EÖTVÖS LOTÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR
MATEMATIKATANÍTÁSI ÉS MÓDSZERTANI KÖZPONT

Mit, miért és milyen mélységben kell tudni egy tanárnak algebrából?

Szakdolgozat

BUDAPEST, 2012.

Készítette:
Mándy Attila
matematika tanárszak

Témavezető:
Szeredi Éva
főiskolai docens

NYILATKOZAT

Név: Mándy Attila

ELTE Természettudományi Kar, matematika tanárszak

ETR azonosító: MAAEBAT.ELTE

Szakdolgozat címe:

Mit, miért és milyen mélységben kell tudni egy tanárnak algebrából?

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések a standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2012. 05. 31.

…………………………………..

a hallgató aláírása

Hozzájárulás a szakdolgozat benyújtásához

Név: Szeredi Éva témavezető

ELTE Természettudományi Kar, Matematikai Intézet

Matematikatanítási és Módszertani Központ

Alulírott Szeredi Éva főiskolai docens (témavezető) kijelentem, hogy Mándy Attila (hallgató) az előre meghatározott gyakoriságú szakdolgozati konzultáción részt vett, és hozzájárulok a szakdolgozat benyújtásához.

Budapest, 2012. 06. 05.

……………………………………..

a témavezető aláírása

Tartalom

1 BEVEZETÉS

1.1 A témaválasztás indoklása

Főiskolai és egyetemi tanulmányaim, iskolai és magántanítási tapasztalataim alapján az a benyomásom alakult ki, hogy az egyetemi algebra és számelmélet anyagot a tanárszakos hallgatók, és az iskolai tanárok is nehéznek, absztraktnak tartják. Az egyetemi anyag általában is nehéz és sokkal kevesebb ponton érintkezik az iskolai anyaggal, mint az lehetséges volna. Általában véve úgy gondolom, az írja le pontosabban a helyzetet, hogy nem az iskolai anyaggal való érintkezésen van a hangsúly, vagy csak nagyon kevéssé. Konkrétan ezt az algebra és számelmélet esetében próbálom megmutatni, én itt vettem ezt leginkább észre. Ha több ilyen kapcsolódási pont lenne, az az anyag elsajátítását is megkönnyítené és abba az irányba hathatna, hogy a tanárok jobb tanárok lehessenek. Ezek alapján talán érthető, hogy az egyetemi algebra és számelmélet anyag említett nehézsége, - kiemelten, de nem kizárólagosan az absztrakt algebrai részeknél - miért irányította rá a figyelmemet ezekre a kérdésekre.

1.2 A feldolgozás módszere

Általános és középiskolai oktatási segédanyagok, egyetemi jegyzetek összevetése, interjúk készítése, következtetések, ötletek, kérdések összevetése a szakirodalommal.

Egyrészt szeretném általában vizsgálni, milyen módokon járul hozzá a tanárok tudásához az egyetemi tananyag elsajátítása, másrészt mindezt minél konkrétabban és részletesebben is megtenni az algebra és számelmélet tárgyai esetében. Felvetődik természetesen az a kérdés is, hogy az egyetemi anyag milyen megfogalmazásai segítik jobban vagy kevésbé azt a megértést illetve tudást, amely nem elszigetelt információk – önmagában egyébként strukturált – halmazaként létezik, hanem az iskolai működés során hasznosítható. A hasznosítás módjainak eltérő típusaival is szeretnék foglalkozni.

A dolgozatnak, esetleg, lehet olyan visszahatása az egyetemi tananyagra, hogy ráirányítja a figyelmet az anyag különböző részeire, azoknak az iskolai tanításhoz való kapcsolódási módjaira, a hasznosulást segítő megfogalmazásokra.

1.3 Bevezető megjegyzések

A következő néhány megjegyzésre három fő okom van. Egyrészt, a szakdolgozattal, mint műfajjal kapcsolatban vannak számomra bizonytalan pontok. A másik ok, hogy ebben a dolgozatban az elsődleges célom - ettől a műfajtól függetlenül – az, hogy egyszerűen el szeretnék mondani az Olvasónak olyan dolgokat, amelyek szerintem lényegesek és érdekesek lehetnek. Harmadrészt pedig, amit mondani szeretnék, jellegében, bizonyos részleteiben jelentősen eltér a szokásos szakdolgozati témáktól.

Amikor elkezdtem volna ténylegesen leírni, mindazt ami a dolgozat témájához tartozik, az volt az érzésem, hogy választanom kell:

Vagy a különféle kimondatlan elvárásoknak megfelelő szakdolgozatot írok, vagy leírom azt, amit értelmesnek, esetleg hasznosnak, elolvasásra érdemesnek tartok.

Később rájöttem, hogy ez az önmagában nehezen alátámasztható érzésem abból a tapasztalatból származik, hogy az általam olvasott szakdolgozatok, és szakdolgozat részletek legalábbis valamilyen mértékben nem úgy íródnak, mint ha a szerző egyszerűen a szerinte legjobb megfogalmazásban szeretne közölni valamit az olvasóval, amit érdekesnek, fontosnak, értelmesnek tart.

Ez leginkább abból látszik, hogy ha valakitől megkérdezem, mondja el, miről szól a szakdolgozata, akkor, - feltéve, hogy elhiszi hogy engem valóban érdekel, és fontosnak is tartja amit írt - megpróbálja a legjobban megfogalmazni, ahelyett, hogy azt mondaná: "Vázlatosan elmondhatom, ha pedig igazán érdekel, olvasd el a szakdolgozatom."

Én az egész dolgozatot pontosan azzal a céllal írom, hogy ha valakit igazán érdekel, mit akarok mondani, akkor azt a legjobb tudásom szerint és a kommunikáció sikerességét tekintve elsődleges szempontnak, megpróbáljam neki elmondani.

Természetesen azokat a szabályokat, amik nem mondanak ellent a szerintem legjobb megfogalmazásnak, igyekszem követni, az olyan egyszerű szabályokat pedig, amelyeknek a megfogalmazás minőségéhez nyilvánvalóan semmi köze, mint például, hogy csak a forrás megjelölésével idézek, nyilván betartom.

A dolgozat végén illusztrációként meghagyom a polinomokról írt rövid szakaszt pontosan abban a formában, amelyben számomra - műfaji zavaró tényezők nélkül - a legegyszerűbben de értelmesen és teljesen pontos megfogalmazás lenne.

Ezek után szeretnék egy bonyolultabb kérdést tisztázni. Ez egy számomra nehezen megfogalmazható konkrét probléma.

Első megfogalmazásként azt mondanám, hogy – és ezzel tehát nem mások helyett szeretném előre és pozitívan értékelni az alább leírtakat - én tényleg úgy gondolom, hogy az itt leírtakban található, akár nagyon kevés, de valóban új szempont, ötlet, vagy, mindenekelőtt kérdés.

Második megfogalmazásként azt mondanám, hogy attól tartok, hogy a feltételezett olvasók esetében felmerülhet, hogy még ha egyetértenek is bizonyos leírt gondolatokkal, akkor is azokat esetleg trivialitásként kezelik. Azt is igyekszem majd megmutatni, hogy ezek a jelenlegi oktatás valóságához mérten nem tekinthetők trivialitásnak.

Végül, - további megfogalmazási kísérletek helyett, - leírok egy példát, talán ebből lesz a legérthetőbb, hogy mire gondolok. Elmesélek egy rövid beszélgetést, amit az egyik általam – nem csak a matematika vagy annak oktatása szempontjából - magasra értékelt ELTE oktató ismerősömmel folytattam:

Mikor csak mesélni kezdtem volna neki vázlatosan a dolgozatban felvetett egyik kérdésről, hogy a komplex számok számok-e, rögtön azt válaszolta: persze, hogy számok. Aztán pedig még – akkor úgy vettem, a „filozofálást” megelőzendő - hozzátette: „Definíció kérdése”. Mármint, hogy mi szám, mi nem szám. Mint később kiderült, valóságos véleményének halvány köze sem volt ahhoz az interpretációhoz, amit az alábbiakban leírok. Abban azonban biztos vagyok, hogy sokaknál, különösen matematikusoknál előfordul egy olyan felfogás, amire ez az interpretáció és, amit annak kapcsán leírok, érvényes. Mindennek a matematikafilozófia jelenlegi állásához vagy még inkább a matematikusok körében elfoglalt státuszához is sok köze van.

Visszatérve a beszélgetéshez: A „komplex számokkal” kapcsolatban felvetett sok kérdés közül abban a kérdésben, hogy az, hogy mi szám, mi nem szám, definíció kérdése lenne, mindenképpen egyértelmű véleményem van. Azt képviselem, hogy ez egy fontos és tartalmi kérdés és semmiképpen sem definíció kérdése. Ezt önmagában is és emellett azon tanulók többsége szempontjából is fontosnak tartom, akik a matematikát kezdik tanulni, vagy a számomra eleve helyesebb megfogalmazással: megismerni.

A konkrét probléma viszont, amit ebben a szakaszban megfogalmazni próbálok, nem az, hogy egy olyan valakinek, aki azt a nézőpontot képviseli, ami számomra ehhez a beszélgetéshez kapcsolódik és amelyet itt röviden elemzek, ne lehetnének mondjuk meggyőző, és persze átgondolt érvei arra, hogy miért kell definíció szerint tetszőlegesen érthetőnek tekinteni egy olyan köznyelvi szót, fogalmat, mint a szám.

A problémám az, hogy rövid válasza számomra azt fejezi ki, hogy:

1. Ez az ő válasza.
2. Ehhez joga van.
3. A továbbiakban a kérdéssel nem látja értelmét foglalkozni.

Mármost ha valakinek ez a véleménye, akkor még mindig lehet, hogy a dolgozatom meggyőzi, hogy - ami a 3. pontot illeti - igenis van értelme a kérdéssel foglalkozni. Én valami olyasmitől tartok, hogy előfordulhat, hogy valaki az első két pontot hallgatólagosan összekeveri a harmadikkal, mintha az körülbelül szinonima lenne. Más szóval, ha valaki hajlandó megállni, csak egy pillanatra, és látja, hogy ő például ezt a három dolgot gondolja, akkor már van esélyem, hogy a harmadikkal vitatkozzam, de ha nem teszi ezt meg, akkor nincs, és ez esetben könnyen lehet, hogy annak többségét amit leírok legjobb esetben néhány triviális lehetőség ismertetésének és üres fejtegetésnek fogja tekinteni, anélkül, hogy tulajdonképpen ez volna a meggondolt véleménye.

Végül az utolsó előzetes megjegyzésem: Felmerült bennem még az is, hogy a dolgozat esetleg azt a téves benyomást keltheti az Olvasóban, hogy mindez valamiféle öncélú „filozofálgatás”. Nem bizonygatni szeretném, hogy nem az, hanem csak a kommunikáció sikerességének érdekében tisztázni, hogy én a legkisebb mértékben sem annak szánom, és minden egyes dologról, amit leírok, az az egyértelmű véleményem, hogy a matematika megértéséhez, vagy a tanításához, vagy mindkettőhöz valóságosan és szorosan hozzátartozik. Azzal kapcsolatban még, ha túl soknak tűnik valakinek a dolgozatban a „filozófia”, lásd még az "Az általános értelem" c. szakaszban írtakat.

Tehát például amikor a komplex számok szám voltát kérdőjelezem meg, akkor azt gondolom, hogy valóságosan zavart okozhat a számfogalommal kapcsolatos kérdések tisztázatlansága a *Logikátlanság a matematikában* c. fejezetben leírt típusú tanulók számára. Magam is ezek közé tartozom. Azt gondolom továbbá, hogy ha nem akarjuk azt, hogy a matematika valamilyen skizofrén módon elszakadjon az értelemtől, akkor ez nem egy átléphető kérdés.

A komplex szám jelenség valamilyen fajta általános értelmi megértése mindenképpen hozzátartozik a komplex számok témájának bármilyen valóságos megértéséhez.

1.4 Saját szóhasználat

A dolgozatban van néhány olyan szó, amelyet a saját elképzeléseim megfogalmazására használok, és amelyekre nem találtam megfelelő szokásos megnevezést. Az előző bekezdésben fordul elő ilyen eset először. A most használt „jelenség” szó ilyen, ez két fogalommal kapcsolatban szerepel: komplex szám jelenség, illetve matematika jelenség. Amikor ezeket használom „komplex szám”, illetve „matematika” helyett, akkor ezzel azt akarom tisztázni és hangsúlyozni, hogy az adott esetben az az egész totalitás számít, ami az adott dologhoz tartozik. A matematika jelenség pontosabb megfogalmazása, ami egyben a „jelenség” szó általam használt jelentésére is irányadó, a következő:

Amikor ezt a szót használom, azzal azt jelzem, hogy a matematikát egy komplex jelenségnek tekintem, amiben nem csak az – általában elsőrendű elméletként leírható – formális elméletek, azokban szereplő tételhalmazok szerepelnek. Semmiképpen sem tartom elegendőnek továbbá ennek a minimális értelemnek a – például a kutatók által vázolt - hasonlatszerű képekkel, lényegi összefoglalókkal való kiegészítését sem. Hangsúlyozom, hogy ez még az intuitív tartalom megjelenítéséhez sem elegendő.

Ezzel szemben tulajdonképpen bármilyen olyan kérdést beleértek, aminek köze van a matematikához, vagy az általános értelem szempontjából értelmesen hozzávehető. Például, hogy milyen jogon, milyen okból használ vagy vezet be fogalmakat, hogy mire jó az egész, mi értelme van bárkinek ezzel foglalkozni, milyennek érződik matematikával foglalkozni, hogyan és miért alakult olyanná, amilyen, mitől számít egy tétel fontosnak, milyen jelentés kapcsolódik hozzá, és még sorolhatnám tovább.

A „skizofrén” szót a dolgozatban körülbelül abban az értelemben használom, hogy „már magának az értelemnek ellentmondó szintű törés valakinek különböző dolgokkal kapcsolatos felfogásában”.

Az "alap matematika" és a "formális matematika" kifejezésekről egy külön részben írok részletesebben.

1.5 A dolgozat szerkezete

Miközben a dolgozatot írtam, fokozatosan világossá vált számomra, hogy amit valójában írni szeretnék, olyan hosszan lenne kifejthető, ami messze meghaladná a szakdolgozat terjedelmét. Így a dolgozatban ennek lényegében csak a bevezetőjét tudom megírni, mindössze néhány példával kiegészítve. A példákat igyekeztem úgy kiválasztani, hogy egyszerre minél több szempontot világítsanak meg. A bevezetőt azonban semmiképpen sem rövidíthettem le, hiszen ha például nem tisztázom a használt fogalmakat, akkor egyszerűen nem lesz érthető, amit írok.

A továbbiakban először röviden leírom, hogy amikor tapasztalatokra vagy elméletekre hivatkozom, annak konkrétan milyen források vannak a hátterében.

Ezután összefoglalom azokat a lényegesebb állításokat, amik a dolgozatban szerepelnek, majd röviden írok a dolgozat kapcsolatáról a konstruktivizmussal, Kalmár Lászlónak az integrállevélben kifejeződő gondolataival, alapfelfogásával és a concept image fogalmával. Mindháromra az igaz, hogy sok köze van ahhoz, amiről írok, ugyanakkor nem használtam a dolgozat megírása során, hanem akkor találkoztam vele, amikor a dolgozat már lényegében készen volt. Ugyanakkor úgy éreztem, hogy ha valóságosan jelen lenne a tényleges oktatásban, vagy egyáltalán bárhol a környezetemben, kevesebbet, rövidebben, és másként írtam volna bizonyos kérdésekről. Mivel viszont mindhárom legalábbis hozzáférhető, és a számomra legalábbis pontosan a dolgozatban szereplő kérdések szempontjából nagyon sokat jelentett, amikor megtaláltam, szükségesnek éreztem, hogy még a részletesebb tárgyalás előtt írjak ezekről az Olvasó számára. Ahhoz képest, amit megérdemelnének, ezek csak jelzés vagy utalás szintű leírások. Persze ezek bármelyikéről önmagában lehetne írni egy szakdolgozatot.

Ezen rövid szakaszok után következik két gondosan kiválasztott példa, majd folytatódik az alapfelfogásom pontosítása és a témám általánosabb leírása.

Ezután következik az a kevés konkrét kérdés, ötlet, példa, ami a dolgozat fő részéhez tartozna és a terjedelembe belefér. Igazából ebben a kényszerűen lerövidült részben szerepelnek azok az észrevételek, amelyek az egyetemi és iskolai oktatás kapcsolatáról szólnak, és amelyek konkrétabban felhasználhatók lennének az egyetemi tanárképzésben.

2 ELMÉLETI ÉS TAPASZTALATI HÁTTÉR

A tapasztalataim első forrása a saját speciális matematikai képzésem: versenyek, szakkörök, a versenyekre való önálló készülésként olvasott könyvek, majd a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium speciális matematika osztályában és a matematikus szakon végzett tanulmányaim. Amikor a matematikus szak első éve után az ELTE Tanárképző Főiskolai Karán folytattam tanulmányaimat, több egyetemi tárgyat is újra kellett hallgatnom, és visszatekintve, az maga megdöbbentő a számomra, hogy tulajdonképpen csak ekkor merült fel legalábbis hosszú idő után először, hogy egyáltalán elgondolkozzam azon, hogy amit tanulok, mit jelent, mi az értelme, milyen az értelmes felépítés, és miért az, és így tovább.

Innentől kezdődött a tapasztalataim második szakasza. Az iskolai matematikáról pedig csak még később, a tényleges iskolai tanítás, és a magántanítás során szereztem olyan tapasztalatot, ami valóságos volt, és számomra valóságos kérdéseket vetett fel.

Miután az ebben a dolgozatban leírt kérdések – évekkel ezelőtt - érdekelni kezdtek, mindez újra megváltozott: Minden órán, amit tartottam, folyamatosan figyeltem, és gyűjtöttem az engem érdeklő szempontokhoz kapcsolódó jelenségeket, véleményeket, kérdéseket. Közben egyszerűen a kezembe került néhány kapcsolódó könyv, amelyek közül a legnagyobb súlya mindenképpen John Holt: How Children Fail (magyarul Iskolai Kudarcok) c. könyvének van, erre többször fogok hivatkozni. Ez számomra egyrészt szakirodalom, de másrészt egyszerűen tapasztalati alap.

Ezt abban az értelemben tekintem tapasztalati alapnak, hogy maga a könyv gazdagon és értelmesen alátámasztja mindazt, amit állít és ezért azokat az állításokat, amiknél John Holt könyvére hivatkozok, nem próbálom meg további saját példákkal vagy érvekkel alátámasztani. Más szóval elhiszem, hogy John Holt pontosan írta le, saját valóságos tapasztalatait, és amellett, hogy az azokból levont következtetései többségét is elfogadom, magukat a leírt történeteket egyben szabadon használható, értelmezhető tapasztalati alapnak is tekintem.

A saját és a John Holt könyvéből származó tapasztalatokat folyamatosan összevetettem fogalomalkotásról szóló elméletekkel, Bruner, Skemp, Dehaene egy-egy könyve volt meghatározó számomra.

2.1 Alapfelfogás

Ebben a részben csupán vázlatosan szeretnék bevezetni további általam használt fogalmakat, illetve röviden vázolni azt az alapfelfogást, amihez viszonyítva vizsgálok minden a dolgozatban felmerülő kérdést. A dolgozatom ezt követően főként konkrét példák elemzéséből áll, amelyekben az itt leírt fogalmakat és állításokat tovább pontosítom, illetve alátámasztom. A jobb érthetőség mián az általam használt fogalmak, illetve az alapfelfogás pontosabb tisztázására néhány példa után térek vissza.

