Eötvös Lóránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Az exponenciális és a logaritmus függvény tanítása

Szakdolgozat

Készítette:

Tóth Éva

Matematika tanár szak

Témavezető:

Dr. Ambrus András

egyetemi docens

Matematikatanítási és Módszertani Központ

Budapest

2013.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Dolgozatomban a realisztikus matematika módszeréről, azon belül az exponenciális és a logaritmus függvény tanításáról írok. Az irányzat szerint az iskolának hozzá kell járulnia ahhoz, hogy a tanulók megértsék a matematikának a társadalomban és a tanulók egyéni életében játszott szerepét. Ugyancsak fontos szempont a matematikához való pozitív hozzáállás kialakítása. [1]

A dolgozatomat a tantervek témakörhöz kapcsolódó részeinek elemzésével kezdem. Megnézem, hogy az exponenciális és a logaritmusfüggvény hol helyezkedik el a különböző tantervekben, és milyen követelményeket kell teljesíteniük a tanulóknak.

Ezután áttekintem a forgalomban lévő 11. évfolyamos tankönyvek ide vonatkozó részeit. Az elemzést négy témakör mentén végzem el: az exponenciális függvény bevezetése, a logaritmus fogalma, a logaritmusfüggvény, és a logaritmus azonosságai. A következő szempontok alapján nézem a tankönyveket: bevezető, motiváló feladatok, definíció, fogalomazonosítási feladatok, fogalomrealizálási feladatok, definíció következményei, beágyazás fogalomhierarchiába, alkalmazási feladatok. Ezek a feladattípusok a dolgozat későbbi részében is előfordulnak. A témakör kidolgozását is ezek mentén végzem el. Mind a négy témakörhöz kerestem megfelelő feladatokat minden típusból.

A középszintű és emelt szintű érettségi feladatok elemzése után következik a téma kidolgozása.

A kidolgozást a tankönyvek elemzésénél is említett négy témakör mentén végzem el. Egy valóságközeli, a barna alga példáján keresztül próbálom megértetni a fogalmakat, a mögötte lévő tartalmakat.

---

[1] Ambrus András: Bevezetés a matematika-didaktikába, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1995, 157. oldal

1. A tantervek témakörhöz kapcsolódó részeinek elemzése

Ebben a fejezetben áttekintem az érvényben lévő tanterveknek azon részeit, melyek az exponenciális és logaritmus függvény fogalmához kapcsolódnak. A tanterveknél azt fogom megnézni, hogy milyen követelményeket kell teljesíteniük a tanulóknak a választott témakörnél. A kormány 2012-ben elfogadta az új Nemzeti alaptantervet, de a dolgozatomat a 2007-ben elfogadott Nat dokumentum alapján írom, hiszen még mindig ez van érvényben.

1.1. Nemzeti alaptanterv[2]

A Nemzeti alaptanterv meghatározza műveltségi területenként a közvetítendő műveltség fő területeit, az iskolában elsajátítandó műveltségi alapokat, az iskolai nevelés-oktatás közös értékeit, iránymutatást nyújt a tanítandó témákról, a fejlesztendő területekről.

A Nemzeti alaptanterv meghatározza az iskolai nevelés-oktatás közös értékeit. Az iskoláknak gondoskodniuk kell arról, hogy a tanulók elsajátítsák az alapvető erkölcsi normákat, kompetenciákat. Az iskolák határozzák meg, hogy ezek a normák, kompetenciák milyen műveltségi területek részeként és hogyan kerülnek elsajátításra.

A kulcskompetenciák azok a kompetenciák, amelyekre minden egyénnek szüksége van személyes boldogulásához és fejlődéséhez, az aktív állampolgári léthez, a társadalmi beilleszkedéshez és a munkához. Mindegyik egyformán fontos, mivel mindegyik hozzájárulhat a sikeres élethez egy tudás alapú társadalomban. Sok kompetencia részben fedi egymást, és egymásba fonódik: az egyikhez szükséges elemek támogatják a másik terület kompetenciáit. A műveltségterületek fejlesztési feladatai a kulcskompetenciákat összetett rendszerben jelenítik meg. A Nat a következő kulcskompetenciákat említi:

- Anyanyelvi kommunikáció
- Idegen nyelvi kommunikáció
- Matematikai kompetencia
- Természettudományos és technikai kompetencia
- Digitális kompetencia

[2] http://www.nefmi.gov.hu/letolt/kozokt/nat_070926.pdf

- Szociális és állampolgári kompetencia
- Kezdeményezőképesség és vállalkozói kompetencia
- Esztétikai-művészeti tudatosság és kifejezőkészség
- A hatékony, önálló tanulás

A matematikai kompetencia a matematikai gondolkodás fejlesztésének és alkalmazásának képessége, felkészítve ezzel az egyént a mindennapok problémáinak megoldására is. A matematikai kompetencia birtokában az egyén rendelkezik azzal a képességgel, hogy alkalmazni tudja az alapvető matematikai elveket és folyamatokat az ismeretszerzésben és a problémák megoldásában, a mindennapokban, otthon és a munkahelyen. Követni és értékelni tudja az érvek láncolatát, matematikai úton képes indokolni az eredményeket, megérti a matematikai bizonyítást, a matematika nyelvén kommunikál, valamint alkalmazza a megfelelő segédeszközöket.

