EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Logikák az iskolában

SZAKDOLGOZAT

Barkó Ferenc

Matematika szak

témavezető:

Munkácsy Katalin
Vancsó Ödön

Matematikai és módszertani központ

Budapest, 2013

Nyilatkozat

Név: Barkó Ferenc József
ELTE Természettudományi Kar
Szak: Matematika
ETR azonosító: bafmaat.elte
Neptun azonosító: BV5GAL
Szakdolgozat címe: Logikák az iskolában

A szakdolgozat szerzőjeként felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önnálló munkám eredménye, saját szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések a előírt szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idészé nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2013-06-04

....
aláírás

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Munkácsy Katalinnak tanárnőnek, hogy önfeláldozóan, külön időt szakítva vállalta, hogy a dolgozatomat kísérje, és segített abban, hogy formai keretbe tegyem a dolgzatot; valamint Vancsó Ödon tanár úrnak, hogy könyvekkel és hasznos ötletekkel látott el, amelyek inspirálták a dolgozatot. Egy-egy fejezet is az ő ötleteiből merítkezik. Köszönettel adózom Komjáth Péter és Máté András a logika tudományát művelő tanár uraknak, akik fontos szakirodalommal és tételekkel láttak el a témával kapcsolatban. Gondolkodásmódom a matematika tanítása terén sokat fejlődött a módszertani blokkok alatt, aminek nyomát viseli a szakdolgozat, ezért köszönetet mondok Vásárhelyi Éva tanárnőnek, Ambrus András tanár úrnak és Lénárt Istvánnak, akinek felfedeztető gömbi-geometriai órái, modellvizsgáló szemlélete szintén segítségemre voltak a munkában. És persze köszönetet mondok minden áldozatkész tanáromnak, akik idáig egyengették ezt a szellemi utamat. Hálás vagyok Szüleim áldozatos lelki és anyagi támogatásáért.

Tartalomjegyzék oldal

Bevezetés

A matetmatika történetéből tudjuk hogy a XX. század elejét megindult a matematika különböző ágainak rendszebe foglalása. Az emberi szellem fejlődésének történetében sokáig fel sem merült ez az igény. A matematika nagyon sokáig egy alkalmazott tudományként sínylődött a középkori történelemben. A logika ráadásul csak a középkori hitvitákban játszott fontos szerepet, de egyébként haszontalan tudománynak tarották. Művelését el is hanygolták. Gallilei korától kezdve azonban egyte nagyobb szerepett kapott az érvelés tudománya. Később aztán nemcsak a számítástechnikában betöltött gyakorlati alkalmazása miatt lett jelentős a logika, hanem elméleti szembpontból is.

Először csak a geometriában eluralkodott rendszertelenségeket igyekezett megszüntetni a Hilbert által kezdeményezett program, ami igyekezett egységbe foglalni, alapvető axiómarendszerekre visszavezetni a geometriát. A matematika egészét is igyekeztek átfogólag tárgyalni. Ilyen irányultságúak voltak azok a törekvések, amelyek a halmazelméletre alapozva próbálták meg axiómatizálni átfogni a matematika egészét, minthogy a halmazok minden matematikai meghatározás definíció élén állnak, ezért sokáig úgy gondolták, hogy majd a halmazokra, tartalmazásra alapozott axiómákkal a matematika minden ága leírható lesz.

Azonban ez a törekvés is meghíusulni látszott, amikor Bertrand Russel paradoxona fényt vetett a halmaz fogalom hiányosságaira és a halmazelméletből kibontakozni látszó matematika elfojtásra ítéltetett. 1912-ben Russel, aki maga is hitt az axiómatizálás lehetőségében, a Principia Matematica megírása közben végül is rádöbbent, hogy igyekezete kudarcra van ítélve. Hasonló kísérlet volt a logika egyetemességét kiterjeszteni kívánó nézetek. Kurt Gödel 1931-ben közölte a nemteljességi tételre vonatkozó tételeit, ami végül is egyértelműen értésre juttatta, hogy nem lehet minden elgondolást biztos axióma rendszerből elvezetni. Nincs olyan mindent uraló törvény, amit az emberiség felfedezhet magának.

Viszont ez a látszat ellenére nem ad pesszimizmusra okot, sőt inkább örvendetes dolog derült ki: a matematikát nem lehet lezárni, nem lehet egyszer és mindenkorra és ezért mindig lesz benne felfedezni való tétel, új rendszer, modell.[1]

Nagy érdeklődéssel hallgattam ezeket a tudománytörténeti ismereteket és nem értettem, hogy a középiskolás időszak alatt erről miért nem esik egy szó sem. Meglepő

[1] W. Kneale - M. Kneale: *A logika fejlõdése* (Gondolat, 1987) idevonatokozó részei

dolog az is, hogy a középiskolás geomettiai anyag nagy része több, mint 2000 éves ismeretek újra felidézése, miközben a XX. századi viták, elméletek amelyek egyébként jelentős hatással vannak az egyetemes gondolkodásra, elő sem kerülnek egy középiskolai diák tanulóévei alatt.

Lénárt Istvánnak az óráin lehetett találni olyan alternatív, nem Euklideszi geometriákat, amelyek középiskolás diákok számára is megfoghatóbbá teszik az elvont és távolinak tűnő foglamakat. A többféle geometriai modell alkalmazásától azért tartózkodtak eddig a középiskolában, mert attól tartottak, hogy ez majd összezavarja az euklideszi geometrián jól iskolázott elméket, azonban kiderült, hogy az összekuszálás helyett a többféle modell ismerete, megfelelő feladatok segítségvel jobban elmélyítette az euklideszi, síkgeometriai fogalmakat.

Úgy gondoltam tehát érdemes megnézni, hogy a dinamikusan változó logikában milyen modelleket lehetne megmutatni a diákoknak, amelyek szemléletesebbé tehetnék a logika tanítását. Valamint azt is szerettem volna felderíteni, mennyire lehet más logikai rendszereket bemutatni, amelyekből nyílvánvaló lesz, hogy a matematika mennyire saját emberi gondolataink szerint alakítható, és hogy mennyire sok lezáratlan és izgalmas kérdés van még benne, amit érdemes megismerni és elgondolkodni rajta.

Másfelől a logikának más területeken is fontos szerepe van: jogi, retorikai érvelésekben rendkívül fontos a logikai műveletek szerepe, értelme, az érvelések szerkezete, érvelési hibák, helyes érvelések ismerete. Ráadásul kulturtörténeti, tudománytörténeti jelentősége van ennek a tudománynak és nélkülözhetetlen a különböző természettudományi, filozófiai, nyelvészeti tudományágak művelésében.

Bevezetés a dolgozat menetéhez

Igyekeztem olyan szakköri feladatokat összeállítani tehát, amelyek jól összefoglalják a középiskolai matematikatanítás alatt felhalmozott, szétszórt logika témakörébe is tartozó ismeretet. Ezek a tételek segítséget nyújtanak egy levezetéskor használt gondolatmenetben, segítségével könnyebbé tehető, gyorsabbá tehető a bizonyítás. Az is előfordulhat, hogy meglevő ismeretből juttathat új ismerethez. A feladatokat 12. osztály végére terveztem egy összefoglaló rendszerezéshez, amihez példákat a meglevő matematikai és nyelvi anyagból merítek.

Igyekeszem a konkrét dolog felől az általánosabb fele vinni a gondoloatmenetet. Inkább az indukcióra támaszkodom, mert a logika elvont és nehéz fogalmakra támaszkodik, amit még egy 18 évesnek is nehezére eshet megérteni. A feladatok is természetesen mindig a könnyebb felől fognak a nehezebb felé menni.

A feladatok után a megoldások következnek, amiben igyekszem választ adni, hogy miért jó ezeket a feladatokat megoldatni a diákokkal, miért ezek mellett a feladat mellett döntöttem. A feladatok tárgyalását azonban meg is fogom szakítani az implikációval kapcsolatban. Ennek a szemléltetésére modellt fogok készíteni, ami szemléletesebbé teheti az eddig elvont fogalmat. A modell tudomásom szerint nem jelent meg még sehol és nem csak szemléltetésre alkalmas, hanem bizonyos azonosságok megsejtésére is kiváló eszköz lesz. Egyben utat nyit bizonyos geometriai szemléletmód felé is.

Az is előfordul, hogy megoldatlan paradoxonhelyzetet írok majd le a logikával kapcsolatban. Mindezeknek nem az a célja, hogy elbizonytalanítsák a tanulót az ismereteiben, hanem, hogy mélyítsék az elvont fogalmak ismeretét. A szakkor másik igen fontos célja, hogy a továbbtanulóknak jó bevezetést adjon a bizonyítási ismeretekhez, ami nélkülözhetetlen azoknak, akik természettudományos ismeretekre akarnak szert tenni, de nélkülözhetetlen alapja minden tudományos érvelésnek. A feladatoknál természetesen a egyetemi matematikai folytatásra is igyekeztem tekintettel lenni. De az érdeklődés felkeltése sem utolsó szempontja a dolgozatnak.

Sokszor támaszkodom Varga Tamás kiváló didaktikával megírt könyvére, a Matematikai logika kezdőknek I.-II.-re.

A logika megjelenése a magyar kerettantervben

A 2012-ben kiadott kerettantervben a matematikai logika fejlesztése minden tanév egyik fő részét képezi. A kerettanterv az interneten elérhető változatát használom.[2]

Az általános iskolák esetében a 5-8. évfolyamokon a gimnáziumok kerettantervét tekitem át, mert a gimnazista tananyagot ez a tanterv jobban előkészíti és olyan fogalmakat vezet be, amelyek később, a nagyobb elvonatkoztatási szinteken jelentősebbek lesznek.

Már az 1.-2. osztályban meg kell ismerkedinük a tanulóknak igazságfüggvény gyakorlati alakamazásával az 1. témakörben: *Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok*: el kell dönteniük, hogy egy állítás igaz vagy hamis, megfelel-e a valóságnak, vagy sem. Másrészt pedig az életkori sajtosságoknak megfelelően meg kell ismerkedniük a kisebb, nagyobb, egyenlő $(<, >, =)$ relációk

[2] http://kerettanterv.ofi.hu/

fogalmával, amelyek bár nem logikai műveletek, de későbbiekben nagy jelentősséggel bír a tulajdonságaik kiterjesztésekor, pl, a tranzitív tulajdonság szemléltetésekor. Ezekhez a relációkhoz tartoznak a testnevelésórákon előkerülő sorbarendezések valamilyen tulajdonság (testmagasság, súly, életkor stb) alapján. Ugyanilyen fontos logikai művelet egy tulajdonság alapján a halmaz elemek halmazokba sorolása, mert az indoklásokban erőteljesen nyelvi szinten megjelenik az implikáció. Pl. Ha a kutya mozog, akkor élőlény. Ehhez kapcsolódóan párhuzamba állíthatók a magyar nyelvtani halmazok képzése is, hiszen elvárás, hogy egy ilyen korú gyerek megpróbálja elhelyezni a szavakat valamilyen nyelvtani tulajdonságok alapján. pl. *megy* – ige, *kutya* – főnév. A 2. témakörben: (*Számelmélet, algebra*) szintén előkerülhetnek a logikában használatos fogalmak, szintén lehetőséget nyújt egy állítás igazságtartalmának megállapítására: pl.: *Igaz-e, hogy* $3+5=10$ *?* Ugyanígy megjelenik a halmazbasorolás művelete a geometriai alakzatok csoportosításakor, ami szintén megjelenhet a környezetismeret órákon.

……….A matematika tanításában a spiralitás elve alapján ugyanazokat a témaköröket kell egyre mélyebb szinten megismertetni a tanulóval, ezért főleg a különbségeket emelem ki a következő évfolyamokban.

A 3.-4 évfolyamon kibővül a matematikai logika tanítása a vagy és az és szavak pontos alkalmazásával állítások megfogalmazásakor. A halmazba rendezés fejlesztése folytatódik, csak már nem csak egy, hanem 2 tulajdonság figyelembe vételével. Szintén fontos a logikai és különösen a förmális logika szempontjából, hogy megjelenik a szimbólumok eljelölése.

5.-6. osztályban tovább folytatódik a halmazba sorolás fejlesztése. Viszont megjelenik a halmazok megadása, részhalmaz, komplementer halmaz. Halmazok uniója, metszete. Üres halmaz, egyenlő halmazok. Vagyis megjelenik a halmazokkal való műveletek ismerete, ami szintén segíti, láthatóvá teszi a logikai műveleteket, akár az implikációt is. A tanulóknak ismernie kell a halmazok megadását elemek felsorolásával, halmazábra használatát, tehát konkrétan megadott, véges halmazokkal kell dolgoznia, de a halmazok reprezentációja is megjelenik, ami elképzelhetővé teszi a későbbi elvont fogalmakat. Megjelennek a logikai műveletek is: a konjunkció és a diszjunkció (és; vagy), a hétköznapi életből és a matematika területéről vett állításokon a tanulóknak érzékelniük kell a sokszínű nyelvi és az egyértelművé tevő matematikai kötőszavak közötti különbséget. A diákoknak meg kell állapítaniuk az állításokról, hogy igazak-e vagy hamisak. Ezen kívül a kerekítések alkamával is megjelenhet bizonyos mértékben az implikáció: pl. *a csoki nem kerülhetett 550 forintnál kevesebbe, ha a végén 600 forintot fizetett.* vagy: *Ha a pénztárban 5000 forintot fizettem, akkor a pénztárban max 10 db 500 foritnos csokoládét fizettem.* Ugyanígy előtérbe kerülhet az algebrai fejezetekben a logikai készségek fejlődése, amikor megjelenik a 10-zel való oszthatóság konkrét esetekben történő vizsgálata, vagy az egyéb számok oszthatóságának vizsgálata is, de számos más példa hozható az algebra köréből. A geometriai témaköröknél szintén előkerülhet a halmazba sorolás alkalmazása és a relációk tulajdonságának vizsgálata konkrét szerkesztett ábrákon. (*a párhuzamosság tranzitív, vagy ha a két egyenes tényleg párhuzamos lenne, nem metszenék egymást a szerkesztett lapon*) és megjelennek a következtetések is.

7,-8, osztályban megjelennek a logikai állítások és azok tagadása. Megjelennek a logikában használt kvantorok a van olyan, létezik használatának alkalmazása a matematikai nyelvben valamilyen konkrét állítással kapcsolatban. Előkerül a negáció pontosítása, vagyis a tanulónak találkozniuk kell olyan esetekkel, amikor az állítás és tagadás a hétköznapi szóhasználatban különbözik. Megjelenik az érvelés, a bizonyítás igénye és módszerei a matematikában. Ismernie kell a definíció fogalmát, ami szintén erősen köthető az implikációhoz. (*Ha a síkbeli soksog minden oldala és minden szöge egyenlő, akkor szabályos.*) A geometriai részben pedig megjelenik az ekvivalencia fogalma: a Pythagóras tétel kimondásakor, a tétel megfordítása is szerepel a tananyagban, konkrét esetek bemutatásával. A geometriai részben egyúttal előkerülhetnek egy-egy fogalom létezésével kapcsolatos kérdések (*Létezik a beírható kör középpontja minden háromszög esetében, de létezik-e minden négyszög esetében ?*)

9,-10. évfolyamban már elvárható a tanulóktól, hogy definíciók alapján elvontabb fogalmakat is megértsenek, illetve hogy saját maguk fogalmazzanak meg definíciókat. A Halmazműveletek: unióképzés, metszetképzés, különbségképzés, szimmetrikus differencia, komplementer halmaz definícióinak meghatározásánál a vagy és és szavak matematikai jelentésével teljes mértékig tisztába kell lenniük, és ezekkel teljesen hasonló fogalmakat majd a logikai függvényekben fognak újra viszontlátni. A halmazok lehetőséget adnak a kétértékű logika szemléltetésére is a tartalmazás reláció segítségével, sőt el is vonatkoztathatuk a kétértékűségtől. Ezekben az évfolyamokban válik jelentőssé a bizonyítás, mert képesek a konkréttól elvonatkozatatva az általánost megfogalmazni. Jelentőssé válnak a tételek megfordításai főleg a geometria esetében (*Thalés tétel, Pythagóras tétel*), de az algebrai tételekben is elvárt, hogy tisztában legyenek az implikáció előtagjának és utótagjának sorrendjével (*pl. ha a szám osztható*

12-vel, akkor osztható 2-vel és 6-tal, de ha a szám osztható 2-vel és 6-tal, akkor nem biztos, hogy osztható 12-vel). Az oszthatóság témakörében erőteljessé válik a cáfolásban az ellenpélda használata (*találok egy olyan számot, amire nem teljesül az adott tulajdonság*). Megjelennek az indirekt bizonyítások is (*végtelen sok prím igazolásában,* $\sqrt{2}$ *irracionalitásának igazolásában*). A geometriában még egy példa kínálkozik az ekvivalencirelációkra: az egybevágóság, ami megint segíthet ekvivalencia logikai művelet tulajdonságainak megértéséhez. A függvények értelmezési tartományainál szintén matematikai értelmét teljesen meg kell érteni az *és, vagy, halmazon kívüli elem* fogalmát, a metszet, unió, komplementer és az ezeknek megfelelő logikai értékek közötti analógiát.