2.1.1 Az általános értelem

Igazából ezt a magam számára egyszerűen értelemnek nevezném, az „általános értelem" megnevezésre a következő okból van szükség. Valószínűleg azóta, hogy léteznek szaktudományok, általában is, de a matematika, illetve a matematikusok esetében biztos vagyok benne, hogy jellemző az emberi gondolkodásra az a fajta törés, amelynek az ellenkezőjét szeretném ezzel a szóhasználattal hangsúlyozni. Hogy megértsük, miben áll ez a törés, képzeljünk el valakit, aki még nem ismeri a matematikát, de tegyük fel, egyébként rendkívül értelmes és mindenképpen hibátlan logikával rendelkezik. Tegyük fel, hogy jó szándékú érdeklődéssel és értelmesen fordul a matematikához és valóban meg szeretné ismerni azt. A probléma ami miatt az általános értelem fogalmát használom, akkor merül fel, ha az illetőnek bármilyen értelmes kérdése van, amire azt a választ kapja, hogy „erre az a matematikai válasz, hogy ...”, mégpedig abban az értelemben, hogy ezt az ő tényleges kérdésére való bármilyen válasz helyett mondják. Ekkor ez igazi probléma, tulajdonképpen az értelem elárulása, és egyben a gondolkodás skizofrén hibája.

Kicsit részletesebben még néhány további állítás a körülírás céljával, amit jellemzőnek tartok erre a helyzetre:

Ilyenkor tulajdonképpen megvonják az illetőtől a kérdéshez való jogát, mintha ahhoz, hogy jogos, vagy értelmes kérdéseket tehessen fel, már eleve ismernie kéne a matematika konkrét tananyagát, mintha az „majd egyszer” tartalmazná a kérdésére adott válaszokat. Általános esetben: Mintha az adott terület - sok esetben ráadásul kimondatlan - tartalmi állításait eleve el kéne fogadnia ahhoz, hogy kérdéseit feltehesse.

Mint mondtam, ez a tévedés általában is előfordul szaktudományok esetében, a számomra legmegdöbbentőbb az volt, hogy még a mai „filozófia” esetében is tapasztaltam ilyet egyetemi filozófia szakon, és „filozófiai” szakirodalomban. Az adott szaktudomány ez esetben úgy kezdi kezelni magát, mintha maga az adott szaktudomány és annak a „szakértői” lennének egyedül jogosak eldönteni, mi minősül értelmes kérdésnek magával a szaktudománnyal és a hozzátartozó kérdésekkel, fogalmakkal, állításokkal kapcsolatban. Természetesen fel lehet tenni értelmetlen, például logikailag hibás kérdéseket is, most egy olyan valakit képzelünk el, aki mint írtam, rendkívül értelmes és mindenképpen hibátlan logikával rendelkezik.

Idáig magát a törést próbáltam meg érzékeltetni, a töréstől való mentességről mint a jelenség másik oldaláról ezzel szemben a következőt tudom mondani:

Teljesen biztos vagyok abban, hogy minden értelmes gondolkodás az értelmes gondolkodás alesete. Nem lehet például egy kérdés értelmetlen, de matematikailag értelmes, vagy értelmes, de matematikailag értelmetlen. Az ilyen szóhasználat a szavak összezavarása. Egy ilyen esetben a kérdés egyszerűen értelmetlen, illetve értelmes, a „matematikailag” rész pedig értelmes megfogalmazásra vár.

A dolgozatban szereplő legtöbb kérdés példa lesz arra, amit az ebben a szakaszban vázolni próbált törés megléte esetén valaki „értelmes, de matematikailag értelmetlen”, vagy „esetleg értelmes, de matematikailag értelmetlen” kategóriába tartozónak gondolhat.

2.1.2 A kétféle matematika

Azt állítom, hogy a matematika-jelenség korai szakasza, ami az általános iskolások vagy általában a matematikával ismerkedni akaró értelmes emberek esetében létezik, és a késői szakasza, ami a felsőoktatásra, és még inkább a kutatói tevékenységre jellemző, alapvetően eltérő jelenségek. Az eltérésekből két dolgot emelek ki:

Az egyik az intuitív tartalomnak az a konkrét fajtája, amit a számomra legpontosabb megfogalmazással úgy nevezek: *jelentéssel rendelkezés*.

A másik, - persze ezzel összefüggésben - az általános értelemhez való viszony, amit tehát szívesebben neveznék az értelemhez való viszonynak.

Ezek az eltérések olyan jelentősek, hogy értelmesnek és hasznosnak tartom annak a két komplexitásnak a külön szavakkal történő jelölését, ami tipikusan erre a két szakaszra jellemző. Hangsúlyozom, hogy ez egyrészt tehát két szélső helyzet, az elsőből a másodikba való átmenet folyamatos, másrészt, hogy a két fajta matematika csak általában, illetve tipikusan esik egybe a történeti folyamattal, nem mindenkinél és nem teljes mértékben. Sok példa adható arra, például „a törttel úgy osztunk, hogy a reciprokával szorzunk" típusú bármiféle jelentés nélküli szabályok – ez egyébként egy rekord, olyan tanítvánnyal még soha nem találkoztam, még ha egészen alapvető dolgokat sem tudott, aki ezt ne tudta volna – ami a korai szakaszban fordul elő annak az említett jellemzőivel ellentétben, és fordítva is igaz: kutató matematikusokat, egyetemi hallgatókat is érdekelhet olyan kérdés, ami az előbb említett jellemzés szempontjából pontosan a korai szakaszra lenne jellemző.

Alapvetőnek tartom tehát azt a felfogást, és a dolgozatban mindent ebből a szempontból vizsgálok, hogy *a matematika-jelenség egy folyamatként jelenik meg*, amelynek van tehát egy korai meg egy késői szakasza. Továbbá azt, ami tehát tipikusan és szélső esetként a korai szakaszra jellemző *alap matematikának*, azt pedig, ami a későbbi szakaszra jellemző, *formális matematikának* fogom nevezni.

Azt feltétlenül egy fontos, teljesen biztos és a magam szempontjából mindenképpen új felismerésnek tartom, és azt gondolom, hogy sokak számára lehetne ez egy új felismerés, ha egyetértenének vele, hogy *nem, semmiképpen nem* arról van szó, hogy a korai szakasz valami kényszerű bevezető a későbbi, „igazi" matematikához. Ez az oka annak is, hogy miért nem a prematematika és matematika szavakat használom: ez számomra pontosan a most említett téves felfogásnak felel meg, de semmiképpen se volna alkalmas arra, hogy annak az ellenkezőjét hangsúlyozza. Az alap matematika számomra még azért is jó elnevezés, mert megfelel annak a véleményemnek, hogy *ez az*, amin a matematika sokkal inkább alapszik, mint a „matematika alapjai" címszó alatt szereplő dolgok, amik inkább a már létező, és szerintem az alapjaitól elszakadt matematika önvizsgálata, vagy reflexiója. Megjegyzem még, hogy a matematikatörténetben is a leírthoz nagyon hasonló folyamat figyelhető meg, és persze érdekes lenne a matematikatörténet vizsgálata az itt leírt alapfelfogásból. Amit a konstruktivizmusról és a matematika-filozófia jelenlegi státuszáról írok azt ebből a szempontból is érdemes meggondolni.

Valójában az alap matematika olyan önmagában értelmes kérdéseket és válaszokat is tartalmaz, amelyek később már nem szerepelnek, és *nem azért,* mert megválaszolásra kerültek volna, vagy eleve értelmetlenek lettek volna, és így a későbbi „fejlődés" megszabadulna tőlük. Talán leginkább olyasmi írja le a jelenséget, hogy elfelejtődnek, vagy egyszerűen leszoktatják a tanulókat az ilyen „buta" kérdésekről.

Külön furcsa és kissé tragikus ez, ha arra gondolunk, mennyire elterjedt akár „hivatalos", akár személyes véleményként, hogy a matematika kimondottan eltér a többi tantárgytól abban, hogy kiemelten magához az értelem fejlesztéséhez van köze, vagy, legalábbis szeretné, ha köze lenne.

Ezen bevezető után az egyik alapvető, az elemzett példákban illetve témákban közös állításom a következő:

A matematika késői szakasza felé haladva, amint „egyre magasabb szinten” kerül tárgyalásra, akár tevékenységként, akár tanítás formájában, úgy válik egyre szegényebbé az intuitív tartalom, *abban a konkrét értelemben*, ami remélhetőleg a dolgozatból kiderül, és úgy válik egyre függetlenebbé az általános értelemtől.

Ez az eltérés vagy folyamat a tanítás és így a tanárképzés szempontjából alapvető problémát okoz, mert azok, akik tanítanak, tehát (ebből a most említett) két szempontból is elszakadnak azoktól a dolgoktól, amik azoknak, akiket tanítanak, még alapvetően fontosak.

Persze nem állítom, hogy minden tanulónak egyforma mértékben, de azt igen, hogy legalábbis kezdetben, mindegyikőjüknek fontos. Azt gondolom, hogy az egy fontos és érdekes vizsgálat volna, hogy ebben a tanulók között milyen eltérések vannak.

Ugyanakkor viszont valójában a formális matematika, adott esetben az egyetemi, illetve a mai, kutatói értelemben vett matematika felhasználható lenne arra is, hogy az említett korai szakaszbeli problémák jobban, és különösen *jobban értve* legyenek kezelhetők, másrészt a formális matematika nem kell ellentmondásban álljon az addigra már hiányzó intuitív illetve általános értelemmel, így kiegészíthető, és a tanárképzésben mindenképpen kiegészítendő is azzal.

Még egyszer szeretném kiemelni, hogy a dolgozatban szereplő kérdések vizsgálata mindig abból az alapfelfogásból történik, amit most megpróbáltam vázolni. Természetesen remélem, hogy a vizsgált kérdések alá is támasztják majd ezt az alapfelfogást az Olvasó számára, és egyben tovább pontosítják azt.

2.1.3 Használhatóság

A dolgozatban leírtak használhatósága elképzelésem szerint több szinten lehetséges. A dolgozat részei természetesen nem függetlenek egymástól, de ha valaki tényleg használni akarná, elég nagy szabadsággal rendelkezne a szelektálás során.

Ez egyrészt azt jelenti, hogy vannak nagyon konkrét és nagyjából egyszerű dolgok. Egy jó példa a számelmélet alaptételéről írtak. Ha valakinek tetszik a leírt ötlet, elképzelhető az alapján egy konkrét iskolai felépítés, akár egy része szakkörön, egy része a tanítási órán. Továbbá, még ennél a konkrét példánál is kiválaszthatók részek, amit használ valaki, miközben a többit nem.

Ha valaki elképzelhetőnek tart egy ilyen felépítést, akkor az egyetemi képzésben is választhat egy ahhoz illeszkedő bizonyítást és felépítést, megint csak akár konkrétan az általam leírtat, akár egy csak ahhoz hasonlót. Mindez példa konkrét felhasználásra.

Másrészt legáltalánosabban maga az az alapfelfogás, amit az egész dolgozatban követek, és ami pontosabban szándékom szerint részben a dolgozatból derül ki, használható bármilyen iskolai vagy általában matematikai kérdés vizsgálata során.

Röviden tehát az összes leírt dolog ebből a szempontból egy skálán helyezkedik el. Ugyanígy van egy másik skála is ami az Olvasó személyes skálája, hogy mi mennyire meggyőző vagy biztos.

A dolgozatot igyekeztem úgy megírni, hogy mindkét szempontból minél függetlenebben lehessen felhasználni belőle bármilyen az Olvasó számára hasznosnak tűnő részt.

Amiben biztos vagyok, az az, hogy **vannak** olyan tanulók, akiknek a szempontjából mindez fontos. Az ő esetükben ezért abban is biztos vagyok, hogy hasznos, és ezért és ebben az értelemben írtam, hogy „akár csak nagyon korlátozottan is, de *valóban* használható.”

2.2 Miben egyedi az absztrakt algebra?

Abból indulok ki, hogy az, hogy a tananyag absztrakt algebrai része egy kivételesen nehéz feladat a legtöbb hallgató számára körülbelül egy közismert dolog, de lehet persze, hogy ez tévedés. Az alábbiaknak a nagyobb része ettől független. Az absztrakt algebra különlegességéről viszont több személyes tapasztalatom van amelyek elsősorban hallgatóktól származnak. Egy példát említek meg: Találkoztam olyan hallgatóval, akinek a számára az „algebrai” szó körülbelül a „teljesen absztrakt” szinonimájává vált, valami olyan módon, mintha mondjuk a „formális logikai” szó lenne.

Az absztrakt algebra az egyetlen olyan tanárszakos tantárgy, ami egyáltalán nem szerepel a középiskoláig bezárólag. Fontos tisztázni, hogy ez az absztrakt algebrára *mint absztrakt algebrára* igaz. Pont az az érdekes, hogy *implicit módon* már természetesen az általános iskola alsó tagozatától szerepel például csoportelmélet, de persze nem mint csoportelmélet, hanem mint az összeadás, szorzás egyszerű tulajdonságai. A lényeg pontosan az, hogy miközben egy tanárszakos hallgatónak, ha csoportelméletből kell felkészülnie, valójában olyasmiből kell felkészülnie, amit már minimum 8 éve gyakorol, a felkészülése mégis inkább úgy fog kinézni, mint ha egy teljesen új, ismeretlen országban kéne megtanulnia kiismernie magát, ahol ráadásul – szemben például a geometria szigorlat esetével – még soha életében nem járt. Az általam az utolsó félévben végignézett feladatsor egyébként rengeteg példát tartalmaz pontosan azzal kapcsolatban, hogy az iskolai matematika milyen részeiben fordulnak elő az absztrakt algebra tananyag adott részének tételei, fogalmai, ennek ellenére sem vált az absztrakt algebrai rész az egyik legkönnyebb vizsgává. Azt gondolom, ez pontosan egy jó példája annak, hogy az a mondjuk filozófiai kérdés, hogy valaki minek tekinti a csoportokat, gyűrűket milyen erős hatással lehet arra is, hogy az anyag egyszerű, vagy különlegesen nehéz lesz a számára.

2.3 A dolgozat kapcsolata a konstruktivizmussal

Itt csak röviden szeretnék írni a konstruktivizmusról, elsősorban azért, mert mint A dolgozat szerkezete c. fejezetben már írtam, a dolgozatban szereplő kérdések egy része, utóbb világossá vált számomra, hogy a konstruktivizmusban, mint matematika-filozófiai irányzatban megtalálható.

Másrészt az általam írtakhoz nagyon közelálló gondolatok is szerepelnek konstruktivista írásokban, de mindenképpen sok olyasmi, amivel teljesen egyetértek. Maga a konstruktivista felfogás nagyon jó példa arra, hogy milyen az, amikor a matematika nem szakad el az általános értelemtől, és amikor nem korlátozza mesterségesen azon értelmesen felvethető kérdések körét amelyeket meg kíván vizsgálni, és egyben arra is, hogy milyen az, amikor ezek vizsgálatával valóban értelmes módon, más szóval az általános értelemmel koherens módon próbálkozik meg. Első helyen Trosztnyikov könyvét emelném ki. A most leírtak erre a könyvre tökéletesen igazak, ez a könyv ezért jól illusztrálja is azt, amit ebben a szakaszban a konstruktivizmusról írok.

Ha a Russel-paradoxon halmazelméleti változatára adott legelterjedtebb (válasznak nem tekinthető) „intézkedést”, mely szerint „akkor tehát a paradoxonban szereplő objektumot ezentúl tilos halmaznak tekinteni” összevetjük azzal az elemzéssel, amely Trosztnyikov említett könyvében (66-70. oldal) található, akkor ez az összevetés egyszerre illusztrálja az ebben a szakaszban leírtakat, és azt is, amit az általános értelemről mondtam. mondjuk, hogy tehát, ha ezt a semmilyen értelemben

Meg szeretnék még jegyezni egy szerintem érdekes ötletet a konstruktivizmus kapcsán. Erre már utaltam a matematikatörténetnek, mint folyamatnak az általam képviselt alapfelfogásból történő lehetséges vizsgálata kapcsán. Abban az időben is, amikor Trosztnyikov a könyvét írta, és a könyvben szereplő idézetek tanúsága szerint korábban is, ezek a kérdések még a matematikusok széles körét érdekelték, köztük „élvonalba” tartozókat is, és az, ahogyan ezek a kérdések eltűnnek, hasonlónak tűnik ahhoz, ahogyan a matematika egyéni megismerése során tűnik el a valóságos intuitív tartalom, abban az értelemben, ahogyan ebben a dolgozatban ezt értem.

Végül van egy dolog, ami a számomra teljesen érthetetlen. Miért nem szerepel, mint választható képzés a konstruktivista analízis, halmazelmélet, stb.? Tulajdonképpen számomra már az is abszurd, hogy nem szerepel jelentős súllyal, de az, hogy még speciálkollégiumként se találkoztam konstruktivista matematikai felépítéssel, az tényleg, tökéletesen érthetetlen.

Itt ugyanis arról van szó, hogy abban a kérdésben, hogy milyen az értelmes matematika, legalábbis nagyon megalapozott érvekkel rendelkezik a konstruktivizmus, és ehhez képest érthetetlen és abszurd mindaz, amit annak neveztem.

Ez az utolsó megjegyzés azért is fontos, mert ez a legegyszerűbb példa arra, amit A dolgozat szerkezete c. fejezetben írtam, hogy „ ... ha valóságosan jelen lenne a tényleges oktatásban, vagy egyáltalán bárhol a környezetemben,” ez esetben ha megfelelő súllyal szerepelne az oktatásban a konstruktivista felfogás, akkor „kevesebbet, rövidebben, és másként írtam volna bizonyos kérdésekről”.

2.4 Concept image

David Tall leírása a fogalom születéséről megtalálható a függelékben (1).

Ebben a leírásban hivatkozik a Vinnerrel közösen 1981-ben írt cikkükre, amelyben szerepel (Tall & Vinner, 2. oldal) a concept image következő definíciója:

„We shall use the term *concept image* to desribe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes."

Magyarul: A concept image kifejezést abban fogjuk használni, mint ami leírja azt a *teljes* (kiemelés tőlem) kognitív struktúrát, amely az adott fogalomhoz kapcsolódik, amely tartalmazza az összes kapcsolódó mentális képet, tulajdonságot és eljárást is.

A concept image (magyarul lehetne pl. fogalomképzet) két fő szempontból kapcsolódik az általam leírtakhoz.

- Egyrészt az a szembeállítás, ami a matematikai fogalmak hagyományos felfogása és a concept image között tehető, nagy részben hasonló ahhoz a szembeállításhoz, ami a matematika és a matematika-jelenség között a dolgozatomban fennáll. Azok az esetek, amikor az értelmes és érdeklődő tanuló az én leírásom szerint elveszítheti a fonalat, ezzel összhangban felelnek meg sok, a concept image fogalmára épülő, a tanulás folyamatában fellépő konfliktusok elemzése során talált példának. Erre a párhuzamra is több példa található a dolgozatban,. Itt egy tipikusat említek meg ezek közül: abban a részben, ahol arról írtam,hogy a matematikában nem csak az – általában elsőrendű elméletként leírható – formális elméletek, azokban szereplő tételhalmazok szerepelnek, annak a kijelentésemnek van számomra nagyon sok köze a concept image fogalmában található idézett kiterjesztéshez, hogy:

  „semmiképpen sem tartom elegendőnek továbbá ennek a minimális értelemnek a – például a kutatók által vázolt - hasonlatszerű képekkel, lényegi összefoglalókkal való kiegészítését sem. Hangsúlyozom, hogy ez még az intuitív tartalom megjelenítéséhez sem elegendő.”

  A matematikai fogalmak hagyományos felfogása és a concept image közötti szembeállításnak a dolgozatban szereplő több további szembeállítás is megfelel. Az ilyen típusú hasonlóságok alkotják a kapcsolódás egyik fő fajtáját.

- A kapcsolódás másik fő módja viszont egy szembenállás, amit nagyon egyszerűsítve úgy fogalmazhatnék, hogy ugyanazt a jelenséget ellenkező oldalról vizsgáljuk. Az eltérés teljes egészét nem próbálom meg definiálni. A következő példa remélem érzékelteti azt.