A Nat a közoktatás tartalmát műveltségi területek szerint határozza meg. Az egyes iskolák tantárgyi rendszerét a műveltségi területek figyelembevételével a helyi tantervek állapítják meg. A kötelező oktatás 12 évfolyama egységes fejlesztési folyamat, amely négy képzési szakaszra oszlik, a Nat-ban meghatározott fejlesztési feladatok a szakaszokhoz kapcsolódnak. A Nat-ban meghatározott képzési szakaszok a következők: 1-4. évfolyam, 5-6. évfolyam, 7-8. évfolyam, 9-12. évfolyam.

A Nat műveltségi területei:

- Magyar nyelv és irodalom
- Élő idegen nyelv
- Matematika
- Ember és társadalom
- Ember a természetben
- Földünk – környezetünk
- Művészetek
- Informatika
- Életvitel és gyakorlati ismeretek
- Testnevelés és sport

A Nat matematika műveltségterületre vonatkozó része

Az iskolai matematikatanítás célja, hogy a megfelelő nevelő, orientáló és irányító funkciók ellátásával lehetőleg hiteles - ezért egységes, összefüggő - képet nyújtson a matematikáról mint kész tudásrendszerről és mint sajátos emberi megismerési tevékenységről, szellemi magatartásról. A matematikatanítás érzelmi és motivációs vonatkozásokban is formálja és gazdagítja a személyiséget, a gondolkodást, és alkalmazásra érett tudásokat hoz létre.

A matematikai gondolkodás területeinek fejlesztésével emeli a gondolkodás általános kultúráját. A matematikatanítás szerepe a matematika különböző arculatainak bemutatása és érvényre juttatása: kulturális örökség, gondolkodásmód, alkotótevékenység, a gondolkodás örömének forrása, a mintákban, struktúrákban tapasztalható rend és esztétikum megjelenítője, maga is tudomány, egyben egyéb tudományok és az iskolai tantárgyak segítője, a mindennapi élet és a szakmák eszköze.

A kulcskompetenciáknak megfelelően a matematika műveltségi terület fejlesztésének kiemelt területe a biztos számolási tudás alakítása.

A matematika tanítása által a többi kulcskompetenciát is fejleszteni tudjuk. Fejleszti a kommunikációt mások szóban és írásban közölt gondolatainak meghallgatása, megértése, saját gondolatok közlése révén. A szöveges feladatok által fejleszteni tudjuk a szövegértést is. A matematika egyéb tudományok és az iskolai tantárgyak segítője, mindennapi élet és szakmák eszköze, így a matematika tanítása közben fejleszthetjük a természettudományos és technika kompetenciát is. Fejleszthető az esztétikai-művészeti tudatosság és kifejezőkészség is, hiszen a matematika a mintákban, struktúrákban tapasztalható rend és esztétikum megjelenítője.

A matematikai fejlődés és a tanulási folyamat során alapvető jelentőségű a jelenségekhez illeszkedő modellek, gondolkodásmódok (analógiás, heurisztikus, becslésen alapuló, matematikai logikai, axiomatikus, valószínűségi, konstruktív, kreatív stb.), módszerek (aritmetikai, algebrai, geometriai, koordináta geometriai, statisztikai stb.) és leírások kiválasztásának és alkalmazásának tudása. Ugyanakkor fontos a modellek érvényességi körének és gyakorlati alkalmazhatóságának eldöntését segítő képességek fejlesztése. A reproduktív és a problémamegoldó, alkotó gondolkodásmód fejlesztése egyaránt lényeges. Emellett azonban nem szorul háttérbe az alapvető tevékenységek (pl. mérés, alapszerkesztések), műveletek (pl. aritmetikai, algebrai műveletek, transzformációk) automatizált végzése, a matematikai ismeretek gyakorlati alkalmazása. A műveltségi terület tanulása során elérhető a matematika szerepének megértése a természet- és társadalomtudományokban, a humán kultúra számos ágában, a döntésképesség fejlesztésében. Mindez hozzájárul a történeti szemléletmód kialakításához is.

Eközben érték a pontos, kitartó, fegyelmezett munkavégzés; az önellenőrzés igénye, módszereinek megismerése és alkalmazása, a tanulás, a matematikatanulás szokásainak, képességének alakítása; a sajátunkétól eltérő szemlélet tisztelete.

A matematika értékeinek és eredményeinek megismerése azt eredményezheti, hogy a tanulók hatékonyan tudják használni megszerzett kompetenciáikat az élet különböző területein.

A matematika fejlesztési területei

1. Tájékozódás
    - 1.1 Tájékozódás a térben
    - 1.2 Tájékozódás az időben
    - 1.3 Tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban
2. Megismerés
    - 2.1 Tapasztalatszerzés
    - 2.2 Képzelet
    - 2.3 Emlékezés
    - 2.4 Gondolkodás
    - 2.5 Ismeretek rendszerezése
    - 2.6 Ismerethordozók használata
3. Ismeretek alkalmazása
4. Problémakezelés és - megoldás
5. Alkotás és kreativitás: alkotás öntevékenyen, saját tervek szerint; alkotások adott feltételeknek megfelelően; átstrukturálás
6. Akarati, érzelmi, önfejlesztő képességek és együttéléssel kapcsolatos értékek
    - 6.1 Kommunikáció
    - 6.2 Együttműködés
    - 6.3 Motiváltság
    - 6.4 Önismeret, önértékelés, reflektálás, önszabályozás
7. A matematika épülésének elvei

