feladatok megoldásában, és a következő tervezett feladatot együtt, egyszerre kellett kezdeni, előtte pedig az addigiakat megbeszélni, ezt a pénzérmés feladványt időkitöltésnek szántam, vagyis arra, hogy a gyorsabbak (illetve akik korábban feladták az óra elején szereplő rajzolós feladatokat) ezen gondolkozzanak addig, amíg a többiek befejezik-megoldják az előző két logikai feladatot. Ehhez képest sokan erre is nagyon hamar rájöttek, és mivel szorosan egymás melett ültek, ráadásul nem is ügyeltek különösebben arra, hogy eltitkolják a megoldásaikat a többiek elől, hogy ők is gondolkozhassanak, gyakorlatilag elég volt, hogy ketten rájöttek, már az egész társaság értesül-

hetett a megoldás ötletéről. Az előzetes tervekkel ellentétben az órán nem hangzott el az, hogy aki ismeri valamelyik feladatot vagy rájön egy megoldásra, az tartsa magában és csak velem közölje, hadd gondolkozzanak a többiek is a megoldáson. Úgy láttam, hogy ez mindenki számára természetes, magától értetődő. Egy ízben egy tanuló például ki is jött hozzám, hogy ne hallják a többiek az ötletét.
Itt térnék ki a tanulók elhelyezkedésére a tanteremben. Ez egy nagy, egész osztályos tanterem volt, a csoport létszáma pedig ehhez képest jóval kisebb. Az órán 12 tanuló volt jelen, amely létszám ideálisnak mondható. A gyerekek a teremben – nem meglepően – egymáshoz közel ültek, némiképp viszont meglepő, hogy a terem egyik oldalán a lányok, másikon a fiúk két-két padsorban. A padsorok sajnos egymáshoz olyan közel voltak, hogy alig lehetett hozzáférni a hátsó sorhoz, folyton meg kellett kérni az előttük ülőket, hogy engedjenek oda, vagy a másik oldalról, a padsor mögül megközelíteni a hátul ülő tanulók füzetét. Ez az elhelyezkedés pedig nem túl ideális, egyrészt emiatt, hogy nehéz hozzáférni a hátsó sorhoz, másrészt mert képtelenség olyan hangerővel megbeszélni a megoldást egy-egy tanulóval, hogy azt ne hallja másik öt. A szóban forgó tanterem persze nem kis csoportos foglalkozásokra lett kitalálva, ahol tevékenység és ellenőrzés zajlik, egy előadás jellegű órára megfelelő lenne. A padok is nagyok és nehezek, nagyon nehezen mozdíthatók. Mindazonáltal a foglalkozás kezdetekor át lehetne rendezni a termet, ha utána nem tűnik el mindenki a terem visszarendezése előtt a helyszínről. Ennek persze próbaórán ismét kisebb jelentősége van, egy rendszeres szakkörnél viszont fontos tényező.

A 41. percben néztem az órámra. Láttam, hogy már csak egy gyors feladat fér bele, így a következőt választottam:

**8.** *Van három zacskónk, mindegyikben két szaloncukorral. Az egyikben két zöld, a másikban két kék, a harmadikban pedig egy zöld és egy kék csomagolású. A zacskókon feliratok is vannak: „2 zöld”, „2 kék”, „1 zöld, 1 kék”; de egyik zacskóban sem az van, amit a rajta lévő felirat mond. Az egyik zacskóból kivehetsz egy szaloncukrot, és megnézheted, milyen színű. Ebből kell kitalánod, melyik zacskóban milyen szaloncukrok vannak. Hogyan oldod meg a feladatot?*

Ehhez a feladathoz elővettem három darab felcímkézett dísztasakot, amikbe előre bekészítettem a megfelelő számú és színű szaloncukrokat. A feladatot ezután szóban tűztem ki, és hozzátettem, hogy aki a füzetében leghamarabb megoldja, az kijöhet, elmondhatja és megvalósíthatja a megoldását. Nagyon gyorsan jelentkezett is egy tanuló, aki kijött, a többiek felé fordulva elmondta és megmutatta a megoldását, ami helyes volt, és a valóság igazolta is őt. Jutalmul megkapta a szaloncuktor, amit a zacskóból kivett a megoldás során.