Egy konkrét példa

Tanulságos volt számomra, - és mivel addigra a dolgozatot már lényegében befejeztem, még külön érdekes is, – hogy Tall és Vinner kevés elérhető cikkének egyikében szerepelt éppen a komplex számokkal kapcsolatban egy probléma [Tall & Vinner, 3.oldal]. Azzal a problémával foglalkoztak, hogy sokan nem tekintették a valós számokat a komplexek közé tartozóknak. Az ő felfogásukban ennek az oka az, hogy a „precíz" felépítésben a komplex számok, mint számpárok szerepelnek, és itt a háttérben van egy olyan egyébként igaz, a tanulók számára ismert állítás, hogy a számpár eleme nem egyenlő a számpárral, ami ezzel ellentétet képez, konfliktust okoz. Hozzáteszem, hogy a tanulás során általában az is hangsúlyozásra kerül, hogy a halmazok elemeit nem szabad összekeverni magukkal a halmazokkal. A szerzők eredeti leírása megtalálható a függelékben (2).

Náluk tehát nem merül fel, hogy maga a *felépítés* ne volna értelmes, vagy még az sem, hogy ne volna a leglogikusabb, legértelmesebb, vagy hogy a felépítésen, akár csak *bizonyos* tanulók számára kellene, vagy érdemes volna változtatni. Egyszerűsítve fogalmazva, az én felfogásom szerint az említett ellentét nem a tanulók gondolkodásában lévő hiba, amelynek, mint hibának az okait kellene feltárni, hanem *jogos* észrevétele a felépítésben lévő ellentmondásnak. Hangsúlyozom, hogy pont az a lényeg, hogy ez az esetleg jogosan észrevett ellentmondás nem „matematikai" ellentmondás, hanem abban az értelemben ellentmondás, ahogyan azt a „*Logikátlanság a matematikában*" c. fejezetben próbálom meg világossá tenni. Nem tudom, a szerzők kizárnák-e, vagy a tárgyuktól való eltérésnek minősítenék-e ezt a lehetőséget, az viszont világos, hogy nem a *felépítésben* látják a probléma valódi okát. Ezzel szemben tehát számomra az ő elemzésük nem csak értelmes, hanem a probléma lényegi leírásához is hozzátartozik a most leírt kiegészítéssel vagy eltérő értelmezéssel.

Mindezt azért is tartom hasznosnak még itt leírni, mert „*A „komplex számok" egy lehetséges, számomra a hagyományosnál értelmesebb felépítése*" c. fejezet lényegéhez a most leírtak is feltétlenül hozzátartoznak.

A dolgozatban szereplő további sok kapcsolódási pont esetében lehetne megtenni egy ilyen összehasonlító elemzést, ami terjedelmi okból nem lehetséges, itt csak példát akartam adni a dolgozatomnak a concept image fogalmához való kétféle kapcsolódására és annak elemzésére.

Mint írtam, az általam képviselt nézőpont és a szerzők általam olvasott cikkeiben jelenlévő nézőpont közötti szembenállás egészére nem adok pontos definíciót. Megemlítek viszont két ahhoz tartozó olyan kisebb szempontot, amit egyszerűbb megfogalmazni.

Az egyik az a felvetés, hogy amikor egy ilyen, - a komplex számok kapcsán most ismertetett - konfliktus jelenik meg a tanulásban, akkor esetleg *lehetséges*, hogy az adott tanulók számára értelmesebb egy olyan alternatív felépítést nyújtani, ami az ő intuíciójukhoz *illeszkedik*, ahelyett, hogy az ő intuíciójukat próbálnánk meg az egy darab célként kitűzött felépítéshez illeszteni. Vásárhelyi Éva a vele folytatott konzultáció során hívta fel a figyelmemet arra, hogy a tanítás egyik lehetséges célja az, hogy a tanuló megismerjen egy felépítést, (akár idegen az a számára, akár nem), szembeállítva azzal a másik lehetséges céllal, hogy sajátjává váljon egy adott ismeret. Azt is szeretném felvetni, hogy még ebben az első esetben is más lehet *azután* megtanulni az adott, akár idegen felépítést, hogy az illető már megkapta a saját intuíciójának megfelelő felépítést, vagy különösen, ha csak segítséget kapott annak kialakításához, például megbeszélés keretében. Hasonló lehet ez ahhoz is, amikor más hit- vagy eszmerendszerek iránti - a számomra érdekes esetben értelmi - toleranciáról van szó: ez könnyebb akkor, ha valakinek világos a saját rendszere, ha már nincsenek belső konfliktusai. Amíg vannak, addig természetes, hogy azok érdeklik elsődlegesen. Azt is szeretném hangsúlyozni, hogy ezek az alternatív felépítések, mármint amikre én gondolok, mind teljesen megfelelnek a formális matematika minden követelményének. „*A „komplex számok" egy lehetséges, számomra a hagyományosnál értelmesebb felépítése*" c. fejezet erről is szól.

A másik egyszerűbb felvetésem pedig az, hogy amikor a sok nem verbális, nem tudatos összetevőt megtalálják a szerzők és más kutatók is a matematika illetve a matematikai fogalmak mögött, annak egy *része* származhat abból, - és ez a dolgozatom egyik fő tézise, - hogy a matematika ragaszkodik ahhoz, hogy ő a formális matematika és nem több. Tehát abban a pillanatban, ha *magába a matematikába* tartozónak minősülne mindaz, amit én alap matematikának nevezek, akkor logikusabban merülne fel, hogy az ezekről a kérdésekről való beszéd és gondolkodás is odatartozik, és akkor sok nem verbális, nem tudatos összetevő verbálissá, és tudatossá válna.

Szeredi Éva mondta nekem egy beszélgetésünk során: Varga Tamás is és John Holt is mindig is tudták, hogy a matematika tanítása nem csupán formális szabályok állítások megtanítását jelenti, hanem hozzátartozik sok minden más is köztük sok olyasmi, ami nem verbális, nem tudatos. Ehhez a leíráshoz képest az én állításom egy része úgy fogalmazható meg, hogy én valójában azt állítom, hogy *magára a matematikára* igaz mindez. Tehát *maga a matematika* nem csupán formális szabályokból, állításokból áll, hanem hozzátartozik sok minden más is, hangsúlyozottan *azon a szinten*, ahogyan például egy ötödikes általános iskolásnál.

Ezek egy része pedig lehet nem verbális, vagy nem tudatos, a fejlődés pedig *nem abban áll*, hogy ezeket valaki megtanulja kiiktatni, egy másik, elvben magasabb szintre cserélve őket, hanem hogy maguk ezek az eredeti dolgok verbálissá és tudatossá válnak nagy részben például azáltal, ha ezek szabadon megbeszélhetőek.

A nagyon egyszerűsítő eredeti megfogalmazásomat is leírom a minél jobb érthetőség kedvéért: addig nem verbális, nem tudatos, amíg nem téma az, hogy kinek mi mit jelent, mert tilos, mert az úgy nem ér, az nem matematika.

Végül kifejtés nélkül idézem - mert annyira ideális példa - az itt vázolni próbált szembenálláshoz tartozó több részlet közül a következőt „... As the concept image develops it need not be coherent at all times." [Tall & Vinner, 2.oldal] A concept image fejlődése során az egyes komponensek nem szükségszerűen koherensek. Ez számomra nagyon egyértelmű és jó példája annak, hogy ugyanazoknak a jelenségeknek az elemzése mennyiben más az általam felvetett nézőpontból, mint a szerzők nézőpontjából, erre itt terjedelmi okból nem térek ki.

Végül még egyszer szeretném hangsúlyozni, hogy mind a concept image fogalmáról, mind pedig a szerintem létező párhuzamokról és különbségekről önmagában is szakdolgozat terjedelemben lehetne írni, ezt az utalás szintű fejezetet csak *A dolgozat szerkezete* c. fejezetben mondott okból írtam.

2.5 Kalmár Lászlóról

A dolgozatot már majdnem befejeztem, amikor kezembe került Kalmár László: Integrállevél c. könyve. A könyvet persze nagyon értelmesnek találtam, ki ne találná annak, de a fő ok, amiért erről röviden írok az, hogy akkor először azt éreztem, hogy minek írom én ezt a dolgozatot egyáltalán? Aztán rájöttem, hogy az ott olvasható, tapasztalható, hozzáálláshoz, felfogáshoz képest van ez az érzésem, viszont az általam az oktatásban tapasztalt valóságon, - sem ha a saját tanulmányaim jelentős részét, sem pedig ha azt az oktatási folyamatot, amiben az általam tanítottak vettek részt, értjük ezalatt, - *nem változtat ez a könyv semmit sem*. A számomra ebben az volt a valóban szomorú tanulság, hogy ha Kalmár László már akkor megírta azokat, amiket megírt, akkor hogy lehet az, hogy mindaz nem vált általánossá, olyannyira nem, hogy katartikus esemény lehetett számomra ezzel a könyvvel találkozni? Ez annak ellenére van így, hogy úgy érzem, tanulmányaim során több kiváló tanárral is találkoztam. Végül is tehát arra jutottam, hogy amikről ténylegesen írtam, azok konkrét kérdések, amiket akkor sem tartanék feleslegesnek leírni, ha a Kalmár László könyvében írtakban számomra érzékelhető alapfelfogás teljesen általános lenne, viszont akkor - kevesebbet, rövidebben, és másként írtam volna bizonyos kérdésekről.

2.6 A matematika-filozófia jelenlegi státusza

Itt csak nagyon röviden szeretnék utalni arra, amit már a konstruktivizmus kapcsán leírtam, hogy abban az időben is, amikor Trosztnyikov a könyvét írta, és a könyvben szereplő idézetek tanúsága szerint korábban is, ezek a kérdések *még* a matematikusok széles körét érdekelték, köztük „élvonalba” tartozókat is, nekem egyértelműen az a benyomásom, hogy mára ezek a kérdések perifériára szorultak. Ha bárkitől ellenkező információt kapnék, az nagyon érdekelne, más szóval ez nem egy megalapozott állítás, vagy tézis, csupán ahogyan megpróbáltam utánajárni, számomra ez az eredmény született. Pontosításként azt tudom hozzátenni, hogy ahogyan a konstruktivizmussal, mint matematika-filozófiai irányzattal párhuzamosan nagy erőfeszítések történtek matematikai területeknek a konstruktív felfogásnak megfelelő új felépítésére, ma úgy tűnik, mintha a matematika a matematikusok közössége számára, vagy szempontjából ***egy*** matematika lenne, még akkor is, ha vannak, akik talán a logika, vagy filozófia területéhez tartozva esszéket írnak ilyen kérdésekről. Más szóval a matematika-filozófia a matematikai kutatás valóságában nem játszik igazi szerepet.

A lényeg az, hogy ha ez így lenne, az megindokolná, hogy miért nem szerepel, mint választható képzés a konstruktivista analízis, halmazelmélet, stb.. Nem azt indokolná meg természetesen, hogy ez miért lenne elfogadható, hanem csak mint a világ egy történeti eseménye lenne ez kevésbé abszurd. Egy szempontból tehát az, amilyennek a matematika-filozófia jelenlegi státuszát érzékelem, egy hipotézis arra, hogy – legalábbis történeti értelemben - megmagyarázza a leírt, számomra abszurd jelenségeket.

Amit itt akarok mondani az annyiban más csak, hogy ez bármilyen más matematika-filozófiai irányzatra is elmondható lenne. Az, hogy ilyen felépítéssel még speciálkollégiumként sem találkoztam, például biztosan igaz, ahogyan az is, hogy nem szerepel az oktatásban jelentős súllyal. Az is ugyanúgy igaz, hogy függetlenül attól, hogy helyesen érzékelem-e a matematika-filozófia státuszát, ez a helyzet mindenképpen abszurd.

Itt ugyanis arról van szó, hogy abban a kérdésben, hogy milyen az értelmes matematika, legalábbis nagyon megalapozott érvekkel rendelkezik a konstruktivizmus, vagy hasonlóan a többi irányzat, és ehhez képest érthetetlen és abszurd mindaz, amit annak neveztem.

Mindezt még annyiban tudom módosítani, hogy *vagy* abszurd és érthetetlen, *vagy* teljesen koherensen megfelel annak, hogy a mai matematikát nem érdeklik az olyan típusú kérdések, mint „Milyen matematikai fogalmak jelölnek létező dolgokat?”, „hogyan és miért lenne a matematika felépítése értelmes?” stb. Ugyanez a számomra pontosabb megfogalmazással: *vagy* abszurd és érthetetlen, *vagy* teljesen koherensen megfelel annak, hogy a mai matematika elszakadt az (általános) értelemtől.

3 Két fontos példa

3.1 Az osztás eredményének változásai az osztótól függően

Maga a szorzás és osztás kérdése, és a számfogalom általában is, hosszabb kifejtést igényel, itt ebből a kérdéskörből csak egy, reményeim szerint egyszerűen érthető, érdekes és viszonylag rövid példát választok ki.

a) Egy alapvető megfigyelés általános iskola ötödik osztályban a következő: Ha egy osztásban, például 120:12 = 10 az osztót felére, harmadára változtatjuk, vagyis feleakkora, harmadakkora számmal osztjuk el ugyanazt, akkor kétszer, háromszor nagyobb számot kapunk (120:6 = 20, 120:4 = 30). Hasonlóan kétszer, háromszor nagyobb számmal osztva feleakkora, vagy harmadakkora lesz az eredmény.

b) A példa azért különlegesen tanulságos a számomra, mert azóta, hogy ezt ötödikesekkel megbeszéltem, minden magántanítványomtól és olyan ismerősömtől, akinek a matematikához bármi köze lehet, megkérdeztem, mi a véleménye erről az összefüggésről. Nagy meglepetésként ért, hogy a megkérdezett 30 emberből összesen ketten voltak képesek bármilyen, valójában helyes és értelmes választ adni, de a kimondottan jó tanuló (például matematikából ötösre érettségizett, jelenleg a Corvinus Egyetemre járó) megkérdezettektől is kaptam olyan választ, hogy ez egy kb. természeti törvény, ami bármikor megdőlhetne, bár ez az illetőt meglepné.

c) Szó nincs tehát arról, hogy az egész oktatási rendszeren sikeresen túljutott diákok legalább az alapokkal tisztában lennének.

d) A kérdés matematikai elemzését kezdjük azzal, hogy a szorzás az ötödikesek számára nem kommutatív művelet. Ez pontosan úgy értendő, hogy a $3\cdot5$ és az $5\cdot3$ mást jelent, tehát más. Mondhatnám: ez ilyen egyszerű. Az ötödikeseknél létező szorzás még alapvetően két dolgot jelent: egyrészt jelent valamit, másrészt van egy számítási eredménye.

   Ez maga is jó példa arra az általános megállapításra, hogyan értem a jelentéssel rendelkezés megszűnését, de legalábbis drámai lecsökkenését a matematika-jelenség kapcsán leírt folyamat során. A gyerekek természetesen maguktól is felfedezik, hogy ez a számítási eredmény a sorrendtől független. Viszont a jelentését tekintve két dologról van szó, az $5\cdot3$ mondjuk egy ötösökből álló 3 tagú összeg, míg a $3\cdot5$ egy hármasokból álló 5 tagú összeg. Itt vannak eltérések a tankönyvekben: én az Apáczai Kiadó könyve alapján írom ezt. (Ez a értelmezés Varga Tamástól származik, emellett szól, hogy bár ellentétben áll a köznapi szóhasználattal, összhangban van a hatványozásnál megszokott jelöléssel.) A lényeg az, hogy *nem* ugyanaz a két jelentés. Ha tehát erre, azaz a jelentés vizsgálatára akarjuk használni a kutatói értelemben vett matematikát, - és miért ne tennénk, ugyanúgy, mint ahogy használhatjuk más, való életbeli dolgok vizsgálatára is - akkor az a struktúra, ami azt leírja egy olyan, nem feltétlenül kommutatív, egységelemes félcsoport, amelyben érvényes az egyszerűsítési szabály. Ha X egy tetszőleges félcsoport, akkor definiálhatunk egy „műveletet”, az osztást úgy, hogy az X egy a és b elemére a/b az az x eleme a félcsoportnak, *ha ilyen van,* amelyre $a = x\cdot b$. Az egyszerűsítési szabály miatt ez az x elem egyértelműen meghatározott. A *művelet* szó azért került idézőjelbe, mert általában, de például az egyetemi algebra anyagban is a művelet mindig a teljes alaphalmazon, illetve annak egy véges hatványán értelmezett, ez itt tehát nem teljesül. Ez, persze egy újabb tanulság, ha összevetjük a középiskoláig érvényes műveletfogalommal. Az így definiált osztás persze valójában a jobboldali szorzás „inverzének” felel meg, nevezhetjük ezt jobboldali osztásnak. Hasonlóan definiálható a baloldali osztás is, amit a\b fog jelölni.

e) Az a) pontban említett általános iskolai megfigyelésnek például a következő egyszerű tételek felelhetnének meg (az összesen 8 lehetőség közül):

1. $a/(b\backslash c) = (a/b)\cdot c$, ha a/b és $b\backslash c$ értelmezett
2. $a/(b/c) = (a/b)\cdot c$, ha a/b és b/c értelmezett
3. $a\backslash(b/c) = c\cdot(a\backslash b)$, ha $a\backslash b$ és b/c értelmezett
4. $a/(b/c) = c\cdot(a/b)$, ha a/b és b/c értelmezett

Amikor mindezen először elgondolkoztam, én arra gondoltam, hogy a 2. vagy a 4. lenne igaz tétel egy tetszőleges félcsoportban, ezért ezek valamelyike lenne a helyes választás. Kíváncsi lennék, hányan tippelnének így. Engem mindenesetre meglepett, hogy a helyes megoldást a „fordított osztást” tartalmazó 1. és 3. sor adja. Természetesen a tétel helyes formájának és bizonyításának megtalálása egy matematikus számára nem feladat, de azért *annyira* nem triviális, de például módszertanilag jelentős.

Bizonyítás: Legyen $x = a/b$, $y = b\backslash c$. Ekkor

$$a = x\cdot b, \text{ és } c\cdot y = b \tag{1}$$

Azt kell megmutatni, hogy $a/y = x\cdot c$, azaz, hogy $(x\cdot c)\cdot y = a$. Ez viszont azért igaz, mert (1)-et felhasználva $(x\cdot c)\cdot y = x\cdot(c\cdot y) = x\cdot b = a$. Itt tehát a feltételekből $a/(b\backslash c)$ létezése már következik.

Amikor meg akartam fogalmazni az iskolában szereplő megfigyelésnek megfelelő tételt nyilvánvaló volt, hogy olyannak kell lennie, hogy annak a bizonyítása az a fajta evidens bizonyítás legyen, ami inkább lényegében mechanikus ellenőrzés. Azt, hogy a megadott két sor a „helyes megoldás”, úgy értettem, hogy erre működik a feltételezetten egyszerű bizonyítás. A teljesség kedvéért adok egy példát, ami mutatja, hogy az „azonos oldali” osztással a tétel nem is igaz.

Ellenpélda: Tekintsük az a,b,c betűkből álló véges sorozatok halmazát, az üres sorozatot is beleértve, az utánaírással, azaz konkatenációval, mint művelettel. A kapott struktúra egyszerűen ellenőrizhetően egy olyan nem kommutatív, egységelemes félcsoport, amelyben érvényes az egyszerűsítési szabály.

