Életbiztosítás árazása középiskolában

Integrált szakdolgozat

kiegészítő fejezet

Írta: Hutvágner Gábor

Matematika tanár szak

Témavezető:

Arató Miklós, egyetemi docens

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2011

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Kiegészítő fejezet matematika tanári szakhoz:

Életbiztosítás árazása középiskolában

1.1. Bevezetés

A biztosítási termékek árazása a biztosítónál az aktuárius, más szóval a biztosítási matematikus feladata. Azonban manapság egyre nagyobb igény van a társadalom felől, hogy bizonyos gyakorlati kérdések a mindennapi ember számára is érthetőek, számolhatóak legyenek. Ilyen kérdés többek között a kamat, illetve a pénz jelenértékének számítása. Ekkor pedig – mint látni fogjuk – csak a halandósági táblák ismerete és egy kis valószínűségszámítás választ el minket attól, hogy egyszerű életbiztosítások díját mi magunk is képesek legyünk meghatározni.

Nem megvalósíthatatlan tehát az ötlet, hogy egyszerű pénzügyi és biztosítási kérdésekről már középiskolában beszéljünk. És nem is példa nélküli, hiszen a kamatos kamat számítás mindenki számára jól ismert alkalmazása a százalékszámításnak. De biztosítási alkalmazás már ritkábban fordul elő, főleg olyan direkt formában, mint ahogy az *Szászné Simon Judit: Aktuáriusi számítások* ([8]) című írásában a Fazekas Mihály Gyakorlógimnázium[1] matematika portálján olvasható. Ezt a munkát tekintem dolgozatom kiindulási pontjának.

[1] Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium

Az alábbiakban először egy kitekintést adok, hogy a feladat: egy életbiztosítás árazása középiskolában, mint oktatási egység, milyen oktatási koncepció keretében valósulhatna meg. Röviden ismertetem ezeket a pedagógiai nézeteket. Ezután megkeresem a feladat kapcsolódási pontjait a mai tantervek oktatási tartalmaival, és hogy ezen tantervek alapján a tanulók milyen előismerettel rendelkeznek. Felelevenítem azokat a szükséges előismereteket, amik nélkülözhetetlenek a téma feldolgozása szempontjából. Ezután egy konkrét óravázlatot ismertetek, ami alapján úgy gondolom, a feladat középiskolában tanítható lehetne.

1.2. Oktatási koncepciók

Ambrus András – Bevezetés a matematikadidaktikába című jegyzetében – öt oktatási koncepciót különböztet meg. Ezek a realisztikus, a projektorientált, a tudományorientált, az empirikus és a mechanisztikus matematikaoktatás.
Ezek az irányzatok viszonylag könnyen elkülöníthetők egymástól főbb jellemzőik alapján. De természetesen a gyakorlatban egyikkel sem találkozhatunk tisztán. Hanem a tanár oktatási attitűdje, a diákok viszonyulása, az iskola pedagógiai programja befolyásolják, és a megvalósuló oktatási stílus a főbb irányzatokból tartalmaz elemeket több-kevesebb mértékben.

De mégis melyik oktatási koncepcióba illeszthető leginkább az életbiztosítás árazási feladat? Tekintve, hogy ez egy „valós életből vett alkalmazás”, kézenfekvő tekinteni a következőket:
Az *alkalmazásorientáció* a 80-as években erősödött meg, mintegy ellenpontként a megelőző évtized túlzottan formalizáló matematikaoktatására (New Math). Ma már kissé árnyaltabb a kép. Dienes Zoltán így fogalmaz ([3]-ban):
„Matematikán tehát valóságos strukturális összefüggéseket fogok érteni [...] Matematikatanuláson ilyen összefüggések megértését fogom érteni, szimbolizálásukkal együtt, és annak a képességnek a megszerzését, hogy az eredményül kapott fogalmakat a világban felmerülő valóságos helyzetekre alkalmazzuk.”
A másik, ami eszünkbe juthat, a manapság a kompetencia alapú oktatás miatt (is) egyre jobban terjedő *valóságközeli matematika*, amiről Ambrus Gabriella így ír ([2]-ben):
„Az oktatás jó hagyományainak megtartása mellett keresni kell azokat a lehetőségeket, amelyek ezeket kiegészítik, továbbfejlesztik, hogy a fiatalok valóban alkalmazásképes ismeretek birtokába juthassanak. [De] bármennyire is életszerű egy feladat, azért [...] a valóságos világ túl összetett ahhoz, hogy ezt az iskolában teljes bonyolultságá-

ban vizsgáljuk."

Ahogy látni fogjuk, esetünkben mindkét nézetről szó van. A kamatos kamat, és a jelenérték számítás olyan egyszerű eszközök, amik egyrészt segítséget nyújtanak a százalékszámítás elmélyítésében, másrészt kiváló, gyakran és jól használható alkalmazását adják a matematikának.

Az életbiztosításokhoz azonban szükségünk lesz egy nem (csak) matematikai fogalomrendszerre: a demográfiai adatok megértésére. Ezt csak részben nevezhetjük alkalmazásnak, ebben az esetben legalább ilyen jelentős az interdiszciplinaritás. Erre még később visszatérünk.

A matematikaoktatás főbb irányvonalai közül a realisztikus és a projektorientált matematikaoktatás a legmegfelelőbb a valóságközeli matematika tanórán történő megvalósításához. Természetesen a többi irányzat is alkalmas lehet rá kisebb mértékben, mi most mégis csak e kettővel foglalkozunk részletesebben.

1.2.1. A realisztikus matematikaoktatás

Szinte mindenkivel, aki valaha tanított matematikát, előfordulhatott, hogy valamelyik diákot hallotta így kifakadni: *„Ennek semmi értelme! Minek tanuljam meg?"* Valóban, a matematika néha tényleg „l'art pour l'art"-nak tűnhet a tanulók szemében, amitől a motivációjuk jelentősen csökkenhet. Szükség van rá tehát, hogy valamiképpen motiváljuk őket, hogy megmutassuk nekik a matematika hasznosságát. Ezért a realisztikus matematikaoktatás kezdeményezője, a holland Hans Feudenthal szerint olyan problémákból, feladatokból kell kiindulni, amik a tanulók számára érdekesek, jelentősek, ezáltal motiválóak. Másrészt viszont elvezetnek a matematikai ismeretekhez. Azonban ez nem jelent feltétlenül valóságból vett feladatot, csupán azt, hogy a feladat a diák számára jelentéssel bír.

Azonban a motiváción kívül más is indokolja, hogy a tanulókhoz közeli, konkrét, jól ismert példákból induljunk ki. Ebben az esetben ugyanis a megoldás során a tanulók aktivizálni tudják hétköznapi ismereteiket. Így a kialakítandó matematikai fogalmat hozzá tudják kötni a tapasztalathoz, az jelentéssel bíró, értelmes lesz a számukra. Ennek hiányában ugyanis az új ismeret csak értelem nélküli, bemagolt tananyag lesz.

Most [1] alapján tekintsük végig a realisztikus matematikaoktatás didaktikai alapelveit:

Kontextusba helyezés: A valódi kontextusokból kiindulva, a lényeges szempontokat kiemelve a tanulók összegyűjtik azokat az intuitív fogalmakat, melyek később alapjai lesznek az elméletnek. Fontos, hogy az adott kontextus nem csak kiindulási pontja, hanem alkalmazási területe is legyen az elsajátítandó fogalomnak.

Fokozatos matematizálás: Két irányú matematizálás történik:

- *Horizontális matematizálás*: a kontextusban rejlő matematikai probléma azonosítása. Sematizálás, összefüggések felfedezése.
- *Vertikális matematizálás*: az összefüggések bizonyítása, a modellek finomítása. Általánosítás. Az elmélet megalkotása.

Irányított (újra) felfedezés: Fontos elv, hogy a tanulás ne a kész rendszer másolata legyen, hanem irányított (újra) felfedezés. A tanulók a matematikai összefüggéseket a valóságból vett problémák megoldása révén saját maguk fedezik fel. (Vö.: konstruktivista pedagógia.)

Szociális interakciók: Mivel mindenki maga konstruálja a megoldást, így egy problémára sok, egymástól eltérő megoldást is kaphatunk. A diákok konfrontálódnak a többiek megoldásával, megtanulják értékelni a saját és mások munkáját. Ez segít felfedezni megoldásuk előnyeit, hibáit.

Absztrakció: Az új fogalmat a meglevő ismeretrendszerbe illesztve egyes tanulók észreveszik a globális összefüggéseket, esetleg a formalizációra is képesek lesznek. Ez azonban nem mindenkinél következik be.

1.2.2. A projektorientált matematikaoktatás

Valójában a csoportmunka alapú oktatásszervezés egyik módszeréről, a projektmódszerről van szó. Bár kétségkívül sokkal komplexebb, mint egy szokásos pedagógiai módszer.

A munka menete, hogy a tanulók csoportokat alakítanak, kiválasztanak egy témát (célszerű, hogy ne a tanár jelölje ki – persze ő vetheti fel a lehetőségeket), amit meghatározott idő alatt feldolgoznak, és előre egyeztetett formában bemutatják az eredményeket.

A módszer lényege, hogy nem annyira a szaktárgy előírt ismeretanyagára, sokkal inkább a tanulók érdeklődésére fókuszál. Jellemzően valamely, a tanulók környezetében felvetődő problémát állít a középpontba. Továbbá gyakori a tantárgyi integráció, azaz a probléma megoldásához több tantárgy ismeretanyaga is szükséges.