Ezzel el is érkezett az óra vége, megköszöntem a segítséget a diákoknak és elbúcsúztam tőlük, eközben pedig elkezdtem szaloncukrokat osztogatni az óra közben különösen jól teljesítőknek. Az értékeléshez kapcsolódik még: óra közben kérdezte egy tanuló, hogy lehet-e pluszokat kapni – a szaktanáruk ugyanis szokott pluszokat osztogatni. Az órán, amit megfigyeltem, ígért is egy pluszt, de csak egyet, és annak, aki magától megold egy olyan feladatot, amilyet még nem tanultak, hanem amin éppen tanítani akart valamit. Ebből arra következtettem, hogy nagy értéke van a plusznak, ezért úgy döntöttem, nem kérdezem meg, hogy osztogathatok-e pluszokat a diákoknak. Legfeljebb akkor lett volna egy szinten a szaktanár pluszaival, ha egyetlen diáknak adok, aki valamilyen szempontból a legjobb teljesítményt nyújtja órán, de ezt az egy órát nem akartam egy összefüggő nagy versennyé tenni. Így aztán maradtak a szaloncukrok jutalomképpen.
A feladatok nehézségi szintjével kapcsolatban is volt óra közben egy tanulói hozzászólás: "Lesznek nehezebbek is? Mert ezek nagyon könnyűek..." És valószínűleg igaza volt, legalábbis a logikai feladatoknál. A megjegyzés ugyanis a két valóban túl könnyű feladat után hangzott el, amelyek egy feladatsorozat első feladataiként meg is állták volna a helyüket, ahogyan azt korábban terveztem, de így önmagukban, ahogy az órán megvalósult, valóban kicsit könnyűnek bizonyultak. Hozzá kell ehhez tenni, hogy az első néhány (bevezető és egyéni) feladat után a szóban forgó megjegyzés „szerzője" még nehéznek tartotta a feladatokat.

A tapasztalatok alapján nem volt a legszerencsésebb az a megoldás, hogy éppen ilyen könnyű feladatokat egyenként, külön papíron adtam ki. Azt tapasztaltam, hogy ez – ha nem is nagymértékben, de – megakasztotta a feladatmegoldás folyamatát, kizökkentette a tanulókat és plusz felesleges várakozási időket iktatott be az órába. Jobb lett volna valószínűleg ezeket egyetlen lapon, egyszerre odaadni, így (is) mindenki haladhatott volna a saját tempójában. Eredetileg azért választottam ezt a megoldást, mert így tudtam volna a különböző tanulóknak különböző sorrendben, különböző feladatokat adni, valamint ha egyfélét kapnak, akkor azt olyan sorrendben tudják csak megoldani, ahogyan én azt szeretném. Ez az esetleges ráépüléseknél, könnyítő megelőző feladatoknál fontos, illetve azért, hogy nagyjából kontrollálni lehessen az együtt haladást, hogy az óra bizonyos pontjain egyeztethessünk, megbeszélhessük az addigi feladatok megoldásait együtt. Ez utóbbi meg is valósult néhány feladatnál, viszont ami szintén rengeteg időt vett el, hogy sok tanuló megoldásait (és megoldási kísérleteit) egyenként végignéztem. Erre valóban kell idő, ha megakad valamiért a tanuló, és segítségre van szüksége, de a könnyű feladatok egységes megoldását nem feltétlenül kellett volna ilyen formában ellenőrizni. Érdemesebb lett volna talán csak utólag, összegyűjtve megbeszélni őket, akár egy tanulóval elmondatni. Ehhez persze az kell, hogy aki készen van egy feladattal, az tudjon magától továbbhaladni, tehát a feladatsorral ez is megoldódna, valamint azért természetesen figyelni kell a gyerekeket, a haladásukat, hogy tudjam, ki hol tart, van-e szüksége segítségre, esetleg új feladatra; illetve melyik feladattal hogyan boldogulnak a diákok. Tehát rövidebben kellett volna ellenőrizni a megoldásokat, és nem azt várni minden alkalommal, hogy egyesével elmagyarázzák a megoldási menetüket is. Utóbbi lényeges ugyan, és érdekes is volna minden tanulónál, de nincs rá idő sajnos.