Ebben a struktúrában babc/bab = c, és babc/(bab/ba) = babc/b = abc, ami az eredeti osztás eredményéből, azaz c-ből nem kapható meg a ba-val való egyik oldali szorzással sem.

f) Természetesen ha egy csoportban vizsgáljuk a kérdést, akkor az osztást, mint inverzzel való szorzás értelmezzük, és akkor is rögtön látható, hogy a „fordított” osztással lesz evidensen igaz a tétel. Nekem ez csak utóbb lett világos, lásd még a *Konkrét példák az egyetemi és iskolai tanítással kapcsolatban* c. fejezetben a 3. pontot. Az Alkalmazás egy fajta képessége c. fejezetben foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogy mivel függ össze ennek átlátása. Egy ennél egyszerűbb megoldás az, ha az algebrai tanulmányok során sokat foglalkoznának konkrétan az osztással, és általában az iskolában előforduló algebrai fogalmakkal.

g) A személyes tapasztalatomban ez a példa nem csupán érdekes, hanem meghatározó volt, tulajdonképpen az egyik fordulópont. Először is amikor elgondolkoztam azon, hogy ismerve mindazt, amit absztrakt algebrai struktúrákkal kapcsolatban tudok, mi felel meg az a) pontban leírt megfigyelésnek, az a meglepetés ért, hogy az osztást nekem kell kitalálnom az összes egyetemi és főiskolai tanulmányom után. Itt a tanulmányaimon van a hangsúly, nem azon, hogy szerepel-e a formális matematikában valami ilyesmi: a tanulmányaimban nem szerepelt. Első ötletként az inverzzel való szorzás jutott eszembe először, ami nem volt alkalmas, hiszen a pozitív egészek körében még nincs az egynél nagyobb számoknak a szorzásra nézve inverze. Miután pedig kitaláltam ezt a 4. pontban leírt definíciót, ért a második meglepetés, hogy a fordított oldali osztással igaz csak a tétel. Végül nem csak alapvetően érdekes, de egyben meglepő is volt a számomra az, amit a következő pontban írok le, hogy hogyan felel meg mindez az általános iskolai modellnek, és az ottani indoklásnak.

h) Az általános iskolában, a természetes számok körében két fő jelentése van a k-val való osztásnak: Az egyik, hogy ha k részre osztunk valamit, akkor egy részbe mennyi kerül, ez a *részekre osztás*, a másik, hogy ha k elemből álló adagokat készítünk, hány adag keletkezik, ez a *bennfoglalás*. Az, hogy ez pontosan megfelel a fent definiált jobb- és baloldali osztásnak, *ha* a jobb- és baloldali szorzást az említett módon értelmezzük. Nekem ez csak ma tűnt fel. A hátterében pontosan ez áll. Példaként leírom az egyik esetet.

Az iskolában az említett törvényszerűség egy olyan példa kapcsán szerepelt, ahol cukorkákat osztottunk szét. Az egyik ötödikes kislány arra, hogy ha fele akkora számmal osztjuk el ugyanazt, miért lesz az eredmény kétszeres, azt a magyarázatot adta, hogy ha nem a gyerekek között, hanem a *padok* között osztjuk szét a cukorkákat, akkor egy *padnak* kétszer annyi jut mivel hogy két gyerekből áll. Ő valójában úgy fogalmazott, hogy „Adja oda minden padban az egyik gyerek a padtársának a saját cukorkáit". Gondoljuk meg, a következőket: Az eredeti osztás részekre osztás volt, vagyis jobboldali osztás. Amikor a gyerekek helyett padokra térünk át, akkor továbbra is ugyanúgy jobboldali osztás lesz a művelet. Az viszont, hogy az áttérés során hány pad lesz, annak felel meg, hogy hány gyerek-kettes telik ki az osztálylétszámból, ez tehát bennfoglalás, azaz baloldali osztás. Végül az eredmény úgy lesz kétszerese a korábbinak, hogy kétszer összeadjuk az egy gyereknek jutó cukorkák számát önmagával, ez tehát jobboldali szorzás. Tehát az indoklás tényleg a fent leírt nem szimmetrikus tételnek felel meg. Szerintem ez kommentár nélkül, tényleg érdekes, ha valakinek nem az, nem tudom alátámasztani, miért igen. Annyit tudok hozzátenni, hogy *nem „véletlen" érdekességnek tartom*, már ha van olyan egyáltalán, hanem lényegi összefüggésnek, ami körülbelül *a félcsoport modell alkalmazhatóságát jelzi az általános iskolai osztásra*.

Az osztás és szorzás többi "ötödikes matematikai törvényszerűsége" is kínál ilyen vizsgálódásra lehetőséget.
Ebből a példából egy általánosabb kérdés is megérthető. Ha valaki az egész példát érdekesnek és igaznak tartja, akkor is felmerül, hogy ennek a háttérelemzésnek milyen valóságos haszna lehet az ötödikesek tanításában. Van a matematikának egy olyan része, ami elengedhetetlenül fontos a matematikatanár számára: annak az anyagnak az alapos ismerete, amit tanít.

Kérdés, hogy a tanárjelöltek számára az egyetemi vagy főiskolai diploma megszerzése után pár évvel mi marad meg a képzésben szereplő tananyagból, amikor kezdőből gyakorlott tanárokká válnak. Azon tanárok véleménye szerint, akikkel beszélhettem erről, egyértelmű a számomra, hogy a nem tanított anyagrészek feledésbe merülnek. Ez persze nem azt jelenti, hogy akkor egyszer is felesleges megtanulni, pontosan azért, mert ha valaki nem tudja azokat a konkrét tételeket, amiket az egyetemen megtanult, attól még a korábbi, akár már elfelejtett tanulmányai több mindenben is indirekten hatással lehetnek a tanítására. Például az, hogy tapasztalta, milyen a valóban pontos, vagy a mai matematikának megfelelő felépítés, egyáltalán, hogy tapasztalta, mit jelent *felépíteni* egy elméletet. A lényeg azonban, hogy ami ténylegesen megmarad az egyetemi tananyag azon részéből, ami több, mint az általános és középiskolai anyag, *indirekt*: gondolkodási sémák, módszerek, modellek, és leginkább ezek *képessége*. Ezért gondolom, hogy a most leírt példa elemzése hasonlóképpen lehet hasznos: természetesen nem félcsoportokról van értelme egy tanárnak tanítani, hanem az a képesség, hogy alkalmazni tudja a most leírt elemzéshez hasonlóan azt, ami a „magasabb" matematikában szerepel, valamire, jelen esetben az ötödikesek létező modelljére. A maga számára meg tudja teremteni a kapcsolatot az iskolai és a formális matematika között.

Az elsődleges az, hogy a tanár a tényleges iskolai anyagot és annak közvetlen hátterét hibátlanul és alaposan ismerje. Magántanárként azonban azt tapasztaltam, hogy ez sem mindig teljesül az államvizsgához közeli hallgatók és néhány éve állásban lévő tanárok esetében.

A második helyre tenném az egyetemi tananyag szemléletformáló, a tanításban indirekt hasznot jelentő, a gondolkodási módszereket és képességeket fejlesztő részét.

Harmadik helyen szerepelne a „magasabb" matematika ismerete, akár bizonyos aktuális eredmények, cikkekről való tájékozottság (mint ahogy néhány tudós-tanárnál így is van).

Azt gondolom tehát, hogy mindaz, amit a dolgozatban értékként írok le, az a második kategóriába tartozik és a tanárok matematikai képzésében van annyira hasznos, mint ha valaki egyszer végiggondolta mondjuk a Gauss-egészeknek az egyetemen szereplő számelméletét.

3.2 A számfogalom

A számfogalom egy másik nagy kérdéskör, amelyre a dolgozatban kitérek. Valaki mondhatja azt, hogy az, hogy mi szám, mi nem szám, végül is lényegtelen kérdés, vagy legfeljebb a filozófia tárgykörébe tartozik, más szóval sem az általános iskolai, sem az egyetemi képzésben nincs olyan kompetencia, amiben ez szerepet játszana. Főként pedig a matematikában nincs ennek jelentősége. Az első elég egyszerű ellenvetésem az, hogy ha valóban így van, akkor miért szerepel az összes tantervben az *az állítás,* akármilyen tárgykörbe is tartozzon, hogy a „negatív számok”, törtek, „valós számok”, „komplex számok” számok. Az alábbi példában többek között azért választottam a „komplex számok” kérdését, mert itt remélem leginkább, hogy még azok is akik elfelejtették az eredeti, egyszerű, eredeti, számomra normális számfogalmat, tehát azok is több eséllyel érzékeljék, hogy itt *lehet* kérdéseket feltenni. Annak indoklására, hogy miért a „komplex számok” témáját választottam első példának, a példa ismertetése után még visszatérek. Másrészt a most leírt kérdéseket is megpróbálom valamennyire kifejteni a „komplex számok” példája kapcsán.

Tehát röviden: ha ez, hogy mi szám, mi nem szám, annyira lényegtelen vagy matematikán kívüli kérdés lenne, akkor miért szerepel mindenütt, és miért állításként? Ha pedig állítás, akkor miért nem merül fel sehol, hogy ezt valaki legalább *megpróbálja* bizonyítani? Miért nem szerepel sehol az ellenkező felfogás indoklása? Miért nem szerepel explicit módon maga a kérdés?

Egy tanár ismerősöm, akit komolyan érdekel a téma, a következő ellenvetéseket fogalmazta meg:

„Miért nem szerepel iskolában a szám definíciója sehol ... ??? Megjegyzem, ha szerepelne, akkor nem is lenne további kérdésem, egyszerűen igazodnék hozzá, és szerintem más is megértené, hogy akkor ez tehát nem a „szám-saját fogalom”, hanem a „szám-megegyezéses fogalom”. Ez történik a fizikában a súly fogalma esetén („Az az erő, amellyel a test a vízszintes alátámasztást nyomja vagy a függőleges felfüggesztést húzza.”), de szinte mindannyiunknak megmarad a „milyen nehéz” fogalma, mint saját, különbejáratú súlyfogalom, tudva, hogy van egy másik „fizikus-tudós-közmegegyezéses” fogalom is, amit tesztekben kérhetnek.”

Ez a gondolat ahhoz is kapcsolódik, amit a jelentéssel rendelkezésnek nevezek, és azért is idézem, mert bár nem értek azzal egyet, hogy ha volna ilyen definíció, akkor nem lenne semmilyen alapvető probléma, de nagyon tömören és világosan fogalmaz meg néhányat az alapvető problémák közül. Az idézett vélemény azért is tanulságos, mert mutatja, hogy még ha van is külön az iskolai oktatás céljára adott definíció, akkor származik valamennyi zavar pusztán már abból is, ha ugyanaz a szó jelöli, aminek *már van* köznyelvi jelentése.

Az alábbi példában felvetett, vagy felmerülő kérdések egy részéről a példa után fogok írni, ugyanez érvényes az itt szereplő állításokra is, például sok állítást a későbbiekben próbálok majd meg alátámasztani, vagy jobban alátámasztani. Azért írom le először a példát, mert így amikor leírok további, a dolgozat témájához tartozó állításokat vagy kérdéseket, akkor azoknak remélhetőleg lesz valamilyen konkrét jelentése az olvasó számára. Nekem bármilyen elméleti jellegű szöveg olvasása során az volt a tapasztalatom, hogy még azokhoz a megfogalmazásokhoz is, amik akár értelmesek és rövidek, nekem úgyis vissza kell térnem a konkrét példák után, ha igazából szeretném azokat érteni, mivel az emberi nyelv egyszerűen nem olyan pontosan definiált.

3.2.1 A komplex számok példája

Egy 15 éves ismerősöm kérdezte tőlem a következőt: „mi a függvényeknél járunk órán és értek mindent frankón csak ezt nem: a négyzetgyök függvényt mi a gyászér nem értelmezzük negatív számokon?! nincs egy olyan szám amit négyzetre emelve mondjuk -1-et kapok?”

Erre én a következőt válaszoltam: „Szám nincs, mert - szor - az + és + szor + IS +, 0 szor 0 meg 0. De! mivel ez sokakat zavart ezért kitalálták, hogy "ha lenne" akkor azt elneveznénk i-nek és akkor azzal milyen érdekes számításokat lehetne végezni, és akkor, amikor egy normális embernek bilibe lógott volna a keze, azt mondták ehelyett, hogy jó akkor csináljunk egy STRUKTÚRÁT, amiben van valami, ami olyan mint a SZÁMOK, de van olyasmi is, aminek a négyzete, hát nem a -1 de az, ami ott, meseországban a -1-re HASONLÍT. Így keletkeztek a "komplex számok", ahol a gyökvonásnak már van "értelme", viszont mindjárt két gyöke is lesz mindennek. Aztán további hallucinációként kitalálták, hogy akkor ezek is "bizonyos értelemben" számok. A STRUKTÚRA egyszerűen annyit jelent, hogy akármik, amikkel valamilyen szabályok szerint lehet valami műveletfélét végezni. És az még fontos, hogy az utolsó lépésként el is felejtették magukat a számokat, és úgy vették, hogy a STRUKTÚRÁBAN ezekre hasonlító dolgok lesznek ezen túl maguk a számok, és így persze mindenki boldogan alhatott tovább, lett gyök -1 csak éppen a számok tűntek el a matematikából.”

Az Olvasó a válaszomat tekintse úgy mint interjút valakivel, ezért tettem idézőjelbe, és ezért idézem szó szerint. Alapvetően fontosnak is tartom, hogy ténylegesen interjúnak tekintsem, mert én magam, akinek a tapasztalatait legjobban ismerem is olyan valaki, aki az egész oktatást végigjárta, és ráadásul abba a típusba tartozik, ahova tartozó tanulók tanítása során leginkább használhatónak tartom mindazt, amit leírok. Ez a magamtól idézett interjú tehát nem skizofrénia, vagy valami metaforikus dolog. Igazából az volna skizofrén, ha magamat ki kellene zárni a vizsgált körből. Az idézethez visszatérve először is kérdés volt a számomra, hogy az általam adott válasszal, hány matematikus, vagy matematikatanár ért egyet: számomra meglepő módon, a megkérdezettek jelentős része nem zárkózott el az általam adott interpretációtól, sőt alapvetően pozitív visszajelzést kaptam. Ezért tehát feleslegesnek tűnik, hogy pontosan megfogalmazzam, a válaszom hogyan és miért felel meg a precíz felépítésnek, egy nagyon fontos dolgot kivéve: azt, amit abban a kérdésben képviselek, hogy a "komplex számok" számok-e. Itt megjegyzem, hogy a dolgozatom nem a komplex számokról szól, vagy arról a kérdésről, hogy ezek számok-e, pontosabban fogalmazva, hogy milyen értelmes módon lehet ebben a kérdésben választani, ez a kérdés alapvetően maga is csak egy példa. Ugyanakkor ezzel a kérdéssel *is* foglalkozom, és itt két dolgot kell megkülönböztetni: Szerintem mint az az interjúból látható **nem** azok, de ez a személyes véleményem a lényegesebb tanulság és a tanítást is ez érinti igazán, az, hogy ebben a kérdésben se az egyetemi, se a középiskolai tananyag **nem hagy választást**. Én a „komplex számok” felépítésének három fő típusát különböztetem meg: Azt, amit szokásosnak vagy hagyományosnak nevezek, mert azt gondolom, hogy a szokásos vagy hagyományos tényleg ilyen: ahol a komplex számok, mint a számkör bővítése szerepelnek, azt, ami szerintem az igazából értelmes, ahol kifejezetten mint nem számok szerepelnek, és azt, ami szabad választást hagy a tanulónak, és tartalmazza a lehetőséget, a kérdéssel kapcsolatos érvek és kérdések megfogalmazására. Amellett is fogok valamennyire érvelni, hogy miért tartom igazából azt értelmesnek, hogy a „komplex számok” nem számok, de ha tanítanék erről bárkit, akkor a harmadikat választanám.

Ekkor a számomra értelmes felépítés annak *részeként* jelenne meg, hogy alkalmat adok a kérdés értelmes felvetésére, és megbeszélésére. Én nem fogok tudni a sajátommal ellentétes véleményt hitelesen képviselni, viszont alkalmat adok arra, hogy mindenki megfogalmazhassa a saját érveit. Nyilván megemlítem, hogy lehetséges az ellenkező mellett érvelni, és a lényeg, hogy mindezek után mindenkire rábízom, hogy maga döntse el a kérdést.

Remélem az Olvasó számára világos, hogy tehát az nem ellentmondás, hogy miközben a számomra értelmes felépítés a második, ezzel összhangban amiben igazán bizonyos vagyok az, hogy tanítási szituációban a harmadik a helyes, és ezt az állításomat ezért jobban is igyekszem alátámasztani.

A „komplex számok” egy lehetséges felépítése

Előre bocsájtom, hogy egyrészt a most következő vázlat részben mint melléklet szerepel itt, amiről, miután leírtam, szeretnék mondani néhány dolgot. Másrészt tehát ez a második típus, a *hozzám* legközelebb álló bevezetés egy lehetséges verziója. Harmadrészt azért is írom ezt le, mert azok a problémák, amik a hagyományos felépítésben éppen megszokottságuk miatt fel se tűnnek, ennél a felépítésnél akár megdöbbentőnek is mutatkozhatnak, de mindenképpen feltűnőek.

A felépítést azzal kezdjük, hogy megállapítjuk, hogy vannak olyan egyenletek, amelyeket nem tudunk algebrai jellegűen megoldani, azaz csak interpolációs módszerekkel kereshetjük meg a gyökeiket, és olyanok is vannak, mint az $x^2 = -1$ amelyeknek egyáltalán nincs is gyöke. Azzal a céllal, hogy az **első** problémát megoldjuk, bevezetünk egy végtelen táblás játékot, ahol tehát a játéktáblának végtelen sok mezője van, amelyeket ugyanúgy ad meg egy valós számpár, mint ahogy egy sakktábla mezőit jelölhetjük olyan számpárokkal, amelyeknek tagjai 1 és 8 közötti egész számok. Ezen a végtelen táblán tehát bevezetünk egy *játékot* a következő szabályokkal: Van két olyan lépés a játékban, egy játékszorzás és egy játékösszeadás. Mindkettő esetében egyszerre két mező a kiindulópontunk, és ha az (a,b) és (c,d) mezőkről indulunk, ahol a,b,c,d valós számokat jelölnek, akkor az a szabály, hogy az első esetben az $(a\cdot c-b\cdot d,\ a\cdot d+b\cdot c)$, míg a másodikban az $(a+c,b+d)$ képlettel kiszámítható mezőre lépünk.

Fontos, hogy játékszorzás és játékösszeadás szerepel, mivelhogy a végtelen táblánkon nem számok, hanem mondjuk mezők vannak, így túl sok értelme azért nincs azok összegéről vagy szorzatáról beszélni, másrészt viszont ezzel a definícióval matematikai értelemben is pontosan adtunk meg valamit.

A bevezetett lépésekkel kapcsolatban több szabályszerűség létezik, amiket most nem sorolok fel, ezek azok, amik „műveleti tulajdonságok” néven szerepelnek a szokásos felépítésben, ezek ismeretében matematikai értelemben éppen úgy *bizonyíthatunk* állításokat, mint ahogyan az 5x5-ös sakktáblán is matematikai értelemben vett tétel az, hogy nem érhetünk egy huszárral a kiindulási mezőre vissza úgy, hogy minden mezőn pontosan egyszer jártunk, hiszen a fekete és fehér mezők száma nem egyforma.

Ezt követően észrevehetjük, hogy a tábla 0-hoz tartozó vízszintes sorában, ahol tehát az (a,0) által meghatározott mezők vannak, a játékszorzás és a játékösszeadás *pontosan* megfelel a számok körében történő összeadásnak és szorzásnak. Ez természetesen nem véletlen, a játékszabályok megalkotásának módja miatt. Ebből a megfelelésből az következik, hogy ha például egy polinomban szereplő műveleteket új játékunk megfelelő lépéseivel helyettesítjük, és bizonyítjuk, hogy a tábla egy, a *nullához tartozó vízszintes sorában* található mezőjéről a polinom által jelzett lépések végrehajtása után a nullának megfelelő, (0,0) mezőre kerülünk, akkor jogosan mondhatjuk és bizonyítottnak tekinthetjük, hogy az annak megfelelő valós szám gyöke a polinomnak.

Itt fontos az, hogy a polinom **ténylegesen** összeadások és szorzások végrehajtását **rövidíti.** Mármint mielőtt belefognánk a polinomok, mint "formális kifejezések" elméletének kiépítésébe. Egy polinom által rövidített összeadásoknak és szorzásoknak megfelelő lépéseket természetesen végrehajthatjuk az új táblás játékunkban is.

Ezt is illusztrálom egy példán: Ha az $x^2 + 1$ polinomba egy számot helyettesítek, az azt **jelenti**, hogy "A választott számot emeld négyzetre és adj hozzá egyet!" és ezt egy nyolcadikos gyerek érti is. Ezzel szemben, amikor mindezt alkalmazni szeretnénk a táblánk ***i*** nevű (0,1) mezőjére, akkor se összeadás se szorzás nem történik, hanem a játék megfelelő lépéseit hajtjuk végre. Az, hogy így a 0-nak megfelelő mezőre jutunk, a számokra nézve közvetlenül **semmit sem** jelent.