Fontos eleme a módszernek a nagy fokú tanulói autonómia. A tanár nem irányít, hanem a háttérbe vonul, és onnan segít, ha szükség van rá. A beszámoló is az egész közösség előtt történik, a tanár a munka értékelését is az egész csoporttal együtt beszéli meg. Jellemző a projekt végén a csoport önreflexiója.

Látható tehát, hogy a módszer kiválóan alkalmas hétköznapi problémák felvetésére, mint például a hitelek, kamatok, biztosítások. Sőt, életbiztosítások esetén a projektmódszer még egy lehetőséggel szolgál: ez a tantárgyi integráció. Ahogy korábban már írtam, a demográfiai fogalmak, diagramok értelmezése nem csak matematikai feladat. Jellemzően ugyan matematikaórán is előkerül, a statisztika témakörében, de ezen kívül fontos eleme a földrajz, a társadalomismeret, az állampolgári ismeretek, és a történelem tantárgyaknak is.
A dolgozatban nem mutatok példát egy demográfiai témát feldolgozó projekt összeállítására (tekintettel arra, hogy nincs tapasztalatom ezen tantárgyak együttműködési lehetőségeiről). De hangsúlyozom, hogy ha mód van rá, érdemes lehet a később részletezett óravázlatom előtt, vagy azzal párhuzamosan egy ilyen projekt-munka elkészítése.

1.3. A téma elhelyezése a tantervekben

1.3.1. Nemzeti Alaptanterv (NAT)

A Nemzeti Alaptanterv egy szabályozó típusú, úgynevezett magtanterv. A jelenleg hatályos, 2007-ben kiadott verziójában nem a gyerekekkel szembeni követelményeket, hanem az iskola fejlesztési feladatait fogalmazza meg. Bevezetésre kerültek benne a kulcskompetenciák, amiket a NAT általánosan így határoz meg:
„A kulcskompetenciák azok a kompetenciák, amelyekre minden egyénnek szüksége van személyes boldogulásához és fejlődéséhez, az aktív állampolgári léthez, a társadalmi beilleszkedéshez és a munkához.”
A kompetenciák nem egymástól függetlenek, összefonódnak. Sőt, a fejlesztési feladatokkal is egymásra épülnek. Több olyan kompetencia van, például a kreativitás, problémamegoldó képesség, stb., amiket mindegyik kulcskompetencia tartalmazza.

A *matematikai kompetencia* egyike a kilenc kulcskompetenciáknak. Erről így ír a NAT:
„A matematikai kompetencia a matematikai gondolkodás fejlesztésének és alkalmazásának képessége, felkészítve ezzel az egyént a mindennapok problémáinak megoldá-

sára is. A kompetenciában és annak alakulásában a folyamatok és a tevékenységek éppúgy fontosak, mint az ismeretek. A matematikai kompetencia - eltérő mértékben - felöleli a matematikai gondolkodásmódhoz kapcsolódó képességek alakulását, használatát, a matematikai modellek alkalmazását (képletek, modellek, struktúrák, grafikonok/táblázatok), valamint a törekvést ezek alkalmazására."

A Nat a matematika műveltségterületen a következő fejlesztési területeket emeli ki (külön jelzem a jelen feladathoz kapcsolódó fejlesztési egységeket, amiket a NAT-ból idézek, és ahol szükséges, röviden utalok arra is, hogy ezek miként jelennek meg a dolgozat témájaként megjelölt árazási feladat során):

1. Tájékozódás térben, időben és a világ mennyiségi viszonyaiban:

    - A múlt, jelen, jövő megértése adott időpillanatban.
    - A múlt, jelen, jövő mint folytonosan változó fogalmak.
    - Folyamat mozzanatainak időbeli elrendezése.

    A feladatban direkt módon megjelenik az idő: a kamatozás illetve a jelenérték számításánál. Továbbá az életbiztosítás díját is a „jelenből nézve" határozzuk meg, míg a kifizetés a jövőben lesz aktuális.

2. Megismerés (tapasztalatszerzés, képzelet, emlékezés, gondolkodás, ismeretek rendszerezése, ismerethordozók használata):

    - Változó helyzetek, időben lejátszódó történések megfigyelése; a változás kiemelésének tudása (analízis); az időbeliség tudatosítása.
    - Matematikai modellek választása, keresése, készítése, értelmezése adott szituációkhoz.
    - Statisztikai diagramok értelmezése.
    - Matematikai modellek megértése; átkódolás más modellbe.
    - A valószínűségi gondolkodás fejlesztése. A statisztikai gondolkodás fejlesztése.
    - Megismert gondolatmenet panelként való felhasználása új folyamatban.
    - Táblázatok használata.

3. Ismeretek alkalmazása:

    - Friss vagy felfrissített ismeretek, információk, felismerések közvetlen alkalmazása.

- Ismeretek alkalmazása az újabb ismeretek megszerzésében.
- Ismeretek alkalmazása a gyakorlati életben és más tantárgyak keretében (pl. százalék, kamatos kamat, stb.).

4. Problémakezelés és -megoldás:

   - Szituációban, történetben megfogalmazott, olvasott probléma megértése.
   - A problémához illeszthető matematikai modell választása, keresése, alkotása.
   - Megoldás a matematikai modellen belül.
   - Az eredmény összevetése a feltételekkel, az előre vetített eredménnyel, a valósággal.

5. Alkotás és kreativitás: alkotás öntevékenyen, saját tervek szerint; alkotások adott feltételeknek megfelelően; átstrukturálás:

   - Elnevezések, megállapodások, jelölések értése, kezelése.
   - Sejtések megfogalmazása; divergens gondolkodás.

6. Akarati, érzelmi, önfejlesztő képességek és együttéléssel kapcsolatos értékek (kommunikáció, együttműködés, motiváltság, önismeret, önértékelés, reflektálás, önszabályozás):

   - A világ megismerésének igénye.
   - A matematika értékeinek és eredményeinek megismerésére való igény.

   Ez a fejlesztési szempont szorosan nem kapcsolódik a témához, viszont az itt fel nem sorolt kompetenciák (például közös munka, vitakészség, önismeret, stb.) is nagy jelentőséggel bírnak. Ezek természetesen meg kell, hogy jelenjenek az óraszervezésben.

7. A matematika épülésének elvei:

   - Modellek alkotása a matematikán belül; matematikán kívüli problémák modellezése.

1.3.2. Kerettantervek

A kerettantervek és a helyi tantervek – a NAT-hoz hasonlóan – szintén szabályozó típusú, úgynevezett szűkebb értelemben vett tantervek. A helyi tantervek általában valamelyik kerettantervet veszik alapul, ezért én itt most csak ez utóbbival foglalkozom részletesebben.
Általános jellemzőjük, hogy három alappillérük a célok (azaz a tantárgy tanításának elvi alapjai), a követelmények (a tanulók elé állított, mérhető teljesítménykritériumok) és a tananyag. Felépítésükben évfolyamonként tagolódnak. Megadják az óraszámot, ezen kívül tartalmazhatnak megfontolásokat a módszerekre, az értékelésre, az eszközökre (pl. tankönyv), de ezek nem részletesek.

Az [5] kerettantervek által megfogalmazott célok közül egyet emelek ki, ezzel is hangsúlyozva a választott feladat időszerűségét, és az oktatási folyamatba való illeszthetőségét:
„A matematika a maga hagyományos és modern eszközeivel segítséget ad a természettudományok, az informatika, a technikai, a humán műveltségterületek, szakközépiskolákban a választott szakma ismeretanyagának tanulmányozásához, a mindennapi problémák értelmezéséhez, leírásához és kezeléséhez, gazdasági, pénzügyi kérdések áttekintéséhez, helyes döntések meghozatalához.”

Most röviden áttekintem, hogy miként alakul a kerettanterv által előírt tananyag a választott feladat szempontjából.

Fejlesztési feladatok, tevékenységek	**Tartalom**	**A továbbhaladás feltételei**
	6. évfolyam Számtan, algebra	
Egyenes és fordított arányosság felismerése gyakorlati jellegű feladatokban és a természettudományos tárgyakban. A következtetési képesség fejlesztése.	Egyenes és fordított arányosság. A százalék fogalma, alap, százalékláb, százalékérték. Egyszerű százalékszámítás arányos következtetéssel.	A mindennapi életben felmerülő egyszerű, konkrét arányossági feladatok megoldása következtetéssel.

7. évfolyam

Számtan, algebra

Következtetési képesség fejlesztése összetettebb feladatokban.	Arány, aránypár, arányos osztás gyakorlati esetekben. Százalékszámítási és egyszerű kamatszámítási feladatok.	Egyenes és fordított arányosság felismerése és alkalmazása egyszerű konkrét feladatokban. Egyszerű százalékszámítási feladatok.

8. évfolyam

Összefüggések, függvények, sorozatok

	Sorozatok és vizsgálatuk (mértani sorozat).	

9. évfolyam

Számtan, algebra

Algoritmikus gondolkodás és a gyakorlati problémák modellezése, értő szövegolvasás.	Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása. Egyenletrendszerre vezető szöveges feladatok, százalékszámítás, kamatszámítás. Gazdaságosság, veszteség, nyereség elemzése a feladatok kapcsán.	Egyszerű egyenletrendszerek biztos megoldása. A százalékszámítás alkalmazása a gyakorlatban.