Az exponenciális és logaritmus függvény tanításához szükséges fejlesztési feladatok, kompetenciák

A Nat két helyen említi ezt a témakört. Az egyik a gondolkodás fejlesztése témakörön belül az 5-12. évfolyamon: Az aritmetikai műveletek újraértelmezése, kiterjesztése, új műveletek értelmezése (hatvány, gyök, logaritmus). Megemlíti az ismeretek alkalmazása témakörön belül is az 5-12. évfolyamon: Ismeretek alkalmazása a gyakorlati életben és más tantárgyak keretében (pl. százalék, kamatos kamat, terület-, felszín-, térfogatszámítás, relatív gyakoriság, valószínűség, logaritmus függvény). Ezt a témakört még több fejlesztési területhez lehet kötni. Például a térben és időben való tájékozódáshoz, mivel az exponenciális, és logaritmus folyamatok az életben is előfordulnak. A megismeréshez, mivel a tanulónak el kell tudnia képzelni ezeket a folyamatokat, illetve a problémamegoldáshoz, mivel a megszerzett ismereteket a feladatokban tudnia kell alkalmazni.

1.2. Kerettantervek[3]

A Nat-ban megfogalmazott elvek, célok, fejlesztési feladatok és műveltségi tartalmak a képzési szakasz sajátosságai szerint a kerettantervekben öltenek testet. A kerettantervek meghatározzák a tantárgyak rendszerét, az egyes tantárgyak időkeretét (óraszámát), a tananyag felépítését és felosztását az egyes évfolyamok között, továbbá az adott szakasz befejező évfolyamának kimeneti követelményeit.

A középiskolai matematika kerettanterv a *Célok és feladatok* című résszel kezdődik, majd ezt követi a *Fejlesztési követelmények* leírása, majd évfolyamonként leírja a tanítandó tartalmakat.

A matematikatanítás célja, feladata a tanulók önálló, rendszerezett, logikus gondolkodásának kialakítása, fejlesztése. Mindezt az a folyamat biztosítja, amelynek során fokozatosan kiépítjük a matematika belső struktúráját (fogalmak, axiómák, tételek, bizonyítások elsajátítása), és a tanultakat változatos területeken alkalmazzuk.

[3] http://www.nefmi.gov.hu/letolt/kozokt/kerettanterv/korrekturas/gimnazium/g06_matematika.doc

A *Fejlesztési követelmények* című rész a következő öt pontot fejti ki részletesen:

- Az elsajátított matematikai fogalmak alkalmazása
- A matematikai szemlélet fejlesztése
- Gyakorlottság a matematikai problémák megoldásában, jártasság a logikus gondolkodásban
- Az elsajátított megismerési módszerek és gondolkodási műveletek alkalmazása
- Helyes tanulási szokások fejlesztése

A *Fejlesztési követelmények* után a kerettanterv konkrét ismereteket fogalmaz meg évfolyamonként lebontva táblázatos formában, három gondolat mentén. A *Tartalom* oszlopban minden évfolyamra meghatározza a tanítandó tananyagot. A matematika tanítása közben fejlesztendő képességeket a *Fejlesztési feladatok, tevékenységek* oszlopban sorolja fel. *A továbbhaladás feltételei* című oszlopban pedig azt a szintet írja le, amit a tanulónak el kell érnie ahhoz, hogy a további ismereteket is el tudja sajátítani. A tanítandó ismereteket 5 témakörbe csoportosítja:

- Gondolkodási módszerek
- Számtan, algebra
- Függvények, sorozatok
- Geometria
- Valószínűség, statisztika

A kerettantervben az exponenciális és a logaritmus függvény, illetve az ehhez kapcsolódó, ezt előkészítő hatványozás kiterjesztése című témakör a 11. évfolyam tananyagában szerepel a *Számtan, algebra,* illetve a *Függvények, sorozatok* témakörön belül. A kerettanterv ide vonatkozó részei:

11. évfolyam

Számtan, algebra

FEJLESZTÉSI FELADATOK, TEVÉKENYSÉGEK	TARTALOM	A TOVÁBBHALADÁS FELTÉTELEI
	Másodfokúra visszavezethető egyszerű egyenletek, egyenletrendszerek**.**	
A matematikai fogalom célszerű kiterjesztése, a fogalmak általánosításánál a permanencia elv felhasználása.	A hatványozás kiterjesztése pozitív alap esetén racionális kitevőkre. A hatványozás azonosságai és alkalmazásuk.	A hatványozás definíciója, műveletek, azonosságok ismerete egész kitevő esetén.
Bizonyítás iránti igény mélyítése. Matematikatörténeti vonatkozások megismerése (könyvtár- és internethasználat).	A logaritmus értelmezése. A logaritmus, mint a hatványozás inverz művelete. A logaritmus azonosságai.	A logaritmus fogalmának ismerete, azonosságainak alkalmazása egyszerűbb esetekben.
Az absztrakciós és szintetizáló képesség fejlesztése. Az önellenőrzés igényének fejlesztése.	A definíciókon és a megismert azonosságokon alapuló Exponenciális, és logaritmikus és trigonometrikus egyenletek.	A definíció és az azonosságok egyszerű alkalmazása exponenciális, logaritmusos és trigonometrikus egyenlet esetén egyszerű konkrét feladatokban.