Ha az $x^2 - 1$ polinommal tesszük ugyanezt, akkor a tábla 1-nek és -1-nek megfelelő mezőjéből a 0-ra jutásnak **van** következménye a számokra nézve, mégpedig az, hogy 1 és -1 gyöke ennek a polinomnak. Ebben az esetben *játék* segítségével olyan egyenleteket is meg tudunk oldani, amelyeket eddig nem.

Az viszont, hogy valaki úgy gondolja-e, hogy ezek után lett az $x^2 = -1$ egyenletnek gyöke, már attól függ, hogy ő *tényleg* számnak tekinti-e a tábla mezőit, vagy sem, de ez már *nem a matematika illetékességi területe.* Az azonban, hogy valaki tényleg számnak tekinti-e a tábla mezőit, mindenképpen egy *személyes döntés*.

Visszatérve viszont a konkrét felépítéshez most tehát azt képviseljük, és tehát **azt is tanítjuk**, hogy a tábla mezői **nem számok**, ezért sem most, sem semmikor a későbbiekben sem lesz olyan szám, amelynek a négyzete -1 lenne. Ezzel összhangban esetleg azt is képviselhetjük a gyök szó eddigi jelentését megőrizve, hogy a megfelelő polinomoknak **nem lesz gyöke**. Esetleg bevezethetünk technikai okból, egy *új* fogalmat, mondjuk:

Egy mező „technikai gyöke" egy polinomnak, ha a polinom által rövidített összeadásoknak és szorzásoknak a játékban megfelelő lépéseket végrehajtva a nullának megfelelő mezőre kerülünk.

Táblás játékunkat **mindarra** használni fogjuk, amire a „komplex számokat" szokásos, így a számokra vonatkozó egyenletek között **pontosan ugyanazokat az egyenleteket fogjuk tudni**

megoldani, amiket a „komplex számok” szokásos, a "számfogalom bővítése" címszó alá sorolható felépítései segítségével. Formális matematikai szempontból teljesen mindegy, hogy valaki az itt leírt felépítést választja, vagy a szokásosat.

Ez a felépítés a „komplex számok” bármilyen egyéb használatára is ugyanígy kiterjeszthető. Akárcsak az egyenletek megoldásának kérdésében, formális matematikai szempontból az a kérdés, hogy a táblás játék mezői számok-e, **meg sem jelenik.**

A táblás játékban szereplő, a mezők azonosításához használt számok között is adódnak összefüggések.

Ha például meg akarjuk oldani az a^3-$3ab^2$ = $\sqrt{2}$ és b^3-$3ba^2$ = -$\sqrt{6}$ egyenletekből álló egyenletrendszert, akkor észrevehetjük, hogy ez pont annak felel meg, hogy a tábla olyan mezőjét keressük, amelyet önmagával háromszor „összeszorozva” a ($\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$) mezőre jutunk. Ugyanis az (a,b) mező „harmadik hatványa” a játékszabályokból bizonyítható egyszerű összefüggések miatt az (a^3-$3ab^2$, $3ba^2$-b^3) mező. Az eredeti egyenletrendszer megoldásához elegendő azt a játékbeli kérdést megválaszolnunk, hogy melyik mező „harmadik hatványa” a ($\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$) mező. A játék trigonometrikus összefüggéseknek megfelelő szabályszerűségei alapján észrevehetjük és hagyományos, szigorú értelemben *be is bizonyíthatjuk*, hogy a

($\sqrt{2}\cos20°$, $\sqrt{2}\sin20°$), ($\sqrt{2}\cos140°$, $\sqrt{2}\sin140°$) és ($\sqrt{2}\cos260°$, $\sqrt{2}\sin260°$)

mezők felelnek meg ennek a feltételnek. Így az (a,b) = ($\sqrt{2}\cos20°$, $\sqrt{2}\sin20°$), (a,b) = ($\sqrt{2}\cos140°$, $\sqrt{2}\sin140°$) és (a,b) = ($\sqrt{2}\cos260°$, $\sqrt{2}\sin260°$) számpárok az egyenletrendszer megoldásai.

Ha a példa „erőltetettnek” tűnne, ne felejtsük el, hogy itt csak azt akartam illusztrálni, hogy technikailag hogyan és miért használható a táblás játék minden olyan esetben, ahol a „komplex számok” fellépnek.

A Gauss-egészeknek az $x^2 + y^2 = n$ diofantoszi egyenletek megoldásához tartozó felépítése és használata szerintem még csak nem is *tűnhet* erőltetettnek táblás játékként, hiszen ebben az esetben egy teljesen normális, csak végtelen tábláról van szó.

A harmadfokú egyenletek megoldása a legkézenfekvőbb példa a táblás játék eredeti használatára, ahol tehát maguk a mezők, és azon belül a kitüntetett „nulladik sor” szerepelnek.

A számkörbővítés minden egyes lépése hasonló dilemmákat vet fel. Azért választottuk a komplex számok bevezetésének problémáját, mert azt reméljük, hogy a legvalószínűbb olvasók esetében ezek a legfrissebb élmények. Akárhogy is, a „komplex számok” nyilvánvalóan „furcsábbak”, mint a negatív vagy a törtszámok, még azok felfogásában is, akik úgy gondolják, hogy számok és hogy ez egyszerű kérdés.

Sajnos nincs lehetőségem egy precíz vizsgálatra, de abban elég biztos vagyok, hogy általában a matematikát tanító emberek döntő többsége, azt *is* "megtanítja", hogy a "komplex számok" valóban számok, és ezeket tehát számnak **kell** tekinteni. Engem az első pillanattól kezdve, alapvetően zavart az az ötlet, hogy egy számnak hogyan lehetne például iránya, hogyan érthetnék számként valamit, ami ennyire geometriai jellegű és csak sok évvel a saját Fazekasbeli érettségim, és évekkel a tanárképző főiskolai diplomám után találtam az engem zavaró kérdésekre megfelelő választ. Természetesen soha nem találkoztam semmilyen képzés során olyan *szituációval sem*, ahol ezek a kérdések egyáltalán felmerülhettek volna. Hallani is csak egyetlen oktató ismerősömtől hallottam arról, hogy valaki egy egyetemi órán jelentős időt szánt volna erre a kérdésre.

Mi lenne ha valaki az **egyetemen** a leírt módon vezetné be a "komplex számokat"? Némi tájékozódás alapján azt gondolom, hogy ez elvben azért engedélyezett, és így az a kérdés, hogy hogyhogy senki nem választja véletlenül se ezt a felépítést vagy persze bármilyen másikat, ami az általam vázolthoz hasonlóan a "komplex számokat" nem a számfogalom „bővítésének” tekinti, hanem egyszerűen a számoktól lényegileg különböző *eszköznek*?

Mint mondtam, magam azt a bevezetést tartanám jónak, amelyben mindkét megközelítés szóhoz juthat, de ha már az szinte elő sem fordul, akkor, különleges tényezők nélkül azt várnám, hogy némelyek az első, némelyek a második fajta felépítést tanítják, személyes meggyőződésük szerint. Erről a témáról való beszélgetéseim során az merült fel legvalószínűbbnek, hogy egyszerűen nem tartják a kérdést jelentősnek, vagy esetleg akár létezőnek, azok, akik erről a témáról tanítanak, különösen az egyetemi szinten.

Azt alapvetően fontosnak tartom, hogy az általam leírtakat olyan indoklásnak tekintem, ami minden további magyarázat és példa nélkül, önmagában meg kell állja a helyét, mint a koncepció jogosságának **bizonyítása**.

Utolsó példaként említem, hogy annak ellenére, hogy bár a 2x2-es valós mátrixok egyszerűen behelyettesíthetők az x^3-x polinomba, senki sem gondolja azt, hogy ettől kezdve ennek a polinomnak végtelen sok gyöke lenne valamilyen bővebb **számkörben**, annak ellenére, hogy végtelen sok olyan mátrix van, amelyre a behelyettesítés a **0** mátrixot adja. A logikusan következő ötlet az lehetne, hogy attól lesz valami számkörnek tekinthető, hogy test, ami persze ezt a mátrixos megjegyzést is kizárná. Ezzel kapcsolatos rövid és egyszerű megjegyzés: Ez azért volna vicces, igazából szerintem abszurd, mert maguk a pozitív egészek, melyek - ebben azért talán lényegében mindenki egyetért - az egész bővítés sorozat kiindulópontját jelentik, még csak gyűrűt sem alkotnak.

4 Logikátlanság és matematika

Az elmúlt években számomra meglepően nagy számban találkoztam olyan diákokkal, akiknek pont azért voltak nehézségei valamilyen matematikai anyagrész elsajátításával, mert **voltak** kérdéseik, és azokra nem kaptak választ, akiknek **logikátlan** volt az, amit meg kellett volna tanulniuk. Az ilyen diákok számára alapvetően fontos, hogy kérdéseikre választ lehessen adni, ami nem lehet a „csak” valamilyen átfogalmazása. Az is fontos továbbá, hogy olyan szituációt teremtsen számukra az oktatás, hogy a kérdéseiket *fel tudják tenni*, ne csak nálam, vagy hozzám hasonló magántanárnál, hanem, mondjuk az iskolában. Azonban attól tartok, hogy ha esetleg fel tudják tenni a kérdést, ahelyett, hogy mint én is például, csak éveken át éreznék, hogy valami zavarja őket, akkor is kicsi az esélye, hogy valóságos, és egyáltalán logikailag korrekt választ kapjanak, a legjobb esetben olyan válaszra számíthatnak, mint amit én kaptam annak idején egy a geometria alapfogalmairól szóló kérdésemre: „Erre nem tudok válaszolni, fiam, azt tudom mondani, hogy majd néhány év múlva esetleg nem teszed fel ezt a kérdést.” És komolyan mondom, hogy ez a válasz, még legalább tisztességes volt: A kérdést mégiscsak feltettem később is, és megoldottam egyedül, sok év múlva.

A matematika tanításában szerepelnek sok tanuló számára illogikusnak vagy akár abszurdnak tűnő dolgok, amelyek egyrészt a tanulást akadályozzák, másrészt még egy második szintű ellentmondás is létrejön abból, hogy a matematika magáról a logikusság, és (szemben egyéb az iskolába tanított diszciplínákkal) precizitás képét közvetíti a diákoknak. Ennek az illogikusságnak több szintje van a diák számára, itt csak érzékeltetésképpen adok meg néhány, az egyes szintekhez tartozó példát:

1. Matematikai hiba van jelen (könyv, tanári tévedés, stb)
   Leegyszerűsített szabályt használ a tanár, például a logaritmus azonosságát a valós számok fölött.
2. A következő szintet illusztrálja egy saját tapasztalatom még a főiskolai hospitálás időszakából: A tanár kérdése az órán az volt, hogy ha valaminek az ára az eredeti ár 80%-a lett, és így 1200 forintba került, akkor mennyibe került eredetileg? Az egyik jelentkező diák azt válaszolta hogy, mivel az eredeti ár 80%-a vagyis 0.8-szorosa 1200, az eredeti árat úgy kaphatjuk meg, ha az 1200-at elosztjuk 0.8-al: a kapott 1500 forint a válasz A tanár erre leültette, azt mondta: nem, és feltette a szokásos kérdéseit a százalék alapról és százaléklábról. Magyarázat nélkül elutasított egy jó megoldást és adott egy másikat (jót).
   A diák a tanár viselkedését vagy elutasítja, vagy átsorolja a matematikát az ad hoc szabályokon alapuló iskolai feladattá.
3. Rossz szóhasználatból származó zavarok (ekvivalencia nevű és tulajdonságú reláció, egyenlőszárú vagy szimmetrikus trapéz, megoldás folyamata és eredménye, gyök és megoldáshalmaz, prímszám felbonthatatlanként való definiálása, ...). Saját tapasztalatomban bőven van ezekre példa. Visszatérő, nehezen korrigálható problémát okoz.
4. Eltérés a konvencióktól (lehetséges, de nem szokásos eljárás automatikus elutasítása). Pl. a törökbálinti iskolában általam tanított hatodikos osztályban az egyik tanuló az egész egyenletet szorozta egy számmal.
5. Végül ezen a ponton reményeim szerint érthető, hogy a „komplex számokról” leírt probléma beilleszkedik ebbe a sorba, bizonyos diákok számára.

Matematikadidaktikai, pedagógiai és tanuláspszichológiai oldalról nézve 1. és 5. teljesen más gyökerű, de a tanuló ismeretszerzési és rendezési folyamatában betöltött szerepe nagyon hasonló lehet, a diák mindegyik hatására elvesztheti a fonalat, nem létezőnek hiszi a nem látott rendszert. Ha a tanuló a kérdésére vagy nem kap választ, vagy pedig olyan választ kap, ami bizonyos szempontból ugyan helyes, de mint **válasz**, akkor is hamis, mert nem a tanuló problémájára válaszol, az egyaránt

A formális matematika kijelölhet valamilyen kört, amelyen kívül eső kérdésekkel nem foglalkozik. Nem foglalkozik például olyan értelmes kérdésekkel, mint a szám vagy nem szám, kétféle osztás, a szorzás kommutativitása, és a dolgozatomban feszegetett kérdések többsége. Azonban sem a gondolkodás, sem annak igénye nem korlátozódik körökre.

Más szóval: aki akar gondolkozni, az *bármivel* kapcsolatban feltehet számára értelmes kérdéseket, és csak addig tarthat valamit értelmesnek, amíg abban ezt a tevékenységét és igényét nem korlátozzák, lehetőséget adnak annak megvitatására, vagy értelmes választ adnak kérdéseire.

5 Néhány kifejtés nélküli megjegyzés

5.1 A szám-fogalom kérdéséhez

A szám nem egy általános struktúra alesete, hanem a köznyelv része. Ha valaki azt mondja „Három dolgot tudok erre mondani", akkor a második után várjuk mi a harmadik. Tehát nem arról van szó, hogy egy axiómákkal definiált, tehát tulajdonságokkal megadott halmaz elemei volnának a számok, önálló és alapvető jelentésük van. Lehet, hogy ez csak valamilyen nagyság alatt érvényes, de ott biztosan.

Még az absztrakt gyűrűk matematikai elméletében is megjelennek a tényleges számok: valójában nem lehet r_1 gyűrűelemszer összeadni az r_2 gyűrűelemet, hanem csakis „pozitív egészszer". Ez itt azért is van idézőjelbe, mert számomra az volna a megfelelőbb, hogy „számszor", és a pozitív egész ugyanolyan utólagos kategorizálás, mint a „véges sok", amiről fentebb írtam.

A Peano-axiómákkal kapcsolatban ez a probléma, hogy az axiómák mennyiben nem írják le a „természetes számokat" jelentős mértékben szerepel is a szakirodalomban, az előzőkben egyszerűbb és számomra nyilvánvaló megjegyzéseket írtam, amelyekhez nem szükséges szakterületek által végzett vizsgálat, elegendő csak az általános értelemhez ragaszkodni, és a kérdéseket egyszerűen végiggondolni.

5.2 Az alkalmazás egy fajta képességéről

Ez a dolgozat egyik alapgondolata, több példa is található, ahol én „alkalmazom" a matematikus tudást abban az értelemben, ahogyan itt szeretném vázolni. Ezek közül a legegyértelműbb *Az osztás eredményének változásai az osztótól függően* c. fejezetben az e) - g) szakaszban leírtak.

Megjegyzem, hogy az az alkalmazási képesség, amiről itt írok teljesen más dolog tehát, mint matematikai tételek alkalmazása olyan speciális esetekre, amelyek az adott tételek feltételeit teljesítik.

Egy másik jó példa az, hogy „a plusszor plusz az plusz, plusszor mínusz az mínusz stb." szabály, amit szinte mindenki ismer. Ez megfelel egyrészt a kételemű csoportnak, másrészt éppen ezért annak a negatív számokkal kapcsolatos lehetséges modellnek, ahol a negatív számok nem mint számpárok ekvivalencia-osztályai jelennek meg, hanem közvetlenül, mint egy előjelből és egy (pozitív) egész, vagy racionális számból alkotott rendezett pár. Itt tehát a direkt szorzat általános algebrai konstrukciója ismerhető fel a háttérben, illetve a faktorcsoport fogalma.

Általánosabb példaként azt említem meg, hogy a matematikus tudás használható különböző, akár a matematika szakos anyagban nem szereplő művetek elemzésére, amire a dolgozatban szerepel néhány példa.

Végül nem teljesen pontos, de elég jó általános megfogalmazásnak tartom a következőt:

Ez az alkalmazási képesség hasonló a logika esetéhez: Aki a matematikai logika tananyagban szereplő részeit valóban elsajátította, az nem a most említett „ speciális esetekre" történő alkalmazásként használja azt, hanem az egész matematikára, és a nem matematikai, akár gyakorlati életbeli esetekre is, és ahogyan ez történik, az hasonlít az alkalmazás ebben a részben vázolni próbált képességéhez.

6 Konkrét példák az egyetemi és iskolai tanítással kapcsolatban

Ebben a részben vázlatosan bemutatok néhány olyan konkrét példát, amely az iskolai és egyetemi oktatásról, vagy azok összefüggéséről szól. Mint korábban írtam, ez volna a dolgozat fő része az egyébként fontos és alapvető konkrét állításokat, kérdéseket, probléma-felvetéseket is tartalmazó, mégis alapvetően bevezetőnek szánt rész után. A sok számomra fontos és érdekes kérdés közül terjedelmi okból csak keveset tudok itt érinteni, a szerkezet, illetve a felépítés korábban leírt, számomra kikerülhetetlen problémája miatt.

A vizsgált kérdéstől függően némelyik csak egészen röviden, némelyik a többihez képest viszonylag hosszabban, de a számomra megfelelőnek tekinthetőhöz képest a legtöbb esetben mindenképpen vázlatosan kerül kifejtésre.

6.1 A szorzás kommutativitása

Az első idetartozó kérdés konkrétan a szorzás kommutativitásának bizonyítása. Erre szintén az Apáczai Kiadó tankönyvében láttam példát a téglalap alakban elrendezett kisautók segítségével. Engem mindig zavart ez az indoklás, mert azt a benyomást keltette bennem, mintha ez valamilyen geometriai okot tartalmazna, ami egy tisztán algebrainak tűnő tételnél nem tűnt helyénvalónak, vagy igazinak. Elgondolkoztam, hogyan lehetne egyszerűen, és az alap matematikába illő módon megindokolni.

Itt is hangsúlyozom, hogy ezek a kérdések számomra nem egyszerűen „didaktikai" kérdések, bár didaktikai következményük is van, hanem egyszerűen ezek jelentik a felmerülő kérdésekre a valóságos választ.

A következő indoklást találtam ki:

A $3 \cdot 4$ azt jelenti, hogy van mondjuk összesen 4 csoportunk, mindegyikben 3-3 golyó. Számozzuk meg mindegyik csoportban a golyókat 1-től 3-ig. Vegyük ki mindegyik csoportból az 1. számút, és ezeket gyűjtsük össze egy helyre: ezen a helyen 4 golyó lesz, mert

4 csoport volt. Egy második helyen gyűjtsük össze a 2. számúakat, és egy harmadik helyen a 3. számúakat. Így végül három helyen lesz 4-4 darab golyó, a golyók száma tehát láthatóan $4{\cdot}3$. Tehát $3{\cdot}4$ és $4{\cdot}3$ golyó ugyanannyi számú golyó. Végül fontos megjegyeznünk, hogy a most leírt indoklás ugyanígy használható akkor is, ha a 3 és 4 helyett bármilyen más (pozitív egész) számok szerepelnek.