Valószínűségszámítás, statisztika

A statisztikai adatok helyes értelmezése. Képi információ és a matematikai tartalom kapcsolata.	Statisztikai adatok és ábrázolásuk (kördiagram, oszlopdiagram stb.), számtani közép, medián, módusz; szórás. Környezetvédelmi, népesedési, fogyasztásról szóló adatok szerepeltetése.	Számsokaság számtani közepének kiszámítása, a középső érték (medián) és a leggyakoribb érték (módusz) ismerete. Kördiagram, oszlopdiagram adatainak értelmezése.

10. évfolyam

Valószínűségszámítás, statisztika

A valós helyzetek értelmezése, megértése és értékelése. Kísérletek elvégzése és számítógépes modellezése.	Valószínűségi kísérletek. A valószínűség szemléletes fogalma, kiszámítása egyszerű esetekben.	Egyszerű problémák megoldása a klasszikus valószínűségi modell alapján.

11. évfolyam

Valószínűségszámítás, statisztika

Modellalkotásra nevelés.	Relatív gyakoriság. A valószínűség klasszikus modellje.	A relatív gyakoriság és a valószínűség közötti szemléletes kapcsolat ismerete, egyszerű valószínűségi feladatok megoldása.

12. évfolyam

Függvények, sorozatok

A matematika alkalmazása a gyakorlati életben. Matematikatörténeti feladatok. Egyszerű gazdaságossági problémák áttekintése.	A sorozat fogalma. Számtani és mértani sorozat, az n. tag, az első n elem összege. Kamatoskamatszámítás.	Számtani és mértani sorozat esetén az n-dik tag, és az első n elem összegének kiszámítása feladatokban. Kamatoskamat-számítás alkalmazása egyszerű gyakorlati feladatokban.

Ez alapján úgy gondolom, hogy az alábbiakban részletesebben vázolt életbiztosítás árazási feladat legkorábban 10. osztályban, de 11. osztályban már mindenképpen elmondható. Mint látható, a kerettanterv alkotói szerint is 12. osztályban lehet egyszerű gazdasági problémákkal is foglalkozni. Én ehhez a gondolathoz kapcsolódva egy 12. osztályos óratervet írok le a dolgozatomban.

A következő szakaszban a szükséges elméleti háttérrel foglalkozom.

1.4. Szükséges előismeretek

1.4.1. Százalékszámítás

A *százalék* valójában századrészt jelent. Jelölése: %.
Az eredeti mennyiséget, a teljes egészet 100%-nak mondjuk, és *alap*nak (vagy *összeg*nek) nevezzük. Azt a számot, ahány százalékról van szó, *százaléklláb*nak, az alap valahány százalékát pedig *százalékérték*nek nevezzük.
Ez alapján a következő egyszerű összefüggés írható fel:

$$\text{százalékérték} = \frac{\text{alap} \cdot \text{százalékláb}}{100}.$$

Ebből azonnal látszik, hogy százalékszámítás esetén háromféle alapfeladat írható fel:

- Adott alapból és adott százaléklábból a százalékérték kiszámítása.
- Adott alapból és adott százalékértékből a százalékláb kiszámítása.
- Adott százaléklábból és adott százalékértékből az alap kiszámítása.

1.4.2. Mértani sorozat

A *mértani* (vagy *geometriai*) *sorozat* olyan $(a_n)_{n=1,\ldots}$ számsorozat, amelyben a második tagtól kezdve minden tag az őt megelőző q-szorosa. Másképpen megfogalmazva, ha $a_1 \neq 0$ és $q \neq 0$, akkor mértani sorozatnak azt a sorozatot nevezzük, melyben az egymást követő tagok *hányadosa* (vagy *kvóciense*) állandó – ezt a hányadost jelöljük q-val.
Nyilvánvaló, hogy

- ha $q = 0$, akkor a sorozat a második tagtól kezdve azonosan 0;
- ha $q = 1$, akkor a sorozat minden tagja egyenlő lesz a_1-gyel;
- ha $q > 0$, akkor a sorozat minden tagja azonos előjelű, ha $q < 0$, akkor pedig váltakozó előjelűek a tagok;
- ha $a_1 > 0$ és $q > 1$, akkor a sorozat szigorúan monoton növekedő, míg ha $0 < q < 1$, akkor a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

Állítás. Pozitív tagokból álló mértani sorozatban bármely három egymás után álló tag közül a középső a két szélső mértani közepe. Sőt általában is, bármely tag a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő tagok mértani közepe.

Állítás. Váltakozó előjelű tagokból álló mértani sorozatban bármely három egymás után álló tag közül a középső négyzete egyenlő a két szélső szorzatával. Sőt általában is, bármely tag négyzete egyenlő a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő tagok szorzatával.

Állítás (Az n-edik tag meghatározása). Ha a mértani sorozat első tagja a_1, és hányadosa q, akkor az n-edik tagok a következőképpen kaphatjuk meg:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Tétel (Az első n tag összege). Ha a mértani sorozat első tagja a_1, és hányadosa $q \neq 1$, akkor az első n tag összegét a következőképpen kaphatjuk meg:

$$S_n := a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

1.4.3. Valószínűségszámítás: klasszikus valószínűségi modell

Legyen A egy *véletlen esemény*. Végezzük el ugyanazt a kísérletet azonos körülmények között n-szer. Ha ekkor az A esemény k-szor következett be (és nyilván $n-k$-szor nem következett be), akkor a k számot az A esemény *gyakoriságá*nak, a $\frac{k}{n}$ számot pedig a *relatív gyakoriságá*nak nevezzük.
Megfigyelhetjük, hogy a kísérletek számának növelésével a relatív gyakoriság ingadozása csökken. Azt a számot, amit az n növelésével a relatív gyakoriság egyre jobban megközelít, szemléletesen az A esemény *valószínűségé*nek nevezzük.
Egy kísérlet lehetséges kimeneteleit *elemi esemény*eknek nevezzük. Az elemi események halmaza az *eseménytér*, a kísérlet eseményei az eseménytér részhalmazai.
*Lehetetlen esemény*nek nevezzük azt az eseményt, ami nem következhet be, *biztos esemény*nek pedig azt, ami biztosan bekövetkezik.

Definíció. *Klasszikus valószínűségi modell*nek nevezzük azt az esetet, amikor véges sok, egyenlően valószínű elemi eseményünk van. Ebben a modellben *kedvező*nek nevezzük azokat az elemi eseményeket, amik a vizsgált esemény bekövetkezését eredményezik. (Azaz az előbbi fogalmakkal azokat az elemi eseményeket, amik elemei az eseménytér vizsgált eseményünkhöz tartozó részhalmazának.) Ilyenkor a vizsgált A esemény valószínűsége a következőképpen számolható:

$$\mathcal{P}(A) := \frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi esemény száma}}$$

Definíció. Legyenek A és B véletlen események. Ekkor

- az A esemény *komplementer eseménye* $\overline{A}$, ami pontosan akkor következik be, ha A nem következik be;
- az A és B *események összege* $A+B$, ami pontosan akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik bekövetkezik;
- az A és B *események különbsége* $A-B$, ami pontosan akkor következik be, ha A bekövetkezik, de B nem következik be;
- az A és B *események szorzata* $A \cdot B$, ami pontosan akkor következik be, ha A és B is bekövetkezik.
- Azt mondjuk, hogy A és B *kizáró események*, ha szorzatuk a lehetetlen esemény.

Állítás. A valószínűség tulajdonságai:

- Tetszőleges A esemény esetén $0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1$,
  és nyilván a lehetetlen esemény valószínűsége 0, a biztos eseményé pedig 1.
- Ha A és B kizáró események, akkor $\mathcal{P}(A+B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$,
  általában pedig $\mathcal{P}(A+B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cdot B)$.
- Tetszőleges A eseményre $\mathcal{P}(\overline{A}) = 1 - \mathcal{P}(A)$.

Definíció. Tetszőleges A és B esemény esetén tekintsük az A esemény bekövetkezésének valószínűségét, ha tudjuk, hogy a B esemény bekövetkezett. Ezt az A esemény B feltételre vonatkozó *feltételes valószínűség*ének nevezzük, és így számolhatjuk:

$$\mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A \cdot B)}{\mathcal{P}(B)},$$

vagy ekvivalens alakban

$$\mathcal{P}(A \cdot B) = \mathcal{P}(A|B) \cdot \mathcal{P}(B).$$

Definíció. Azt mondjuk, hogy az A és B események egymástól *függetlenek*, ha

$$\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(A).$$

Ekkor a fenti szorzási szabály így egyszerűsödik:

$$\mathcal{P}(A \cdot B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B).$$

Definíció. Egy X diszkrét, véges valószínűségi változó, értékei legyenek $x_1, x_2, \ldots,$ x_n, és az X valószínűségi változó az x_i-t p_i valószínűséggel vegye fel. Ekkor az X valószínűségi változó *várható érték*e:

$$\mathtt{E}(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$

*szórásnégyzet*e pedig a várható értéktől való várható négyzetes eltérés, azaz

$$D^2(X) = \mathtt{E}\Big(\big(X - \mathtt{E}(X)\big)^2\Big)$$

1.5. Életbiztosítás árazása középiskolában

Ebben a szakaszban egy hét órából álló óratervet írok le, ami egy lehetőség a középiskolában életbiztosítás árazási feladat bevezetésére. Azzal a feltevéssel élek, hogy a diákok 12. osztályosak, vagy legalábbis rendelkeznek az előző szakaszban részletezett előismeretekkel. Bár a fontosabb fogalmakat átismételjük, ezeket nem olyan alapossággal tesszük, mintha most tanítanám meg a tanulóknak ezeket az anyagrészeket. Így tehát elképzelhető ez az anyagrész a törzsanyagba építve, mint kiegészítő fejezet, de elképzelhető a tanórától függetlenül, például szakkör formájában is.