Rövid összegzésképpen azt mondanám, hogy alapvetően jól sikerült az óra, nagyjából úgy zajlott, ahogyan terveztem, az időtényezőtől eltekintve. Ezt természetesen előre is tudtam, hogy tanulócsoporttal általában gyorsabban telik az idő, mint amit az ember előre meghatároz, de még így sem került sor az összes feladatra, amiket minimálisan szerettem volna végigvenni az órán. Szerencsére a szakkörön nincs olyan haladáskényszer, mint a tanórákon a tanmenet miatt, és ennek az alkalomnak sem az volt a lényege, hogy minél több feladatot belesűrítsünk. A legtöbb feladatot majdnem mindenki sikeresen megoldotta, láthatóan nem érezték kényelmetlenül magukat, a körülményekhez képest oldottak és aktívak voltak. Nem volt különösebb fegyelmezetlenség vagy zavar az órán, rendkívüli vagy váratlan esemény sem történt – a bőrszínre utaló megjegyzésen kívül.

## 5.2. Hetedikes csoport

Lehetőségem nyílt arra, hogy a kilencedikes csoport után hetedikesekkel is kipróbáljak egy a kilencedikesekéhez hasonló órát, amely a tervezett szakkör különböző foglalkozásaiból összeválogatott feladatokból áll. A korábbi feladatsort az előző próbaóra tanulságai alapján megváltoztattam, de szándékosan az ideálisnál nagyobb arányú változtatásokat is tettem, kísérleti jelleggel. A fő különbség az volt, hogy míg az előző órán a feladatok egy részét külön kis papírdarabokon kapták a tanulók, addig ez alkalommal a teljes feladatsort együtt megkapták papíron, még azokat a feladatokat is, amire egészen biztos volt, hogy megbeszéléssel együtt nem jut majd idő. A kiadott feladatsor a függelékben található.
Az előkészületek a korábbihoz hasonlóan történtek. Most a feladatsor összeválogatása helyett a meglévőt dolgoztam át, az előzőekben kifejtett időkímélő változtatások mellett egy kicsit megváltoztattam a feladatok sorrendjét, és – szintén tapasztalatszerzés céljából – későbbi, kicsit nehezebb feladatok is rákerültek a feladatsor végére. Ezúttal nem készültem ajándék csokikkal sem, szintén a fenti okokból. A technikai kellékek közül a kék és zöld csomagolású szaloncukrokat kék és zöld ásványvizes palackok kupakjaival helyettesítettem. A feladatsort sokszorosítottam a megfelelő példányszámban, felírtam magamnak a megoldásokat és természetesen ismét

végiggondoltam a megoldások menetét. A diákcsoportot megfigyeltem egy matematikaóráju-kon előzetesen, és kaptam csoportnévsort is. Ez a csoport 15 fős volt, az óra idején ebből 13-an voltak jelen.

Az óra elejétől végéig egyedül voltam a gyerekekkel. Az iskolában éppen zajló érettségi vizsgák miatt nem volt csengetés, így az órakezdés és -befejezés idő alapján történt.

Az órán rendkívüli esemény nem történt. Fegyelmezési probléma csak annyi fordult elő, hogy egy órához nem szükséges – és valami módon a földre került – matematikafelszerelést és egy szintén nem odaillő latinkönyvet kellett az óra időtartamára eltávolítanom a tulajdonosa közeléből. Speciális hét volt, az írásbeli érettségik hetének péntekjén tartottam az órát. A csoport hét elején osztálykiránduláson vett részt, majd szerdán és csürtörtökön délután folyt a tanítás. A latinkönyv állítólag azért került elő, mert előző nap délután kaptak belőle tanulnivalót, és felelést ígértek nekik. Sajnálattal értesültem erről, de latint tanulni akkor sem matematikaórán kell, úgyhogy miután a második felszólítás után is az volt nyitva az adott tanuló előtt, eltávolítottam a könyvet. Az óra egy nagy teremben zajlott fél osztálynyi tanulóval, így bőven volt hely, a könyveket egy üres padon helyeztem el, őt pedig másik padsorba ültettem. Az intézkedést igyekeztem kedvesen végrehajtani, el is fogadták, és az óra további részében nem volt gond vele, a kijelölt feladatokkal foglalkozott. Nem volt neki szokatlan egyébként, hogy máshol ült, egy másik tanuló pedig maga kéredzkedett külön az eset kapcsán.

Kezdésként nekik is elmondtam, hogy ki vagyok és miért, mihez kérem a segítségüket az órával. Jeleztem azt is, hogy Tanárnőnek szólítsanak, majd végigkérdeztem mindnekit, hogy én hogyan szólíthatom őket. A tanulság ebből, hogy a másik, névkártyás megoldás működőképesebb. Persze a névkérdés egy-két alkalom után megoldódik valódi szakkörnél, sőt, néhányakkal talán már eleve ismerjük majd egymást.