A 11.-12. évfolyamon, mint ahogy a korábbi években a függvények értelmezési tartománya folyamatosan szemlélteti a halamazok közötti unió-vagy, metszet-és hálamaz- és logikai műveletek közötti analógiát. Ugyanakkor lehetőség nyílik absztraktabb fogalmak beveztésére. Kitérésképpen összegezni lehet a tanult tételeket és mélyebb szinten birtokában vannak a logikai műveletek: negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia használatának, ezért érdemes az igazságfüggvényeket bemutatni, rendszerezni és be lehet mutatni, hogy ezek a logikai műveletek elegendőek a kétváltozós műveletek leírásához. Az összefoglalás, ismétlés alkalmával algebrai műveletek hasonlóságát és különbségét is érdemes lehet összevetni, ami érthetővé teszi a művelet absztrakt fogalmát. A valószínűségszámítás esetében geometriai és diszkrét valószínűséget már kell számolniuk a tanulóknak így akár szakkörön, fakultáción az összeofoglalás alkalmával a valószínűségi logikáról és más logikai rendszerekről is lehetőség nyílik beszélni, összehasonlíva, hogy az euklidési geometria mellett, gömbi és hyperbólikus geometriai modellek is léteznek.

A SZAKKÖRI/KIEGÉSZÍTŐ FOGLALKOZÁSOK

1. foglalkozás: Rejtvény-típusú feladatok

1. Egy furcsa szigeten vagyunk: olyan emberek laknak itt, akik vagy mindig igazat mondanak vagy mindig hazudnak.Hét szigetlakóval ülünk egy szobában. Mindegyiküknek feltettük a kérdést: Hány igazmondó van köztetek ? A válaszok a következők voltak:

1K.özöttünk legfeljebb 1 igazmondó van.
2.Közöttünk legfeljebb 2 igazmondó van.
3.Közöttünk legfeljebb 3 igazmondó van.
4.Közöttünk legfeljebb 4 igazmondó van.
5 Közöttünk legfeljebb 5 igazmondó van.
6.Közöttünk legfeljebb 6 igazmondó van.
7.Közöttünk legfeljebb 7 igazmondó van.

Megoldás:

Ha az utolsó állítástól kiindulva haladok fölfelé és felírom az állítások szerinti lehetséges igazmondók számát a következőt kapom:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 igazmondó van
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, igazmondó van
0, 1, 2, 3, 4, 5 igazmondó van
0, 1, 2, 3, 4, igazmondó van
0, 1, 2, 3, igazmondó van
0, 1, 2, igazmondó van
0, 1, igazmondó van

Az nem lehet, hogy az utolsó hazudjon mert ő felsorolja az összes lehetőséget és ezért szükségképpen igaz mondó kell legyen, ezért akinek az állításában szerepel, hogy 1 igazmondó van közöttük szintén igazmondó. A 6.szigetlakó nem hazudhat, mert ha hazudna, akkor azt azt jelentené, hogy 7 vagy több igazmondó lenne, de akkor ő is igazmondó kellene legyen, ami ellentmondás, mert épp most hazudott.Tegyük fel tehát, hogy ő is igazat mond. Akkor már legalább 2 igazmondónk van. Ebből viszont következik, hogy az első hazudott. Ezt a gondolatmenetet alkalmazva elölről indulva hazugnak minősülnek az emberek, az utolsótól előrefelé haladva igaz embereknek minősülnek. Az eljárás befejeződik mert véges sok ember van: Az 1., 2., 3. szigetlakó hazug, a 4., 5., 6., 7. pedig igazmondó

2. Egy furcsa szigeten vagyunk: olyan emberek laknak itt, akik vagy mindig igazat mondanak vagy mindig hazudnak.Hét szigetlakóval ülünk egy szobában. Mindegyiküknek feltettük a kérdést: Hány igazmondó van köztetek ? A válaszok a következők voltak:

1K.özöttünk pontosan 1 igazmondó van.
2.Közöttünk pontosan 2 igazmondó van.
3.Közöttünk pontosan 3 igazmondó van.
4.Közöttünk pontosan 4 igazmondó van.
5 Közöttünk pontosan 5 igazmondó van.
6.Közöttünk pontosan 6 igazmondó van.

7.Közöttünk pontosan 7 igazmondó van.[3]

Megoldás:

Tegyük fel, hogy a hét közül olyan aki azt állítja, hogy több igazmondó is van, tehát hogy hogy ponosan i igazmondó van, ahol $2 \le i \le 7$ és i egész, és feltesszük róla hogy igazat mond. Akkor az azt jelentené, hogy van egy másik aki másik számot mond az igazmondók létszámára és annak is igaza lenne, ami ellentmondás. Így, aki több emberről is állítja, hogy igazat mond hazudik. Csak az nem hazudik esteleg, aki azt mondja, hogy 1 igazmondó van közöttük. De még ő is hazudhat.

3. Mit tudunk állítani a következő állítás igazságtartalmáról ?

Ez a mondat hamis.

Megoldás: Ha felteszem hogy igaz a mondat, akkor a tartalma miatt ellentmond a feltevésemnek, Ha viszont hamis, ugyanezt mondhatom el róla.

Ezek a feladatok szórakoztatók. Azonban meg kell beszélnünk a tanulókkal, hogy ezentúl olyan mondatokkal, amelyek közveltenül (3. feladat) vagy közvetve (1. és 2. feladat) utalnak a saját igazságtartalmukra többet nem foglalkozunk, hanem meghagyjuk a rejtvényoldogatást kedvelőknek.

2. Foglakozás: ÉS és a VAGY művelet

1. feladat.

   Egy gyilkossággal kapcsolatban azt állítja a szomszéd, hogy az áldozat otthon volt vagy szólt a rádiója. [4]

Melyik tényállás esetén hamis az állítása a szomszédnak ?

A) Szólt a rádió, de nem volt otthon az áldozat.

B) Sem a rádió nem szólt, sem az áldozat nem volt otthon.

C) Az áldozat otthon volt, de nem szólt a rádiója

D) Az áldozat otthon volt és a rádiója is szólt

2. Jelölje *A* azt a tényt, hogy az áldozat otthon volt, és *R* azt, hogy szólt a rádiója. Készítsünk táblázatot úgy, *A* és *R* igazságának függvényében lássuk, hogy igaz vagy hamis lesz-e a szomszéd állítása !

Az alábbi táblázatok szerepelnek a feladatban, a döltbetűs rész a megoldás. [5]

		A	
		i	h
R	i	*i*	*i*
	h	*i*	*h*

A	R	Szomszéd

[3] Az elsőg két feladat Gerőcs-Orosz-Paróczay-Szászné. Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest könyvéből való

[4] A mondat Varga Tamás: Matematikai logika kezdőknek I. 25.o. –ról való

[5] A megoldás kétfélesége szintén a Varga T. Matematikai logika kezdőknek I. 105.o. könyv igazságtáblázat ábrázolási javaslatát is követi.

i	i	*i*
h	i	*i*
i	h	*i*
h	h	*h*

3. Milyen értéktáblázattal tudnánk leírni az alábbi kijelentést. *Az ember vagy eszik, vagy olvas*. Jelentse a *E* a eszik, *O* az olvas állítást. Írjuk fel táblázatba a mondat igazságértékét !

E	*O*	igaz-e a mondat ?
i	i	*h*
h	i	*i*
i	h	*i*
h	h	*i*

kizáró vagy

4. Milyen értéktáblázattal tudnánk leírni az alábbi kijelentést. Az apuka következőt mondja Ubulnak: *most vagy elmegyünk, vagy maradunk.* Jelentse a *E* a elmegyünk, *M* az maradunk állítástst. Írjuk fel táblázatba a mondat igazságértékét !

E	*M*	igaz-e a mondat ?
i	i	*h*
h	i	*i*
i	h	*i*
h	h	*h*

(szimmetrikus differencia)

VAGY-VAGY		E	
		i	h
M	i	*h*	*i*
	h	*i*	*h*

5. Döntsük el az alábbi álítások közül, hogy milyen értelemben használjuk a vagy szót !

A) Most itthonmaradunk vagy elmegyünk kirándulni. (szimmetrikus differencia, de megengedő is lehet. Nem kirándulni megyünk, hanem moziba)

B) Hó vagy eső hullott az égből. (*megengedő, de kizáró is lehet*)

C) Kati vagy Peti is elmehettek az osztálytalálkozóra. (*megengedő*)

D) Holnap el kell menni a találkozóra. Gyalog vagy autóval megyek (*szimmetrikus diff.)*

Ezek a feladatok a következők miatt fontosak. Egyfelől segítenek megérteni, hogy hogyan alakult ki a vagy értéktáblázata a használt nyelvből. Segít a táblázat kitöltése révén tudatosítnai, hogy a a vagy művelet az 1. feladat esetében csak akkor ad hamis eredményt, ha mindkét változó hamis. A Varga T. féle négyzetes felírás, amelyben a vízszintes soron az A állítás lehetséges értékeit, a függőleges pedig a R állítás lehetséges értékeit sorolja fel és a négyzeten belülre a művelet eredményét várja, a valós számok körében végzett műveleti táblázatokra hasonlít. Ennek megvan az az előnye, hogy vizsgálódásra indíthat: valamilyen kapcsolat létezhet a számok bizonyos művelete és a logikai műveletek között. [6] Ugyanis, veszük akármilyen számrendszeren vett összeadástáblát, rögtön észrevehetjük, hogy a főtengelyre tükrösek. Például legnagyobb hasonlóságra akkor döbbenhetnek rá a tanulók, hogy ha a 2-es számrendszerbeli összeadástáblát veszik:

+	1	0
1	0	1
0	1	0

Az összeadás ráadásul kommutatív, és ez remekül olvasható az ilyen négyzetes elrendezésű kétváltozós műveletek esetében, hiszen a bal felső sarokból jobb alsóba húzott átlóra az elemek szimmetrikusak. Az osszadás táblája leginkább a szimmetrikus differencia négyzetes művelettáblájához hasonlítható, ha i=0 és h=0 azonosítást megtesszük. A 3. és 4. feladatot érdemes csoportmunkára kiadni és végignézni, hogy ki milyen megoldásra jutott. Valamiféle vita is várható, ami természetes is. A 3. feladatban elképzelhető, hogy az ember nem olvas és nem eszik, viszont nehezebb elgondolni, hogy mi van akkor, ha nem megyünk el és nem is maradunk. Lehetetlennek érezzük. Itt zavaró lehet a nyelvben a szó azonossága, de a művelet más. Nagyon fontos itt hangsúlyozni, hogy a matematikában igyekszünk egyértelműsíteni a szavakat. Az is rögzíteni kell a tanulók emlékezetében, hogy ez egy másik művelet, az értéktáblázata is más. ezért érdemes végiggondolni, hogy megengedő vagy kizáró vagy értelemben használjuk-e a nyelvben a vagy szót. (persze a nyelv is másképpen használja, mert a kizáró vagynál a nyelv is kétszer haszánálja a vagy szót.)

Pistike a következőt mondja: Tegnap bicikliztem és fagyit ettem Melyik tényállás esetén hazudott Pistike ?

A) Tegnap csak fagyizott, de nem biciklizett
B) Tegnap fagyizott és biciklizett.

[6] Varga Matmatikai logika kezdőknek I. 49-73.o.

C) Tegnap nem fagyizott és nem biciklizett.

D) Tegnap nem fagyizott, de biciklizett.

ÉS		A	
		i	h
B	i	*i*	*h*
	h	*h*	*h*

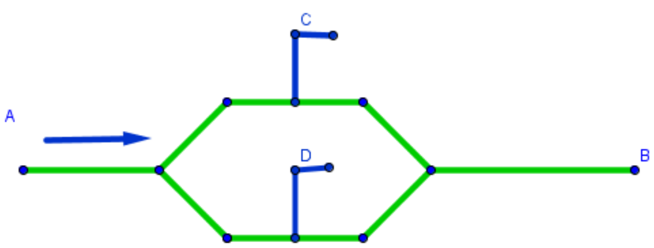
A	B	Szomszéd
i	i	*i*
h	i	*h*
i	h	*h*
h	h	*h*

Itt is érdemes volt felírni a négyzetes elrendezést, mert jól látszik a változók felcserélhetősége a főátlóra merőlegesen szimmetrikus igazságtáblázatban. És egyúttal arra is rávilágítottunk a feladatban, hogy az ÉS művlet csak akkor lesz igaz, ha mindkét vátlozó igaz. Ezek után a konkrét esetek után érdemes a műveletet is definiálva általános alakban megadni az ÉS és a (megengedő) VAGY esetében is. Most is érdemes párhuzamot vonni a szorzótábla és különösen a 2-es számrendszerbeli szorzótábla és az ÉS művelet négyzetes táblázata között.

*	1	0
1	1	0
0	0	0

3. foglalkozás: Az ÉS és a (megengedő) VAGY művletek összkapcsolása

1. Tekintsük az alábbi ábrát !



1. Egy csővezeték egyszerűsített ábráját látjuk, a víz A pont felől B pont felé folyik. A C és D jelű alakzatok csapok, amelyekkel szabályozhatjuk, hogy folyjon a víz vagy ne folyjon. Készítsünk táblázatot ! 3 oszlop legyen az első és második oszlopban jelenítsük meg, hogy a rendre C és D csap milyen állásban

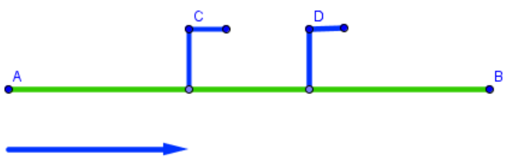
van. Ha nyitva van a csap jelöljük i-vel, ha csukva jelöljük h-val. A 3. oszlopban pedig tüntessül fel, hogy észlelünk e vízfolyást B pontban: ha igen jelöljük a táblázatban i-vel, ha nem jelöljük h-val. Melyik logikai függvény értéktáblázatára ismerünk rá ?

Megoldás:

C	D	folyik-e B-nél
i	i	*i*
h	i	*i*
i	h	*i*
h	h	*h*

megengedő vagy

2. Tekintsük az alábbi ábrát !

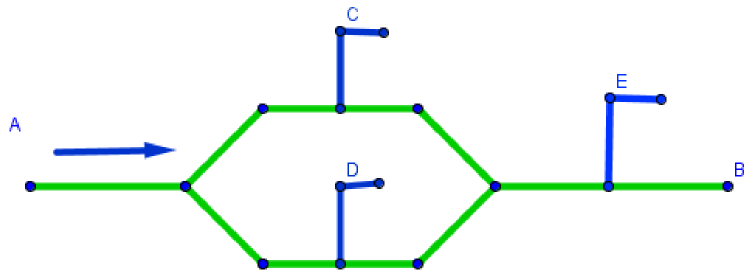


A feladat ugyanaz mint az előző esetben.