1.5.1. Első óra - A kamat

A ráhangolódást segítő bevezető feladattal kezjük az órát. Mivel most elsődleges célunk a korábbi, százalékszámítással kapcsolatos ismeretek aktiválása, ezért tekintsünk egy egyszerű arányos feladatot.

1. feladat Egy könyv ára eredetileg 3500 Forint volt. Most lecsökkentik az árát a 3/5-öd részére. Mennyi az új ár? Mekkora az árcsökkenés? Fogalmazd meg százalékok segítségével is!

Megoldás A könyv új ára $3500 \cdot 3/5 = 2100$ forint. A megtakarítás $3500 - 2100 = 1400$ Forint. (Vagy másképpen az eredeti ár $1 - 3/5 = 2/5$ része, azaz $3500 \cdot 2/5 = 1400$ Forint.)
Százalékokkal megfogalmazva: az új ár az eredeti $\frac{2100}{3500} \cdot 100 = \frac{3}{5} \cdot 100 = 60\%$-a, a megtakarítás $\frac{2}{5} \cdot 100 = 40\%$ (vagy másképpen $100\% - 60\% = 40\%$).

Ez valóban egy igen egyszerű feladat, mégis lehetőséget ad rá, hogy a százalékról tanultakat átismételjük. A feladat megbeszélése közben érdemes közösen felírni a százalékszámításra tanult formulá(ka)t, hogy ezt rögzítsük.

2. feladat Egy ruha ára eredetileg 8400 Forint volt. Ezt először megemelték 25%-kal, majd később az új árat 40%-kal csökkentették. Mennyi az új ár? Ez az eredeti ár hány százaléka? Hogyan tudnál erre a kérdésre válaszolni anélkül, hogy kiszámolnád az új árat?

Megoldás A ruha ára az áremelés után $8400 \cdot 1,25 = 10500$ Forint. Ezt csökkentik, így a végleges ár $10500 \cdot 0,6 = 6300$ Forint. Ez az eredeti ár $\frac{6300}{8400} \cdot 100 = 75\%$-a. Ezt onnan is láthatjuk, hogy az árváltozás összesen $1,25 \cdot 0,6 = 0,75$-szörös.

Ez egy összetettebb feladat volt, ami arra adott lehetőséget, hogy tudatosítsuk, ha a változás százalékos alakban adott, bizony oda kell figyelni, mi is az aktuális százalákláb alapja. A feladat másik hozadéka pedig, hogy iterált százalékszámításnál a százalékok összeszorzódnak.

Ha mindenkinek kellőképpen világos már a százalékszámítás, akkor rá is térhetünk a kamat fogalmára.

Definíció. A *kamat* mindig egy pénzösszeg, amit a bérbevevő fizet a bérbeadónak a kölcsön névértéke alapján. A *kamatláb* a kamat névértékre vetített százalékos formája, azaz

$$\text{kamatláb} = \frac{\text{kamat}}{\text{tőke}} \cdot 100$$

Érdemes ilyenkor beszélni a gyerekekkel arról, hogy vajon miért van szükség a kamatra. Nem szükséges feltétlenül fórumot szervezni, bár ezt is megtehetjük. Ha a gyerekek kellőképpen motiváltak (esetleg előző órán feladtuk, hogy nézzenek utána befektetések és hitelek kamatainak), akkor biztosan lesz egy-két jó ötletük.
Egyszerűen megfogalmazva arról van szó, hogy a bérbeadó a pénzösszeg kölcsönadásával elveszíti a lehetőséget, hogy azt befektesse. Ennek kompenzálására fizeti a bérbevevő a kamatot. De nyilván más helyes gondolatok is vannak, ezt mindig tartsuk szem előtt! (Például a kamatnak kell fedeznie a bérbeadás költségeit, stb.)

A fenti formulából azonnal látszik, hogy a kamattal „úgy kell számolni, mint a százalékkal". Valóban, éppen erről van szó. Ezért is olyan népszerű gyakorlati példa, hogy minden érettségiben van egy kamatszámító feladat. Nézzünk mi is néhány feladatot.

3. feladat Egy banki hirdetésben azt látjuk, hogy egy éves lekötés esetén évi 10%-os kamatot fizet. Ha úgy döntünk, hogy lekötünk 500000 Forintot, mennyi pénzünk lesz egy év múlva?
Ha most ugyanez a bank két éves lekötés esetén évi 11%-os kamatot fizet, és inkább itt kötjük le az 500000 Forintot, mennyi pénzünk lesz két év múlva?

Ha ez problémát jelenthet, esetleg érdemes rákérdezni, mindenki érti-e, hogy a 10%-os kamat azt jelenti, hogy a kamatláb 10%. (Ez a szóhasználatbeli kettősség talán zavaró lehet, viszont a hétköznapi szövegekben is így használjuk. Ezért érdemes rávezetni a gyerekeket, hogy a szövegkörnyezet alapján kiderül, milyen értelemben használjuk a kamat szót.)

Megoldás Az első esetben egy év múlva $500000 \cdot 1,1 = 550000$ Forintunk lesz. A második esetben egy év után $500000 \cdot 1,11 = 555000$ Forintunk, majd a második év végén $555000 \cdot 1,11 = 616050$ Forintunk lesz.
Másik megoldás, hogy kiszámoljuk az éves kamatot, majd hozzáadjuk a tőkéhez. A második esetben ezzel az új tőkével számolunk tovább.

Most viszonylag könnyen tudtunk számolni, de kérdezzük meg a gyerekeket, mi lett volna, ha nem kettő, hanem mondjuk húsz évre kötöttük volna le a pénzünket. Ha ugyanezt a gondolatmenetet követjük, akkor húsz szorzást (vagy húsz szorzást és húsz összeadást) kéne elvégeznünk. Hogyan lehetne ezt egyszerűbben? Biztosan lesz olyan, aki emlékszik a 2. feladatra. Az alapján ugyanis a következőt kapjuk (a kamatlábat tizedestört alakba írva, és i-vel jelölve):

$$V_n = \Big(\dots \underbrace{\big(\underbrace{V_0 \cdot (1+i)}_{V_1}\big) \cdot (1+i)}_{V_2} \dots \Big) \cdot (1+i) = V_0 \cdot (1+i)^n$$

Ezt az összefüggést nevezzük *kamatos kamat*nak. Érdemes megemlíteni (bár ezt most nem fogjuk kihasználni), hogy ez tulajdonképpen egy mértani sorozat, melynek kezdőeleme V_0, a kezdőtőke, és hányadosa $q = (1+i)$.
Ez alapján már könnyen meg tudjuk oldani a következő feladatokat.

4. feladat 100000 Forintot szeretnénk befektetni 10 évre. Az alábbi lehetőségek közül választhatunk:
1) lekötjük évi 8%-os kamatra;
2) betesszük évi 15%-os kamatra, ami kétévente 3%-kal csökken;
3) minden évben fix 10000 Forintot kamatozik.
Melyik lehetőséget válasszuk?

Megoldás Az első esetben a tizedik év végén $100000 \cdot 1,08^{10} = 215893$ Forintot kapunk kézhez. A második esetben $100000 \cdot 1,15^2 \cdot 1,12^2 \cdot 1,09^2 \cdot 1,06^2 \cdot 1,03^2 = 234948$ Forintot, míg a harmadik esetben $100000 + 10 \cdot 10000 = 200000$ Forintot kapunk. Ezek alapján a második lehetőség éri meg a legjobban.

5. feladat Egy évre szeretnénk lekötni a pénzünket. Melyik a legelőnyösebb?

1) Ha a pénzt évi 21%-os kamatra tesszük be, és évenként tőkésítenek.
2) Ha a pénzt évi 20%-os kamatra tesszük be, és félévenként tőkésítenek.
3) Ha a pénzt évi $19,5\%$-os kamatra tesszük be, és havonta tőkésítenek.
4) Ha a pénzt évi 20%-os kamatra tesszük be, és naponta tőkésítenek.

Megoldás Az első esetben a pénzünk $1,21$-szeresét kapjuk kézhez egy év után. A második esetben $(1+\frac{0,2}{2})^2 = 1,21$-szeresét, a harmadik esetben $(1+\frac{0,195}{12})^{12} = 1,213$-szeresét, míg a negyedik esetben $(1+\frac{0,2}{365})^{365} = 1,221$-szeresét kapjuk. Ez alapján a negyedik eset a legelőnyösebb.

Ez utóbbi feladatnak két tanulsága van. Az egyik, hogy ha nem ismerjük a tőkét, akkor is meg tudjuk mondani, melyik lehetőség hozama nagyobb. A másik pedig, hogyan kell áttérni éves kamatról más időszakú kamatlábakra.

1.5.2. Második óra - Gyűjtés és törlesztés

Az előző alkalommal megtanultuk a kamatos kamatra vonatkozó formulát. A mostani alkalommal hasonló, de kicsit bonyolultabb feladatokat nézünk.

1. feladat Egy bank évi 12%-os kamatot ad. Mi három éven keresztül, minden év elején beteszünk a bankba 100000 Forintot. Mennyi pénzünk lesz a harmadik év végén?