Ezután itt is bemelegítő feladatok következtek, de most csak kettő, az előző fejezetből már ismert hajólétrás és csikkszedős feladat. Itt a láb mint mértékegység okozott problémát, de megbeszéltük, hogy képzeljünk decimétert helyette. Többen jelentkeztek már a megoldásra, amikor egy srác véletlenül (később elnézést is kért érte) hangosan bemondta a megoldás kulcsát. Annak ellenére, hogy éppen előtte beszéltük meg, hogy aki ismeri valamelyik feladatot már, az maradjon csendben, „ne lője le a poént", aki pedig rájött, az csak tegye fel a kezét és amíg nem kérdezem, addig ne mondja, hadd gondolkozzanak a többiek is. Egy másik diák jelezte rögtön egyébként, hogy ismeri a hajós feladatot, de ő tartotta is a megállapodást. A csikkszedős feladatnál pedig számomra az volt a tanulság, hogy a hetedikesek még bátrabban mondták be a kézenfekvőnek tűnő „4"-et. Nem annyira gyanakvóak még, mint a kilencedikesek, hogy ez túl egyszerű megoldás lenne. Miután kiderült, hogy ez nem jó (érkezett még egy 8, egy 16 és egy 0 tipp is), pillanatnyi teljes tanácstalanság uralkodott. Ekkor próbáltam segíteni (és gyorsítani) a megoldást azzal, hogy gondoljanak arra, mi történik, ha elszívja a sodort cigarettákat... Még így sem azonnal, de viszonylag gyorsan érkezett a jó válasz.

Ezután a füzetben megoldandó feladatok következtek.

A sakktáblás feladatot 4x4-es sakktáblával adtam fel, de nem rajzoltam, a színezés miatt. Ha ugyanis színeket rajzolok, akkor túlságosan megkönnyítettem volna a megoldást, ha pedig üres rácsot rajzolok, akkor kisebb valószínűséggel gondolnak a színezésre. A kisebb sakktáblán – a várakozásoknak megfelelően – hamarabb eljutottak ahhoz a sejtéshez, hogy nem megvalósítható a keresett lefedés. Az indoklásnál az a két tanuló, akit hallottam, konstruktív magyarázattal próbálkozott. Ilyen kis méretnél helytálló is ez a magyarázat, mert a két lehetséges elindulás után mindkét esetben kényszerlépések vannak, és ezekből viszonylag gyorsan kiderül a lehetetlenség. A társaság egyik felének, akik már sejtették, hogy nem lehetséges a fedés, de nem tudták, miért, a sakktábla felidézésével próbáltam segíteni. „Miben tér el – a méretétől eltekintve – az igazi sakktábla attól, amit rajzoltál?” Ebből eszükbe jutott a színezés, azután elég sokan rájöttek arra is, hogy a színeken múlik a lehetetlenség. Volt olyan is egyébként, aki valódi, 8x8-as sakktáblát rajzolt, azzal az indoklással, hogy így jobban látják.

Az egybevágó részekre szétdarabolandó síkidomok közül csak kettőt, a könnyebbeket tartottam meg. Itt először probéma volt az „egybevágó” szóval és a feladat megértésével is. (Pedig elvileg tanulták már, mit jelent, hallottam is erre utaló reakciókat.) Az „egybevágót” az „egyforma” szóval helyettesítettem, és mikor még így is bizonytalanok voltak néhányan, felrajzoltam egy példát a feladatok mellé. Egy négyzetet rajzoltam, amit a két középvonala mentén négy kis négyzetre vágtam szét. Azután rajzoltam egy téglalapot, amit az egyik oldalpárjával párhuzamos egyenesekkel daraboltam szét, nehogy azt higgyék, hogy „olynanak” kell lenniük a daraboknak, mint amilyen a nagy alakzat. Így már világos volt a feladat, a próbálkozások pedig előbb-utóbb sikerre vezettek majdnem mindenkinél.