C	D	folyik-e B-nél
i	i	*i*
h	i	*h*
i	h	*h*
h	h	*h*

ÉS művelet

3. Tekintsük az alábbi ábrát !

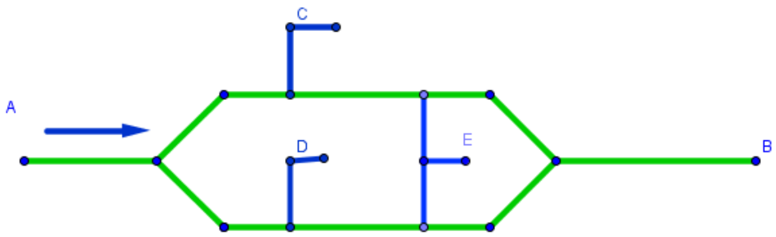


A feladat ugyanaz, mint az előbbi esetben azzal megtoldva, hogy itt E is egy csapot jelöl. És még az is feladat, hogy le kéne írni az előbbiek alapján, hogy vajon milyen logikai függvénynek felel meg az ábra. Mielőtt felírnánk a változók összes lehetséges állását, próbáljuk meg kiszámolni, hogy vajon hány sora lesz a táblázatnak ? Figyeljük meg, hogy melyik esetekben fog folyni a csap B-nél !

Megoldás:

C	D	E	folyik-e B-nél azaz $(C \vee D) \wedge E$
i	i	i	*i*
h	i	i	*i*
i	h	i	*i*
h	h	i	*h*
i	i	h	*h*
h	i	h	*h*
i	h	h	*h*
h	h	h	*h*

Tekintsük az alábbi ábrát !

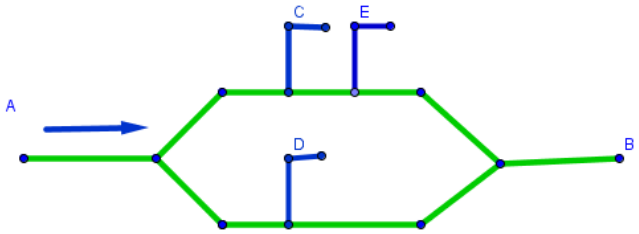


A feladat szövege teljesen ugyanaz mint, előbb azzal a hozzátevéssel, hogy E egy olyan csaprendszert jelöl most az ábrán, ami egyszerre zárja el a felső és az alsó ágat. Írjuk fel logikai függvények segítségével a fenti csaprendszert, felhasználva amit az 1. és 2. feladatban tapasztaltunk. Mit tapasztalunk, ha összehasonlítjuk az előző feladat táblázatával? Mi következik ebből a két feladat műveletei közötti viszonyra ?

C	D	E	$C \wedge E$	$D \wedge E$	$(C \wedge E) \vee (D \wedge E)$
i	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*
h	*i*	*i*	*h*	*i*	*i*
i	*h*	*i*	*i*	*h*	*i*
h	*h*	*i*	*h*	*h*	*h*
i	*i*	*h*	*h*	*h*	*h*
h	*i*	*h*	*h*	*h*	*h*
i	*h*	*h*	*h*	*h*	*h*
h	*h*	*h*	*h*	*h*	*h*

A két táblázat eredménye megegyezik. Érdemes felhívni itt a tanulók figyelmét arra, hogy amint a valós függvények esetében két függvényt azonosnak tekintünk, ha minden értelmezett helyén ugyanazt az értéket adja egyik és a másik függvény is ugyanazt az értéket veszi fel, ugyanúgy itt is azonosnak fogunk tekinteni két műveletet, ha azok ugyanazt az értéktáblázatot adják ugyanazokra az értékekre.

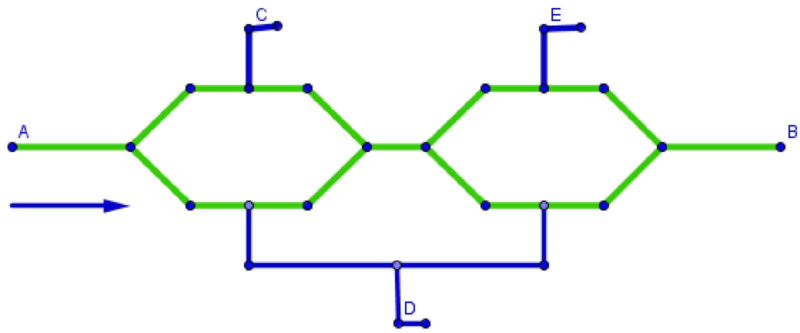
4. Tekintsük az alábbi ábtát !



az 1. és 2. feladat alapján megismert leírás alapján a 3. feladatban megfogalmozott utasítás szerint próbáljuk megoldani a feladatot !

C	D	E	$C \wedge E$	folyik-e B-nél azaz $(C \wedge E) \vee D$
i	i	i	*i*	*i*
h	i	i	*h*	*i*
i	h	i	*i*	*i*
h	h	i	*h*	*h*
i	i	h	*h*	*i*
h	i	h	*h*	*i*
i	h	h	*h*	*h*
h	h	h	*h*	*h*

5. Tekintsük az alábbi ábrát !



A feladat ugyanaz mint előbb ! Keressünk olyan logikai műveletet, ami leírja, hogy mikor folyik a csőrendszer B pontjáig el a víz az előbbi jelölésekkel ! Itt D egy olyan csap, ami a csőrendszer két pontját is zárja egyszerre az ábrán látható módon. Vessük össze a táblázatot az előző feladat táblázatával ! Mit tapasztalunk ?[7]

C	D	E	$C \vee D$	$E \vee D$	folyik-e B-nél azaz $(C \vee D) \wedge (E \vee D)$
i	i	i	*i*	*i*	*i*
h	i	i	*i*	*i*	*i*

[7] Hortobágyi-Marosvári-Pálmay-Pósfai- Siposs-Vancsó: Egységes érettségi feladatgyűjtemény Matematika 1. logika fejezete alapján készült a fejezet első 5 feladata

i	h	i	*i*	*i*	*i*
h	h	i	*h*	*i*	*h*
i	i	h	*i*	*i*	*i*
h	i	h	*i*	*i*	*i*
i	h	h	*i*	*h*	*h*
h	h	h	*h*	*h*	*h*

Az értékek ugyanazok lettek mint az előbbi igazságtáblázatban. A 3. és 4. valamint az 5. és 6. feladat tanulságait a következő azonosságok fejezik ki tehát :

$(C \wedge E) \vee (D \wedge E) = (C \vee D) \wedge E$ és $(C \vee D) \wedge (E \vee D) = (C \wedge E) \vee D$

6. Milyen algebrai tuljadonságra emlékeztet az előző feladat azonossága, a $(C \wedge E) \vee (D \wedge E) = (C \vee D) \wedge E$?(Azonosítsuk a $\vee$ műveletet az összeadással és a $\wedge$ jelet az szorzással ! Ha ezzel az azonosítással átírjuk a $(C \vee D) \wedge (E \vee D) = (C \wedge E) \vee D$ logikai azonosságot, akkor is igaz lesz-e az algebrai azonosság ?)

Megoldás Az első esetben $ce + de = (c + d)e$ ez az algebrai disztributivitás, de a második állítás már nem teljesül: $(c + d)(e + d) = ce + d$ általában nem igaz. Pl. vegyük $c = d = e = 1$ esetét ! Ekkor a bal oldal 4 a jobboldal 2 és az nem áll meg. [8] Ez mutatja, hogy nem szabad rögtön egy kezdetleges hasonlóságból további következtetéseket levonni.

7. András ezt mondja: Én moziba megyek, és úszom vagy biciklizek. Béla pedig a következőt mondja: Moziba megyek és úszom, vagy biciklizek. Ugyanazt mondják-e?[9]

Megoldás: Legyen U = úszok, M = moziba megyek, B = biciklizek állításokkal. Ebben az esetben logikai műveltek segítségével András azt állítja, hogy $M \wedge (U \vee B)$, Béla pedig ezt: $(M \wedge U) \vee B$. Az előbbi azonosságok miatt nyilván nem lesz azonos a két állítás.

<u>4. Foglalkozás: Negáció</u>

1. Bevezető feladat: Mi annak az állításnak az ellentéte, hogy *Ez a zsebkendő fehér ?* És mi a tagadása ugyanennek az állításnak ?

Megoldás: Az ellentét az, hogy *Ez a zsebkendő fekete* a tagadása pedig: *Ez a zsebkendő nem fehér*. Ennek a feladatnak a megvitatása arra szolgál, hogy tisztázzuk mit jelent pontosan nyelvileg az ellentét és a tagadás közötti különbség. A nem fehér

[8] Varga Tamás Matematikai logika kezdőknek I: 49-70 o.
[9] Kosztolányi-Kovács-Pintér-Urbán-Vince: Sokszínű matematika, 12, 19.o.

állításból nyilván nem következik az, hogy a zsebkendő fekete, mert lehet piros, kék és más színű is.

2. Tekintsük a kovetkező állításokat *A:* Ma meccset nézünk a tévében *B*: Ma nem nézünk meccset a tévében.. Készítsünk táblázatot, hogy igazak vagy hamisak voltak-e az állítások annak tükrében hogy megtörtént, hogy a) elmentünk focimeccset nézni, b) nem mentunk el focimeccset nézni. Mi a nyelvi különbség a két állítás között és hogyan befolyásolja ez az igazságtáblázatot ?

Megoldás:

Tény, hogy elmentünk foccimeccset nézni	*A* állítás igazsága	*B* állítás igazsága
i	*i*	*h*
h	*h*	*i*

A nyelvi különbség a nem szóban van. Matematikailag ez a két állítás összefügg, Tanuló észreveheti a táblázatból is: Pont ellentétes igazságértékeket kapunk. Bevezetjük a jelölést a diákoknak és az elnevezést is: negáció, jele: $\neg$

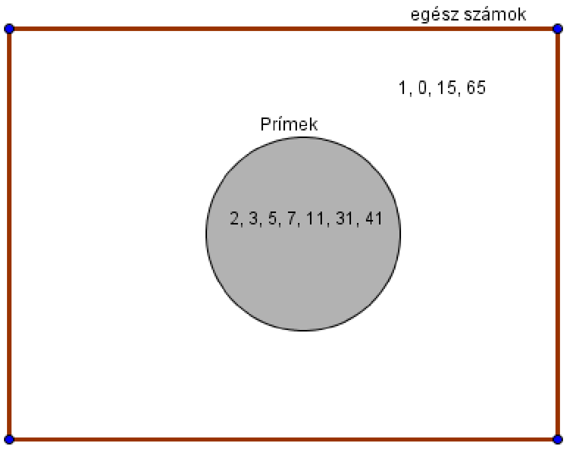
3. Tekintsuk a következő állításokat ! *A*: Ma nem nézünk focimeccset ! *B*: Nem igaz az, hogy ma nem nézünk focimeccset. Írjuk fel mindkét állítás igazságtartalmát annak függvényében, hogy tényleg elmentük focimeccset nézni vagy sem

A valóság az, hogy elmegyünk foccimeccset nézni	*A* állítás igazsága	*B* állítás igazsága
i	*h*	*i*
h	*i*	*h*

Itt látszik hogy a kétszeres negációnak ugyanolyan igazságértéke lesz mint a ma nézünk focimeccset állításnak. Másrészt nyilvánvaló hogy a negáció minde esetben ugyanazt teszi az igazságtáblázattal, az i –t h-ra cseréli fel és fordítva. Felírhatjuk a tanulóknak a logikai azonosságot: $A = \neg(\neg A)$

4. Ábrázoljuk Wenn-diagrammal, hogy a prímszámok halmaza hogyan helyezkedik el az egész számok halmazában ! Ha tekintjük azt a *P(x)*: *x* prím állítást, akkor hol vannak azok az *x* elemek, amelyekre teljelsül, hogy $\neg P(x)$? Írjunk be néhány értéket ! Milyen halmazrelációt ismerünk fel $\neg P(x)$ és $P(x)$ igazsághalmaza között ?

Megoldás: A fehéren hagyon részen levő *x* számokra teljesül, hogy $\neg P(x)$.



Az ábrán jól sejthető, hogy hasonlóság van a komplementerhalmaz képzése és az állítás negációjának igazsághalmaza között.

5. Írjuk fel logikai műveletek segítségével az alábbi állításokat, ha *F*: a bajnokságot idén a a Falábúak nyerték, *K*: a bajnokságot idén a Kurtalábúak nyerték ! Készítsünk igazságtáblázatot is az alábbi kijelentésekhez, és nézzük meg melyik műveleteknek lesz azonos az eredménye azonos változók esetén !

a) Nem igaz, hogy a Falábúak vagy a Kurtalábúak nyertek

b) Sem a Falábúak, sem a Kurtalábúak nem nyertek.

c) A Falábúak és a Kurtalábúak nem kapták meg egyszerre holtversenyben az első helyet.

d) A Falábúak és a Kurtalábúak közül az egyik biztos nem nyert. [10]

Megoldás: a) $\neg(F \vee K)$

F	K	$(F \vee K)$	$\neg(F \vee K)$
i	i	i	h
h	i	i	h
i	h	i	h
h	h	h	i

b) $\neg F \wedge \neg K$

F	K	$\neg F$	$\neg K$	$\neg F \wedge \neg K$
i	i	h	h	h
h	i	i	h	h
i	h	h	i	h
h	h	i	i	i

c) $\neg(F \wedge K)$

F	K	$(F \wedge K)$	$\neg(F \wedge K)$
i	i	i	h
h	i	h	i

[10] Kosztolányi-Kovács-Pintér-Urbán-Vince: Sokszínű matematika, 12, 18.o.

i	*h*	*h*	*i*
h	*h*	*h*	*i*

d) $\neg F \vee \neg K$

F	K	$\neg F$	$\neg K$	$\neg F \vee \neg K$
i	*i*	*h*	*h*	*h*
h	*i*	*i*	*h*	*i*
i	*h*	*h*	*i*	*i*
h	*h*	*i*	*i*	*i*

Az igazságtáblázatok alapján látszik hogy a) és b) feladatok, valamint c) és d) feladatok logikai művelete ugyanazt az igazságtáblázatot szolgáltatták. Ezért Felírattatjuk a diákokkal az ún. de Morgan azonosságokat : $\neg(F \vee K) = \neg F \wedge \neg K$ és $\neg(F \wedge K) = \neg F \vee \neg K$

6. Tekintsük az alábbi ábrát ![11]

Adjuk meg hogy milyen logikai műveltet szemléltet a fenti gátas feladat ! Itt most az előző foglalkozáson szereplő feladatbeli csapok szerepét gátak veszik át. A víz a bal felső sarokban levő tározóból folyik a bal alsó területen fekvő barna színű, szántóterületre. Számítsuk ki mielőtt felírnánk, hogy hány sora lenne a táblázatunknak ! Megéri-e felírni a táblázatot ? Segítség: csak azokat eseteket próbáljuk meg leírni, amikor lefolyik a víz és az egyes tagokat próbáljuk meg a diszjunkció művelettel összekapcsolni ! Alma, Banán, Citrom, Dió, Eper gátelnevezések helyett írjuk a gátak kezdőbetűit: *A, B, C, D, E* és most ha nyitva van a gát, i értéket adunk a gátnak, ellenkező esetben h értéket.

[11] A Bontovics Ignác honlapján megtalálhatjuk a játékprogramot is, interaktív tábla, projektor esetén végig is lehet próbálni néhány lehetőséget: http://bontovics.hu/index.php?option=com_content&view=article&id=57&Itemid=30, illetve még néhány más progtamozási feladat: http://bontovics.hu/index.php?option=com_content&view=article&id=55&Itemid=30,

Megoldás: A csapoknál megismert módszer alapján ez a $((A \vee B) \wedge E) \vee (C \wedge D)$ logikai értékkel egyenlő. Az 5 logikai változó összes lehetősége 2^5 sort eredményezne a táblázatban és öt darab műveletet kellene utána elvégezni, elég izzasztó feladat lenne. viszont következtetésekkel, szemléltetéssel a következőkre jutunk. A feladat utasítása szerint nézzük meg mikor lesz a $((A \vee B) \wedge E) \vee (C \wedge D)$ logikai művelet igaz, milyen változók mellett ! A legutolsó művelet egy diszjunkció, tehát akkor lesz igaz, ha valamelyik tagja $((A \vee B) \wedge E)$ vagy $(C \wedge D)$ igaz. Az utóbbi tagról könnyű látni, hogy mikor igaz: akkor, ha C és D is egyszerre igaz. Az első tagban pedig a legutolsó művelet szintén egy konjunkció, ezért az is csak akkor lesz igaz, ha $A \vee B$ is és E is igaz egyszerre. Ezért a következő táblázatban soronként leírjuk, hogy milyen esetekben lesz igaz a fenti logikai művelet.