Függvények, sorozatok

FEJLESZTÉSI FELADATOK, TEVÉKENYSÉGEK	TARTALOM	A TOVÁBBHALADÁS FELTÉTELEI
A függvényfogalom fejlesztése. Összefüggések felismerése a matematika különböző területei között. A bizonyításra való törekvés fejlesztése.	A 2^x, a 10^x függvény, az exponenciális függvény vizsgálata, exponenciális folyamatok a természetben. A logaritmus függvény, mint az exponenciális függvény inverze.	
Számítógép használata a függvényvizsgálatokban és a transzformációkban.	A szögfüggvényekről tanultak áttekintése. A tanult függvények tulajdonságai (értelmezési-tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték, monotonitás, periodicitás, paritás). A szögfüggvények transzformációik: $f(x) + c$; $f(x + c)$; $c\,f(x)$; $f(c\,x)$.	Az alapfüggvények ábrái és legfontosabb tulajdonságainak vizsgálata (értelmezési-tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték).

1.3. Helyi tanterv

Az iskolák a Nemzeti alaptantervben meghatározott értékeknek, elveknek, célkitűzéseknek és kiemelt fejlesztési feladatoknak megfelelően, a kerettantervek alapján készítik el a helyi tanterveket.

A helyi tantervek vizsgálatánál az ELTE Trefort Ágoston Gyakorlóiskolát választottam, mert itt voltam tanítási gyakorlaton, így személyes kötődésem van hozzá. A tanterv a 7-ediktől a 12-edik évfolyamig tartalmazza az iskola matematika tantervét. A tantervi célok elérése érdekében 9. évfolyamtól csoportbontásban tanítják a matematikát.

A tanterv felsorolja a Nat-ben is megtalálható kompetenciákat, ezeket különböző betűjelekkel rövidítik. A tantervben ezekkel a betűjelekkel jelölik a különböző fejlesztési feladatok, tevékenységeknél, hogy melyik kompetenciát fejlesztik.

Az exponenciális és a logaritmus függvény témakör, illetve ennek előkészítése a hatványozás kiterjesztése racionális kitevőre a 11. évfolyam tananyagában szerepel. Ebben az évben az évi óraszám 111 óra. Ebből a *Számtan, algebra* témakörre 31 órát terveznek, a *Függvények, sorozatok* témakörre pedig 14 órát.

A tanterv ide vonatkozó részei:

Számtan, algebra (31 óra)[4]

Fejlesztési feladatok, tevékenységek	Tartalom	A továbbhaladás feltételei
	Másodfokúra visszavezethető magasabb fokú egyenletek, egyenletrendszerek megoldása új ismeretlen bevezetésével.	
A matematikai fogalom célszerű kiterjesztése, a fogalmak általánosításánál a permanencia elv felhasználása.*(M4)*	A hatványozás kiterjesztése pozitív alap esetén racionális kitevőkre. A hatványozási azonosságok.	A hatványozás definíciója, műveletek, azonosságok ismerete egész kitevő esetén.
Bizonyítás iránti igény mélyítése. Matematikatörténeti vonatkozások megismerése (könyvtár- és internethasználat). *(M6)*	A logaritmus értelmezése. A logaritmus, mint a hatványozás inverz művelete. A logaritmus azonosságai.	A logaritmus fogalmának ismerete, azonosságainak alkalmazása egyszerűbb esetekben.
Az absztrakciós és szintetizáló képesség fejlesztése. Az önellenőrzés igényének fejlesztése. *(P)(ö)*	Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek.	A definíció és az azonosságok egyszerű alkalmazása exponenciális és logaritmusos egyenlet, egyenlőtlenség esetén.

[4] http://www.trefort.elte.hu/ped/matematika.doc

Függvények, sorozatok (14 óra)[5]

Fejlesztési feladatok, tevékenységek	Tartalom	A továbbhaladás feltételei
A függvényfogalom fejlesztése.*(AK)* Összefüggések felismerése a matematika különböző területei között. A bizonyításra való törekvés fejlesztése.*(I)*	A 2^x, a 10^x függvény, az exponenciális függvény vizsgálata, exponenciális folyamatok a természetben. A logaritmus függvény, mint az exponenciális függvény inverze.	
Számítógép használata a függvényvizsgálat során és a transzformációknál. *(M6)*	A szögfüggvényekről tanultak áttekintése. A tanult függvények tulajdonságai (értelmezési-tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték, monotonitás, periodicitás, paritás). A szögfüggvények transzformációi: $f(x) + c$; $f(x + c)$; $c\,f(x)$; $f(cx)$.	Az alapfüggvények ábrái és legfontosabb tulajdonságainak vizsgálata (értelmezési-tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték).

Az exponenciális és a logaritmus függvény, illetve az ehhez kapcsolódó témakörök tanítása közben fejlesztjük a gondolkodást, az ismerethordozók használatát, a problémakezelést – és megoldást, az önismeretet, önértékelést, reflektálást, önszabályozást, az alkotást, a kreativitást, és az ismeretek alkalmazását.