Aki már készen volt az eddigiekkel, vagy kérte, kapott feladatsort. Arra kértem őket, hogy az első három feladatot csinálják, de a negyediket még ne. Néhányan nem figyeltek, nem hallották, vagy figyelmen kívül hagyták ezt a kérést, mert később már a 4-nél magasabb sorszámú feladatok megoldását is mutatták, illetve kérdeztek vele kapcsolatban. Sajnos nem lehet mindenkire minden pillanatban külön figyelni, ezért nem tudom, hogy a többi feladatuk készen volt-e már mind, vagy ezek a feladatok jobban érdekelték őket, mindenesetre ha fontos, hogy ne haladjanak tovább, akkor azokat a feladatokat addig nem szabad nekik megmutatni. Itt a teljes feladatsor, illetve az egyenként külön papíron szereplő feladatok között két-három részletben, két-hárum külön papíron való feladatkiadás lehet megfelelő. Az első két feladat megbeszélésekor – kijelölt tanulók a táblára rajzolták fel a síkidomok szétvágását, illetve egy tanuló a helyén mondta el a sakktáblásét – a legtöbben már a feladatsoron dolgoztak, így ez kissé kizökkenthette őket, de meg kellett várni a megbeszéléssel a többieket is, ők pedig azalatt már dolgozhattak az új feladatokon.

Az első bűnügyi jellegű feladat könnyű volt, mindenki gond nélkül végiggondolta. Sajnos rögzítésre egyáltalán nem került sor az órán. A következő feladat már összetettebb volt, de egyelőre a mondatok igazságát illetve hamisságát még nem kellett külön vizsgálni, a kapott információkat mind igaznak tételezhettük fel. Itt már nem három, hanem öt „szabály" szerepelt, és ezek is összetettebbek, „ha, akkor" típusúak voltak. Ráadásul kicsit csattanós feladat is, meglepő eredménnyel, aminek önálló és határozott kimondásához még nem volt elegendő önbizalmuk az ilyen típusú feladatok megoldásában. Biztattam őket, hogy amit már tudnak, nyugodtan írják le maguknak a füzetbe, de mégsem tették, így aztán újra és újra végig kellett gondolniuk ugyanazt, ha valamiért kiestek a gondolatmenetből. Néhány feladat megoldását ezért együtt le kell írnunk. Ezen az egy összevont alkalmon nem sok lehetőség nyílt ilyesmire. Egy idő után valószínűleg rájönnek, hogy tényleg segít, ha felírják maguknak legalább a részeredményeiket. Sőt, ha leírják, amikre szabályos következtetések útján rájöttek, saját maguk számára is meggyőzőbb, hogy annak tényleg úgy kell lennie. A szóban forgó feladatban ugyanis az volt a megoldás, hogy a három gyanúsított közül mindegyik ártatlan, és más sem lehetett, aki elkövette a bűntényt, így a feladat fennmaradó szereplőjét, a bűnesetet bejelentő bolttulajdonost kell gyanúsítani. Ez egy kicsit bizonytalan helyzetet teremtett nekik, de a megoldás kapujáig – hogy egyik gyanúsított sem lehetett bűnös – a legtöbben maguktól eljutottak. Volt, aki nem vett figyelembe egy feltételt, és így neki szokványosabb, egyértelműbb (csak éppen helytelen) megoldás jött ki.

Az óra vége előtt megbeszéltük még az addig megbeszéletlen, nagyjából mindenki által megoldott feladatokat: a két bűnügyi témájú és a két részből álló ládikafeliratos feladatot. Maga a megoldás kórusban érkezett kérdésemre, részletes átbeszélésre nem volt már idő. Valaki szerint két megoldáa van az első ládikás feladatnak, ennek örültem, mert ki merte mondani és nem ijedt meg tőle, továbbá minden esetet ellenőrizni akart. Ennek a feladatnak valójában csak egy megoldása volt, de ennél fontosabb az előző két dolog, ami kiderült. Szegény belekavarta magát a feladatba (és hiába mondtam neki, még véletlenül se írt le semmit a gondolatmenetéből), vele aztán az óra után tisztáztuk a kérdést.

Ezek voltak azok a feladatok, amiket mindenki megoldott, illetve amivel mindneki foglalkozott.

Néhányan azonban gyorsabban haladtak a megoldában, esetleg átugrottak néhány feladatot, így ők a trükkösebb, erre a célra szolgáló feladatokon is gondolkoztak, mint például a feladatlapon 10-es sorszámmal szereplő pénzérmés feladat. Az egyik tanulónak például rögtön ez tetszett meg, törte is rajta a fejét, és arra jutott, hogy lehetetlen. Javasoltam neki, hogy szedjen elő hét darab pénzérmét, ő pedig a tolltartójában található apróságokkal próbálkozott. Talán segítettem ezzel neki, de jeleztem, hogy ez így nem lesz jó (a megoldás ugyanis az, hogy egymásra kell helyezni a pénzérméket, ezeket meg nem lehetett egymásra rakni). A következő alkalommal, mikor odahívott, már készen állt a pénzérmékkel kirakott megoldása, és örült is, mikor megtudta, hogy ez a megoldás, azt hitte, hogy nem lesz jó (ő másik kifejezést használt). Ennek a feladatnak azután másnál is láttam helyes megoldását.
Mások – bár ezt együtt szerettem volna elkezdeni, és szerettem volna bevezetőt hozzátenni – a lovag-lókötős, majd a farkasemberes feladatokkal is próbálkoztak, ezek között is láttam néhány jó megoldást, de mindenkiére sajnos nem tudtam folyamatosan figyelni.