	A	B	E	C	D
1	i	h	i	h	h
2	i	h	i	h	i
3	i	h	i	i	h
4	h	i	i	h	h
5	h	i	i	h	i
6	h	i	i	i	h
7	i	i	i	h	h
8	i	i	i	h	i
9	i	i	i	i	h
10	h	h	h	i	i
11	i	h	h	i	i
12	h	i	h	i	i
13	i	i	h	i	i
14	h	h	i	i	i
15	i	i	i	i	i
16	i	h	i	i	i
17	h	i	i	i	i

Így nem kell 32 sort leírni. A táblázatot úgy építtetük fel, hogy az első egységben megnéztem mikor lesz igaz az első tag a legutolsó diszjunkcióban és mikor hamis a második. Ennek a vizsgálata a második szürke sor végéig tart. utána felírom ,hogy mikor lesz igaz a második tag az utolsó diszjunkcióban és igaz a első tag. Ez a harmadik szürke sor végéig tart. És végül felirom az utolsó fehér sávban, hogy mikor lesz az utolsó diszjunkció mindkét tagja igaz.

7. Az előző feladatban hogy tudnánk megállapítani, hogy mi a logikai függvény, ha csak azt a táblázatot ismernénk a logikai függvényből, ami csak az igaz eseteket

tartalmazza ? Magyarán mi történne, ha táblázat alapján kellene megalkotnunk a függvényt és nem lenne hozzá szemléltetésünk ?

Megoldás: A táblázat alapján azt tudjuk mondani, hogy akkor lesz igaz ez a függvény, amit nem ismerünk, ha a táblázat első sora alapján $A=i$ és $B=h$ és $E=i$ és $C=h$ és $D=h$ vagy ha a táblázat második sora alapján...s.í.t. De azt is írhatnánk, hogy ha a táblázat első sora alapján $A=i$ és $\neg B=i$ és $E=i$ és $\neg C=i$ és $\neg D=i$ vagy ha a táblázat második sora alapján...s.í.t Tehát a hamis változók helyett a változók negáltjait vennénk. Miért volt ez jó ? Vegyük észre, ha kicserélgetem a negált változókra a táblázat minden sorát és felírom a mondatot, akkor kapok egy olyan mondatot, amiben logikai függvényeknek megfelelő szavak szerepelnek és csak akkor lesz igaz, amikor a fenti táblázat és minden más esetben hamis lesz. Egyszerűen tehát fel kell írni ezt a mondatot a logikai változókkal:

$$
\begin{aligned}
&(A \wedge \neg B \wedge E \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (A \wedge \neg B \wedge E \wedge \neg C \wedge D) \vee (A \wedge \neg B \wedge E \wedge C \wedge \neg D) \vee \\
&(\neg A \wedge B \wedge E \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge B \wedge E \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge B \wedge E \wedge C \wedge \neg D) \vee \\
&(A \wedge B \wedge E \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (A \wedge B \wedge E \wedge \neg C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge E \wedge C \wedge \neg D) \vee \\
&(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg E \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg E \wedge C \wedge D) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg E \wedge C \wedge D) \vee \\
&(A \wedge B \wedge \neg E \wedge C \wedge D) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge E \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge E \wedge C \wedge D) \vee \\
&(A \wedge \neg B \wedge E \wedge C \wedge D) \vee (\neg A \wedge B \wedge E \wedge C \wedge D)
\end{aligned}
$$

8. Egy vonatkocsi fülkéjében 3 ember alszik. Olyan kapcsolórendszert szeretnénk kiépíteni, amelyik minden utazó külön-külön egy gomb bekapcsolásával ’szavazhat’ arról hogy égjen-e a hálókocsiban a villany. Azt szeretnénk, hogy csak akkor gyulladjon fel a lámpa, ha legalább ketten szavaznak arra hogy égjen a villany. Hogyan tudnánk ehhez kapcsolási rajzot tervezni.

Megoldás: a feladat teljesen hasonlít a vízvetékes példához, csak most itt a logikai változókat nem gátak, hanem kapcsolók jelentik és a víz helyett áram folyik a vezetékben. Ha a végére eljut az áram, akkor a körte felizzik. Legyen *A, B, C* az egyes utasoknál levő kapcsoló állása. Legyen a jele i, ha be van kapcsolva, ha szavazott az utas és legyen h az értéke, ha nem szavazott, ha nem kapcsolta fel a villanyt. Írjuk fel azokat az értékeket, amikor azt szeretnénk, hogy a körténél folyjon az áram, azaz a körtéhez eljut az áram. A körte felizzását fogjuk tehát i-nak tekineteni.

	A	B	C	A keresett formula értéke (felizzott a körte)
1	i	i	i	i
2	h	i	i	i
3	i	h	i	i
4	h	h	i	h
5	i	i	h	i
6	h	i	h	h

7	i	h	h	h
8	h	h	h	h

Az egyes sorokhoz keressünk megfelelő logikai függvényt ! Az első sor azt mondja, hogy ha A=i és B=i és C=i, akkor izzon fel a körte. A második sor azt fogalmazza meg, hogy ha A=h B=i C=i, akkor izzon fel a körte ...s.í.t. És ráadásul nekünk csak azok az esetek fontosak, amelyekben i a művelet értéke.

$A \wedge B \wedge C$

$\neg A \wedge B \wedge C$

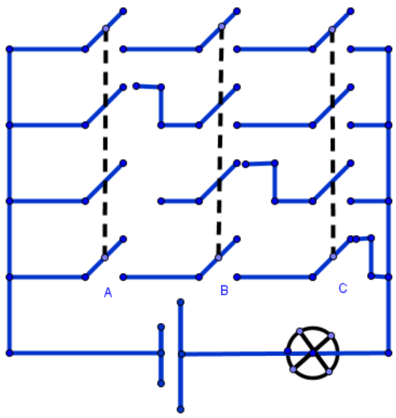
$A \wedge \neg B \wedge C$

$A \wedge B \wedge \neg C$

Ha vagy az 1, vagy a 2, vagy a 3. vagy a 5. sorhoz tartozó formula értéke igaz, akkor igaz a függvény, más esetben hamis legyen. Ezt a műveltet a diszjunkció teljesíti, tehát a fenti négy formulát diszjunkcióvla kell kapcsolni. Tehát:

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$$

Ennek megfelelő kapcsolási rajz a következő:



Ahol negálva van az A ott abban a sorban vezet a kapcsoló, ha nyitott állapotban van, ahogy az ábrán is látszik. A szaggatott vonalak pedig azt jelzik, hogy az egymás alatti kapcsolók egyszerre vannak nyitva illetve csukva. [12]

Ezzel sikerült középiskolai alkalmazásban bemutatni, hogy a logika alkalmazott tudomány is egyben, márészt pedig sikerült bemutatni, hogy hogyan lehet logikai igazságtáblázathoz logikai műveletekkel felírni. Rávezettük a diákokat a teljes diszjunktív normálformára.

[12] Varga Tamás Matematikai logika kezdőknek I: 138 o. feladata

Eddig elemi állításokat vizsgáltunk. Most próbáljuk meg az elemi állításainkat kicsit finomabban leírni ! Pl. a következő állítás *Minden szám osztható 2-vel.* Tudjuk, hogy nem igaz. Megértetjük a tanulókkal, hogy a matematikában, mivel ez később fontos lesz, bevezetjük a következő jelöléseket $\forall$: minden, és a $\exists$ létezik jelet.Megbeszélem a diákokkal, hogy ezek után általában valamilyen tulajdonságot szoktunk írni, ami úgy viselkedik mint egy függvény: Hogy igaz vagy hamis lesz, attól függ, hogy milyen változót írok be a helyébe. Pl. *Minden szám osztható 2-vel.* a következő képpen rövidíthetem. Legyen a változó *x* és az hogy egy szám osztható kettővel jelöljük most úgy, hogy *K(x),* ami, mint valami függvény attól függően lesz igaz vagy hamis, hogy mit írunk *x* helyébe. Pl *K(2)=i* mert 2 osztható 2-vel, de *K(5)=*h, mert 5 nem osztható 2-vel. Tehát a *Minden szám osztható 2-vel* a következő képpen néz ki $\forall x : K(x)$, ahol a kettőspontot úgy olvasom, hogy *–re/-ra teljesül az, hogy...*

9. Írjuk fel az alábbi állításokat !

a) Minden bogár tud repülni. (repülni tud := *R(x)*)
b) Van olyan bogár, ami világít (világít := *V(x)*)
c) Minden megyének van székvárosa(itt jelentse a *M* a megyék halmazát, és *S* a városok halmazát és *yVx* tulajdonság jeltentse azt, hogy *y* város székvárosa *x*-nek)
d) Minden megyében van olyan város, amiben minden lakos zöldfülű.(itt jelentse a *M* a megyék halmazát, és *S* a székváros halmazát és *yVx* tulajdonság jeltentse azt, hogy *y* város városa *x*-nek, a zLy pedig jelentse azt, hogy *z* lakosa *y*-nak és *Z(x)* pedig jelentse azt, hogy zöldfülű)

Megoldás:

a) $\forall x : R(x)$
b) $\exists x : V(x)$
c) $\forall x \exists y : (x \in M) \wedge (y \in S) \wedge (yVx)$
d) $\forall x \exists y \forall z : (x \in M) \wedge (y \in S) \wedge (yVx) \wedge (zLy) \wedge (Z(z))$

10. Írjuk le a 9. feladat mondatainak tagadását szavakkal, kétféleképpen, úgy, hogy máshova helyezzük a mondatban a nem szót és közben megváltoztatjuk a minden és vagy szavakat, de a tagadott mondat értelme ugyanaz maradjon!

Megoldás: a) Nem minden bogár tud repülni. / Van olyan bogár, amelyik nem tud repülni.

b) Nincs olyan bogár, ami világít. / Minden bogár olyan, hogy nem világít.

c) Nem minden megyének van székvárosa. / Van olyan megye, aminek minden városával az a helyzet, hogy nem székváros.

d) Nem minden megyében van olyan város, aminek minden lakosa zöldfülű./ Van egy olyan megye, aminek minden városában igaz az, hogy lakik benne egy nem zöldfülű ember.[13]

11. Írjuk le az előbbi mondatokat a most tanult jelölésekkel !
Megoldás_
a) $\neg \forall x : R(x) / \exists x : \neg R(x)$
b) $\neg \exists x : V(x) / \forall x : \neg V(x)$
c) $\neg \forall x \exists y : (x \in M) \wedge (y \in S) \wedge (yVx) / \exists x \forall y : (x \in M) \wedge (y \in S) \wedge [\neg (yVx)]$
d) $\neg \forall x \exists y \forall z : (x \in M) \wedge (y \in S) \wedge (yVx) \wedge (zLy) \wedge (Z(z)) /$
$\exists x \forall y \exists z : (x \in M) \wedge (y \in S) \wedge (yVx) \wedge (zLy) \wedge (\neg Z(z))$

Ezzel tulajdonképpen begyakoroltattuk a tanulókkal a kvantorokkal történő pontos tagadást. Azt is érdemes megmutatni, hogy a kvantorok nem megfordítása esetén nem lesz pontos a tagadás. Pl. a c) feladatban, ha azt mondjuk, hogy van egy megye, ahol van egy város, ami nem székváros, nem lesz jó, mert általában minden megyében elég sok város van, ami nem székváros.

5. foglalokozás: az implikáció

1. Az ügyészségen az egyik tanú következőt állítja: *Ha az áldozat otthon volt péntek este, akkor szólt a rádiója.* Vizsgáljuk meg, hogy különboző tényállás esetén mikor marasztalhatja el őt a bíróság félrevezetés miatt. Jelöljük azt az állítást, hogy az áldozat otthon volt *A*-val, a szólt a rádió állítást *B*-vel ! Készítsünk táblázatot, *A* és *B* lehetséges értékeivel, a harmadik oszlopban pedig tuntessük fel azt, hogy a tanu igaznak bizonyult-e.

Megoldás: Ha otthon volt az áldozat és szólt a rádió, akkor a tanu megállapítása helyes. Ha nem volt otthon az áldozat és mégis szólt a rádió, az azért is lehetséges, mert valaki más, (akár a tettes is,) bekapcsolhatta a rádiót és az szólt. Tehát attól még a tanu nem hazudott. Ha az áldozat otthon volt és mégsem szólt a rádió, az összeférhetetlen a tanu állításával, mert az olyan mintha semmit sem állítana, mert egyszerre lenne igaz, hogy szól a rádió, meg nem is, ha otthon van az áldozat. Ilyenkor elmarasztaljuk a tanút, hogy félrebeszél, hazudik. Az utolsó esetben, amikor az áldozat nem volt otthon és nem szólt a rádiója, is igaznak érezzük a tanú állítását: ő csak arról az esetről beszélt, amikor otthon volt az áldozat, arról viszont

[13] Laczkovich M.-T. Soós Vera: Analízis I. Nemzeti Tankönyvkiadó, Logikai alapfogalmak fejezete alapján.

semmit sem állított, hogy mi van akkor, amikor az áldozat nincs otthon, tehát megint igaznak érezzük az állítást. Ezt táblázatba foglalva a következőket jelenti:

A	B	A tanu igaznak bizonyult
i	i	i
h	i	i
i	h	h
h	h	i

Itt érdemes a diákoknak elmondani, hogy a *ha* ...,*akkor* ....típusú állításokat ezentúl a következőképpen fogjuk jelölni, $A \to B$, ahol *A*-t az implikáció előtagjának nevezzük (ami nyelvileg a ha kötőszó után következik), *B*-t az implikáció utótagjának nevezzük(, ami nyelvileg az akkor utáni szó után következik).

2. Írjuk fel négyzetes elrendezésben is az imlikációt a változók lehetséges értékeinek megfelelően ! Igaz-e hogy ha $A \to B$, akkor $B \to A$ is igaz.?

Megoldás:

$A \to B$		B	
		i	h
A	i	*i*	*h*
	h	*i*	*i*

Mivel a négyzetes elrendezés nem tükrös a bal felső-jobb alsó főátlóra, ezért nem lesz igaz az állítás, vagyis, ha felcserélem a táblázat *A* és *B* elemét, akkor a hamis átkerül a szürkített táblázat bal alsó részébe, tehát nem lesz azonos a két művelet.

3. Írjuk fel egy olyan kétváltozós logikai műveletet, ami ugyanakkor lesz hamis, mint a fenti állítás ! (Segítőkérdés: melyik az eddig tanult logikai művelet, amelyik egy esetben ad két változó esetén hamis állítást?), Ha nem sikerül a feladat, tekintsd a következőt és térj vissza erre !

Megoldás: az egyetlen olyan kétváltozós logikai művelet, ami csak egy helyen adott hamis értéket, a diszjunkció volt. Most azt kellene elérni, hogy a diszjunkciónk csak akkor adjon hamis értéket, a mikor az *A* = *i* és a *B* = *h*. Az $A \vee B$ itt nem lesz jó még. Viszon, ha az *A* negálva lenne, akkor a diszjunkció a következő képpen néz ki : $\neg A \vee B$. Készítsük el ennek a logikai függvénynek is a művelettábláját és ellenőrizzük le, hogy ez tényleg azonos a fenti művelettáblával ! Azaz igaz, hogy $\neg A \vee B = A \to B$

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$
i	i	h	i
h	i	i	i
i	h	h	h
h	h	i	i

és innen világos, hogy a két művelet azonos.