Megoldás Az első év végén $100000 \cdot 1,12 = 112000$ Forintunk lesz. Most beteszünk ehhez még 100000-et, így a második év elején 212000 Forintunk van a bankban. Ez kamatozik, év végére $212000 \cdot 1,12 = 237440$ Forintunk lesz. Harmadik év elején megint berakunk 100000-et, így a 337440 Forint kamatozik tovább. A harmadik év végére 377932 Forintunk lesz.

Megint hasonló eset áll fenn, mint a kamatos kamat esetében. Három évre ez még könnyen számolható, de mi lenne, ha húsz évig gyűjtenénk a pénzt a bankban. Jó volna megint találni valami egyszerűbb formulát, amivel könnyen lehet számolni. Írjuk fel ezért általánosabban: jelölje S_n az n-edik év végére összegyűlt pénzt (majd mindjárt meglátjuk, miért ezt a jelölést választottam), és legyen az évente befizetett összeg V, ekkor

$$\begin{aligned}
S_1 &= V \cdot (1+i) \\
S_2 &= \big(V + V \cdot (1+i)\big) \cdot (1+i) = V \cdot (1+i) + V \cdot (1+i)^2 \\
S_3 &= \Big(V + \big(V + V \cdot (1+i)\big) \cdot (1+i)\Big) \cdot (1+i) = V \cdot (1+i) + V \cdot (1+i)^2 + V \cdot (1+i)^3 \\
&\vdots \\
S_n &= V \cdot (1+i) + V \cdot (1+i)^2 + V \cdot (1+i)^3 + \ldots + V \cdot (1+i)^n
\end{aligned}$$

Nos, ez már legalább egy világos formula, de ettől még n darab hatványozást kell elvégezni benne, ami nagy n-re továbbra is nehézkessé teszi a számolást. Észrevehetjük azonban, hogy az összeg tagjai most éppen egy $V \cdot (1+i)$ kezdőtagú, és $(1+i)$ hányadosú mértani sorozat egymást követő elemei. Arról pedig tudjuk (ha nem, akkor röviden ismételjük át), hogy mértani sorozat első n tagjának összege így számolható:

$$S_n := a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Ez alapján a fenti összeget is zárt alakra hozhatjuk. Ezt nevezzük *gyűjtőjáradék*nak.

$$S_n = V \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

2. feladat Elhatároztuk, hogy autót vásárolunk, ezért takarékoskodni szeretnénk. Egy bankba tesszük a pénzünket, minden év elején ugyanannyit. A bank évi 11% kamatot fizet. Mennyi pénzt tegyünk évente a bankba, ha öt év múlva szeretnénk megvenni egy 3100000 Forint értékű autót?
És ha csak évi 250000 Forintot tudunk betenni a bankba, akkor mennyi idő alatt jön össze az autó ára?

Megoldás Írjuk fel a gyűjtőjáradék formuláját: $3100000 = V \cdot 1,11 \cdot \frac{1,11^5 - 1}{0,11}$. Ezt átrendezve kapjuk, hogy $V = 448440$ Forintot kéne évente betenni a bankba.
A második kérdéshez ismét írjuk fel a gyűjtőjáradék formuláját: $3100000 = 250000 \cdot 1,11 \cdot \frac{1,11^n - 1}{0,11}$. Ezt átrendezve kapjuk, hogy $1,11^n = 2,23$. Innen mindkét oldal logaritmusát véve kapjuk, hogy $n = 7,68$, tehát legalább 8 évig kéne takarékoskodnunk.

Eddig mindig olyan esetet néztünk, amikor mi „adtunk kölcsön" a banknak, ezért mi kaptuk a kamatot. Most nézzünk egy olyan esetet, amikor a bank ad kölcsönt, és nekünk kell törleszteni.

3. feladat 1000000 Forint hitelt vettünk fel, évi 20%-os kamatra. Az első két évben 350000 Forintot törlesztettünk vissza évente. (Ez azt jelenti, hogy az első két év végén törlesztettünk.) Mennyi tartozásunk maradt még?

Megoldás Első év végén $1000000 \cdot 1,2 = 1200000$ Forint tartozásunk volt, ebből fizettünk vissza 350000 Forintot, így maradt 850000 Forint tartozásunk. Ez a kamattal együtt a második év végére $850000 \cdot 1,2 = 1020000$ Forintra nőtt, amiből ismét törlesztettünk 350000 Forintot. Tehát most (a második év végén) még 670000 Forint hiteltartozásunk van.

Az eddigiek alapján gyaníthatjuk, hogy most is fel lehet írni a számolást egy zárt formulában. Próbáljuk meg felírni általánosan. Jelölje T_n az n-edik év végén megmaradó tartozásunkat, t a felvett hitel összegét, a pedig az éves törlesztőrészletet. (Nyilván $a < t$.) Ekkor

$$\begin{aligned} T_0 &= t \\ T_1 &= t \cdot (1+i) - a \\ T_2 &= \big(t \cdot (1+i) - a\big) \cdot (1+i) - a = t \cdot (1+i)^2 - a \cdot (1+i) - a \\ &\vdots \\ T_n &= t \cdot (1+i)^n - a \cdot (1+i)^{n-1} - \ldots - a \cdot (1+i) - a \end{aligned}$$

Megint észrevehetjük (nagy valószínűséggel ezt már a gyerekek maguktól is észreveszik), hogy az első tagot nem tekintve megint egy mértani sorozat első n tagjának az összege áll itt. A mértani sorozat első tagja $-a$, hányadosa $(1+i)$. Ekkor az ismert összegképlet szerint

$$T_n = t \cdot (1+i)^n - a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

4. feladat 1000000 Forint hitelt vettünk fel, évi 20%-os kamatra. Mennyi a törlesztőrészlet, ha a futamidő 20 év?

Illetve mennyi idő alatt tudjuk visszatörleszteni a hitelt, ha évi 350000 Forintot törlesztünk?

Megoldás Ilyenkor természetesen úgy tekintjük, hogy abban az évben, mikor teljesen visszafizettük a hitelt, $T_n = 0$ lesz.

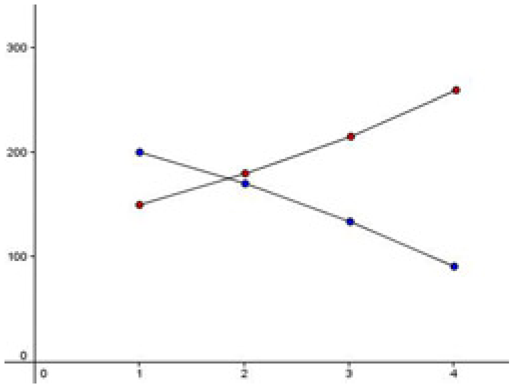
Írjuk fel tehát a formulát, most először $T_{20} = 0$-ra: $0 = 1000000 \cdot 1,2^{20} - a \cdot \frac{1,2^{20}-1}{0,2}$. Ezt átrendezve azt kapjuk, hogy $a = 205357$ Forint a törlesztőrészlet.

A második kérdés esetén ismét írjuk fel a formulát $T_n = 0$-ra (most n a kérdés). Ekkor $0 = 1000000 \cdot 1,2^n - 350000 \cdot \frac{1,2^n-1}{0,2}$. Átrendezve kapjuk, hogy $750000 \cdot 1,2^n = 1750000$, azaz $n = 4,65$, vagyis 350000 Forint törlesztőrészlet mellett öt év alatt fizetnénk vissza a teljes kölcsönt.

Óra végén, ha marad idő, még egy érdekes feladatot megbeszélhetünk.

5. feladat (szorgalmi) 1000000 Forint hitelt vettünk fel, évi 20%-os kamatra. Ha évi 350000 Forintot törlesztünk, az előbb láttuk, hogy 5 év alatt fizetnénk vissza a hitelt. Azt viszont láttuk a 3. feladatban, hogy az első évben alig csökkent a hiteltartozás, mert a törlesztőrészlet nagy része a kamat kiegyenlítésére fordítódott. Vajon mikortól kezdve fordítódik nagyobb része a törlesztőrészletnek a tőke csökkentésére, mint a kamatra? Először tippelj! Utána ábrázold két grafikonon, hogy az n-edik évben a törlesztés hogyan oszlik meg!

Megoldás



1.5.3. Harmadik óra - Jelenérték-számítás

Térjünk most vissza újra a kamatos kamat számításhoz. Azt már említettük, hogy a kamatnak köze van az időhöz: a kamatos kamat pedig azt jelenti, hogy egy ma egységnyi értékű pénz n idő elteltével mennyit fog érni. Ezért ezt a pénz *jövőértékének* is nevezik. Tehát egy X pénzösszeg n év múlva i kamatláb mellett

$$Y = X \cdot (1+i)^n$$

összeget fog érni. Ez alapján könnyen látható, hogy egy jövőbeli Y értékű kifizetéshez most

$$X = \frac{Y}{(1+i)^n}$$

összeget kell félretenni. Ezt nevezzük a jövőbeli Y összeg *jelenértékének*, ami tehát azt fejezi ki, hogy jövőbeli egy egység értékű pénz ma hány egységet ér.

Bevezetünk még egy új jelölést. Legyen

$$\nu = \frac{1}{(1+i)}.$$

Ezt az i kamatlábhoz tartozó *diszkonttényezőnek* hívják. Ezzel a jelöléssel a fenti összefüggés így írható:

$$X = Y \cdot \nu^n,$$

ezért azt is mondjuk, hogy az Y pénzösszeget *diszkontáljuk*, így kapjuk meg a jelenértékét.