A próbaórák végső konklúziója a következő három pontban foglalható össze számomra.

1. Alkalmasabbak lennének 45 perc helyett a 2x45 perces foglalkozások, és a tervezett feladatok feldolgozásával kitölthető is lenne ez az időtartam. (Ezt persze eredetileg is sejtettem, de a 45 perces szakkör megvalósulása reálisabbnak tűnt.)

2. A szakkör optimális vezetése sok tapasztalatot igényel, több korosztállyal, többféle összetételű csoporttal többször lenne jó végigtanítani az egészet. Erre sajnos nem volt alkalmam, remélhetőleg a jövőben lesz rá lehetőség.

3. A fentiektől eltekintve a szakkör ötlete működőképesnek tűnik. A gyerekek nyitottak, általában szívesen és sikeresen oldanak meg efféle feladatokat, de azok kihívást is jelentenek a számukra.

# 6. Összefoglalás, konklúzió

## 6.1. Összefoglalás

Elkészült tehát a szakkör: egy ötletből majdnem félévnyi kidolgozott foglalkozás, és további ötletek, feladatok, tervek a folytatáshoz. A dolgozat készítése során körbejártam a logika fogalmát. Kigondoltam a szakkör felépítését, a foglalkozások témáját. A témákhoz illő feladatokat kerestem, ezeket összegyűjtöttem, megoldottam, kiválogattam, néhol átfogalmaztam és az egyes foglalkozásokhoz rendeltem, ezután pedig megszerkesztettem belőlük a foglalkozásokat.
Az már szinte a legelejétől világos volt számomra, hogy főként Raymond Smullyan könyveire és feladataira fogok támaszkodni, hiszen rendkívül szórakoztatónak és alkalmasnak tartom ezeket a feladatokat, ráadásul változatos és élvezetes feladatanyaggal és megfogalmazással találkoztam bennük már gimnazista koromban is. Jó lett volna az összes foglalkozást kipróbálni a valóságban, sőt többször, több – esetleg vegyes – csoporttal, akár valódi szakkörként, ez azonban szervezési okokból sajnos nem jöhetett létre, már egy-egy órára is nehéz volt helyet találni. Végül két régi tanárom biztosított nekem lehetőséget az órák megtartására, akiknek ezt ezúton is nagyon köszönöm. A megtartott két óra hasznos tapasztalatszerzésnek bizonyult, a foglalkozásokat és feladatokat pedig majd úgyis az aktuális csoportra kell szabni, általánosságban nehezen tervezhető pontosan. Nagyon fontos tehát a tanítandó csoport összetétele, és mivel széles korcsoport számára nyitott a szakkör, ezt is figyelembe kell majd venni. Vegyes csoport esetén még fontosabb a tanulókkal, tanulócsoportokkal való differenciált foglalkozás.
A dolgozat írása közben magam is rengeteg érdekes új feladattal találkoztam, és régi ismerős feladványok is szép számmal előbukkantak a feladatgyűjtés során. Diákkorom beugratóit, a remek fejtörőket, valamint Smullyan szórakoztató és egyszerre filozofikus stílusú könyveit önmagában is élmény volt olvasni. Leginkább ezt a részt kedveltem: a feladatok gyűjtését, megoldását és kiválogatását, aztán a foglalkozások kialakítását, valamint a kész foglalkozások megtartását.
Szeretem ezeket a feladatokat, és remélem, a gyerekek számára is érdekes és hasznos szakkört sikerül majd tartani belőlük. Bár a tanórákon kevés idő és alkalom jut a témakörre, kellően szilárd logikai alapokkal és nem utolsósorban pozitív attitűddel felvértezve vágnak majd neki az iskolai logikaóráknak és az egyéb logikai vagy nem logikai jellegű problémáknak.