4. Vizsgáljuk meg, hogy mi a különbség az alábbi két állítás között ![14]

   a) *Ha elmész, megharagszom*.

   b)*Nem mész el, vagy megharagszom*

   Írjuk fel mindkét állítást táblázattal ! *A* jelölje azt az állítást, hogy *elmész, B* jelölje azt, hogy *megharagszom*.

Megoldás: ugyanazokat a táblázatokat kapjuk eredményül, mint az előző feladatban.

5. Igazak-e a következő állítások ?

a) Ha egy szám osztható 6-tal, akkor osztható, hárommal.

b) Ha egy szám osztható 3-mal, akkor osztható 6-tal.

c) Ha $0^0 \le \alpha \le 360^0$ és $\alpha = 90^0$, akkor a $\cos\alpha = 0$

d) Ha $\cos\alpha = 0$ és $0^0 \le \alpha \le 360^0$, akkor $\alpha = 90^0$

e) Ha $0^0 \le \alpha \le 360^0$ és vagy $\alpha = 90^0$, vagy $\alpha = 270^0$, akkor a $\cos\alpha = 0$

f) Ha $\cos\alpha = 0$ és $0^0 \le \alpha \le 360^0$, akkor $\alpha = 90^0$vagy $\alpha = 270^0$

Megoldás: a) igen, mert tudjuk, hogy ha $6|a$ és $3|6$, abból következik, hogy $3|a$.

b) hamis, mert pl 9-re nem teljesül az állítás. c) igaz, ez a körábráról nyilvánvaló, hiszen a 90^0-kal forgatott egységvektor végpontjának első koordinátája 0. d) nem igaz, mert $\alpha = 270^0$ is teljesülhet. e) igaz, ez a körábráról nyilvánvaló, hiszen a 90^0-kal és a 270^0-kal forgatott egységvektor végpontjának is az első koordinátája 0. f) Ez most igaz, mert a forgatott egységvektor végpontjának az első koordinátája 0, ha vagy $\alpha = 270^0$ vagy $\alpha = 90^0$.

Ezek után tegyünk egy kis kitérőt ! Azt láttuk a foglalkozás 3. feladatában, hogy $\neg A \vee B = A \to B$ teljesül, azaz az implikációt fel lehet írni más műveletek segítségével, negációval és diszjunkcióval. Ugyanígy a de Morgan azonosságoknál láttuk, hogy a konjunkció műveletet is át lehetett alakítani diszjunkcióvá. Kérdés, hogy vajon minden logikai művletet ki lehet fejezni a másik két művelet segítségével ? Ennek érdekében most tegyünk a diákokkal egy rövid kitérőt két feladat erejéig !

6. Vegyünk egy sakktáblát ! Szokásos módon az oszlopok legyenek betűvel ellátva A-tól H-ig, a sorok 1-től 8-ig ! Egy bábuval A1 fekete négyzetből elindulva próbáljunk meg eljutni a H8 fekete pontig úgy, hogy a megengedett lépés mindig az, hogy a bábu egyet léphet a kiinduló négyzet egy olyan szomszédos

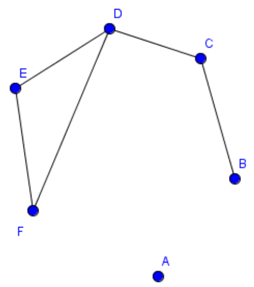
[14] A foglalkozás első 4 feladata Varga Tamás: Matematikai logika kezdőknek I. 37.o. feladataiból valók.

négyzetére, amelynek oldala közös a kiinduló négyzet oldalával. Eljut-e így a bábu a H8-ba, és úgy, hogy minden négyzetre pontosan egyszer lépek rá a bábuval ?[15]

Megoldás: Ha kipróbálok egy esetet nem jutok sikerre. Ez persze még nem jelenti azt, hogy nem jutnék sikerre más úton járva. Két lehetőségem van: vagy kipróbálom az összes lehetőséget, amire nincs időm, mert nagyon sok és átláthatatlan, vagy pedig megmondom, hogy miért nem lehetséges létrehoznom egy ilyen lépéssorozatot. Érdemes keresni valami tulajodonságot, ami minden lépést jellemez. A szokásos módon szinezett sakktáblán jól látszik, hogy minden lépésnél más színű négyzetre kerülök. Hány lépésből kell megoldani az egészet ? Az egész mező 64 kockás, de már egyen rajta állok, tehát a feltételek miatt 63 a szükséges lépésszám. Azonban, ha feketén állok, minden páratlan lépésem végpontja fehér négyzet, minden páros lépésem végpontja fekete négyzet. 63 lépéssel szükségképpen fehér végpontú, a H8 mező a szinezés miatt fekete, tehát nem fogok tudni rálépni.

7. Bizonyítsuk be, hogy hat tagú társaságban mindig van két olyan ember, akinek ugyanannyi az ismerőseinek száma ![16]

Itt indirekt okoskodást kell alkalmazni ! Honnan tudom, hogy nem lehetséges ez a lehetőség.? Próbáljuk meg, hátha lehetséges gyártani egy ilyen lehetőséget ! Ábrázoljuk az ismerősöket pontokkal és az ismertséget jelölje az, hogy őket összeköti egy folytonos vonal, és ha nem ismerik egymást, akkor ne kösse össze őket közvetlenül folytonos vonal.



Az előző ábrán egy próbálkozást láthatunk arra, hogy legyen ellenpéldánk. A pontból nem húzok vonolat, neki ne legyen ismerőse. B akkor legyen olyan, hogy neki eggyel több ismerőse legyen, mint A –nak, tehát őt összekötöm C-vel. C meg szintén olyan legyen, hogy neki még eggyel több ismerőse legyen, mint B-nek, ezért C-t még D-vel is összekötöm. D-vel ugyanígy járok el: neki már három ismerőse

[15] Kárteszi Ferenc: Fejezetek a geometriából, Bp, 1971

[16] Kosztolányi-Kovács-Pintér-Urbán-Vince: Sokszínű matematika, 10, 20. o.

legyen ! Persze arra figyelnem kell, hogy azokba a pontokba már ne húzzak pontot, amivel már foglalkoztam, mert akkor elrontom az élszámot. Az E pontnál sajnos megáll az eljárás, nincs annyi pont, hogy belőle négy vonalat indítsak, Ha így hagyom az ábrát baj van, mert B-nek, C-nek és F-nek is 2 ismerőse van. Ha folytatom az eljárást, baj lesz, mert A-hoz is kell húzzak egy vonalat, amivel meg az a baj, hogy elrontom azt, hogy neki egy sem volt, ráadásul így neki ugyanannyi ismerőse lett, mint B-nek....Végére jutok az eljárásnak ? Rossz volt a stratégia ? Lehet, ha más módszerrel közelítek sikerülne ? Kezd az a sejtés kialakulni, hogy igaz az állítás. Kell megint egy tulajdonságot találni, amire teljesül, az ismeretségre ,ismerősök darabszámára, és éppen emiatt nem sikerül különböző ismerőssel rendelkező, hattagú társaságot összeállítanom.
Azt tudjuk hogy minden vonalnak két végpontja van, azaz az ismeretség kölcsönös. Ha felírom minden ilyen ábrán a pontokhoz a ponthoz tartozó ismerősök számát (gráfok élszámát) akkor azt vehetem észre, hogy minden ismerettség behúzása 2-vel növeli az egyes pontokhoz felírt számok összegét. Ha még nem húztam ismerettséget jelentő vonalat, akkor a számok összege 0, minden behúzás 2-vel növel, tehát az összeg 2 többszöröse, azaz páros szám kell legyen. Az ábrán az is látszik, hogy egy pontból max. 5 másik ponthoz húzhatok vonalat. Ha ellenpéldát akarok a 6 ponthoz írt szám csak úgy lehet mind különböző, ha 0, 1, 2, 3, 4, 5 szám szerepel a pontok mellett. De akkor ezeknek a számoknak az összege páratlan, mert 0+1+2+3+4+5 = 15, tehát nem tudom megvalósítani az ellenpéldát, tehát igaz az állítás !

Ezekben a feladatot mindig úgy bizonyítottuk, hogy kerestük egy olyan tulajdonságot, ami a kívánt végeredmény esetén nem teljesül. Ezek alapján próbáljuk meg megoldani a következő feladatot !

8. Próbáljuk meg előállítani a $\wedge$ és $\vee$ műveletek segítségevel a negációt ! [17]

megoldás: Írassunk fel a tanulókkal néhány műveletnek az értéktáblázatát pl $A \vee B \wedge C$, $(A \wedge B) \vee C$ (Első látásra az is nehézséget okozhat, hogy kétváltozós műveletet, hogyan lehet egyváltozóssá tenni. Erre jó példa a $B \vee (A \wedge \neg A) = B$. Itt a függvény értéke teljesen független A értékeitől. Persze ebben van tagadás !) Ha ilyen műveleteket végzünk a táblázatok első sorában, ami az szokott lenni, hogy

[17] http://www.cs.elte.hu/~kope/oktatas/09tav/ma2.pdf, Komjáth Péter előadása alapján, a teljes rendszerek fejezetben

minden változó értéke i, ott a műveletek eredménye is i. Tehát a $\wedge$ és $\vee$ műveletek segítségével csak olyan állítást tudunk felírni, ami a csak igaz változó esetén igaz állítást eredményez. Viszont a negálás pont azt teszi, hogy i értékhez h értéket rendel hozzá.

6. Foglalkozás: Kitérő: implikáció és ekvivalenciával kapcsolatos paradoxonok a valószínűségszámírásból ismert pozitív befolyásolás tükrében

Az előző foglalkozás e) és f) feladataiban szerepelt egy olyan eset, amikor teljesült az is, hogy $A \to B$ és az is, hogy $B \to A$.

1. Tekintsük a következő állítást ! Ha nyár van, a Balaton-parton vagyok, de különben nem. Írjuk fel a mondat igazságtartalmát, ha *A* azt a kijelentést jelöli, hogy nyár van, a *B* pedig azt, hogy a Balaton-parton vagyok ! Írjuk fel a négyzétes táblázattal is !

Megoldás: Ha nyár van és kint vagyok a parton, akkor igazat mondtam. Ha nyár van és nem vagyok kint a parton, akkor hazudtam, hiszen ez már az implikációnál is h volt, ugyanis a teljesült feltételre tettem egy állítást és az mégsem lett igaz. Ha nincs nyát és a parton vagyok, akkor megint hazudtam, mert azt mondtam, hogy csak nyáron vagyok ott. Ha nincs nyár és nem vagyok a parton, akkor igaz az állítás, mert minden egyéb évszakban nem vagyok a parton. Táblázatokkal:

A	*B*	Állítás igaz-e ?
i	*i*	*i*
h	*i*	*h*
i	*h*	*h*
h	*h*	*i*

		B	
		i	h
A	i	i	h
	h	h	i

A négyzetes táblázatból látszik, hogy a bal felső-jobb alsó átlóra szimmetrikus a táblázat, ami azt jelenti, hogy ha felcseréljük az *A* és *B* sorrendjét, akkor az értékek nem változnak meg.

Ezt a műveletet ezentúl ekvivalenciának nevezhetjük és jele: $A \leftrightarrow B$

2. Igaz-e az alábbi állítás ? írjuk le formulákkal is !*Ha feltesszük, hogy ha egy szám osztható 20-szal, akkor osztható 4-gyel és hogy ha egy szám osztható 4-gyel, akkor osztható 2-vel, akkor ha egy szám osztható 20-szal, akkor osztható 2-vel*

is. Legyen az *A* kijelentés, hogy egy szám osztható 20-szal, *B* kijelentés, hogy egy szám osztható 4-gyel, *C* kijelentés, hogy egy szám osztható 2-vel.

Megoldás: az állítás igaz sőt táblázattal igazolható, hogy azonosan igaz, azaz a változók bármilyen értéke mellett igaz. , formalizálva a következő $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$

A tanulókkal közlöljük, hogy azt a tulajdonságot, hogy $A \to B$-ből és $B \to C$-ből következik az, hogy $A \to C$, tranzitivitásnak nevezzük. Sok hasonló más példát is fel lehet sorolni. Pl. a síkon ha *a* egyenes párhuzamos *b*-vel és *b* párhuzamos *c*-vel, abból következik, hogy *a* párhuzamos *b*-vel.

Arra most nem pazarlom a helyet, hogy igazoljam, hogy $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$ formula azonosan igaz és az hogy: $A \to B$-ből és $B \to C$-ből következik az, hogy $A \to C$ ugyanazt jelenti nem pazarlom a papírt.[18]

Valószínűségszámítási fogalmak

Néhány fontos valószínűségszámítási fogalom következik, ami érdekes problémát fog felvetni.

Itt most jelölje P(*A*) szimbólum a szokásos középiskolában tanított Kolmogorov valószínűségi mezőn az *A* esemény valószínűségét.

1. Definíció[19]

Annak a valószínűségét, hogy egy *A* esemény bekövetkezett, feltéve, hogy *B*, nem lehetetlen esemény bekövetkezett, jelölje $P(A|B)$. Ekkor, $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$. A definíciót $P(A|B)P(B) = P(AB)$ alakban használhatjuk a gyakorlatban.

Példa: Egy szabályos kockát dobunk fel és *A* jelölje azt az eseményt, hogy 2-t dobtunk, *B* jelentse azt az esemény, hogy páros számot dobtunk. Számítsuk ki $P(A|B)$ értékét ! Megoldás $P(AB) = ? = P(AB)P(B)$. $P(AB) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ tehát

$$P(AB)P(B) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

<u>2. Definíció</u>

[18] Didaktikai szempontból tökéletes leírást ad ennek igazolásrá Varga Tamás: Matematikai logika kezdőknek I. 103-114. o.

[19] Baróti-Bognár-Fejes-Mogyoródi: Valószínűségszámítás, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997

Függetlenség. Azt akarjuk kifejezni, hogy egy *A* esemény valószínűségét se nem növeli se nem csökkenti, ha bekövetkezik egy másik *B* esemény.

Jele: $A \perp B$

Tehát *A* esemény független *B* eseménytől, ha $P(A|B) = P(A)$

A feltételes esemény definícióját alkalmazva a következő alakhoz jutunk:

$P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$ és az utolsó egyenlőségből $P(AB) = P(A)P(B)$

Példa: az 52 lapos franciakártyából véletlenszerűen húzunk. Legyen az *A* esemény az, hogy kőrt (szív alak) húztunk. A *B* esemény legyen az, hogy valamilyen figurát húztunk, királyt, dámát vagy bubit. Független-e a két esemény ? ·

$$P(AB) = \frac{3}{52},\ P(A) = \frac{4}{52},\ P(B) = \frac{12}{52},\ \text{tehát}\ P(A)P(B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{12}{52} = \frac{3}{52} = P(AB)$$

<u>3. Definíció</u>

B esemény pozítívan befolyásolja *A* eseményt, ha $P(A|B) > P(B)$. Jele: $A \uparrow B$

<u>4. Definíció</u>

B esemény negatívan befolyásolja *A* eseményt, ha $P(A|B) < P(B)$.Jele: $A \downarrow B$

A feltételes valószínűség definícióját beírva a következőt tudom felírni:

Pozitív befolyásolás esetén: $P(AB) > P(A)P(B)$

Negatív befolyásolás esetén: $P(AB) < P(A)P(B)$

Az előbbi két definíció azt akarja kifejezni, hogy egy *B* esemény bekövetkezése azt eredményezi, hogy egy másik esemény *A* esemény nagyobb illetve kisebb valószínűséggel fog bekövetkezni. Például feltételezve, hogy páros számot dobok a szabályos kockán (*B*) pozitívan befolyásolja azt, hogy hatost dobtam. (*A*)

$$P(B) = \frac{1}{2},\ P(A) = \frac{1}{6},\ P(AB) = \frac{1}{6} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = P(B)P(A)$$

Most vizsgáljuk meg, hogy mit jelentenek ezek a dolgok a biztosan bekövetkező események tükrében, azaz az implikáció szempontjából !