[5] http://www.trefort.elte.hu/ped/matematika.doc

2. A forgalomban lévő tankönyvcsaládok összehasonlító elemzése

Ebben a fejezetben áttekintem a forgalomban lévő 5 tankönyvcsalád ide vonatkozó részeit. Az 11. évfolyamosoknak írt tankönyvek, amelyeket összehasonlítok:

- Sokszínű matematika
- Vancsó-féle
- Hajnal-féle
- Czapáry-Gyapjas-féle
- Hajdu-féle

A tankönyvek elemzését négy témakör mentén végeztem el:

1. Az exponenciális függvény tárgyalásának módja
2. A logaritmus fogalmának bevezetése
3. A logaritmusfüggvény
4. A logaritmus azonosságai

Az első három témakört a következő 6 szempont alapján vizsgáltam:

1. Bevezető, motiváló feladatok
2. Definíció
3. Fogalomazonosítási és realizálási feladatok
4. Definíció következményei
5. Beágyazás fogalomhierarchiába
6. Alkalmazási feladatok

A logaritmus azonosságait pedig a következő szempontok alapján:

1. Bevezető, motiváló feladatok
2. Tétel megfogalmazása
3. Bizonyítás
4. Kapcsolat más tételekkel
5. Alkalmazási feladatok

2.1. AZ EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY TÁRGYALÁSÁNAK MÓDJA

2.1.1. Bevezető, motiváló feladatok

A Sokszínű matematika és a Czapáry-Gyapjas-féle tankönyv az egész kitevős hatványozás ismétlése után, a hatványozás kiterjesztéseként vezeti be az exponenciális függvényt, nem tartalmaz bevezető, motiváló feladatot.

A Hajnal-féle tankönyv máshogy közelít. Az egész kitevős hatványozás átismétlése után a baktériumok osztódásának példáján keresztül értelmezi a 2^x függvényt, majd definiálja az exponenciális függvényt egész kitevő esetén, melyet néhány exponenciális függvény ábrázolása követ egész kitevőre. Ezután a törtkitevő értelmezése következik, majd ábrázolja a 2^x függvényt racionális kitevőre. A grafikonon látszik, hogy most már sűrűbben helyezkednek el a pontok. Ezután értelmezi az irracionális kitevőjű hatványozást, majd definiálja az exponenciális függvényt a valós számok halmazán, amit különböző kitevőjű exponenciális függvények ábrázolása követ.

A Vancsó-féle tankönyv szintén más módszert alkalmaz. A fejezet a hatványozásról tanultak átismétlésével kezdődik, majd definiálja az exponenciális egyenletet. Egyszerűbb egyenletek megoldása következik, mint például a $2^x = 128$. A sakkjáték feltalálójának példáján keresztül definiálja az exponenciális növekedést, illetve fogyást, majd ezzel kapcsolatosan vannak alkalmazási feladatok. A törtkitevő értelmezése a vírusok számának exponenciális növekedésének példáján keresztül vezeti be, hány vírus lesz a szervezetben fél óra múlva, 1 óra 40 perc múlva típusú kérdésekkel. Szintén a vírusos példa segítségével értelmezi a negatív kitevőt a mennyi volt egy órával ezelőtt típusú kérdésen keresztül, majd a grafikon segítségével értelmezi az irracionális kitevőt. Ezt követi az exponenciális függvény definiálása. Nagyon sok gyakorlati példa után az exponenciális függvény tulajdonságairól esik szó.

A Hajdu-féle tankönyv szintén gyakorlati példával vezeti be az exponenciális függvényt, a tápoldatban lévő élesztőgombák számának növekedésének példáján keresztül. Néhány konkrét esetben ki kell számolni a tápoldatban lévő gombák tömegét. A példán keresztül vezeti be a törtkitevőt, illetve értelmezi a negatív kitevőt, majd matematikai modellt ad a gombatömeg időbeli változására. Ezután felsorol néhány hasonló matematikai modellel leírható folyamatot. Ábrázolja, majd jellemzi az *f*: **R** $\rightarrow$ **R**, *f*(x) = 2^x függvényt, és rámutat, hogy bármely pozitív valós szám felírható 2 hatványaként.

2.1.2. Definíció

A Sokszínű matematika, illetve a Hajnal-féle matematika könyv a következő definíciót használja: „Az *f*: **R** $\rightarrow$ **R**, *f*(x) = a^x; a > 0 függvényt *exponenciális függvénynek* nevezzük."

A Vancsó-féle tankönyv definíciója annyiban különbözik, hogy $f(x) = a \cdot b^x$ megadást használja és kiköti, hogy $a \neq 1$, tehát a konstans függvényt nem tekinti exponenciális függvénynek. A használt definíció: Az *exponenciális függvény* általános alakja: $f(x) = b \cdot a^x$, ahol $a > 0$, és $a \neq 1$.

A Czapáry-Gyapjas-féle könyvben először csak a racionális számok halmazán értelmezve definiálja az exponenciális függvényt: „Általánosan, legyen az *a* adott pozitív szám, és minden *x*-hez rendeljük hozzá *a*-nak *x*-edik hatványát. Ezt megtehetjük, ha x racionális szám. Ez a hozzárendelés egyértelmű, tehát függvény. Az *f*: **Q** $\rightarrow$ **R**, *f*(x) = a^x függvényt *a* alapú exponenciális függvénynek nevezzük." Ezután belátja, hogy a függvény grafikonja összeköthető „folytonos vonallal", és definiálja a valós számok halmazán értelmezett exponenciális függvényt.