Nézzünk most néhány feladatot ezen új fogalmak alkalmazására.

1. feladat Hitelt vettünk fel, t Forintot, n éves futamidőre, i%-os kamatra. Írjuk fel a törlesztésre vonatkozó eredeti formulát, és próbáljuk megfogalmazni a jelenérték segítségével! Értelmezzük az eredményt!

Megoldás Írjuk fel tehát a formulát. Megint $T_n = 0$, ezért a formula a következő alakba írható:

$$t \cdot (1+i)^n = a \cdot (1+i)^{n-1} + \ldots + a \cdot (1+i) + a$$

Most mindkét oldalt $(1+i)^n$-nel leosztva kapjuk, hogy

$$t = \frac{a}{(1+i)} + \ldots + \frac{a}{(1+i)^n} = a \cdot \nu + \ldots + a \cdot \nu^n.$$

Ezzel tehát sikerült a formulát a jelenérték segítségével felírni. Mit is jelent ez most? A bal oldalon áll a t, ez a hitelösszeg nagysága, aminek értéke a jelenben értendő. A jobb oldalon áll a törlesztőrészlet a különböző időpontokban diszkontálva. Az egyenlőség azt az alapvető gondolatot tükrözi, hogy nem szeretnénk többet visszafizetni, mint amennyit kölcsönvettünk. Ez azonban az idő múlása miatt nem megvalósítható (hiszen a kamatozás miatt a hitelösszeg értéke nő), de azt azért elvárhatjuk, hogy jelenértékben ne kelljen többet visszafizetni a kölcsönnél.

Ez egy nehezebb feladat. Egy teljesen új szemléletet jelenít meg, amit nagyon fontos, hogy a tanulók megértsenek. Ezért annyi időt szánjuk a megbeszélésre, amennyit csak kell.
A feladat fontosabb mondanivalója az, hogy a két oldal jelenértékben egyezzen meg. Erre szánjunk több időt. Azt is megtehetjük, hogy a formulát – rövid egyéni gondolkodás után – közösen vezessük le, és inkább arra ösztönözzük a diákokat, hogy az új formula jelentését próbálják megfejteni.

2. feladat Hitelt vettünk fel, 500000 Forintot, 15%-os kamatra. Úgy szeretnénk visszatörleszteni, hogy három alkalommal: a hitelfelvételt követő második, negyedik és hatodik évben fizetünk vissza három egyenlő összeget. Jelenértékes megfontolással határozzuk meg, mekkora legyen ez az összeg.

Megoldás Az előbb megbeszéltek szerint azt szeretnénk, hogy jelenértékben ugyanannyit fizessünk vissza, mint amennyit kölcsönvettünk. Ez azt jelenti, hogy a három törlesztőrészletet diszkontálva, összegük éppen a hitelösszeget kell, hogy adja. Vagyis

$$t = a \cdot \nu^2 + a \cdot \nu^4 + a \cdot \nu^6$$

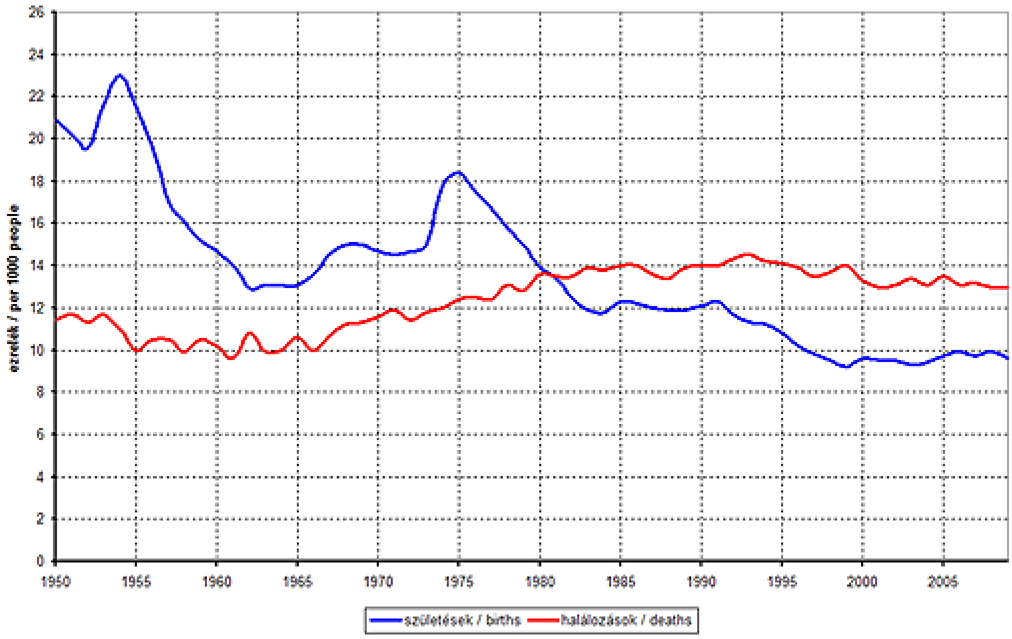
Innen fejezzük ki a-t: $a = t/(\nu^2 + \nu^4 + \nu^6) = 284090$.
Ezzel tehát meghatároztuk a törlesztőrészlet nagyságát.

1.5.4. Negyedik óra - Demográfiai alapfogalmak

Ahogy a 4.2.2.fejezetben már említettem, ebben a témakörben a tantárgyi integráció is szerepet kaphat. Szervezhetjük tehát úgy az órát, hogy – ha közös projektmunkára nincs is lehetőségünk – a különböző tantárgyak kapcsolódó tartalmait megvizsgáljuk matematikai szemszögből. Akár a gyerekek is felkészülhetnek egy-egy kapcsolódó terület bemutatására.

Tehát az óra első fele olyan demográfiai témákkal telik, mint a népesség, népsűrűség, korfa (ezen belül az öregedő és fiatalodó társadalmak), nemzetiségek, stb.

Például a következő feladatok adhatók (de a gyerekek is hozhatnak grafikonokat, diagramokat, és azokat is elemezhetjük):



1. feladat A fenti diagram[2] a születések és a halálozások számának változását mutatja 1000 főre vetítve, 1950 és 2008 között.

1) Foglaljuk táblázatba 1950-től 5 évenként a születési és halálozási arányszámokat!

2) Minden adatpár esetén számítsuk ki, hogy a születések száma hány százaléka a halálozások számának!

3) Körülbelül hány százalékkal nőtt a halálozások száma 1960 és 1990 között?

4) Melyik időszakban (ötéves szakasz) volt a legnagyobb arányú a születések csökkenése?

5) Röviden foglaljuk össze a konklúziókat!

[2] Forrás: Wikimedia Commons

Térjünk most rá az életbiztosításhoz szükséges demográfiai adatok, a halálozási adatok tanulmányozására. Ezt a 2003. évi magyar halandósági táblázat alapján tesszük meg. Ennek a férfiakra vonatkozó táblája (a KSH 2003. évi halandósági táblája alapján):

x	l_x	x	l_x	x	l_x	x	l_x	x	l_x
0	100000								
1	99204	21	98564	41	95159	61	71629	81	22131
2	99146	22	98491	42	94680	62	69676	82	19701
3	99108	23	98411	43	94121	63	67671	83	17360
4	99079	24	98325	44	93477	64	65615	84	15115
5	99066	25	98233	45	92749	65	63502	85	12975
6	99051	26	98136	46	91941	66	61317	86	10953
7	99034	27	98035	47	91063	67	59047	87	9065
8	99016	28	97931	48	90119	68	56691	88	7330
9	98998	29	97825	49	89111	69	54250	89	5766
10	98980	30	97715	50	88039	70	51730	90	4391
11	98964	31	97595	51	86901	71	49139	91	3218
12	98947	32	97463	52	85698	72	46493	92	2254
13	98928	33	97316	53	84434	73	43807	93	1496
14	98904	34	97151	54	83106	74	41093	94	933
15	98872	35	96965	55	81712	75	38359	95	540
16	98836	36	96752	56	80244	76	35613	96	286
17	98794	37	96510	57	78693	77	32727	97	137
18	98746	38	96235	58	77055	78	29941	98	58
19	98691	39	95924	59	75329	79	27250	99	21
20	98631	40	95569	60	73518	80	24647	100	7

A halandósági táblák tartalmazzák, hogy 100000 főre vetítve hányan érik meg az adott kort. A fenti táblázatban x jelöli az egyének életkorát, l_x pedig azt mondja meg, hogy hányan vannak életben a 100000 főből x éves korukban.

A halandósági táblák gyakran tartalmaznak még egyéb adatokat is, mint például az adott korban elhunytak száma, a halálozási- és túlélési-valószínűség, stb. De ezeket mind ki tudjuk számolni, ezért számunkra ez az egyszerűsített táblázat megfelelő lesz.

Ezekre a következő általánosan használt jelöléseket vezetjük be: q_x annak a valószínűsége, hogy az x éves egyén meghal az $x+1$ életéve előtt; p_x pedig annak, hogy túlél, azaz hogy az x éves egyén megéli az $x+1$-edik születésnapját; d_x jelöli az x éveskoruk és $x+1$ éves koruk között elhunytak számát.