# 7. Függelék

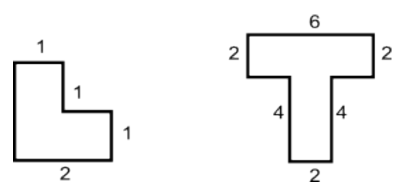
## 7.1. A hetedikeseknek tartott próbaóra feladatai

**1.** Egy hajó oldalához van rögzítve egy hatfokú létra, amelynek fokai 1-1 láb távolságra vannak egymástól. A víz alulról a második fokig ér. Ezután a víz két lábnyit emelkedik. Hányadik fokig ér most a vízszint?

**2.** Egy csikkszedő négy csikkből tud magának egy cigarettát sodorni. Egy este talál 16 csikket. Hány cigarettát tud elszívni aznap este?

**3.** Egy 4x4-es sakktábla bal felső és jobb alsó mezőjét kivágjuk. Lefedhető-e a maradék 2x1-es dominókkal?

**4.** Az ábrákon látható síkidomokat vágd szét négy egybevágó részre!




**5.** Hatalmas mennyiségű árut loptak el egy áruházból. A tettes (vagy tettesek) autóval szállította (vagy szállították) el a zsákmányt. Három jól ismert bűnözőt vittek be a Scotland Yardba kihallgatni, A-t, B-t és C-t.

A következők derültek ki:

1. A-n, B-n és C-n kívül senki nem vehetett részt a rablásban.
2. C sosem dolgozik A nélkül.
3. B nem tud autót vezetni.

„A" bűnös vagy ártatlan?

**6.** Mr. McGregor, egy londoni boltos felhívta a Scotland Yardot, hogy kirabolták a boltját. Három gyanúsítottat hallgattak ki, A-t, B-t és C-t. A következők derültek ki:

1. A, B és C mindegyike járt a boltban a rablás napján, és senki más nem volt aznap a boltban.
2. Ha A bűnös, akkor pontosan egy bűntársa volt.
3. Ha B ártatlan, akkor C is az.
4. Ha pontosan két tettes volt, akkor A az egyik.

5. Ha C ártatlan, akkor B is az.
Vajon kit vádolt Craig felügyelő ?

**7.** Három dobozunk van, ezeket 1-essel, 2-essel és 3-assal jelöljük. A dobozok közül az egyikben ajándék van, a másik kettő pedig üres. A dobozokon feliratok vannak.

a)

| 1. | 2. | 3. |
|---|---|---|
| Az ajándék ebben a dobozban van. | Az ajándék nem ebben a dobozban van. | Az ajándék nem az 1. dobozban van. |

Melyik dobozban van az ajándék, ha tudjuk, hogy a feliratok közül legfeljebb egy igaz ?

b)

| 1. | 2. | 3. |
|---|---|---|
| Az ajándék nem a 2. a dobozban van. | Az ajándék nem ebben a dobozban van. | Az ajándék ebben a. dobozban van. |

Melyik dobozban van az ajándék, ha tudjuk, hogy a három állítás közül legalább egy igaz, és legalább egy hamis ?

**8.** A Lovagok és lókötők szigetén csak lovagok és lókötők élnek. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők pedig mindig hazudnak. Három lakossal találkozunk, A-val, B-vel és C-vel. Közülük csak ketten szólalnak meg :
A : Mindnyájan lókötők vagyunk.
B : Pontosan egy lókötő van köztünk.
Megtudhatjuk ebből, hogy B milyen típusú ? És hogy C ?

**9.** Továbbra is a lovagok és lókötők szigetén vagyunk. Ezúttal csak két lakossal van dolgunk, A-val és B-vel. A a következőt állítja :
A : Van köztünk lókötő.
Milyen típusú A, illetve B ?

**10.** Megint három szereplőnk van, A, B és C. A és B a következőket állítja :
A : B lókötő.

B : A és C egyforma típusú.
Milyen típusú C ?

**11.** A következő három feladat szereplői szintén lovagok vagy lókötők, és mindettől függetlenül lehetnek farkasemberek is. Három emberrel beszélsz, A-val, B-vel és C-vel, akik között pontosan egy farkasember van. A következőket állítják :

A : Farkasember vagyok.
B : Farkasember vagyok.
C : Legfeljebb egy lovag van köztünk.
Ki lovag és ki lókötő ? Ki a farkasember ?