A Hajdu-féle tankönyv kétféleképpen is definiálja az exponenciális függvényt. Az első definíció a Sokszínű matematika és a Hajnal-féle tankönyvhöz hasonló: „Ha *a* adott pozitív valós szám (a > 0; a $\in$R), akkor az *f*: **R** $\rightarrow$ $\mathbf{R}^+$**;** $x \mapsto a^x$ függvényt *a* alapú exponenciális függvénynek nevezzük." A többi tankönyvtől eltérően használ egy másik definíciót is: „Az olyan függvényt, amely leképezési szabályában a változó a kitevőben szerepel, továbbá az alap pozitív szám, exponenciális függvénynek nevezzük.

2.1.3. Fogalomazonosítási és realizálási feladatok

A vizsgált tankönyvekben nem voltak ilyen jellegű feladatok.

2.1.4. Definíció következményei

A definíció kimondása után a tankönyvekben az exponenciális függvény ábrázolása, transzformációi és jellemzése következik különböző alapok esetén. A Czapáry-Gyapjas-féle tankönyv nem tartalmaz mintapéldákat, és kevés függvényábrázolás van benne. A többi vizsgált tankönyvben több függvényábrázolása is szerepel, kidolgozott mintapéldaként. Rámutatnak, hogy változik a függvény grafikonja különböző alapok esetén. A Hajnal-féle könyv egy mintapéldán keresztül előkészíti a logaritmus fogalmát.

2.1.5. Beágyazás fogalomhierarchiába

Egyik tankönyv sem tartalmaz ilyen jellegű feladatokat. A Sokszínű matematika az exponenciális függvény definiálása előtt szót ejt a hatvány- és gyökfüggvényekről, illetve ezek kapcsolatáról. Ábrázolja a másod-, harmad- és negyedfokú hatványfüggvényeket, illetve az ezekhez tartozó megfelelő gyökfüggvényeket közös koordináta-rendszerben, és rámutat, hogy mi a kapcsolat közöttük, definiálja az inverz fogalmát. Az exponenciális függvény tárgyalásánál nem utal arra, hogy ez hogyan kapcsolódik a témakörhöz.

2.1.6. Alkalmazási feladatok

A Sokszínű matematika tankönyv két alkalmazási feladatot tartalmaz. Az egyik egy kidolgozott példa a légnyomásról, a másik egy gyakorló feladat a radioaktív bomlásról. A Vancsó-féle tankönyv bővelkedik alkalmazási feladatokban. Több kidolgozott példa is található benne. Vannak természeti folyamatokat leíró példák, kamatos kamat számítás, életből vett gyakorlati példák, például egy városi közlekedési vállalat bérlet eladásáról szóló feladat. A Hajnal-féle tankönyvben egy alkalmazási feladat szerepel a baktériumok osztódásáról, ezen keresztül vezeti be az exponenciális függvényt egész kitevőre. A Czapáry-Gyapjas-féle tankönyv sajnos egyáltalán nem tartalmaz alkalmazási feladatot. A Hajdu-féle tankönyv a bevezető példán kívül egy alkalmazási feladatot tartalmaz.

2.2. A LOGARITMUS FOGALMÁNAK BEVEZETÉSE

2.2.1. Bevezető, motiváló feladatok

A Sokszínű matematika a baktériumok szaporodásáról szóló feladattal vezeti be a logaritmus fogalmát. Mennyi idő múlva ér el a baktériumok száma egy bizonyos számot, ha óránként megduplázódnak kérdést teszi fel. A 2^x függvény grafikonjáról olvassa le a közelítő eredményt, majd definiálja a logaritmust.

A Vancsó-féle tankönyv a tízes alapú logaritmust vezeti be először egy egyenlet megoldásán keresztül. Egy könnyebb egyenleten megmutatja, hogy ezt még ki tudjuk találni, de bonyolultabb egyenlet esetén már nem, így be kell vezetnünk egy új fogalmat, a logaritmust. A definíció után sok gyakorlati példa következik 10-es alapú logaritmusra, és csak ezután definiálja a tetszőleges alapú logaritmust.

A Hajnal-féle tankönyv hasonlóan vezeti be a logaritmust, mint a Sokszínű matematika. Az exponenciális függvény tárgyalásánál egy mintapéldán keresztül készíti elő a logaritmus fogalmát. Ez a feladat a következő: Keressük annak a kitevőnek a közelítő értékét, amelyre a 2-t felemelve 5-öt, 3-at, 0,5-et, 0,1-et kapunk. A 2^x függvény grafikonjáról olvassa le a közelítő megoldást. Ezután *A logaritmus fogalma* című fejezetben definiálja a logaritmus fogalmát.

A Czapáry-Gyapjas-féle tankönyv a 10-es alapú hatványtáblázaton keresztül vezeti be a logaritmus fogalmát. A négyjegyű függvénytáblázatban a megfelelő táblázatban megtaláljuk azt a hatványkitevőt, amelyre hatványozva a 10-et megkapjuk a számot. Ezután definiálja a 10-es alapú logaritmus fogalmát, majd a tetszőleges alapú logaritmus fogalmát is.