2. feladat Határozzuk meg a következő halandósági mérőszámokat!

$$l_{50},\ l_{51},\ d_{50},\ p_{50},\ q_{50}$$

Megoldás Az azonnal leolvasható a táblázatból, hogy $l_{50} = 88039$ és $l_{51} = 86901$. Tehát tudjuk, hogy hány férfi élt a populációból 50 éves korában, és hányan éltek 51 éves korukban. Azonnal adódik, hogy e két szám különbsége megadja azoknak a férfiaknak a számát, akik 50 és 51 éves koruk között hunytak el. Tehát $d_{50} = 88039 - 86901 = 1138$.

Kérdés, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy egy 50 éves férfi nem éri meg az 51 éves kort. A klasszikus valószínűségi modell szerint ezt úgy számolhatjuk ki, hogy a jelentős (kissé morbid lenne, de a terminológia szerint „kedvező") esetek számát elosztjuk az összes eset számával, azaz az 50 és 51 éves koruk között elhunytak számát elosztjuk az 50 éves korukban még élők számával. Vagyis: $q_{50} = 1138/88039 = 0,013$. Mivel a túlélés ennek komplementer eseménye, azonnal adódik, hogy $p_{50} = 1 - 0,013 = 0,987$.

Próbáljuk meg általánosan felírni az itt kapott összefüggéseket. Ez alapján a következők igazak:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$
$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$
$$p_x = 1 - q_x = \frac{l_x - l_x + l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Vezessük be a következő jelöléseket: jelölje $q_{x,n}$ annak a valószínűségét, hogy egy x korú férfi n éven belül meghal, és hasonlóan $p_{x,n}$ annak a valószínűségét, hogy egy x korú férfi megéri az $x + n$ évet. Ekkor nyilván $q_x = q_{x,1}$ és $p_x = p_{x,1}$.

3. feladat Határozzuk meg a következő halandósági mérőszámokat!

$$l_{50},\ l_{51},\ l_{52},\ d_{50},\ d_{51},\ p_{50,2},\ q_{50,2}$$

Megoldás Az előbbihez hasonlóan $l_{50} = 88039$, $l_{51} = 86901$, $l_{52} = 85698$, továbbá $d_{50} = 88039 - 86901 = 1138$ és $d_{51} = 86901 - 85698 = 1203$.

A halálozási valószínűséget ismét klasszikus valószínűségi modellel számoljuk. A jelentős esetek az 50 és 52 között elhunytak száma, ami nyilván egyenlő az 50 és 51 között elhunytak és az 51 és 52 között elhunytak számának összegével. Az összes eset az 50 éves korukban még életben levők száma. Azaz $q_{50,2} = (1138 + 1203)/88039 = 0,027$, és ekkor $p_{50,2} = 1 - q_{50,2} = 0,973$.

Írjuk fel megint általánosan:

$$q_{x,n} = \frac{d_x + \ldots + d_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x},$$

kihasználva, hogy a számlálóban levő összeg teleszkópos összeg. Továbbá

$$p_{x,n} = 1 - q_{x,n} = \frac{l_x - l_x + l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{x+n}}{l_x}.$$

4. feladat Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy 50 éves férfi megéri a 60-adik életévét, de az utána következő három évben meghal?

Megoldás Ezt feltételes valószínűséggel írjuk fel: jelölje A :=„50 és 60 éves kora között nem hal meg" és B :=„60 és 63 éves kora között meghal". Ekkor

$$\mathcal{P}(A \cdot B) = \mathcal{P}(B|A) \cdot \mathcal{P}(A) = q_{60,3} \cdot p_{50,10} = \frac{l_{60} - l_{63}}{l_{60}} \cdot \frac{l_{60}}{l_{50}} = \frac{l_{60} - l_{63}}{l_{50}} =$$

$$= \frac{73518 - 67671}{88039} = 0,066$$

1.5.5. Ötödik óra - Életbiztosítások I.

Az előző órákon előkészítettük, így végre eljutottunk oda, hogy életbiztosításokkal foglalkozzunk. Először szükséges, hogy röviden beszélgessünk a biztosításokról: alapvetően kétféle biztosítást különböztetünk meg, az élet és a nem-élet biztosítást. Mi most csak az előbbiekkel foglalkozunk. Ennek egyik oka, hogy az életbiztosítás úgynevezett összegbiztosítás (azaz a biztosítási összeg előre meghatározott, nem úgy, mint a kárbiztosításoknál, ahol a biztosítási összeg a kár nagysága, vagy annak bizonyos része). Továbbá életbiztosítás esetén a „káresemény" bekövetkezése (a biztosított halála vagy túlélése) a halandósági tábla alapján viszonylag könnyen számolható.

A számolás megkönnyítése érdekében feltesszük, hogy a szerződés fordulópontja megegyezik a naptári év fordulópontjával. Továbbá egyszeri biztosítási díjat feltételezünk, ami az év elején folyik be a biztosítóhoz, a biztosítási összegek pedig az év végén kerülnek kifizetésre.
(Most nettó biztosítási díjat számolunk, a bruttó díjban a különböző költségeket is figyelembe kéne venni, de ezzel most nem foglalkozunk.)

Életbiztosításból is többféle konstrukció lehetséges. Mi most a haláleseti, az elérési és a vegyes életbiztosítással foglalkozunk majd.

- *Haláleseti életbiztosítás*nak hívjuk azt a biztosítást, amelyben a kedvezményezett személy megkapja a biztosítási összeget (amelyre a szerződés szólt), ha a biztosítási tartam alatt a biztosított meghal, de kifizetés nélkül szűnik meg, ha a biztosított megéri a tartam végét.

- *Elérési életbiztosítás* alatt olyan biztosítást értünk, amelynél a biztosított megkapja a biztosítási összeget (amelyre a szerződés szólt), ha megéri a biztosítási tartam végét, de kifizetés nélkül szűnik meg, ha a tartam alatt a biztosított meghal.

- A *vegyes életbiztosítás* egy kockázati és egy elérési biztosítás együttese, tehát ha a biztosított a tartam alatt meghal, akkor a haláleset után, ha nem, akkor a tartam végén fizeti ki a biztosítási összeget. Ez az egyik leggyakoribb biztosítástípus. (Gondolkodjunk el rajta, miért!)

A feladatunk egy konkrét biztosítás árazása lesz. Ez azt jelenti, hogy egy adott x korú személy köt adott S biztosítási összegre[3], adott n éves időtartamra egy életbiztosítást. (Megkülönböztetjük majd, milyen típusút.) A cél a biztosítás Π egyszeri díjának a meghatározása.
Azaz szeretnénk meghatározni azt a Π pénzösszeget, amit most hajlandóak vagyunk fizetni, hogy cserébe a jövőben a biztosítási esemény bekövetkezése (tehát halál vagy túlélés) esetén megkapjuk a biztosítási összeget.
Ehhez hasonlót már láttunk két órával ezelőtt: akkor azt a pénzösszeget határoztuk meg (törlesztőrészlet), amit a jövőben fizettünk, cserébe egy mostani összegért. Ott a jelenértékek egyenlőségének elvéből indultunk ki. Célszerű volna most is ilyen módon okoskodni. Csakhogy akkor determinisztikus (előre meghatározott idejű és nagyságú) kifizetéseink voltak. Most azonban csak a kifizetés nagysága van meghatározva. A kifizetések ideje a véletlentől függ (hiszen nem tudhatjuk előre, hogy valaki túlél-e, vagy meghal, s ez utóbbi esetben sem tudhatjuk, mikor). Ez azért probléma, mert a diszkontálás felírásakor nem tudnánk, milyen kitevővel diszkontáljunk.
A megoldás a következő elv:

Definíció. A díjkalkuláció alapelve az *ekvivalencia-elv*:

bevételek várható értékének jelenértéke = kiadások várható értékének jelenértéke

Elsőként határozzuk meg a haláleseti életbiztosítás egyszeri díját:

[3] Általában feltesszük, hogy a biztosítási összeg= 1. Ha erre kiszámítjuk a biztosítási díjat, akkor az S biztosítási összegre annak S-szerese lesz a díj.

1. feladat Egy $x = 50$ éves férfi haláleseti biztosítást köt $S = 1$ biztosítási összegre, $n = 1$ év időtartamra. A kamatláb $i = 2\%$. Mennyi a biztosítás díja?

Megoldás Az ekvivalencia-elv alapján írjuk fel a bevételek és a kiadások várható értékének jelenértékét:

- Bevétel: a Π biztosítási díj. Ennek várható értéke (mivel konstans) önmaga, és mivel a jelen pillanatban kerül befizetésre, jelenértéke is önmaga. Tehát az egyenlőség egyik oldalán Π áll.
- Kiadás: az S biztosítási összeg, ha a biztosított meghal, és semmi, ha nem hal meg. Ennek várható értéke: $q_{50} \cdot S + p_{50} \cdot 0$, vagyis q_{50}. Ennek jelenértéke: $q_{50} \cdot \nu$.

Tehát $\Pi = q_{50} \cdot \nu = \frac{d_{50}}{l_{50}} \cdot \frac{1}{1+i} = 0,013 \cdot \frac{1}{1,02} = 0,012745$.
Vagyis ha $S = 1000000$ Forint biztosítási összegre kötné a biztosítást, akkor az egyszeri díj $\Pi = 12745$ Forint.

2. feladat Írjuk fel általános esetben a formulát egy x éves egyén n évre, $S = 1$ biztosítási összegre kötött haláleseti biztosításának egyszeri díjára!