3. Szabályos kockával kockadobást végzünk. Jelölje *B* esemény, hogy olyan számot dobtam a kockán, ami 2-vel és 3-mal is osztható; *A* esemény jelölje azt, hogy 6-ost dobtam. Azt tudjuk, hogy az implikáció szerint $B \rightarrow A$, tehát, ha igaz *B,* akkor *A*-nak is teljesülnie kell. Egyébként itt teljesül a $A \leftrightarrow B$ ekvivalencia is. Pozitívan befolyásolja-e *B* esemény *A*-t ?

Megoldás:

$P(B)=\frac{1}{6}$ $P(A)=\frac{1}{6}$ és valóban $P(AB)=\frac{1}{6}>\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=P(B)P(A)$

Azaz valóban: $\frac{P(A|B)}{P(B)}=\frac{1/6}{1/6}=1>\frac{1}{6}=P(A)$

Ebből arra következtethetnénk, hogy a pozitív befolyásolás valamilyen speciálisabb formája az implikációnak. Amiből arra következetethetnénk, hogy a pozitív befolyásolás is magáénak tudhatja a tranzitív tulajdonságot. Hiszen megszoktuk a matematikában, hogy ha valami működik az általános esetben, akkor működnie kell minden speciálisabb esetben is. Pl. ha tudom, hogy minden paralellogramma átlói felezik egymást, és a négyzet egy speciális paralelogramma, akkor a négyzetre is igaz, hogy átlói felezik egymást.

Tehát igaznak tűnik, hogy ha $A\uparrow B$ és $B\uparrow C$, akkor abból az következik, hogy $A\uparrow C$.

De nézzük meg a következő esetet !

4. Legyen az a kísérlet, hogy egy kalapból kártyákat húzunk, amelyekre külön-külön 1-től 20-ig fel vannak írva a számok. *A* jeletse azt az eseményt, hogy a kihúzott kártyán levő szám osztható 3-mal, *B* jeletse azt az eseményt, hogy a kihúzott kártyán levő szám osztható 6-tal, és *C* jeletse azt az eseményt, hogy a kihúzott kártyán levő szám osztható 2-vel. Vizsgáljuk meg hogy ebben az esetben teljesül-e, hogy ha $A\uparrow B$ és $B\uparrow C$, akkor abból az következik, hogy $A\uparrow C$!

Megoldás:

$P(A)=\frac{6}{20}$; $P(B)=\frac{3}{20}$; $P(C)=\frac{10}{20}$; $P(AB)=\frac{3}{20}$; $P(BC)=\frac{3}{20}$; $P(AC)=\frac{3}{20}$

A pozitív befolyásolással azonban a következő a helyzet:<>

$P(AB)=\frac{3}{20}>\frac{6}{20}\cdot\frac{3}{20}=P(A)P(B)$, tehát $A\uparrow B$

$P(BC)=\frac{3}{20}>\frac{3}{20}\cdot\frac{10}{20}=P(B)P(C)$, tehát $B\uparrow C$. de

$P(AC)=\frac{3}{20}=\frac{6}{20}\cdot\frac{10}{20}=P(A)P(C)$, tehát $A\perp C$

Tehát nem látszik minden esetben teljesülni a tranzitivitás. Ez egy érdekes paradoxon, aminek a kifejtése nem ennek a dolgozatnak a feladata, de mindenesetre mutatja, hogy komolyabb, és aktuális matematikai problémákat lehet közelebbhozni a logikával történő mélyebb ismerkedés során[20]

7. Foglalkozás: kitérő: implikáció és szemléltetés

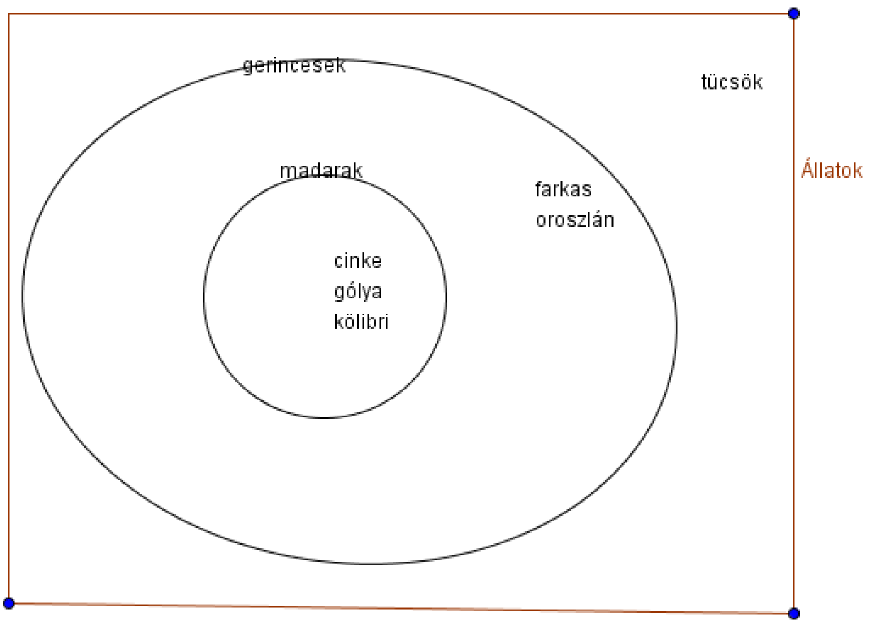
Az implikáció műveletét az iskolában a halmaz-részhalmaz viszonnyal szokták szemléltetni. Tekintsük a következő feladatot !

1. Feladat:

1. Készítsük el a következő halmazok Wenn-diagrammját !

Legyen az alaphalmaz az állatok halmaza ! Ábrázoljuk ebben az alaphalmazban a gerincesek halamazát és a madarak halmazát ! Helyezzük el az alábbi konkrét elemeket a halmazábrán: *cinke, gólya, farkas, tücsök, oroszlán, kolibri !*

Hasonló megoldást várunk, mint az alábbi ábrán.



□

2. Jelöljük az állatok halmazát A-val, a gerincesek halmazát G-vel, a madarak halmazát M-mel ! Az ábra alapján próbáld megmondani, hogy igazak-e az alábbi állítások :

A) $M \subseteq G$; B) $G \subseteq M$; C) $M \cap G = M$; D) $\overline{G} \subseteq \overline{M}$

Megoldás:

A)igaz, mert nincs olyan eleme *M*-nek, ami ne lenne egyúttal *G*-ben

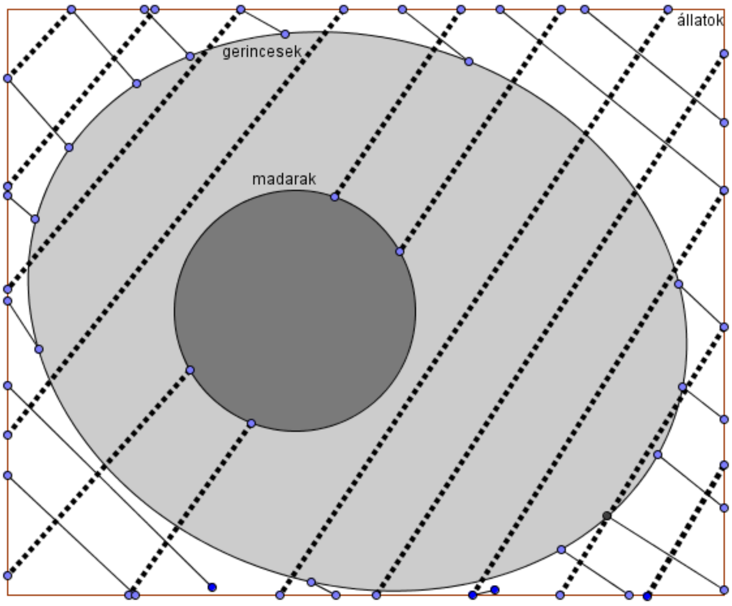
[20] Ez a valószínűségi fejezet, Manfred Borovcnik: Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Matematik, Spektrum Akademischer Verlag, könyvéből merítettem, valamint Vancsó Ödön előadásai alapján.

B)hamis, mert van olyan eleme *G*-nek (farkas, oroszlán), ami viszont nem eleme *M*-nek.

C)mivel A) feladat igaz, minden *M*-beli elem eleme G-nek is, másrészt viszont, minden olyan elem, ami *M*-nek nem eleme, az vagy csak *G*-ben van, vagy már *G*-nek sem eleme, ezért teljesül az egyenlőség.

D)A $\overline{M}$ halmaz tartalmazza azokat az elemeket, amelyek *G*-nek lemei, de *M*-nek nem elemei – jelen esetben ez nem üres: farkas, oroszlán –, és azokat az elemeket is amelyek *G*-n kívüliek is, hiszen, ha valamilyen *G*-n kivül elemet tartalmazna *M*, akkor az az elem *G*-n belüli is lenne, ami ellentmondás. Ezek alapján nyilvánvaló a feladat állítása, hogy a *G*-n kívüli elemek, egyébként ezt könnyű szemléltetni a Wenn-diagrammal is.

Az alábbi ábrán a délnyugat-északkeleti irányban satírozott területtel jelöljük a $\overline{M}$ halmazt és az északnyugati-délkeleti folytonos satírozott terület a diagramon a $\overline{G}$ halmazt jelöli.



□

3. Ezek után döntsük el az alábbi állítások igazságtartalmát !

A) Ha egy állat madár, akkor gerinces is

B) Ha egy állat gerinces, akkor madár is.

C)Amely állatok gerincesek is és madarak, azok pontosan csak a madarak

D)Ha egy állat nem gerinces, akkor az az állat madár sem lehet.

megoldás

A) igaz B)hamis; C) igaz; D) igaz □

4. Írjuk le az implikáció műveletével is a 3. feladat A) B)és D) állításait !

Megoldás: A) $M \to G$, B) $G \to M$ D) $\neg G \to \neg M$ □

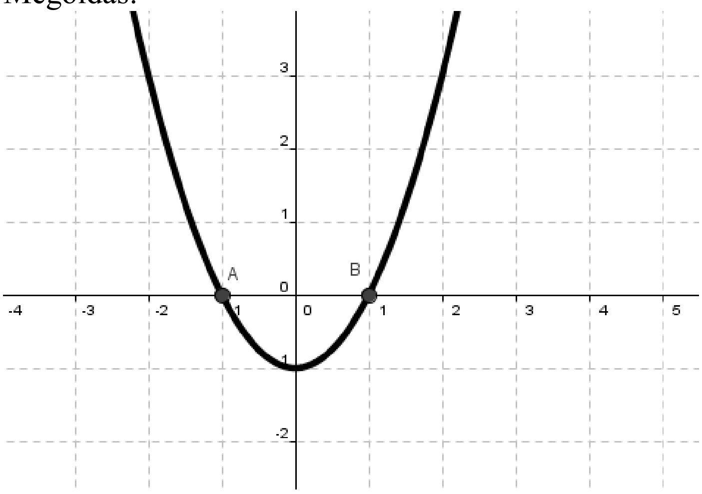
Itt a tanulókkal meg lehet sejtetni valamilyen kapcsolatot a részhalmaz halmazreláció igazsága és az implikáció igazságtartalma közöttti kapcsolatot. Azonban a hasonlóság nem teljes, az ábra sem adja vissza teljesen az implikáció logikai művelet jellegét, hiszen például hol jelenik meg a Wenn-diagrammon az az eset, amit akkor kapunk, ha a $M \to G$ állítás hamis, azaz a M értéke igaz, de G mégis hamis értékű. Vagyis az ábrán sehol sem tudom megmutatni, hogy valami madár és mégsem gerinces, mert az ábra csak az igaz elemeket mutatja és relációk teljesülését ábrázolja.

Egy másik érdekes reprezentációt szeretnék bemutatni a De Morgan azonosságok szemléltetésére, ami látszólag ugyan most úgy tűnik, hogy nem kapcsolódig szorosan az implikációhoz, de mivel ismeretes, hogy az implikácíót negálással és diszjunkcióval is ki lehet fejezni még sem mellékes az implikáció szempontjából sem. Tekintsük a következő egyszerú feladatot. A feladathoz Rozgonyi-Borus Ferenc honlapján talált szemléltetés adott ötletet[21]

2. Feladat

1. Határozzuk meg, hogy mely $x \in R$ értékekre, lesz az $f(x) = x^2 - 1$függvényre igaz, hogy $f(x) \le 0$?

Megoldás:



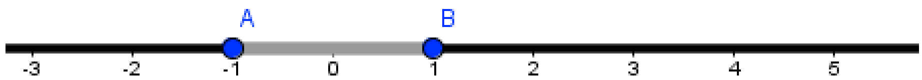
Az ábrázolás után könnyen leolvashatjuk $-1 \le x$ és $x \le 1$, a logikában szokásos műveleti jelekkel: $(-1 \le x) \wedge (x \le 1)$ amit röviden persze így szoktunk jelölni: $-1 \le x \le 1$ □

[21] http://www.abax.hu/inlap/t/cikk/matlog/matlog.htm

Viszont a feladat a negált kérdését is tegyük fel a következőképpen:

2. Határozzuk meg, hogy mely $x \in R$ értékekre, lesz az $f(x) = x^2 - 1$ függvényre ***nem*** igaz, hogy $f(x) \le 0$, azaz mely értékekre lesz igaz, hogy $f(x) > 0$?

Ekkor a feladat megoldása is az előző feladat komplementerét adja. A megoldás tehát: $x > 1$ vagy $-1 > x$. Ezt megint a logikában a következő képpen szoktuk jelölni: $(x > 1) \vee (-1 > x)$. Ráadásul, ha a logikában használatos negációt is alkalmazom, akkor a szemléletből sikerül eljütni a de Morgan azonosságokhoz. $\neg(-1 \le x) \vee \neg(x \le 1)$.



Bizonyos mértékig az implikációt is tudom szemléltetni ezen az intervallum modellen. A Bizonyos mértékig kifejezésre még visszatérek. Például igaznak találom a $(B \le x) \to (A < x)$ implikációt. A $B \le x$ pontokra az implikáció előtagja és utótagja is igaz, tehát igaz az állítás. Ha $A < x < B$ teljesül, akkor az implikáció előtagja hamis, de utótagja igaz, tehát igaz az implikáció. Ha pedig $x \le A$ teljesül az *x*-re, akkor az implikáció elő és utótagja is hamis, tehát az implikáció igaz. Tehát sikerült az összes igaz állítást ábrázolnom, azonban nem sikerült szemléltetnem azt az esetet, amikor az implikáció hamis eredménnyel szolgálna éppen úgy, amikor a Wenn-diagrammokat ábrázoltam az előző feladatban. Tehát az implikáció hamis lehetőségének ábrázolhatatlansága megint absztrakttá tette az implikáció hamis voltát, nem tudom szemléltetni. Talán még az az érzésem is támadhat, hogy lehetetlen hogy hamis legyen egy implikáció, ha egyszer igaznak találtam. Ezt értettem az előbbi bizonyos mértékig való szemléltetés alatt.

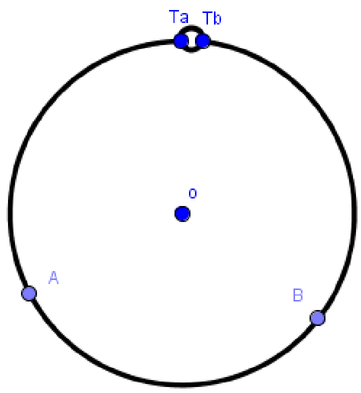
Azonban ezzel az ábrázolással megint sikerült egy hamis analógiát teremteni. Ugyanis ha megtekintjük a $(x > 1) \vee (-1 > x)$ logikai műveletet, akkor 'vagy' művelet ebben megengedő vagyot jelent, azonban az ábrázoláson ennek semmilyen megfelelő pontot nem lehet találni, hiszen nincs olyan *x* pont amire egyszerre teljesülne $x > 1$ és $-1 > x$ feltétel is. Zavaró analógiát teremtettünk az ábrák leírásakor kötött szavak és a logikai kapcsolatok között, és úgy tűnik, hogy nem sikerül szemléletben visszaadni azt, amit a logikai kapcsolatok eredetileg jelentettek.