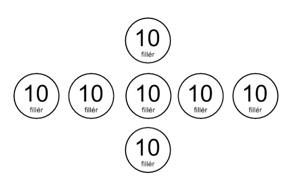
**12.** Megint három szereplőnk van, a korábbi feltételekkel. A következőket állítják
A : C farkasember.
B : Nem vagyok farkasember.
C : Közülünk legalább ketten lókötők.

a) Lovag vagy lókötő a farkasember ?
b) Ha útitársul kellene választanod egyiküket, és fontosabb az, hogy útitársad ne legyen farkasember, mint az, hogy ne legyen lókötő, akkor melyiküket választanád ?

**13.** Ezúttal csak ketten szólalnak meg :
A : Legalább egyikünk lókötő.
B : C farkasember.
Tudjuk, hogy pontosan egy farkasember van köztük, és hogy ő lovag. Ki ő ?

**14.** Van három zacskónk, mindegyikben két szaloncukorral. Az egyikben két zöld, a másikban két kék, a harmadikban pedig egy zöld és egy kék csomagolású. A zacskókon feliratok is vannak : „2 zöld”, „2 kék”, „1 zöld, 1 kék” ; de egyik zacskóban sem az van, amit a rajta lévő felirat mond. Az egyik zacskóból kivehetsz egy szaloncukrot, és megnézheted, milyen színű. Ebből kell kitalánod, melyik zacskóban milyen szaloncukrok vannak. Hogyan oldod meg a feladatot ?

**15.** Helyezz el hét pénzérmét az asztalon az itt látható módon. Két pénzérme elmozdításával kell elérned, hogy vízszintesen és függőlegesen is öt-öt pénzérméd legyen egy sorban. Hogyan oldod meg a problémát ?



# Hivatkozások


[1] A magyar nyelv értelmező szótára, Akadémiai Kiadó, 1965.

[2] Aristotelés: Organon (szerk.: Szalai Sándor), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979.

[3] Ambrus András: Bevezetés a matematikadidaktikába, ELTE jegyzet

[4] Filep László: A tudományok királynője. Typotex, Budapest,

[5] Grätzer József: SICC - Szórakoztató időtöltések, cseles csalafintaságok

[6] Havas Katalin: Logikus!, Korona Kiadó, Budapest, 1994.

[7] Kneale, William – Kneale, Martha: A logika fejlődése. Gondolat Kiadó, Budapest, 1987.

[8] Lukács Ernőné – Tarján Rezsőné: Tarkabarka matematika, Bibliotheca Kiadó, Budapest, 1958.

[9] Mérő László: Új észjárások, Tericum Kiadó, 2001.

[10] Péter Rózsa: Játék a végtelennel, Typotex, Budapest, 2004.

[11] Róka Sándor: 2x2 néha 5? (Paradoxonok, hibás bizonyítások), Tóth Könyvkereskedés és Kiadó Kft.

[12] Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, Typotex, Budapest, 2006.

[13] Raymond Smullyan: Mi a címe ennek a könyvnek?, Typotex, Budapest, 1996.

[14] Raymond Smullyan: A hölgy vagy a tigris, Typotex, Budapest, 1996.

[15] Raymond Smullyan: Seherezádé rejtélye, Typotex, Budapest, 2004.

[16] Raymond Smullyan: Alice Rejtvényországban, Typotex, Budapest, 2005.

[17] Zentai István: A meggyőzés csapdái, Typotex, Budapest, 1999.

**Tankönyvek és középiskolai segédkönyvek:**

[18] Csatár Katalin: Matematika 9., 10., Apáczai Kiadó, Budapest, 2009 illetve 2010.

[19] Dr. Devecseri Lászlóné – Máthé András – Ruzsa Imre: Logika (Fakultatív gimnáziumi tankönyv), Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.

[20] Czeglédy István – Hajdu Sándor Zoltán – Kovács András: Matematika 12., Műszaki Kiadó, Budapest, 2007.

[21] Dr. Fried Katalin – Dr. Gerőcs László – Számadó László: Matematika 9., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2009.

[22] Hajnal Imre – dr. Pintér Lajos: Matematika III., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

[23] Hajnal Imre – Számadó László – Békéssy Szilvia: Matematika 12., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2004.

[24] Kosztolányi József – Kovács István – Pintér Klára – Urbán János – Vincze István: Sokszínű matematika 12., Mozaik Kiadó, Szeged, 2004.

**Internetes források:**

[25] Karinthy Frigyes: Őrült sikerem a tébolydában – Tudomány

http://mek.oszk.hu/00700/00714/00714.htm

[26] Nemzeti alaptanterv

http://www.nefmi.gov.hu/letolt/kozokt/nat_070926.pdf