Megoldás Kövessük az előző gondolatmenetet: a bal oldalon az egyszeri biztosítási díj áll. A jobb oldalt fel kell bontani, hogy a biztosított meghal az első évben; nem hal meg az első, de meghal a második évben; stb.; végül hogy túléli az n évet. Ekkor a valószínűségeket az előző óra 4. feladata alapján feltételes valószínűséggel számolva, majd a megfelelő diszkonttényezőkkel beszorozva kapjuk az egyenlőséget:

$$\Pi_{x,n} = \frac{d_x}{l_x}\nu + \frac{d_{x+1}}{l_x}\nu^2 + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{l_x}\nu^n.$$

1.5.6. Hatodik óra - Életbiztosítások II.

Előző órán felírtuk az életbiztosítások árazásának kulcsát: az ekvivalencia-elvet. Segítségével kiszámoltuk a haláleseti életbiztosítás egyszeri díjának általános képletét. Most óra elején röviden ismételjük át az ekvivalencia-elvet, valamint az elérési és a vegyes életbiztosítás definícióját. Ezeknek a díját fogjuk meghatározni ezen az órán.

Elsőként határozzuk meg az elérési életbiztosítás egyszeri díját:

1. feladat Egy $x = 50$ éves férfi elérési biztosítást köt $S = 1$ biztosítási összegre, $n = 1$ év időtartamra. A kamatláb $i = 2\%$. Mennyi a biztosítás díja?

Megoldás Az ekvivalencia-elv alapján írjuk fel a bevételek és a kiadások várható értékének jelenértékét:

- Bevétel: a Π biztosítási díj. Ennek várható értéke (mivel konstans) önmaga, és mivel a jelen pillanatban kerül befizetésre, jelenértéke is önmaga. Tehát az egyenlőség egyik oldalán Π áll.
- Kiadás: az S biztosítási összeg, ha a biztosított nem hal meg, és semmi, ha meghal. Ennek várható értéke: $q_{50} \cdot 0 + p_{50} \cdot S$, vagyis p_{50}. Ennek jelenértéke: $p_{50} \cdot \nu$.

Tehát $\Pi = p_{50} \cdot \nu = \frac{l_{51}}{l_{50}} \cdot \frac{1}{1+i} = 0,987 \cdot \frac{1}{1{,}02} = 0,967647$.
Vagyis ha $S = 1000000$ Forint biztosítási összegre kötné a biztosítást, akkor az egyszeri díj $\Pi = 967647$ Forint. (Gondolkodjunk el rajta, miért van az, hogy az ugyanilyen paraméterű haláleseti biztosítás jóval olcsóbb volt, mint az elérési!)

2. feladat Írjuk fel általános esetben a formulát egy x éves egyén n évre, $S = 1$ biztosítási összegre kötött elérési biztosításának egyszeri díjára!

Megoldás Kövessük az előző gondolatmenetet: a bal oldalon az egyszeri biztosítási díj áll. A jobb oldalon csak akkor történik kifizetés, ha a biztosított túléli az n évet. Ennek a valószínűségét klasszikus valószínűségi modellel számolhatjuk: l_{x+n}/l_x. Ezt a megfelelő diszkonttényezőkkel beszorozva kapjuk az egyenlőséget:

$$\Pi_{x,n} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \nu^n.$$

Most pedig határozzuk meg a vegyes életbiztosítás egyszeri díját:

3. feladat Egy $x = 50$ éves férfi vegyes biztosítást köt $S = 1$ biztosítási összegre, $n = 1$ év időtartamra. A kamatláb $i = 2\%$. Mennyi a biztosítás díja?

Megoldás Az ekvivalencia-elv alapján írjuk fel a bevételek és a kiadások várható értékének jelenértékét:

- Bevétel: a Π biztosítási díj. Ennek várható értéke (mivel konstans) önmaga, és mivel a jelen pillanatban kerül befizetésre, jelenértéke is önmaga. Tehát az egyenlőség egyik oldalán Π áll.
- Kiadás: az S biztosítási összeg, ha a biztosított nem hal meg, és szintén S, ha meghal. Ennek várható értéke: $q_{50} \cdot S + p_{50} \cdot S$, vagyis $q_{50} + p_{50} = 1$. Ennek jelenértéke: ν.

Tehát $\Pi = \nu = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1{,}02} = 0,980392$.

Vagyis ha $S = 1000000$ Forint biztosítási összegre kötné a biztosítást, akkor az egyszeri díj $\Pi = 980392$ Forint.

Akár már itt észrevehetjük, hogy ez nem más, mint a haláleseti és a vegyes életbiztosítás díjának összege. De ha a gyerekek maguktól nem mondják, akkor előbb oldjuk meg a következő feladatot.

4. feladat Írjuk fel általános esetben a formulát egy x éves egyén n évre, $S = 1$ biztosítási összegre kötött vegyes biztosításának egyszeri díjára!

Megoldás Itt ugyanazt a gondolatmenetet járjuk végig, mint az előző két általános esetben. Ezek alapján a következőt kapjuk:

$$\Pi_{x,n} = \frac{d_x}{l_x}\nu + \frac{d_{x+1}}{l_x}\nu^2 + \ldots + \frac{d_{x+n-1}}{l_x}\nu^n + \frac{l_{x+n}}{l_x}\nu^n.$$

Itt már világosan látszik, hogy a vegyes életbiztosítás díja egyenlő a megfelelő haláleseti és elérési biztosítások díjának összegével. (Gondolkodjunk el rajta, miért!)

További lehetőségek a vizsgálatokra, ha marad időnk, vagy érdeklődés mutatkozik: nézzük meg, hogyan változnak a biztosítások díjai, ha változtatjuk az i technikai kamatot! Látni fogjuk, hogy a kamatláb növekedése a díj csökkenését eredményezi. Ezért van az, hogy a teljesíthetetlen ígéretek megelőzése érdekében a szabályozó maximalizálja a technikai kamat mértékét.

1.6. Összegzés

Szakdolgozatom e kiegészítő fejezetében az életbiztosítás árazási feladattal foglalkoztam a közoktatás szemszögéből. Ez a feladat nem középiskolai feladat, említését sem találjuk a középiskolai anyagokban (az egy Szászné Simon Judit-írást kivéve). Én mégis kísérletet tettem, hogy megmutassam, ez a téma nemcsak, hogy kapcsolatban áll a középiskolai matematika anyaggal, de tanítható is lenne ott.
A fejezet első részében bemutattam két matematikaoktatási koncepciót – a realisztikus, és a projektorientált matematikaoktatást, – amelyek szemléletéhez leginkább közel áll egy ilyen téma oktatása. Ezután megmutattam, hogy a feladatnak (előismereteivel együtt) tényleges kapcsolódási pontjai vannak egyrészt a NAT általános fejlesztési céljaival, másrészt a Kerettantervek konkrét tananyagbeli javaslataival.
A fejezet középső részében a téma tárgyalásához szükséges matematikai tartalmakat elevenítettem fel. Ezután a fejezet utolsó részében rátérhettem egy olyan óraterv

kidolgozására, ami egy lehetőség lenne a probléma középiskolában történő oktatására. Itt törekedtem – a fokozatosság elvét szem előtt tartva – a meglevő ismeretekre építkezni, és hat óra alatt eljutni a diákokkal arra a szintre, hogy képesek legyenek egyszerű életbiztosítások nettó egyszeri díjának meghatározására.

Összességében azt gondolom, hogy a téma valóban tanítható lenne középiskolában – akár a tanmenet részeként, akár külön tanítási egységként, például egy szakkör keretében. Hasznos volna abból a szempontból, mert szinte végig olyan aktuális, hétköznapi, gazdasági témákat tárgyal, amik érdekelhetik a tanulókat, ezáltal motiválva őket. Másrészt a társadalom részéről igény mutatkozik az ilyen típusú, használható tudás tanítására.
De ezen kívül az általános matematikai célok sem sikkadnak el, hiszen a gyakorlati problémák megoldása közben a korábban megtanult elméletet mélyítik el a tanulók. Utolsó szempontként pedig még azt is megemlítem, hogy a téma, és konkrétan a biztosítási feladat kapcsán egy olyan területtel – a biztosítási matematika területével – kerülnek érintőlegesen kapcsolatba a diákok, amiről egyébként nagyon kevés esélyük van hallani. Ez pedig nem csak a tájékozottságukat növeli, de néhányukban talán kedvet ébreszt arra, hogy később e témával foglalkozzanak.

Irodalomjegyzék

[1] Ambrus András: *Bevezetés a matematikadidaktikába.* ELTE Eötvös Kiadó, 1995.

[2] Ambrus Gabriella: *Valóságközeli matematika 5-10. évfolyam.* suliNova Közoktatás-fejlesztési és Pedagógus-továbbképzési Kht.

[3] Dienes Zoltán: *Építsük fel a matematikát.* SHL Hungary Kft., 1999.

[4] Gábos Adél, Halmos Mária: *Készüljünk az érettségire matematikából közép-, emelt szinten.* Műszaki Könyvkiadó, 2005.

[5] *Kerettantervek*
http://www.nefmi.gov.hu/kozoktatas/tantervek/kerettantervek
(Utolsó elérés ideje: 2011. május. 23.)

[6] *Nemzeti Alaptanterv (NAT)*
http://www.okm.gov.hu/letolt/kozokt/nat_070926.pdf
(Utolsó elérés ideje: 2011. május. 23.)

[7] Pálfalvi Józsefné: *Matematika didaktikusan.* Typotex Kiadó, 2000.

[8] Szászné Simon Judit: *Aktuáriusi számítások.*
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Simon_Judit/Akt/akt.html
(Utolsó elérés ideje: 2011. május 23.)