A Hajdu-féle tankönyv egy számolási feladattal közelít, egy négytagú szorzást kell elvégezni. Rámutat, hogy minden pozitív valós szám felírható valamely pozitív valós szám valós kitevőjű hatványaként. Ez lehetőséget ad arra, hogy hosszú, bonyolult szorzásokat, osztásokat, hatványozásokat egyszerűbben elvégezzünk.

2.2.2. Definíció

A Vancsó-féle tankönyv először a 10-es alapú logaritmust definiálja, és csak ezután a tetszőleges alapút. Egy pozitív valós szám tízes alapú logaritmusa azt a kitevőt jelenti, amelyre tízet emelve a kérdéses pozitív valós számot kapjuk, azaz: lg $y = x$, ha $10^x = y$, ahol $y > 0$. A tetszőleges alapú logaritmus definíciója lényegében megegyezik mindegyik tankönyvben: „Egy pozitív b szám a alapú logaritmusa ($a > 0$, $a \neq 1$) az a kitevő, melyre az a alapot emelve éppen b-t kapjuk: $\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$, ahol $b > 0$, és $a > 0$, $a \neq 1$."

A Hajdu-féle tankönyv több definíciót is ad még a logaritmusra.

- Legyen $a \neq 1$ pozitív valós szám. Tetszőleges b pozitív valós szám esetén létezik pontosan egy olyan c valós szám, hogy $b = a^x$. Ekkor a c hatványkitevőt a b szám a alapú logaritmusának nevezzük. Jelölés: $\log_a b = x$
- Ha egy pozitív valós számot adott, 1-től különböző alapú hatvány alakban írunk fel, akkor ennek a hatványnak a kitevőjét logaritmusnak nevezzük.

2.2.3. Fogalomazonosítási és realizálási feladatok

Ilyen jellegű feladat nem volt egyik tankönyvben sem.

2.2.4. Definíció következményei

A Vancsó-féle és a Hajdú-féle tankönyv a logaritmus néhány tulajdonságát sorolja fel, például $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$. A Czapáry-Gyapjas-féle tankönyv megemlít néhány tulajdonságot a definíció után, hogy miért nem lehet 0 és 1, illetve negatív számot választani alapnak. A többi tankönyvben nem találtam hasonló típusú megjegyzést.

2.2.5. Beágyazás fogalomhierarchiába

Egyedül a Vancsó-féle tankönyv tesz említést arra, hogy a logaritmus a hatványozás inverz művelete, ha a kitevőre vagyunk kíváncsiak. A hatványozás másik inverz művelete a gyökvonás, amennyiben az alapra vagyunk kíváncsiak. A tízes alapú logaritmus tárgyalása előtt tisztázza a hatványalap, hatványkitevő, hatványérték, hatványozás és gyökvonás fogalmakat. A hatványértéket hatványozással, a hatványalapot gyökvonással tudjuk kiszámítani. Ebben a tankönyvben szerepel egy olyan feladat, ami segítheti a fogalomrendszerbe való beágyazást. Egy megadott egyenletet fel kell írni hatvány, gyök, és logaritmus formában is.

A Sokszínű matematika az ismétlésnél megemlíti a gyökvonást, mint a hatványozás inverz művelete, de aztán nem hozza kapcsolatba a logaritmussal.

2.2.6. Alkalmazási feladatok

A Sokszínű matematikában a bevezető feladaton kívül egy alkalmazási feladat van a radioaktív bomlásról, de ez egy nehezebb, csillagos feladatként szerepel. Ezen kívül a Gyakorlati alkalmazások című fejezetben szerepel 4 kidolgozott példa. A Vancsó-féle tankönyvben sok alkalmazási feladat szerepel, leginkább a tízes alapú logaritmusra. A Hajdu-féle tankönyvben is sok feladat szerepel a logaritmus alkalmazására. A másik két tankönyvben nem találtam egyáltalán alkalmazási feladatot.

2.3. A LOGARITMUSFÜGGVÉNY

2.3.1. Bevezető, motiváló feladatok

A Hajnal-féle könyv kivételével mindegyik tankönyv az exponenciális függvény inverzeként vezeti be a logaritmus függvényt. A Hajnal-féle tankönyv definiálja a logaritmus függvényt, majd egy koordináta-rendszerben ábrázol különböző alapú logaritmus függvényeket. Ez után mutat csak rá, hogy a logaritmus függvény és az exponenciális függvény egymás inverzei.

A Hajdu-féle tankönyv először ábrázolja az f: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \log_2 x$, majd ezt jellemzi.

A Vancsó-féle matematika könyv felsorolja a logaritmus függvény tulajdonságait, de nem ábrázol különböző alapú függvényeket. A Sokszínű matematika tárgyalja szemléletesen a függvény-transzformációkat is.

2.3.2. Definíció

A definíciók lényegében megegyeznek a tankönyvekben. A Czapáry-Gyapjas-féle tankönyv az exponenciális függvény inverzeként definiálja a logaritmus függvényt, elég körülményesen: „Általánosan, az f: $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a > 1$ logaritmusfüggvény a g: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $g(x) = a^x$, $a > 1$ exponenciális függvény inverze és megfordítva.„

Konkrét definíció a Hajnal-féle tankönyvben van, a többi könyvben nincs definiálva a logaritmus függvény. A Hajnal-féle definíció a következő: „Az f: $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \log_a x$ ($0 < a$ és $a \neq 1$) függvényt logaritmus függvénynek nevezzük. Más jelöléssel: $x \mapsto \log_a x$

2.3.3. Fogalomazonosítási és realizálási feladatok

Egyik tankönyv sem tartalmaz ilyen jellegű feladatokat.