Felmerülhet bennünk a kérdés, hogy vajon helyesen tesszük-e hogy ezeket a relációkat, műveleteket így ábrázoljuk és hogy vajon a logikai műveletek minden lehetséges értéke csak valamilyen absztrakcióval írható le és valójában semmit sem volna szabad halmazábrával, intervallummal reprezentálni.

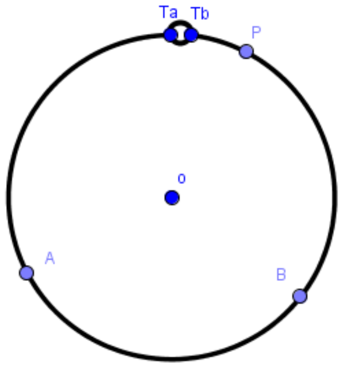
Ennek a hiányosságnak a kiküszöbölése érdekében tekintsük az alábbi modellt !A modellben már ismert relációs jeleket fogok használni, amit másként fogok definiálni és a modell vizsgálatának végéig fogok használni, aminek a bekövetkezését kettős négyzettel fogok jelölni (□□). Ezt a modellt arra használjuk fel, hogy szemléltessünk és nem a modellkészítést gyakoroltatjuk a diákokkal, hiszen ennek a kivitelezésrésre nagyon sok más elméleti anyagot is el kellene mondani, ami nem férne bele egy középiskolai tananyagba.

1. Modell

Tekintsük az alábbi ábrát !



Tekinsünk egy kört, ratja A, B, Ta, Tb pontokat: ez lesz a modellünk. A precíz matematikai leírástól most el fogok tekinteni, ahol lehet ott törekszem rá. Ezt a kör alakú világot Tündérvilágnak nevezem. Ebben a Tündérvilágban van egy A jelű falu és egy B jelű falu. Ebben a világban csak a körív pontjain lehet járni, más pontra eljutni. Ha az óramutató járásával ellentétesen haladok, akkor pozitív irányba haladok, ezzel ellentétesen negatív irányba haladok. A körív minden pontjára el lehet járással jutni, egy pontot leszámítva. A Ta-Tb ponthoz, – amit két külön jellel jelöltem el, de valójában egy pontot jelent,– nem lehet eljutni. Egy pontot a Tündérvilág lakója akkor láthat, más szóval akkor látszódhat, ha járva tetszőlegesen jól meg tud közelíteni. Ta-Tb különleges pontot, amit elnevezek Tündérpontnak, és igazából csak egy pontnak tekintek, csak bizonyos feltételek mellett lehet látni vagy megközelíteni, de eljutni oda nem lehet, és nem lehet rajta átkelni sem. Azaz ha valaki a $\langle Tb|B\rangle$ köríven jár, amely körív A pontot nem tartalmazza, nem juthat el pozitív irányú haladással a $\langle Tb|A\rangle$ körívre, amely körív B pontot nem tartalmazza, és megfordítva ugyanígy $\langle Tb|A\rangle$ körívről nem lehet átjutni $\langle Tb|B\rangle$ körívre negatív irányú mozgással. Ezentúl így fogok hivatkozni ezekre a körívekre. És azt is meg tudom mondani, melyik irányból nézek a Tündérpont felé (továbbiakban egszerűen csak T-t írok): Ha pozitív irányban haladva, a lehető legrövidebb utat menve, jutottam T tetszőleges közelébe, akkor pozitív irányból nézem. A T tetszőleges közele alatt a negyedkörívnél kisebb sugarú környezetet értem, amiben A és B pont az ábrán látható módon nincs benne. Ha az előző előtti mondatban a pozitív szót a negatív szóra cserélem, megkapom, hogy mikor nézem negatív irányból T-t. Az alábbi ábrán P pontbeli pozitív irányból néz T felé, akár B-ből, akár .A-ból mérve jár a legrövidebb úton.



A T láthatósági feltételei még ezzel nem értek véget. T pontot B-beli tündérlakos csak akkor láthatja, ha pozitív irányból tetszőlegesen jól megközelítette, benne van a T ponttól negatív irányba mutató tetszóleges közelbe, de A-lakos beli pozitív irányból tetszőlegesen közelítve nem láthatja soha ebben a negatív irányú tetszőleges közelből. És T pontot A-beli lakos csak akkor láthatja, ha negatív irányból tetszőlegesen jól megközelítette, B-beli lakos negatív irányból közelítve nem láthatja soha.

Ebben a modellben a következőket állíthatom a kör pontjairól. *K*-val jelölöm a kör kerületének pontjait. A következőkben *x* *K*-n levő pontot jelöl.

x<a: Az *x* pont vagy olyan, hogy

1. *x* ponthoz A-ból A-beli lakos a lehető legrövidebb úton járva negatív irányban indulva jut el
2. vagy olyan, hogy *x* pont pozitív irányú tetszőleges közelében levő pontokban a lehető legrövidebb úton járva A-ból A-beli lakos negatív irányban indulva jut el és ezáltal látja *x*-et és *x* nem érhető el

x<b : Az *x* pont vagy olyan, hogy

1. *x* ponthoz B-ből B-beli lakos a lehető legrövidebb úton járva negatív irányban indulva jut el

2. vagy olyan, hogy *x* pont pozitív irányú tetszőleges közelében levő pontokba a lehető legrövidebb úton járva B-ből B-beli lakos negatív irányban indulva jut el és ezáltal látja *x*-et és *x* nem érhető el.

x>a : Az *x* pont vagy olyan, hogy

1. x ponthoz A-ból A-beli lakos a lehető legrövidebb úton járva pozitív irányban indulva jut el.
2. vagy olyan, hogy x pont negatív irányú tetszőleges közelében levő pontokba a lehető legrövidebb úton járva A-ból A-beli lakos pozitív irányban indulva jut el és ezáltal látja x-et és x nem érhető el.

<u>x>b</u> Az x pont vagy olyan, hogy

1. x ponthoz B-ből B-beli lakos a lehető legrövidebb úton járva pozitív irányban indulva jut el.
2. vagy olyan, hogy x pont negatív irányú tetszőleges közelében levő pontokba a lehető legrövidebb úton járva B-ből B-beli lakos pozitív irányban indulva jut el és ezáltal látja x-et és x nem érhető el

<u>x=b</u> Az x pont B faluval egyezik meg.

<u>x=a</u> Az x pont A faluval egyezik meg.

Az $a \leq x$ a relációk szokásos jelöléséhez hasonló módon azt jelenti, hogy $a<x$ vagy $x=a$. Itt a vagy szó lehet megengedő vagy is. Hasonló módon definiáljuk a $\geq$ műveletet is.

Ezen felül igaznak tekintjük a következőket:

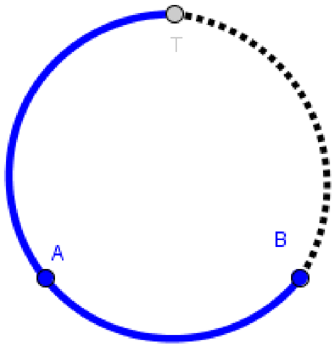
Ha $x=a$, akkor $x<b$.
Ha $x=b$, akkor $a<x$.

□

Talán még egyszerűbben, képszerűbben úgy írhatnám le a modellt, ha elképzelünk egy síkbeli kisbolygót, aminek T ponjában egy áthatolhatatlan hegy van, amire felmászni sem lehet. A hegynek fura tulajdonsága van: Ha A-beli megközelíti negatív irányból, akkor látja a hegyet, ha pozitív irányból közelíti, akkor csak azt látja, hogy végeszakad a világnak, de a hegyet nem látja. Ha viszont B-beli közelíti meg pozitív irányból, akkor látja a hegyet; ha viszont bal oldalról közelíti meg, akkor azt látja, hogy vége a világnak, de a hegyet nem látja.

Negáció a modellben

A negációval kapcsolatban pedig a következőket állapíthatjuk meg. A $\neg$ jel jelentste most is a negációt. Például a $\neg(b \geq x)$ kifejezés azokra az x modellbeli helyekre lesz érvényes, amelyekre nem igaz az, hogy $(b \geq x)$. Tehát olyan pont, ami vagy nem egyenlő a B ponttal, vagy ami nem közelíthető meg B-ből kiindulva negatív irányban a legrövidebb úton járva, vagy ami nem olyan, hogy pozitív irányú tetszőleges közelébe érve látjuk. Ezeket a tulajdonságokat pont a $b < x$ tulajdonságoknak megfelelő pontok lesznek, vagyis T pont és $\langle B|T \rangle$ körív. Azaz éppen a komplementer modellbeli elemek. Tehát a komplementer tulajdonságokat megtartotta ez a modell.

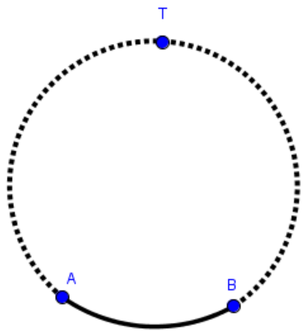


Most hogy így végignéztük a modellt és definiáltuk a körív pontjaira a tulajdonságokat, érdemes megnézni, hogy megjeleníti-e a modell az implikáció esetében a hamis esetet, vagy megjeleníti-e a megengedő vagy logikai művelet esetében azt az esetet, amikor mindkét logikai változója igaz.

□

És művelet, azaz a,konjunkció a modellben

Tekintsük például a $(a \leq x) \wedge (x \leq b)$ logikai műveletet és nézzük meg, hogy melyik modellbeli pontok teszik igazzá vagy hamissá az értékét. Az $\langle A|B \rangle$ körív, amelyik nem tartalmazza a T pontot (ezt ezentúl így jelölöm), a határolópontjaival, A-val és B-vel együtt igazzá teszi az állítást, hiszen B-ből negatív irányű járással és A-ból pedig pozitív irányú járással érhetők el ezek a pontok. Tehát a konjunkció mindkét tagja igaz, ezért itt igaz a művelet eredménye. A $\langle B|T \rangle$ körív pontjaira csak az lesz igaz, hogy A-ból negatív irányba való járással lehet elérni ezeket a pontokat, viszont B-ből csak pozitív irányú járással. Tehát csak egy változó értéke lesz igaz a fenti konjunkcióban. $\langle A|T \rangle$ körív pontjaira az igaz, hogy B-ből csak negatív irányú járással lehet elérni viszont, viszont A-ból szintén csak negatív irányú járással lehet elérni, tehát a konjunkció első változója hamis. Viszont, ami lényeges, hogy a T pontra a konjunkció mindkét tagja hamis lesz, mert a T pont tulajdonsága miatt, A-beli pozitív irányban megközelíti, de nem fogja látni, B-beli lakos pedig negatív irányban megközelíti ugyan, de látni nem fogja. A fejezet második feladatának ábrázolásakor ennek az esetnek az ábrázolására nem volt lehetőség. Tehát az alábbi ábrán a szagatott részen hamis az előbb említett konjugáció és a folyamatos részen igaz.



□

Diszjunkció, azaz a megengedő vagy a modellben, és a de Morgan azonosság

Ha itt az előző konjunkciót igazzá tevő pontok halmazának komplementer halmazát tekintem, azaz $\langle A|T\rangle$ körív, $\langle B|T\rangle$ körív és T unióját, akkor vajon igaz-e az, hogy a $(x < a) \vee (b < x)$ logikai műveletet igazzá tevő pontok halmazát kapom ? Vizsgáljuk meg !

Ha $x \in \langle A|T\rangle$, akkor ezeket *B*-ből indulva csak negatív irányú járással érhetem el, ezzel igazzá teszem a diszjunkció második változóját, de az első változót hamisan hagyom, tehát itt tényleg igaz a diszjunkció. Ha a $x \in \langle T|B\rangle$, akkor viszont a diszjunkció első változója lesz igaz, a második hamis, tehát megint igaz a diszjunkció. Most nézzük meg a T pontot, hogy erra a pontra mit ad a diszjunkció. Mivel T olyan, hogy *B*-beli pozitív körüljárással jut a közelébe és látja is, és *A*-beli negatív irányújárással jut a közelébe és látja is, a diszjunkció mindkét logikai változója igaz, tehát igaz eredményt kapunk. $\langle A|B\rangle$ köríven pedig a diszjunkció egyik változója sem lesz igaz, tehát itt valóban hamis értéket kaptunk. Tehát megint sikerült megjeleníteni a diszjunkció eredményeit a változók minden lehetséges értékeinek megfelelően. A negálás szokásos művelete miatt igaz, hogy $(x < a) \vee (b < x) = \neg(x \geq a) \vee \neg(b \geq x)$. Ugyanakkor tuduuk, hogy ezek a pontok az előző konjunkciónak, $(a \leq x) \wedge (x \leq b)$ -nak megfelelő pontok komplementerét szemléltették. Ugyanígy sejthető lesz tehát, hogy a $\neg((a \leq x) \wedge (x \leq b)) = \neg(x \geq a) \vee \neg(x \leq b)$ azonosság valószínűleg fennáll. Ezzel teljesen szemléltettük a de Morgan azonosságot.

□

Implikáció a modellben

Ugyanezen az ábrán szemléltessük az implikációt is, hátha sikerült végre a hamis esetet is belecsempésznünk ebbe a nyakatekert modellbe ! Legyen az implikációnk most $(b \leq x) \rightarrow (a < x)$! Ez az állítás triviális a köznöséges számegyenesen a középiskolában tatnított, szokásos relációkkal. Most viszont nézzük meg hogy a modell mely pontjai milyen értéket adnak az implikációnak ! Tekintsük az $x \in \langle B|T \rangle \cup B$ pontokat ! Ezekre az implikáció előtagja igaz, és a második is igaz, hiszen *A*-beli lakos *A*-ból csak pozitív irányú körbejárással éri el ezeket a pontokat. Ha $x \in \langle A|B \rangle$, akkor ezekre az implikáció előtagja hamis, mert *B*-ből csak negatív irányban haladva éri el ezeket a pontokat, de attól még az implikáció utótagja igaz, mert ezeket a pontokat *A*-ból induló lakos pozitív irányban éri el. Ha $x \in \langle T|A \rangle \cup A$, akkor az implikáció előtagja és utótagja is hamis, mert ezeket a pontokat *A*-ból is és *B*-ből is csak negatív irányba való járással lehet elérni. Ha $x = T$, akkor viszont az implikáció előtagja igaz, mert ezt a ponotot *B*-beli lakos *B*-ből indulva pozitív irányban közelíti meg és látja is, viszont *A*-beli lakos ugyan pozitív irányban járva közelíti meg a T pontot, de nem látja ezért az implikáció utótagja hamis. Ezzel sikerült ábrázolni azt az esetet is, amikor az implikáció nem teljesül.

□

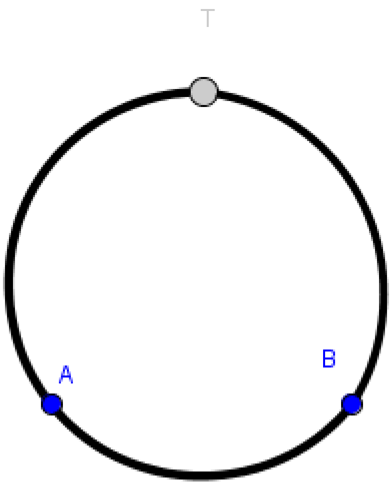
Ez azt jelenti, hogy sikerült egy olyan modellt létrehozni, amelyben a kétváltozós logikai műveleteket a változók összes lehetséges kimenetének megfelelően tudjuk a négy kimeneteli értéket szemléltetni.

Ehhez a modellhez szeretnék egy pár feladatot kapcsolni, ami talán megint segít megérteni néhány dolgot.

Feladatok a Tündér-modellhez

1. Vizsgáljuk meg, hogy a $(b > x) \vee (a < x)$ hol igaz a modellben ! Melyik logikai művelet volt igaz ugyanezeken a helyeken ? Negáljuk a diszjunkció első változóját és ez alapján fogalmazzuk mondjunk ki egy azonosság sejtését !