Miután ezt az indoklást kitaláltam, jöttem csak rá, hogy a Hajnal-Hamburger: Halmazelmélet c. jegyzete az, ahol lényegében ezt a bizonyítást olvashattam még régen, ott természetesen számosságokra vonatkoztatva. Egy, az ehhez a kérdéshez tartozó általánosabb tanulság egy nagyon egyszerű és számomra nagyon nyilvánvaló ellentétet mutat az egyetemi és az iskolai algebra között: Az egyetemi algebra anyagban a szorzás kommutativitása lényegében axióma. Nincs is bizonyítás arra, hogy a szorzás kommutatív, és általában eleve nem kérdés hogy a számok miért alkotnak mondjuk gyűrűt, hanem sokkal inkább az, hogy mi minden igaz a gyűrűkre, tehát az, hogy a számokra ezek a tételek miért alkalmazhatóak, vagy mint „nyilván" jelentkezik, vagy, pl. a szorzás és összeadás alapvető tulajdonságai egyes felépítésekben, mint axióma szerepelnek.

6.2 A kétféle osztás kérdése

Az, hogy az osztás eredményének változásairól szóló példában leírt kétféle iskolai osztás miért adna azonos eredményt, végképp nem tűnik számomra nyilvánvalónak, vagy akár csak egyszerűnek. Nem is látok valójában másféle indoklást, mint hogy az egyenlőséget a szorzás már ismert kommutativitásából vezetjük le, ha már tényleg világosan értjük, hogy a kétféle osztás éppen a kétféle, azaz jobb- ill. baloldali szorzás ellentéte. Ez esetben a kérdéshez tartozó számtani összefüggés, amire az osztás válaszol, azonos lesz. Itt arra a fajta kérdésre gondolok, hogy baloldali osztás esetében „Melyik az a szám, amit hárommal szorozva", vagy jobboldali osztás esetében „amivel a hármat megszorozva 15 lesz az eredmény?".

Az is problémát okozhat, engem például meg is zavart, erről a következő pontban írok, hogy a kétféle osztás egyenlősége mást jelent, mint amit az osztás kommutativitása jelentene, miközben a szorzásnak, - aminek az „ellentéte"- a kommutativitásával egyenértékű.

A kétféle osztás megkülönböztetése a dolgozatban szereplő szempontoktól függetlenül is sok okból fontos. Először is a bennfoglalás felfogható ismételt kivonásként és így a szorzásnak, mint ismételt összeadásnak az ellentéteként. Ez mindig elvégezhető, szemben a részekre osztással. Szeredi Éva tapasztalata egy pomázi általános iskolából, hogy arra a kérdésre, hogy a 7 osztható-e 2-vel, azt válaszolták, hogy igen, és 1 a maradék. Számomra ez pontosan a kétféle osztás megkülönböztetésének fontosságát hangsúlyozza: A hét cukorkát 2 gyerek között szétosztani nem lehet igazságosan.

Egy másik rövid példa John Holttól származik (130-134. o): Ha törtekkel akarunk osztani, mint ott a példában a 6-ot az 1/2-del, akkor bennfoglalásként értve az osztást egyszerűen átlátható, hogy miért lesz az eredmény 12, azonban fél részre osztani valamit, vagy még jobb megfogalmazással *félfelé* osztani nem lehet, vagy csak igen homályos, absztrakt értelemben. Valójában az idézett példában angolul pontosan az okozza a zavart, hogy számukra devide 6 into 1/2 a part nem jelentett semmit, ezért félbevágásként értelmezték.

Ezek arra is példák, hogy ha az iskolai oktatás során nem „felejtődne el” ez a megkülönböztetés, akkor a későbbiekben volnának dolgok, amik világosak lehetnének ennek köszönhetően. Mindehhez, és a dolgozatban szereplő sok másik kérdéskörhöz is hozzátartozik, hogy a tanárok maguk is sokszor feleslegesnek látnak bizonyos megkülönböztetéseket, és értelmezéseket, jelen esetben a kétféle osztás megkülönböztetését, illetve jelentését. Ez persze részben azzal függ össze, hogy ők maguk is olyan oktatásban vettek részt annak idején, amiben a „felsőbb szintre lépés” a korábbi képek, modellek kihajítását jelentette, azok kiegészítése helyett.

Összefügg továbbá azzal az alaptézisemmel is, hogy téves az a gondolat, hogy a „magasabb matematika” helyettesítené a korábbi, - e tévedés esetén csupán mintegy szükségből használt, pusztán csak előzetesnek tekintett - alap matematikát.

6.3 Az inverz

Az „inverz” szó maga arra is példa, hogy az elnevezések eleve zavaróak lehetnek, pusztán azáltal is, hogy több különféle fogalom ugyanahhoz a szóhoz kapcsolódik. Sőt, a kimondatlan inverz fogalomra ez a zavaró jelleg még inkább igaz. El lehet ezt úgy is képzelni, hogy az „ellentétes”, a „fordított”, „visszafelé” fogalmaknak valamilyen egységes, összemosódó reprezentációja él, még akkor is, ha ez akár egyik szóval sincs megjelölve.

Ami például engem most, amikor a kétoldali osztás kérdésén algebrai szempontból elgondolkoztam, megzavart, utólag világosan látom, hogy az volt, hogy azért nem is kerestem csoportban ellenpéldát az $a/(b/c) = (a/b)\cdot c$ összefüggésre, mert úgy vettem, hogy egy csoportban nyilván van kétoldali inverz, és egyszerűen nem jutott eszembe se, hogy ennek semmi köze sincs a kétoldali osztáshoz, ezért úgy vettem, *anélkül*, hogy egyáltalán belegondoltam volna, hogy csoportokban nyilván mindegy lesz, hogy valahol a / vagy a \ művelet szerepel. Először arra gondoltam, hogy ez csak az én butaságom, vagy fáradtságom jele, ezért megkérdeztem más, matematikában igazán kompetens személyeket is, és még miután ki is mondtam ezt az állítást, sem volt mindenki számára triviális, hogy a kétoldali inverznek semmi köze sincs a kétoldali osztáshoz. Én azt gondolom, hogy ennek pontosan az az egyik oka, hogy mindkét dolog, az osztás és az inverz is mint a szorzás inverze „van eltárolva” sokaknál.

Fontos példa a háromféle mínuszjel is. Már amikor én jártam kisiskolába, és azóta is csak egy megkülönböztetett van ezek között: az előjel. Emellett a mínuszjel jelöli az ellentettet, mint egyváltozós, és természetesen a kivonást, mint kétváltozós műveletet is. Itt megint az a probléma, hogy amikor ugyanaz a szimbólum jelöli ezeket az amúgy is hasonló dolgokat, akkor végképp fennáll a veszélye, egy az előzőben leírt összemosódásnak.

És megint szeretném kiemelni, hogy függetlenül attól, hogy vannak-e kísérletek ezek tisztázására, és ha igen, milyen hangsúllyal szerepelnek azok, mire eljön a gimnáziumi időszak, mindez feledésbe merül. Jó példa az a tapasztalatom, hogy gyakran előfordul, hogy a tanítványom, sok esetben főiskolás is megkérdezi, hogy "-a" hogyan lehetne *pozitív*?

Csak felsorolásként említem a következő példákat:

- Van tehát *elem inverze*, valamilyen művelettel kapcsolatban,
- van *művelet inverze* abban az értelemben, hogy a "·" kétváltozós művelet "visszacsinálása", azaz keressük azt az x elemet, amelyre $a\cdot x = b$, vagy $x\cdot a = b$,
- végül szerepel még *függvény inverze* is.

Egy utolsó példa, ami még idetartozik, és tovább bonyolítja mindezt a „visszacsinálás, ellentétesség stb.” helyzetet: Az osztást szorzással ellenőrizzük, de lehet, és szokták is néha osztással is, például

100 : 25 = 4, mert 100 : 4 = 25.

6.4 A műveletek kérdése általában

Az első probléma röviden fogalmazva az, hogy kevesebb művelet van a „matematikában” azaz az formális matematikában, de annak egyetemi reprezentációjában mindenképpen, mint az iskolában. Az osztás, amellyel sokat foglalkoztam és a kivonás, amellyel hasonlóan sokat lehetne foglalkozni, a legfőbb példák.

A második probléma, amit kiemelek, hogy a műveletfogalom esetében nincs tisztázva, a nem mindenütt értelmezett eset. Az algebra anyagban feltételezik, hogy minden művelet mindig az alaphalmazon, vagy annak egy véges hatványán van értelmezve. Ez egyrészt önmagában kizárja az osztás műveletként kezelését, így legalábbis köze van ahhoz, hogy ha az osztás vizsgálata az formális algebrai eszközökkel – természetesen az általam a korábbi példában bemutatottnál professzionálisabb módon – nem szerepel még a tanárszakosok algebra tananyagában sem. Én ezt feltétlenül hasznosnak tartanám, ehhez képest maga az osztás sem szerepel, egyáltalán, mint művelet.

Egy másik fontos példa a „gyökös egyenletek” témája. Ezek megoldása, annak magyarázata, vagy felépítése eleve nehezen tisztázható úgy, ha nem is szerepel az egyetemi anyag művelet-felfogásában az értelmezési tartomány kérdése. Itt ellen lehet vetni, teljesen jogosan, hogy ezek az egyenletek az iskolai anyagban alapvetően függvények egyenlőségeként is felfoghatók, és így mindez az analízis témaköréhez, és nem az algebrához tartozik. Azonban ezzel kapcsolatban a következő három fő megjegyzés tehető:

1. Pontosan elegendő az, hogy a négyzetgyökvonást lehet részlegesen értelmezett műveletnek tekinteni, ahhoz, hogy a „gyökös egyenletek” témáját lehessen tisztázni algebrai módon.
2. Az iskolai oktatásban a négyzetgyökös egyenletek, sőt még - a sokkal egyértelműbben a függvényekhez tartozó - négyzetgyökös egyenlőtlenségek megoldása is általában algebrai módszerekkel történik.
3. A legtöbbek számára a szándékolt felépítéstől teljesen függetlenül művelet a négyzetgyökvonás, amit tovább erősít az, hogy a köznyelvben is a műveletek közé tartozik, és hogy a számológépek jelentős részén még mindig van hozzá gomb.

6.5 A szorzás és az összeadás közti megfelelések

Azzal kezdem, hogy a legrövidebben megfogalmazva a „matematikában” - értve ezalatt elsődlegesen az egyetemi, főiskolai anyagot, - a szorzás nem következménye az összeadásnak, a hatványozás viszont következménye a szorzásnak.

Azaz a „matematika alapjai” tárgy kivételével a szorzás és összeadás összefüggései általában axiómaként szerepelnek, vagy egyszerűen tényként hivatkoznak rájuk, szemben a hatványozással. Az algebrában erre a különbségre jellemző példa, hogy egy ciklikus (rész)csoportban a generáló elem egész kitevős hatványainak bevezetésével is foglalkoznak, ami meg is felel a valós számok egész kitevős hatványai bevezetésének az iskolában, ezzel szemben a gyűrűk esetében például a disztributivitás egyszerűen egy a gyűrűt definiáló tulajdonság.

A következő fontos megfigyelés, hogy mennyire sok analógia érvényes a szorzás és a hatványozás között, az előbbit az összeadáshoz, az utóbbit a szorzáshoz viszonyítva. Nagyon kevés olyan tanárszakos hallgató van, akinek ez ne lenne újdonság, és a tanári köztudatban is kevéssé van jelen, annak ellenére, hogy ez egy az oktatás minősége szempontjából egyértelműen fontos háttértudás lenne.

1. A hatványozás ismételt szorzás, a szorzás ismételt összeadás, abban az értelemben, hogy ugyanazt a számot szorozzuk, vagy adjuk össze önmagával valahányszor.
2. Az $a^{(b+c)} = a^b \cdot a^c$ azonosságnak megfelel a szorzás disztributivitása az összeadásra nézve.
3. Az $(ab)^c = a^c \cdot b^c$ azonosságnak szintén megfelel a szorzás disztributivitása az összeadásra nézve.
4. A számpárként bevezetett negatív számok és a törtek közötti analógia.
5. A szozás - osztás, 1 és az összeadás - kivonás, 0 viselkedése közötti analógia.

Az analógiák tehát olyan alapvetőek, hogy szinte tökéletesnek tűnnek. Talán ezért okozhat meglepetést, - és okozott is, amikor ezt a kérdést Szeredi Éva feltette egy csoportjában, miután hosszan megnézték ezeket az analógiákat, - hogy miért nem kommutatív a hatványozás?

Mielőtt még ezen elgondolkoztam, beszélgetéseinkben felmerült, hogy van-e, és ha igen, mi a megfelelője a hatványozás esetében az osztás eredményének változásairól szóló fejezetben leírt összefüggésnek.

Valójában azonban a hatványozás még csak nem is asszociatív, ezért nem is lehet a dolgozat első példájában szereplő, az osztó változásával kapcsolatos törvényszerűségnek megfelelője.

6.6 Hány változós művelet a szorzás és az összeadás?

A szorzás és az összeadás az egyetemi anyagban természetesen kétváltozós műveletként szerepel, azonban az az érdekes, hogy az iskolai matematikában fogalmilag vagy technikailag egyváltozós műveletként is megjelenik. Ha ez kimondatlanul történik, akkor az csupán azt jelenti, hogy a vizsgált kérdésekhez valójában jobban illeszkedne az egyváltozós műveletként kezelése, és ez esetben jobb volna ha az egyváltozós műveletként kezelés lehetősége megfogalmazásra kerülne. Egyváltozós műveletként úgy szerepel például a szorzás, mint kétszerezés, vagy háromszorozás, de szerintem amikor valaki, akár kutató matematikus „megszoroz” egy egyenletet, akkor is ez a kép van a háttérben, nem a szorzó és az egyenlet valamelyik oldalának fogalmilag szimmetrikus szorzata. Mindez hasonlóan érvényes az összeadásra is.

Arra, hogy ez mennyire valóságos zavart tud okozni, egy Varga Tamás napi előadáson hallottam példát:

Ha tekintünk egy hosszú, összeadásokból és kivonásokból álló sorozatot, pl.

$$9 + 6 - 3 - 1 + 7 - 5 + 3 + 1 - 2,$$

és ezt szétdaraboljuk úgy, hogy minden számhoz hozzátartozzon az előtte álló műveleti jel, akkor a kapott darabokat tetszőlegesen felcserélve egy új összeadásokból és kivonásokból álló sorozat jön létre. Esetleg a kezdő 9 elé is tehetünk egy + jelet, hogy annak se kelljen fixen maradnia. A kérdés az volt a gyerekeknek, hogy változik-e a műveletsorozat eredménye. A gyerekek úgy gondolták, hogy ha csak összeadások szerepelnek, akkor nem, ha kivonások is, akkor igen, mert a kivonás nem kommutatív. Mindez ráadásul a Fazekasban történt. Ez a történet már annak idején is érdekes volt a számomra, mint valami alapvető hibának a jele a tanítási koncepcióban, pontosabban akkor nem is fogalmaztam meg a magam számára. Most azonban annyi mindenképpen világos a számomra, hogy ennek többféle alapvető köze is van ahhoz, amiről a dolgozatomat írom. Ami ehhez az alfejezethez tartozik, az az, hogy ha a + 6, - 3, - 1, stb. egyváltozós műveleteket tekintjük, illetve általában az összes + a, - a egyváltozós műveletet, ahol a tetszőleges valós szám, akkor ezen műveletek egymás után alkalmazása esetén nem számít a sorrend, miközben a kivonás, mint kétváltozós művelet esetén számít. Másfelől úgy is felfogható ez a helyzet, hogy az „előző művelet után alkalmazás"-t tekintjük kétváltozós műveletnek, és az kommutatív, ha + a, - a egyváltozós műveletek az elemek, amelyek között értelmezzük. Mivel ezek az elemek ezzel a művelettel félcsoportot alkotnak, megfogalmazhatjuk az észrevételünket úgy, hogy ez a félcsoport kommutatív.

Az egyik összefoglaló jellegű megállapítás az, hogy tulajdonképpen attól kezdve használható igazán az egyetemi vagy általában „felsőbb" matematika a szorzás és összeadás iskolai kérdéseihez, amikortól az iskolában igazából kétváltozós műveletként kezdik kezelni azt. Másként fogalmazva attól kezdve illeszkednek igazából a formális matematikából ismert részek az iskolában szereplő kérdésekhez.

Végül az ebben a szakaszban leírtak példát jelentenek arra is, hogy mennyi hasonlóság van a szorzás és összeadás kérdései között: Minden, ami ebben a szakaszban szerepel, értelemszerű helyettesítéssel körülbelül érvényes az összeadás és kivonás helyett a szorzásra és osztásra. Erről pontosabban és az ebben a szakaszban leírtakhoz kapcsolódóan az egyetemi és iskolai matematika kapcsolatáról még a következő pontban írok.

6.7 A csinálás operátor

Szintén ötödikesek tanításánál merült fel az a kérdés, amiről az előző részben írtam, csak ott szorzások és osztások sorozata szerepelt összeadások és kivonások sorozata helyett. Akkor, az óra közben jutott eszembe az a megfogalmazás, ami úgy tűnt a gyerekeknek is érthető volt, nekem és a jelenlevő tanároknak is tetszett: Az osztásnál a számokat semmiképp nem cserélhetjük fel, hanem a „csinálások" azok, amiket igen. Ez azért is érdekes, mert ennek van a formális matematikában megfelelője, ami valamilyen mértékben az egyetemi matematikában is szerepel: a szorzások és osztások speciális leképezések, amelyek halmaza a kompozícióval, mint művelettel félcsoportot alkothat. Ha a valós, vagy racionális számokról van szó, és ott a nemnulla számokkal való szorzások és osztások szerepelnek, akkor valóban félcsoportot kapunk, de ha – mint ahogyan az ötödikeseknél szerepelt – a pozitív egészekről van szó, nem, még akkor sem, ha nem foglalkozunk az egyes leképezések értelmezési tartományaival, hiszen például a 3-al való szorzás után a 2-vel való osztást alkalmazva a kapott 3/2-el való szorzás nem szerepel a leképezések között.

Bár a leképezések kompozíciója általában nem kommutatív, amikor minden szereplő leképezés értelmezett, olyankor automatikusan teljesül az asszociativitás és ezek között a speciális leképezések között a kommutativitás is érvényes.

Természetszerűen merül fel az előzők kapcsán a Cayley-féle reprezentációs tétel. [Fried 91.oldal] Felvetődött bennem az a probléma, hogy ha az ott szereplő speciális leképezések a csoporttal, jelen esetben például a pozitív racionális számok csoportjával izomorf struktúrát alkotnak, akkor hogyan lehetséges az, hogy az egyikben fennáll valamilyen kommutativitás, miközben a másikban nem. Önmagában az, hogy az itt elemzett példában osztás is szerepel, nem magyarázza ezt, mert csoportban az kifejezhető szorzással (ab^{-1}).

A magyarázat lényegében az, hogy az elemzett példának az izomorfia leképezéseket tartalmazó oldalán csak szorzások felelnek meg, és a pozitív racionális számok szorzása valóban kommutatív is.

Azt érdekesnek tartanám megvizsgálni, hogy ha nem csoportról van szó, akkor milyen a Cayley-féle reprezentációs tételhez hasonló általánosabb tételek kapcsolódnak a fenti példához.

Annak felismerése önmagában érték volt számomra, hogy ezek az absztrakt algebrai fogalmak megjelennek az ötödikes anyag hátterében is.

6.8 „*Számkörbővítés*” - beágyazási tételek

Ebben a pontban eltekintek attól, hogy azok az *objektumok*, amiket egész, vagy racionális számnak neveznek, számok-e.