Megoldás



Vagyis, *A*,*B* pontokban, $\langle T|B\rangle$, $\langle A|B\rangle$, $\langle A|T\rangle$ körívek pontjaira teljesül ez az állítás. Egyedül T ponttal van gond, ugyanis *A*-beli, ha pozitív irányban megindulva tetszőlegesen közelébe ér T-nek, de nem látja, és ugyanez a helyzet a *B*-beliekkel, ha ezek negatív irányban indulnak el. Ez a művelet igazsághalmaza (azon pontok halmaza, amelyre igazat ad a művelet) a modellben vizsgált implikáció igazsághalmazával azonos. Tehát felírhatjuk a sejtést, hogy $(b > x) \vee (a < x) = (b \le x) \to (a < x)$. Ha a $(b > x)$ a $\neg(b \le x)$ kifejezéssel pótoljuk, amivel azonos – ezt fentebb láttuk, szemléltettük –, akkor a következőt kapjuk: $\neg(b \le x) \vee (a < x) = (b \le x) \to (a < x)$, amiből végül is sejtésünk adódott egy azonosságra.

□

2. Igazoljuk a modellbeli implikáció alapján a $A \to B = \neg B \to \neg A$ azonosságot. Ezt a logikában *kontrapozíciónak* nevezik.

Megoldás

A Tündér modell vizsgálatakor a következő implikációt vizsgáltuk: $(b \le x) \to (a < x)$. Itt azt kéne bizonyítani, hogy $\neg(a < x) \to \neg(b \le x)$ is igaz. A modell alapján tudjuk hogy mit jelent a negálás, ezért tulajdonképpen a bizonyítandó állítás a következőképpen néz ki: $(a \ge x) \to (b > x)$, de ez az ábra szimmetriája miatt ugyanaz az eset, amit a modellvizsgálatkor néztünk csak *A* és *B* szerepét kell felcserélni az egész modellben. □

Végül pedig érdemes végiggondolni, hogy ha a komplementerképzés tényleg a logikai negáláshoz vezetett, akkor vajon mi lesz az implikáció negálása ?

3. Tekintsük a $(b \leq x) \to (a < x)$ implikációnak a modellben igazat adó pontjait, azaz ennek az implikációnak az igazsághalmazát ! Állapítsuk meg mi lesz ennek a halmaznak a komplementerhalmaza ! Próbáljunk meg megadni egy olyan művletet, aminek ez lesz az igazsághalmaza ! (Használjuk fel, hogy a modellben bemutatott diszjunkciónál melyik pont esetében lett a diszjunkció mindkét tagja igaz ! Már csak olyan művletet kell találni, ami csak ekkor igaz !) Mi a sejtésünk, mi az implikáció tagadása ?

Megoldás:

Az implikáció egy pontot leszámítva az egész modellen igaz, ezt már megvizsgáltuk. Egyedül csak a T pontban volt hamis a fenti művelet

A segítségként megadott diszjunkció a $(x < a) \vee (b < x)$. Ebben akkor volt a $(x < a)$ és a $(b < x)$ változó egyszerre igaz, ha a $x=T$ volt. Viszont, ha olyan műveltet keresek, aminek csak T pont lesz az igazsághalmaza és tudom, hogy a fenti két változó csak az előbb említett esetben lesz igaz, akkor egyszerűen a diszjunkció helyett a konjunkció műveletét fogom alkalmazni. Azaz $(x < a) \wedge (b < x)$ csak a T pontra igaz. Ebből azt lehet gyanítani, hogy $\neg[(b \leq x) \to (a < x)] = (x < a) \wedge (b < x)$. Ha felcserélem a konjunkció két tagját és a $(x < a)$ helyett $\neg(a \leq x)$ alakot írom, szembetűnőbb lesz az azonosság: $\neg[(b \leq x) \to (a < x)] = (b \leq x) \wedge \neg(x < a)$. A felírásban az $\leq$ és a $<$ jelet nem használom következetesen. Ennek most az az oka, hogy az egyenlőség továbbra sem változik a modellben definiált műveleteket alkalmazva, és ráadásul sejtéshez vezet. Ez az alak rendkívül fontos lehet az indirekt bizonyításoknál, hiszen általában az állítás negáltjáról kell kimutatni, hogy hamis következményhez jutunk belőle. Rövidebben tehát arról van szó, hogy $\neg(A \to B) = A \wedge \neg B$. Például a prímszámok elemszámának végtelenségét úgy is megfogalmazhatom, hogy: *ha a halmaz elemei csak és kizárólag prímek, akkor a halmaz elemszáma végtelen.* Ennek az állításnak a negáltja az elején így hangzik: Tegyük fel, hogy *a halmaz elemei prímek és mégsem végtelen a halmaz elemszáma...*

A de Morgan azonosságot eddig is tudtam szemléltetni a Venn-diagrammon, de az implikációt már nem tudtam precízen megadni

8.Foglalkozás: Más logikák ?

1. Írjuk fel a következő formula igazságtáblázatát ! $A \wedge \neg A$

Megoldás:

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
i	h	h
h	h	h

Ezt hívják a logikába a harmadik kizárásaának elvének. Mivel ebben a logikában minden függvény a logikai változóknak megfelelően csak két értéket vehet fel: i vagy h, ezért kétértékű logikának hívjuk.

2. Számoljuk ki egy A halmaz, amelynek elemszáma n, hogy hány részhalmaza van.

Megoldás: Az egyik lehetőség, hogy megnézem, hogy hány elemszáma van egy 0, 1, 2, 3 stb. elemszámúhalmaznak és utána a kialakult sejtésemet teljes indukcióval bizonyítom. Pl.

Ha $A = \emptyset$, akkor ennek egyetlen részhalmaza a $\emptyset$, az üres halmaz

Ha $A = \{a\}$ akkor ennek részhalmazai $\emptyset$ és $\{a\}$.

Ha $A = \{a, b\}$, akkor ennek a részhalmazai: $\emptyset$; $\{a\}$; $\{b\}$; $\{a, b\}$

Ha $A = \{a, b, c\}$ akkor ennek a részhalmazai: $\emptyset$; $\{a\}$; $\{b\}$; $\{a, b\}$; $\{c\}$; $\{a, c\}$; $\{b, c\}$; $\{a, b, c\}$

Észrevehető, hogy mindig úgy keletkezik több részhalmaz, ha 1 elemmel növelem a halmaz elemszámát, hogy veszem a korábbi, halmazok részhalmazokat, amelyekben természetesen nem fordul elő elő az új elem. Majd a többi új részhalmazt úgy képzem, hogy mindegyikbe 'belehelyezem' az új elemet, azaz $\emptyset$ helyett veszem azt a részhalmazt, aminek a semmin kívül még az új elem is eleme, veszem az előző részhalmazok egyelemű részhalmazait és mindegyikbe +1 elemként odasorolom az elemei közé az új elemet s.í.t. Ebből pedig világos, hogy minden lépésnél duplázom a részhamazok számát, mert veszem az egyel kisebb elemszámú részhalmazokat, és hozzáveszem az új elemmel bővült régi részhalmazokat. Tehát megkétszerezem a részhalmazok elemszámát.

A másik megoldási lehetőség, hogy a halmazok helyett, azoknak az elemeire koncentrálok. Ha benne van a halmazban hozzárendelem az elemhez az i-t, ha nincs benne hozzárendelem a h –t. Így a halmaz minden részhalmazához készíthetek egy i-ből és h-ból álló rendszámot úgy, hogy a halamaz elemeit sorba rendezem, és az első helyre írom, hogy az adott részhalmaz tartalmazza az elsőnek vett elemet, ekkor a rendszáma i-vel kezdődik, vagy épp nem tartalmazza a részhalma, az elsőnek vett elemet és ekkor a rendszáma h betűvel kezdődik. Az világos a kombinatorikai ismeretekből, hogy ilyen kor, ha a rendszám csak i-ből és h-ból áll, hogy az összes rendszámot leírhassam, 2^n darab rendszámtáblára van szükségem, ha a halmaz elemszáma *n*. Jelöléssel: $|A| = n$.

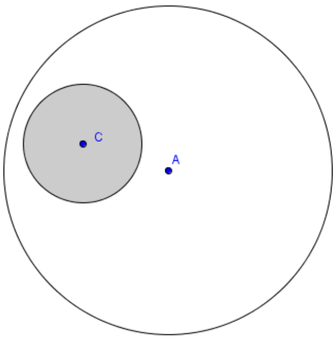
Világos, hogy a logikai kétértékűség és a tartalmazás között erős kapcsolat van. Hiszen vagy $a \in A$ igaz, vagy $a \in A$ hamis, amit úgy jelölünk, hogy $a \notin A$.

Egy újabb halmaz elképzelés, majdnem eleme- halamazok

Vegyük a szokásos Venn-diagrammos elképzelésünket és most a halmazokat ábrázoljuk kör alakban ! A geometriai ismereteimből tudom, a körlemeznek része a belseje és a határoló körvonala is. (A szalámi belseje és a héja). 12. osztályosoknál talán már a definícióval is megpróbálkozhatunk.

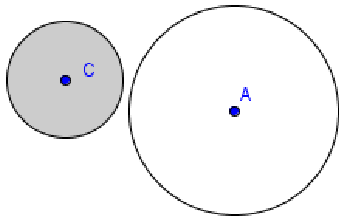
1.Definíció

Egy pontot egy adott kör belső pontjának tekintek, ha ekörül a pont körül van olyan elég kis sugarú kör, hogy annak a körlapnak minden pontja eleme a nagy körlapnak is. Tehát az alábbi ábrán a C belső pontja az A körüli körnek, mert a C körüli kör eleme, benne van az A körlüli körben.



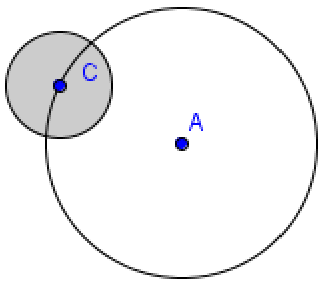
2.Definíció

Egy pontot egy adott kör külső pontjának tekintek, ha ekörül a pont körül van olyan elég kis sugarú kör, hogy annak a körlapnak minden pontja nem eleme a nagy körlapnak, a nagy körlapon kívülre esik. Tehát az alábbi ábrán a C külső pontja az A körüli körnek, mert a C körüli kör nem eleme A körlüli körnek, kívül van a körlapon.



3,<u>Definíció</u>

Egy pontot egy adott A középpontú kör B határoló pontjának tekintek, ha ebből a B határoló pontból akármilyen nagyságú sugarú kört tekintek, akkor ennek a B körüli körnek van olyan ponta, amelyik egyben az A körüli kör külső pontja és van olyan ponta, amelyik egyben az A körüli kör belső pontja.

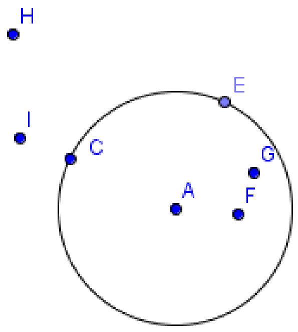


Ha most a Venn-diagrammon csak körrel ábrázolom a halmazokat és a beső pontokat tekintem mint olyan elemeket, amelyek a halmaz belső pontjai, és a kör külső pontjai azokat a pontokat reprezentálják, amelyek a kör külső pontjai, akkor még a határoló pontokról nem döntöttem, hogy hova tartoznak, a halmazhoz, vagy a halmaz komplementeréhez. Tehát lehetőségem nyílt egy új definicióra is.

<u>4.Definíció</u>

A A halmaz majdnem elemének tekintek ezentúl egy olyan elemet, amiről egyszerre teljesül hogy eleme és nem eleme a halmaznak. Szimbólikusan a majdemeleme A-nak, ha $a \in A$ és $a \notin A$. Ezentúl ezt egyszerüen így jelölöm: $a \in\notin A$.

Ez a Venn diagrammon azt fogja jelenteni, hogy a kör határpontjait fogom a halmaz majdnemelemeinek tekinteni. Az alábbi ábrán a C, E pontok majdnemelemek a A – körüli köralakú halmaznak, F és G belső pontjai, H és I pedig külső pontjai.



Rendszámozás:

Ha a fejezet második fejezetbeli rendszámait akarom majd követni, akkor a majdnem elemeknek most (ih), zárójelbe tett ih-t fogok írni

3. Ebben az új majdnem elemes rendszerben számoljuk ki, hogy hány részhalmaza lehet egy A halmaznak, ha $|A| = n$!

Megoldás: A fejezet 2. feladatának rendszámos megoldását tekintsül és azt a rendszámozási lehetőséget követem, amit közvetlenül a feladat előtt említettem. akkor most minden részhalmazt A elemei szerint megint rendszámozhatom a következőképpen: Megint rendezzük sorba a A elemeit, és minden elemhez hozzárendelem i, h, (ih), annak megfelelően, hogy az elem eleme, nem eleme, vagy majdnem eleme a részhalmaznak. Ennek alapján minen elemhez 3 különböző szimbólumot rendelhetek és ebből kifolyólag a részhalmazok első rendszámára 3 szimbólum lehetőségem van. Ez azt jelenti, hogy ebben a majdnem eleme-halmazok rendszerében, ha $|A| = n$, akkor a kombinatorikában tanult eljárások miatt 3^n részhalmaza lesz.

Ez az elképzelés további kiinduló pontja lehetne a 3 értékű logikák felé, hiszen itt a tartalmazásnál újabb érték jelent meg. Ezzel egyszerű módon szemléltetni tudjuk a többértékű logikák lehetőségeit. Tehát hasonlóan ahhoz, ahogy a geometriában is létezik gömbi, euklideszi, és Bólyai-geometria, úgy a logika sem feltétlenül annyira egységes. Effelé mutatnak a Fuzzy logikák. Azonban itt ebben dolgozatban nem haládok tovább ennek a tárgyalásában.

Összefoglalás

A dolgozatban olyan feladatokat szerepeltettem, amelyek egyrészt segítik a diákokat a 12. évfolyam végén a rendszerezésben, másrész viszont kitekintést nyújt és előszobája az egyetemen folyó matematikaoktatásnak és ezzel segíti az érdeklődő diákokat a tanulmányaik folytatásában. Sikerült egy szemléltető modellt létrehozni az implikációra, valamint az implikáción keresztül olyan problémák irányába tettünk fel középiskolás szinten is érthető kérdéseket, amely problémák nyitva is állnak és akár kutatásra, tanulásra ösztönözhetik a dikákokat. Érintettük a gyakorlati és elméleti hasznát a logikának, amellyel közelebbivé és életszerűbbé tettük a logika tárgyát.

Bibliográfia

1. A 2012-es közöktatásra vonatkozó 8 osztályos gimnáziumokra vonatkozó kerettanterv interntnen elérhető változata: http://kerettanterv.ofi.hu/,
2. Baróti-Bognár-Fejes-Mogyoródi: Valószínűségszámítás, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997
3. Bontovics Ignác honlapja: http://bontovics.hu/index.php?option=com_content&view=article&id=57&Itemid=30 és http://bontovics.hu/index.php?option=com_content&view=article&id=55&Itemid=30
4. Manfred Borovcnik: Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Matematik, Spektrum Akademischer Verlag, 2007
5. Kárteszi Ferenc: Fejezetek a geometriából, Bp, 1971
6. Komjáth Péter előadásjegyzet: http://www.cs.elte.hu/~kope/oktatas/09tav/ma2.pdf,
7. Laczkovich M.-T. Soós Vera: Analízis I. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2007
8. Rozgonyi Boruss Ferenc honlapja: http://www.abax.hu/inlap/t/cikk/matlog/matlog.htm
9. Varga Tamás: Matematikai logika kezdőknek I-II. Tankönyvkiadó, 1969
10. W. Kneale - M. Kneale: *A logika fejlõdése*, Gondolat, 1987

Tankönyvek

1. Gerőcs-Orosz-Paróczay-Szászné. Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest
2. Hortobágyi-Marosvári-Pálmay-Pósfai- Siposs-Vancsó: Egységes érettségi feladatgyújtemény Matematika 1., Konsept-H kiadó
3. Kosztolányi-Kovács-Pintér-Urbán-Vince: Sokszínű matematika, 9.-10.-11.-12., Mozaik kiadó, Szeged, 2012