Az egész, illetve racionális számok iskolai bevezetésének megfeleltethető az absztrakt algebra két tétele:

Minden olyan (F; +, *) struktúra, amelyben a + művelet asszociatív, kommutatív, és kancellatív, a * művelet pedig asszociatív és a + műveletre nézve disztributív, beágyazható egy gyűrűbe, amit az (F; +, *) struktúra differenciagyűrűjének nevezünk. (1a)

[Szendrei, 428. oldal]

Minden olyan kommutatív félcsoport, amelyben a művelet kancellatív, beágyazható egy kommutatív csoportba. (1b)

Minden integritási tartománynak van hányadosteste, azaz olyan legkisebb, őt tartalmazó test, amelyben minden nullától különböző elemnek van inverze. (2a)

[Fried, 138. oldal]

Minden (kommutatív) gyűrűnek van hányadosgyűrűje, azaz olyan legkisebb, őt tartalmazó gyűrű, amelyben minden nem-nullosztónak van (multiplikatív) inverze. (2b)

[Fried, 138. oldal]

Ezeknél a tételeknél nem könnyű felismerni az iskolai matematikával való (szoros) kapcsolatot. Ennek magyarázata a felépítés deduktív jellege. Ugyanakkor az algebra induktív úton is felépíthető a matematikai tartalom sérülése nélkül. Ez a felépítés indítható az iskolai tapasztalatokra támaszkodva. Erre példa következő két tétel:

A természetes számok $(N,+,\cdot)$ struktúrájához megadható olyan $(D(N),+,\cdot)$ integritási tartomány, amelyre teljesül, hogy $D(N) \supset N$, a $D(N)$-beli műveletek az N-beliek kiterjesztései, $D(N)$ minden eleme m-n alakú (m,n temészetes számok) és $D(N)$ egyetlen részhalmazának sincsenek meg ezek a tulajdonságai. (1')

[Szendrei, 427. oldal]

Hasonlóan megfogalmazandó a (2) típusú tétel konkrét változata

Az egész számok gyűrűjéhez létezik olyan azt tartalmazó test, amelynek műveletei az eredeti műveletek kiterjesztései és amelynek minden eleme előáll ab^{-1} alakban, ahol a és b egész számok. (2')

Ezek a tételek a tanárok háttértudásában nagyon fontosak és mindenképpen szerepelniük kellene a tanárképzésben. Legalább az (1') és (2') tételt ismerniük kell teljesen pontosan azoknak is, akik kevésbé nyitottak az absztrakt felépítésre. (Ráadásul ezeket könnyebb is megérteni.) Az analóg módon bizonyítható (1) és (2) tételek több (1') és (2') típusú példán szerzett tapasztalat általánosításaként is megszülethetnek. Ha az (1') és (2') csak kimondatlan következmény, akkor nem tudatosul eléggé a tanárjelöltben, hogy ezek adják az iskolában tanítandó számkörbővítés közvetlen hátterét:

- A negatív számok bevezetésének egyik modelljében a pénz-adósságcédula együttesek megfelelnek a számpároknak, ezeknek az azonos „vagyont” kifejező volta az ekvivalencia-osztályoknak.
- Az azonos értékű törtek egyértelműen megfelelnek az ekvivalencia-osztályoknak.
- A negatív szám – tört szám analógia világosabbá válik a tételek tükrében. Különben ezt a hallgatók, de még a tanárok többsége sem látja át, noha nagyon alapvető és gazdag.
- A hatványozás és a szorzás analóg tulajdonságait is megvilágítják.
- A hatványozás és a szorzás azonosságainak szerkezeti hasonlóságát is segít felismerni.

6.9 Számrendszerek – a tízes számrendszer kitüntetett szerepe

Itt ismét egy saját tapasztalatomból indulok ki. Számomra csak egészen későn, már a matematikus szak első éve után, de persze az ott tanultakkal semmilyen összefüggésben – lett világos, hogy a számok, mármint a pozitív egészek, nem tízes számrendszerbeli számok. Másként fogalmazva, hogy a 100ra egyedül úgy lehet gondolni, ha magára a számra akarok gondolni, mint 100 vonás, vagy pálcika, lényegében valami egyszerű egyforma objektumból 100 darab. (Lásd még Holt 136. oldal a 10-es szám rejtélyéről.)

A végződésekkel való számolás szabályai a tízes számrendszer kitüntetett szerepe miatt könnyen érthetők azok számára is, akik a kongruenciák vagy maradékok nyelvén bizonytalanok.

6.10 A pontosságról

A szorzás kommutativitására leírt indoklás jó példa arra, hogy hogyan lehet összetéveszteni a pontosságra való törekvést a formalitással. Azt gondolom, hogy az ott leírt indoklás annak ellenére *tökéletes*, hogy konkrét számok szerepelnek benne (egyesben az általános bizonyítási elv). Számomra teljesen világos, hogy ha az ottani indoklást 3 és 4 helyett „a”-val és „b”-vel mondanám el, az tényleg a legapróbb mértékben sem tenné azt megbízhatóbbá, vagy pontosabbá. Sőt a számomra az „a” és „b” használata *pontosan* azt jelenti, mint az eredeti indoklásnak az a mondata, hogy „Végül fontos megjegyeznünk, hogy a most leírt indoklás ugyanígy használható akkor is, ha a 3 és 4 helyett bármilyen más (pozitív egész) számok szerepelnek”.

A számelmélet alaptételéről szóló részben a „lakója” szó természetesen az „eleme” fogalmának felel meg, ami egy egyszerű és fontos példa arra, hogy ez pusztán szóhasználati változás, amely semmiben nem befolyásolja sem a tartalmat, sem a pontosságot (de jelentős tanuláspszichológiai előnyökkel jár).

Mindenképpen a témához tartozik az, amit Szabó Árpád egyik könyvében olvastam annak okairól, hogy miért használnak a matematikában egyezményes nyelvet és szintaktikai szabályokat: mindez az eleai filozófusok hatására került be a matematikába.

6.11 A polinomok „formális” felfogása

Ha a polinom mint „formális kifejezés” valóban *formális* volna, akkor speciális végtelen sorozatként lehetne felfogni, elképzelni és jelölni is. Amit ebben a rövid szakaszban írok, egyik a sok közül, ami kapcsolódik a concept image fogalmához.

Speciális végtelen sorozatként azok a végtelen sorozatok szerepelnek, amelyekben valahonnan kezdve csak 0 van. Ez a felfogás formális definícióként szerepel is a tananyagban, de mégis az x^2+1 polinomra x^2+1-ként gondol szerintem mindenki, de a nagy többség biztosan, nem pedig egy olyan sorozatként, ahol az 101-et végtelen sok 0 előzi meg.

Na mármost nekem pl. tényleg mindig zavaró volt az az ufó fogalom, hogy mit jelent az az x? Mert ugye x is de most *mégse* x, hanem „formális” x-nek kell tekinteni. Szóval változónak, amit *mégse* lehet behelyettesíteni, abban az értelemben, hogy addig formális kifejezés, amíg nem tesszük. (Számomra csak a vektorok, - amik ez esetben mint irányított szakaszok szerepelnek - „megmondjuk mikor egyenlő” fogalma az, ami ennyire értelmetlen.) Használni minden ilyet tudok. Tényleg nem tudom hány tanulót zavar, érdemes lenne vizsgálni.

7 A számelmélet alaptétele komplex elemzéssel

A számelmélet alaptétele az iskolai számelméletben is valóban alapvető tétel. Elég hamar el kezdik használni, és megfigyeléseim szerint a hosszú távon is leginkább megjegyzett dolgok közé tartozik. Szerintem ez nem magára a tételre, hanem a „prímfelbontásra” érvényes, úgy értve ezt a szót, ahogyan erre a tapasztalataim szerint nagy többség gondol, aki ezt egyszerűen mint eljárást megtanulta, továbbá ennek használatára, elsősorban a legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös kiszámítása során. A különbség abból is érzékelhető, hogy sokakban még az sem tudatosodul, hogy a felbontás egyértelműsége mennyire fontos a tétel felhasználhatóságához is.

Ez a tétel egy nagyon jellemző példa arra a korábban leírt elképzelésre, hogy a közvetlen hátteret jelentő formális matematika hasznosíthatósága szempontjából nagy különbség lehet pusztán annak következtében, hogy hogyan kerül az tárgyalásra. Ebbe még az is beletartozik, hogy egy adott tételnek melyik bizonyítása szerepel a sok lehetséges közül.

A következőkben leírom azt a bizonyítást, amit a számelmélet alaptételéhez kitaláltam, és gondolom a szakirodalomban bizonyára szerepel valahol, hiszen egy ilyen híres tételnek annyi bizonyítása van már, hogy valószínűtlennek látszik, hogy igazán új legyen az, amit írok. Én úgy írom le, ahogyan a számomra felépül, mert természetesen nem a tétel bizonyítása a cél, hanem az a kérdés, hogy a tétel bizonyítása hogyan illeszkedik, és jobban illeszkedik-e az iskolai matematikához, és az alap matematikához.

Amikor a bizonyításon gondolkoztam, az első, ami feltűnt, az volt, hogy milyen nagy része az a tételnek, ami számomra lényegében logikai, és milyen kevés az, ami kimondottan számelmélet jellegű. Ezek különválasztása számomra mindenképpen hasznos, és egyértelműen úgy gondolom, hogy bárkinek legalábbis az lehet. Másként fogalmazva, ha én magam a lehető legjobban szeretném tanítani, akkor ezeket a részeket különválasztanám.

Az itt leírt bizonyítás nem tartalmazza mindazt az előkészítő megbeszélést, definíciót, amire egy iskolában sor kerülne, és annyiban csak vázlat, hogy tényleges iskolai felhasználás esetén a bizonyítás egyes lépéseihez is tartozhatnak megbeszélések, példák, esetleg feladatok.

Másrészt ez a bizonyítás a leghosszabb változata az általam megfogalmazott alapgondolatnak, azon egyszerű ok miatt, hogy a bizonyítás többi változata ebből egyszerűen, bizonyos részek kihagyásával kapható meg.

a) A tételnek az az állítása, hogy *minden egynél nagyobb egész szám felbontható felbonthatatlan számok szorzatára*, egyszerűen azért igaz, mert ha maga a szám nem felbonthatatlan, akkor ez azt jelenti, hogy előállítható két egynél nagyobb szám szorzataként, és ha ezek közül valamelyik nem felbonthatatlan, akkor az a tényező is helyettesíthető két egynél nagyobb szám szorzatával, és így már háromtényezős szorzatot kapunk, és így tovább haladva, előbb-utóbb véget kell érjen ez a helyettesítgetés. Itt rögtön megjelenik az elnevezés problémája: A „felbonthatatlan" szó legalább valami olyasmit jelent, mint amit az általa jelölt matematikai fogalom, szemben a „prím" szóval, ami vagy semmit nem jelent, vagy az formális matematikában valami mást. Sose értettem, miért hívják akkor a felbonthatatlan számokat az iskolában prímnek? Esetleg fárasztó egy ilyen hosszú szót kimondani?
   Amikor azt írom: véget ér, az azt jelenti, hogy véget ér, akkor is, ha nem mondjuk, hogy „véges sok lépésben". Talán véget érhetne végtelen sok lépésben? Esetleg akkor, ha valaki már tanult transzfinit rekurziót és indukciót, de ez ugye nem az iskolában szokott előfordulni. Felmerül a „véges" szó használatának feleslegessége. Amíg nem foglalkozik

valaki végtelen dolgokkal, egyszerűen nincs jelentése ennek a szónak. Ha már foglalkozik vele, akkor hangsúlyozom, hogy ehhez először is el kell fogadja a végtelen, mégpedig az aktuális végtelen fogalmát, és az már önmagában nem egy egyszerű kérdés.
Az, hogy véget ér, egyszerűen azért igaz, mert minden lépésben eggyel több tényezős szorzat keletkezik, és például egy 5 tényezős szorzat értéke legalább $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, ezért egy 32-nél kisebb szám nem bontható több mint 4 darab egynél nagyobb szám szorzatára. Ha az iskolában erről lenne szó, ennek megbeszélése során meg is kérdezném, például azt, hogy hány tényezős szorzattá nem lehet biztosan felbontani, vagy egyszerűbb kérdésként, hogy fel lehet-e 10 tényezős szorzatra bontani az 567-et, anélkül, hogy elkezdenénk felbonthatatlanok szorzatára bontani? Természetesen mindkét kérdésben egynél nagyobb egészekről van szó.

b) A következő kérdés az, hogy lehet-e többféle felbontása ugyanannak a számnak? Itt is van egy lépés, amit én különválasztanék: Ha egy egynél nagyobb egész szám két különböző felbontása esetén van olyan felbonthatatlan szám, amely mindkét felbontásban szerepel, akkor ha az összes ilyet mindkét felbontásban külön csoportosítjuk, mégpedig mindegyiket annyi példányban, ahányszor egyszerre mindkét felbontásban szerepel, akkor az eredeti számot ezek szorzatával elosztva egy olyan egynél nagyobb egész számot kapunk, amelynek már két olyan felbontása lesz, amelyekben nincs közös felbonthatatlan szám.
Nevezzük az ilyen két felbontást *igazán különbözőnek*, ekkor tehát elég azt a kérdést megvizsgálni, hogy létezik-e olyan egynél nagyobb egész szám, amelynek van két igazán különböző felbontása, és ez a lépés számomra megint csak egy lényegében logikai lépés volt.

c) Mielőtt ezt a kérdést megvizsgálnánk, bevezetek két fogalmat.

Annak, megfogalmazásához, hogy egy f szám mikor felbonthatatlan, abból is kiindulhatunk, hogy azt kérdezzük, hogy egy pozitív egészből előállítható-e szorzással? Ha az f-ből indulunk ki, akkor meg sem kell szorozni, és az, hogy az eggyel való szorzás pontosan ezt teszi, azaz semmit, azt jelenti, hogy így persze az f-et az f-ből nyilván megkaphatjuk. Ezért ezt az egy esetet más jellegűnek tartom, mint az összes többit. Lehet, hogy valakinek ez nem meggyőző, vagy ideológia jellegű, de akkor is igaz, hogy megfogalmazható a felbonthatatlanság a következő aszimmetrikus módon:

1.definíció: Az f egynél nagyobb szám felbonthatatlan, pontosan akkor, ha egy f-nél kisebb pozitív egész számból csak úgy állítható elő szorzással, ha az a szám, amiből kiindulunk az 1 és amivel szorozzuk, az f.

Egy másik megfogalmazás:

2.definíció: Az f egynél nagyobb szám felbonthatatlan, pontosan akkor, ha egy f-től különböző pozitív egész számból csak úgy állítható elő szorzással, ha az a szám amiből kiindulunk az 1 és amivel szorozzuk, az f.

Mindkét definíció esetében az „az a szám amiből kiindulunk az 1” részt kihagyva, ekvivalens definíciót kapunk, hiszen az már következik abból, ha tudjuk, hogy amivel szorozzuk, az az f. Ekkor viszont látható, hogy a következő két definíció az 1. illetve a 2. definíció általánosítása lesz. Az először definiált új fogalom az *ország szinten felbonthatatlan* szám fogalma. Itt tehát feltesszük, hogy előzőleg már volt szó például páros országról, és annak mintájára hármas, négyes vagy 173-as országról: Ez azokból a számokból áll, amelyek sorban párosak, a három, a négy vagy a 173 többszörösei, és ezek a számok az aktuális ország lakói.

Definíció: Az f egynél nagyobb szám *ország szinten felbonthatatlan* pontosan akkor, ha egy f-nél kisebb pozitív egész számból az f-es ország bármilyen lakója csak úgy állítható elő szorzással, ha amivel szorzunk, az f, vagy annak többszöröse.

Ez tehát a felbonthatatlan szám fogalmának egyfajta *általánosítása*.

Az f-es ország tehát az f összes többszöröséből álló halmaznak, a „lakója” pedig az „eleme” fogalmának felel meg.

Ez arra is egy egyszerű példa, hogy ez a szóhasználati változás semmiben nem befolyásolja sem a tartalmat, sem a precizitást.

A továbbiakban bármilyen x szám esetén az „x vagy az x többszöröse” helyett az „x többszöröse” kifejezést használjuk, tanítás esetében megbeszélve, hogy ez eltérés a köznyelvtől, és hogy ezt mi indokolja.

Az *atomi* szám fogalmához a 2. definícióból indulunk ki, azt a következő módon általánosítva:

Definíció: Az f szám *atomi* pontosan akkor, ha egy f-es országba nem tartozó pozitív egész számból az f-es ország egy lakója csak úgy állítható elő szorzással, ha az a szám amivel szorzunk, az f egy többszöröse.

Ugyanez egy másik lehetséges megfogalmazással:

Definíció: Az f szám *atomi* pontosan akkor, ha egy f-el nem osztható pozitív egész számból f-el osztható szám csak úgy állítható elő szorzással, ha az a szám amivel szorzunk, az f egy többszöröse.

Úgy gondolom, hogy az „atomi” szó jelentése **ebben a matematikai kontextusban is** értelmes, segítheti a fogalom szemléletes tartalmának kialakulását: Nem véletlenül utal arra, hogy állítólag minden atomokból épül fel, a dolgot el lehet úgy képzelni, hogy az atomi tulajdonság *ugyanúgy* a szorzással kapcsolatos, mint a felbonthatatlanság, a szorzás felel meg a „felépülésnek”, és itt arról van szó, hogy az f-es országba tartozás, vagy az f-el való oszthatóság nem válhat igazzá, *nem keletkezhet úgy* egy szorzás eredményeként, hogy ha egyik tényező *sem tartalmazza azt*, vagyis ha egyik tényező se osztható f-el vagy tartozik az f-es országba. Tehát tulajdonképpen az f-el való oszthatóság, vagy az f-es országba tartozás az, ami *atomi* jellegű dolog. És mindezt természetesen tanítás esetén részletesebben is érdemes lenne megbeszélni, hogy valóban értelmes jelentéssel rendelkező szóként kerüljön bevezetésre az „atomi”.

Nekem a prím tulajdonság mindig egy teljesen indokolatlan, absztrakt érdekesség volt: Adott egy szabály, amely azt mondja ki, hogy ha egy szám osztja az a·b szorzatot, akkor *szabad* arra következtetni, hogy osztja az a-t vagy a b-t, és azokat a számokat, amikre ez a szabály érvényes, vagy működik, nevezzük prímeknek. Meg tudtam tanulni, tudtam használni, de hogy ez miért érdekes, vagy miért kéne ennek külön nevet adni, sose volt világos. Még arra is csak a matematikus szak idején jöttem rá, hogy ennek a „prím-tulajdonságnak" mennyire kulcsszerepe van a számelmélet alaptételének bizonyításában, de azután sem *jelentett semmit*.

d) Ha az f szám atomi, akkor a több, mint két tényezős szorzatokra is igaz az, hogy ha a szorzat egyik tényezője sem osztható f-el, akkor a szorzat sem osztható f-el. Ez azért van, mert ha egy több, mint két tényezős szorzatról van szó, akkor annak az első két tényezőjét összeszorozva, a kapott szám az atomi tulajdonság miatt nem lehet osztható f-el, ezt a harmadikkal, ami f-nek nem többszöröse, megszorozva, a kapott háromtényezős szorzat sem lehet osztható f-el, és így tovább, *ahány tényezős a szorzat*, annyiszor ismételve el ezt az egyszerű gondolatot. A teljes indukciós megfogalmazás sem lenne szabatosabb. A „véges sok" pedig konkrét jelentést kap, meg lehet mondani, hogy hány lépés.

e) Még egy további, lényegében logikai lépés annak belátása, hogy ha tudnánk, hogy a felbonthatatlan számok rendelkeznek az atomi tulajdonsággal, akkor abból következne, hogy nem lehet egy számnak két *igazán különböző* felbontása, és így tehát a számelmélet alaptétele is bizonyítást nyerne.
Ugyanis ez esetben ha egy N számnak volna két igazán különböző felbontása, akkor az egyik felbontásból kiválasztva egy tetszőleges ott szereplő f felbonthatatlan számot, akkor mivel ez nagyobb, mint 1 és a másik felbontásban szereplő összes szám ettől különböző és felbonthatatlan, ezért azok egyike sem lenne az f-nek többszöröse, így tehát azok szorzataként az N sem lehetne az f többszöröse, miközben abból a felbontásból, ahonnan az f-et vettük, látjuk, hogy az.

f) Az eddigi lépések mindegyike lényegileg logikai lépés volt, a számelmélet alaptételének az a része ami igazából számelméleti jellegű, tehát az az állítás, hogy

A felbonthatatlan számok atomiak. (A)

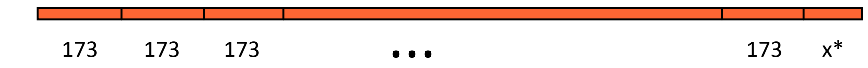
Az (A) állítást két állításként fogom kezelni:

Minden ország szinten felbonthatatlan szám atomi. (A1)

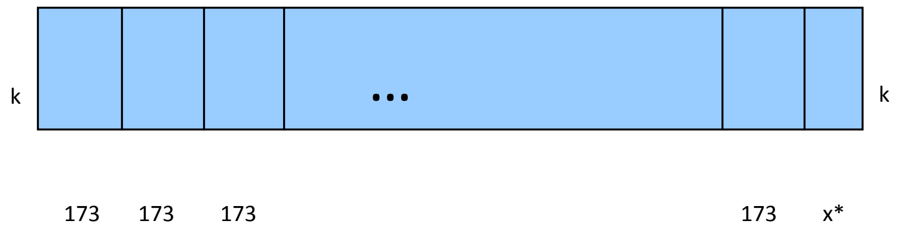
Minden felbonthatatlan szám ország szinten felbonthatatlan. (A2)

Ha valakit zavar az ország szinten felbonthatatlan szám fogalma, vagy egyszerűen nem akarja két részre bontani az (A) állítást, akkor értelemszerűen megkaphatja az (A1) és (A2) állítások bizonyításából az (A) állítás bizonyítását, anélkül tehát, hogy használnia kéne az ország szinten felbonthatatlan szám fogalmát. Mindkét bizonyítást a 173-ra fogom leírni, ezzel is hangsúlyozva meggyőződésemet, hogy semmivel sem volna precízebb, ha 173 helyett „f"-et írnék Természetesen ha valaki kicseréli a „173" karakter sorozatot az „f"-re a ragokat értelemszerűen módosítva, akkor máris megkaphatja a hagyományosan hibátlannak minősülő bizonyítást, kivéve, hogy a 173-ról tényleg tudjuk, hogy felbonthatatlan, az f-ről szóló tételben pedig ez feltevés. Igazából ennek az a gyakorlati jelentősége, hogy ha egy ötödikes szeretné ezt megérteni, akkor a *megértés* biztosan egyszerűbb, ha a 173-ról érti meg **és** megérti, hogy a 173 helyett tényleg bármilyen másik felbonthatatlan vagy ország szinten felbonthatatlan szám állhat, mintha egy „f"-ről kéne megértenie.

(A1) bizonyítása: Tegyük tehát fel, hogy már tudjuk a 173-ról, hogy ország szinten felbonthatatlan. Azt akarjuk megmutatni, hogy atomi is. Vegyünk ehhez egy olyan, 173-mal nem osztható x számot, amelyet k-val megszorozva a 173 egy többszörösét kapjuk: Azt kell bizonyítsuk, hogy a k a 173 többszöröse kell legyen. Ha az x kisebb, mint 173, akkor az, hogy a 173 ország szinten felbonthatatlan, egyszerűen ezt jelenti. Ha az x nagyobb, mint 173, (173 nem lehet, mert nem osztható 173-al) akkor osszuk el maradékosan 173-al. Mivel 173-al nem osztható, lesz pozitív maradék, ami kisebb, mint 173, jelölje ezt x*. Ez azt jelenti, hogy az x egy olyan *összegként* írható fel, amely áll néhány 173-ból és egy darab x*-ból, és tudjuk, hogy 0 < x* < 173.



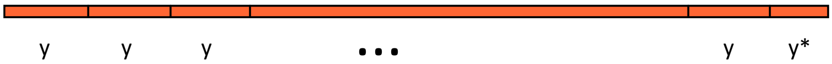
Ha ezt az összeget megszorozzuk k-val, akkor egyrészt nem felejtjük el, hogy az x-nek a k-szorosát kapjuk, amiről feltettük, hogy a 173 többszöröse, másrészt egy olyan összeget kapunk, amely áll néhány 173·k-ból és egy darab x*·k-ból, azaz, az x*·k-n kívül az összes tagról látjuk, hogy osztható 173-al.



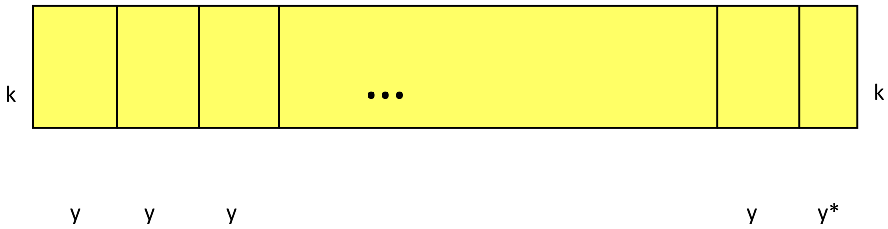
Mivel tehát az egész összegről, és annak egy kivételével az összes tagjáról tudjuk, hogy osztható 173-al, az az egy tag, vagyis az x*·k is osztható kell legyen 173-al.
Mivel 0 < x*< 173 és tudtuk, hogy a 173 ország szinten felbonthatatlan, következik, hogy k a 173 többszöröse kell legyen és ezt kellett bizonyítanunk.

(A2) bizonyítása: A 173-ról tényleg tudjuk, hogy felbonthatatlan, most azt akarjuk bizonyítani, hogy ország szinten felbonthatatlan. Legyen tehát 0 < y < 173 olyan szám, hogy a k·y a 173 többszöröse, azt kell bizonyítsuk, hogy a k maga is a 173 többszöröse kell

legyen. Ha az y nem az 1, akkor az előző bizonyításhoz hasonlóan osszuk el maradékosan a 173-at az y-al. Mivel a 173 felbonthatatlan, lesz pozitív maradék, ami kisebb, mint y, jelölje ezt y*. Ez azt jelenti, hogy a 173 egy olyan *összegként* írható fel, amely áll néhány y-ból és egy darab y*-ból, és tudjuk, hogy 0 < y* < y < 173.



Ha ezt az összeget megszorozzuk k-val, akkor egyrészt nem felejtjük el, hogy 173-nak a k-szorosát, vagyis a 173 egy többszörösét kapjuk, másrészt egy olyan összeget kapunk, amely áll néhány y·k-ból amiről feltettük, hogy a 173 többszöröse és egy darab y*·k-ból, azaz, akárcsak az előző bizonyításnál, az y*·k-n kívül az összes tagról látjuk, hogy osztható 173-al.



Mivel tehát az egész összegről, és annak egy kivételével az összes tagjáról tudjuk, hogy osztható 173-al, az az egy tag, vagyis az y*·k is osztható kell legyen 173-al.

Ennek a bizonyítása csak egy kicsivel bonyolultabb, mint az előzőé. Annyi a különbség, hogy ez most nem biztos, hogy az utolsó lépés volt.

Jelenleg annyit kell csak egyrészről megjegyeznünk, hogy a kapott y*-ra ugyanúgy igaz, mint az y-ra, hogy 173-nál kisebb, pozitív, és hogy a k-szorosa osztható 173-al, nevezzük őt az y örökösének, hogy megjegyezzük, hogy ez a három dolog rá is igaz.

Másrészről tudjuk, hogy y* kisebb, mint az y. Ha az y* sem az 1, akkor mint az y örökösére, ugyanúgy, mint az előbb, elmondhatjuk ugyanazt. Így az y* örököséhez jutunk, amelyre tehát még mindig igaz lesz az előbb említett három dolog. Ez az ismételgetés előbb-utóbb véget kell érjen, ha például az y a 20 volt, akkor biztos, hogy kevesebb, mint 20 lépésben, mivel mindegyik örökös legalább eggyel kevesebb, mint aminek az örököse. Előbb-utóbb eljutunk tehát az 1-hez.

Ezek után röviden azt mondhatjuk, hogy az vagy az y az 1, vagy az y valahanyadik örököse az 1, de mindenképpen igaz lesz az 1-re a felsorolt három dolog, köztük az is, hogy a k-szorosa a 173 többszöröse. Az 1 k-szorosa viszont a k, tehát valóban kiderült a k-ról, hogy a 173 többszöröse kell legyen.

Az eddig leírtak fényében szerintem egyértelmű, hogy egy tanárszakosnak lényegesen többet kell ezzel a tétellel foglalkozni ahhoz, hogy az egyértelműen hasznos és használható tapasztalatokat adjon a tanárjelölteknek.

8 A szükséges formális matematikai tudás le nem fedett része

Ha megnézzük, hogy egy akár az egész iskolai anyagot ötös szinten teljesített tanuló formális matematikai értelemben hogyan és mennyire ismeri a középiskolai matematika-anyagot, és ezt összehasonlítjuk azzal, hogy mi lenne a középiskolai anyagnak a formális matematika által beazonosítható része, akkor egy jelentős rést találhatunk. A középiskolai anyagban rengeteg olyasmi van, amihez a formális matematikában tartozik, vagy tartozna valamilyen tétel, ha azt bárki megfogalmazná. Például abban az értelemben, hogy ugyanezek a problémák, állítások, módszerek, vagy hagyományos értelemben vett matematikai tételek sok évvel ezelőtt egy szakfolyóiratban, vagy még régebbi tételek valamilyen akkori hivatalos fórumon új eredményként megjelenhettek volna. Elképzelhetjük mindezt úgy is, hogy egy időgéppel visszamennénk a megfelelő időpontra, és szeretnénk az adott dolgot publikálni, vagy az akkori matematikus világ tudomására hozni. Amit a középiskolai anyag formális matematikához tartozó részén értek, az ezeknek a háttérben lévő tételeknek abban a formában való értése, ismerete és megfogalmazása, amit ez esetben például a szakfolyóiratban való közlés igényelne. Mindezt még ki kell egészítenünk azzal, ami a jelenleg érvényes szabatossági szint, illetve kód, más szóval, mintha az akkori közönség is azt tartaná matematikailag pontosnak, ami ma számít annak.

- A művelet, függvény, reláció fogalmi kapcsolata, az átfedések kezelése.
- A négyzetgyökös egyenletek, az egyenlőtlenségek, ekvivalens átalakítások kezelésének kérdése a tankönyvekben tisztázatlan. Talán pontosan azért, mert túl kicsi mögöttes elméletet igényel.
- A matematikai fogalmak (változó, paraméter, behelyettesítés, egyenlet) logikai tisztázatlansága.
- Eljárások, trükkök, stratégiák pontos hátterét leíró elmélet hiányzik.
- Kikötések, ellenőrzések szükségessége, szerepe, létjogosultsága.
- ...

Remélem, hogy a felsorolt példák meggyőzően mutatják, hogy a középiskolai anyagnak bőven a formális matematikához sorolható problémái, amelyek nem is tisztázódnak, ha nem tekintjük odatartozónak. Azt gondolom, hogy a tanárjelölteknek ezekben a kérdésekben matematikai tisztánlátással, pontos tudással kell rendelkeznie. Mivel egy tanár a matematikáról alkotott képet évtizedekig befolyásolja, talán nagyobb ezeknek a tisztázatlanságoknak a jelentősége, mint némely (pusztán matematikai műveltséget gyarapító) tételnek a pontos kimondása.

A tanárszakra kerülő hallgatók többsége nem olyan, akik „akár az egész iskolai anyagot ötös szinten teljesítették", így a képzésnek az új anyag feldolgozása mellett a hozott matematika kép korrekcióját is komolyan kell vennie alapozó és módszertani tárgyakban egyaránt.

A reális lehetőség, úgy gondolom az, - és mondjuk lelkiismeretes, lelkes, és a jövőbeli tanári munkájukat érdeklődéssel és komolyan kezelő hallgatók esetében talán ez is történik - hogy a hallgató a matematika, és annak működési módjának megfelelő szintű elsajátítása után *maga képes* az egyébként biztos iskolai tudását ezen az új, pontos módon érteni. Ehhez jelentős segítséget nyújtana, ha a matematikai tárgyakban szerepelne néhány, - lehetőleg minél több - az iskolai matematika szempontjából kulcsfontosságú témának az új, pontosabb felfogásban való tárgyalása.

Mindez, amit itt leírtam, szerintem a célszerűség, hatékonyság alapján nyilvánvaló, és tényleg terjedelmi okból nem próbálom hosszabban bizonygatni. Így, ezen a szinten leírva tekintsük ezt egyszerűen felvetésnek. Hozzáteszem még, hogy ha ezt valaki értékesnek tartaná, akkor nyilvánvalóan mindezen tárgyakat aktívan oktató tanárok közösen tudnának ebben valami érdemi, és a most leírtnál konkrétabb, pontosabb, és jobban alátámasztott javaslatot megfogalmazni.

9 Függelék

(1) David Tall a concept image és concept definition fogalmának születéséről

The terms ‘concept image’ and ’concept definition’ were formulated in 1980 by Shlomo Vinner. When he visited me in Warwick that year, I had a huge quantity of data gleaned from undergraduate mathematicians that I could not analyse from a mathematical viewpoint. Shlomo’s idea immediately clarified the issues and resulted in the joint paper on Concept Image and Concept Definition published in 1981. Here I should declare that this has led to two different meanings given to ‘concept image’ in the literature. Shlomo’s definition was philosophically based and was a thought experiment to analyse what happens when students focus in different ways on images and definitions. My perception was more humanly based, so that where Shlomo talked about ‘the mind’ and thought about it as separate from ‘the brain’ in a cartesian sense, I always thought of the mind as the way the brain works, so that it is an indivisible part of the structure of the brain. Shlomo has always written about‘concept image’ and ‘concept definition’ as being ‘two distinct cells’ which enables him to make subtle analyses of different ways of employing the two distinct ideas. As the concept definition is a form of words that can be written or spoken, I regard this as part and parcel of the total concept image in the mind/brain. It is up to you to choose which version you want. It is easy to accommodate both. However, when I say ‘concept image’ I refer to the definition given in Tall and Vinner 1981.

When I think about concept image, I think of the conundrum raised by the composer Mendelssohn, in response to a comment that music is too vague to be represented by musical notation. He replied, on the contrary, that music is too precise ever to be captured by notation. Speaking of concept image can sometimes be vague, but as Pat Thompson once told me, this is precisely what makes it so useful. It helps us to grasp that there are subtleties in mathematical thinking that cannot be precisely conveyed by the apparent precision of mathematics.

(2) Tall és Vinner elemzése a komplex számokkal kalpcsolatos problémáról

We shall call a part of the concept image or concept definition which may conflict with another part of the concept image or concept definition, a *potential conflict factor*. Such factors need never be evoked in circumstances which cause actual cognitive conflict but if they are so evoked the factors concerned will then be called *cognitive conflict factors*. For instance the definition of a complex number x+iy as an ordered pair of real numbers (x, y) and the identification of x+i0 = (x, 0) as the real number x is a potential conflict factor in the concept of complex number. This is because it includes a potential conflict with the set-theoretic notion that the element x is distinct from the ordered pair (x, 0). Students in a questionnaire often regarded a real number such as $\sqrt{2}$ as not being a complex number and yet several of these defined real numbers as “complex numbers with imaginary part zero.” Thus $\sqrt{2}$ was regarded as real and $\sqrt{2}$ + i0 as complex. These were conveniently considered as being distinct entities or the same, depending on the circumstances, without causing any cognitive conflict. They only become *cognitive* conflict factors when evoked simultaneously.

(3) Holt J. case study

One of the fifth-grade groups was trying to discover how to divide by Fractions. They had been given, to figure out for themselves if they could, "Divide 6 by 1/2." The children know the official school definition of division, that "8 divided by 4" means either "How many 4's are contained in 8?" or "If you separate 8 into 4 equal parts, how many will be in each part?" Most of the group applied the first meaning of division to the problem, taking it to mean, "How many ½'s are contained in 6?" They saw that the answer was 12. But two girls, who had done excellent thinking about multiplying fractions only a few days before, tried to apply the other meaning of division, and asked themselves: "If you divide 6 into halves, how big will each half be?" Quite reasonably, they got the answer 3.

It was their good thinking, and my bad, that got them into difficulty. I had not told them that the second of the two meanings of division did not apply, and was in fact without meaning in the case of division by a fraction. The reason I had not told them is that I had not realized it myself. Since I had given them the rule, they felt that it must make sense, and in fact twisted it to make sense in the only way it could be made to make sense. Six divided into half a part could only mean six divided into halves.

My misuse of language reinforced their misunderstanding. Like most people, I frequently use the word "divide" in a way that contradicts its mathematical meaning. We say: "Divide a pie into four parts" when all we are really doing is making two perpendicular cuts through the center of the pie; we say, "Divide a line into two parts," when what we mean is to find the midpoint of the line; we talk about dividing something in half when it would be more consistent to talk about dividing it in two. For all these reasons it was natural for these girls to suppose that dividing 6 by l/2 meant dividing it into halves, or two parts.

One able boy unwittingly increased their confusion. Early in the period he explained at the blackboard that the problem was asking how many l/2's were contained in 6, and showed with a good diagram that the answer was 12. Then he made a mistake that many adults might easily have made. He said, "Twelve what?" Then, after a second's thought, he answered, "Twelve halves," and wrote 12/2 on the board. He soon saw his mistake, and corrected it; but too late to save the girls. They had seen a leading member of the opposition go to the board, and using the other meaning of division, prove that 6 divided by 1/2 is 12/2, or 6. Since this was nonsense, they were all the more convinced that their own answer was right.

Other children began to try to show the girls where they had gone wrong, but without success. To rescue a man lost in the woods, you must get to where he is. The other children could not get to where these girls were, could not see how they had arrived at their answer, and hence could not help them. All they could do, like most teachers, was repeat over and over again how they got their own answer--which was no help at all. One boy asked one of the girls to work out 6 X 1/2 on the board. She wrote, "6 X 1/2 = 3." He then pointed out that they had just said that 6 *divided* by 1/2 equaled 3. The girl looked at her partner and said, "We've been tricked!" I wonder how often we, their teachers, make them feel this way.

Here one girl began to feel that the answer 3 was somehow wrong, and whispered to her partner, "We goofed." Later she said, "One half of 6 is the same as multiplication." She still could not see clearly that what she was doing was multiplying, not dividing. Finally, after much further argument, she said to her partner, "We may as well give in. Half of 6 is 12. 1 don't get it, but it is." These words threw a sharp light on the world of school as seen through the eyes of children. How much of my teaching has been accepted by the children in just this spirit? What I tell a child may seem to contradict his common sense, the common usage of English, and even other things I have told him; but he must bow to superior force and accept it whether it makes sense or not.

I was finally able to get the girls out of their jam, and admitted my own responsibility for getting them into it. But I had been thinking and talking for some weeks about possible contradictions in my own teaching, and so was particularly sensitive to it. This incident shows that we teachers must begin to try to look at our ideas and our teaching through the eyes of someone who knows nothing, can accept nothing unproven, and cannot tolerate inconsistency and paradox. We must try to free our teaching from ambiguity, confusion, and self-contradiction. Since to bring clarity and consistency to "elementary" mathematics is one of the central mathematical problems of our time, this task will not be easy.

10 Irodalomjegyzék

Bruner, J., S.: Új utak az oktatás elméletéhez. Gondolat, Budapest, 1974

Dehaene, S.: A számérzék. Osiris, 2003

Fried E.: Általános algebra. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981

Hajnal A. & Hamburger P.: Halmazelmélet, Tankönyvkiadó, 1983

Holt J.: How children fail. Pelican books, 1984

Kalmár L. : Integrállevél. Gondolat, Budapest, 1986

Skemp, R.: A matematikatanulás pszichológiája. Gondolat, Budapest, 1975

Szabó Á.: Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá. I. Matematikai Lapok 8 (1975) 8-36.

Szabó Á.: A görög matematika definíciós-axiomatikus alapjai. Matematikai Lapok 10 (1959) 72-121.

Szendrei J.: Algebra és számelmélet. Tankönyvkiadó,1975

Tall D.O: Concept image and concept definition, http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/concept-image.html

Tall D.O. & Vinner S: Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, Educational Studies in Mathematics, 1981,12, pp.151-169.

Trosztnyikov V. N.: Konstruktív módszerek a matematikában. Gondolat, Budapest, 1981