2.3.4. Definíció következményei

A definíció következményeként a logaritmusfüggvény tulajdonságairól mindegyik tankönyvben szó esik. A Vancsó-féle tankönyv összefoglalást ad a logaritmus függvény tulajdonságairól.

2.3.5. Beágyazás fogalomhierarchiába

Mindegyik tankönyv rámutat az exponenciális és a logaritmus függvény kapcsolatára. A Hajdu-féle tankönyv összehasonlítja a két függvény tulajdonságait. A Czapáry-Gyapjas-féle tankönyvben szerepel olyan feladat, melyben ábrázolni kell közös koordinátarendszerben két függvényt, és meg kell állapítani, hogy milyen kapcsolat van a kettő között.

2.3.6. Alkalmazási feladatok

A logaritmusfüggvényre vonatkozó alkalmazási feladat csak a Sokszínű matematikában szerepel a dísznövény növekedéséről. Grafikonról kell leolvasni adatokat, és meg kell adni a függvény hozzárendelési szabályát.

2.4. A LOGARITMUS AZONOSSÁGAI

2.4.1. Bevezető, motiváló feladatok

A Hajdu-féle tankönyv az alga képződésének példájával szemlélteti, hogy nagy számok esetén a számológép hibát jelez, az írásbeli algoritmus pedig körülményes lenne, ezért célszerű alkalmazni a 10 hatványairól és a 10-es alapú logaritmusról tanultakat. A 10 hatványaival is és logaritmusokkal is kiszámolja párhuzamosan egymás mellett ugyanazt a példát, és rámutat, hogy a végrehajtott számítások esetén elegendő csak a kitevőket kiírni, így a hatványozás azonosságait átfogalmazhatjuk a logaritmusokkal végzett műveletekre.

A Sokszínű matematika egy konkrét példán keresztül rámutat arra, hogy a szorzat logaritmusa megegyezik a tényezők logaritmusának összegével, és hasonlóan a többi azonosságra.

2.4.2. Tétel megfogalmazása

Mindegyik tankönyv lényegében ugyanúgy mondja ki a tételeket. Szerepel a tétel megfogalmazása szövegesen, majd képletekkel is. Például a szorzat logaritmusára vonatkozó azonosság a következőképpen hangzik: Szorzat logaritmusa megegyezik a tényezők logaritmusának összegével. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$, ahol $x, y > 0$; $a > 0$; $a \neq 1$.

2.4.3. Bizonyítás

A vizsgált tankönyvekben a bizonyítások menete megegyezik. A Czapáry-féle és a Hajnal-féle tankönyvekben először a bizonyítás szerepel, és utána mondja ki a tételeket. A logaritmus definíciója és a hatványozás azonosságainak segítségével rámutat a logaritmus azonosságaira, és ezután mondja ki a tételeket képlettel, majd szövegesen. A Sokszínű matematika, a Hajdu-féle és a Vancsó-féle tankönyv először kimondja a tételeket és ezután bebizonyítja. Mind a három tankönyvben a bizonyítások után szerepel egy mintapélda az azonosság alkalmazására.

2.4.4. Kapcsolat más tételekkel

A Vancsó-féle tankönyv többször is kihangsúlyozza, hogy a logaritmus nem más, mint egy kitevő, és kapcsolatba is hozza a hatványozás azonosságaival. A szorzat logaritmusára vonatkozó tétel kimondása előtt emlékeztet arra az azonosságra, hogy azonos alapú hatványok szorzásakor a kitevők összeadódnak, a szorzat kitevője a tényezők kitevőinek összege. Hasonlóan a többi tétel előtt is leírja a megfelelő hatványozásra vonatkozó azonosságot.

2.4.5. Alkalmazási feladatok

Leginkább különböző típusú számolási feladatok vannak a tankönyvekben. Kifejezések pontos értékét kell kiszámítani számológép nélkül, és a logaritmus azonosságait gyakoroltató feladatok is vannak szép számmal mindegyik tankönyvben.

2.5. ÖSSZEFOGLALÁS

Összefoglalva elmondható, hogy a tankönyvek tartalma megfelel a kerettanterv és érettségi követelményeknek. A Hajnal-féle és a Czapáry-Gyapjas-féle tankönyvben kevés a gyakorlatias, életszerű alkalmazási feladat. A másik három tankönyv tartalmaz ilyen jellegű feladatokat szép számmal. Sok példával és gyakorló feladattal találkozunk az egyes fejezetek végén, de fogalomazonosítási és fogalomrealizálási feladat alig szerepel a tankönyvekben.

A Sokszínű matematika, ahogy a neve is mutatja, sokszínű. Sok szép színes ábrát, képet tartalmaz, amelyek segítik a megértést. Tartalmilag is jól fel van építve. A Vancsó-féle tankönyvben is sok szemléletes ábra, illetve feladat van, nagyon jól fel van építve és jól rámutat a fogalmak közötti kapcsolatokra. A Hajdu-féle matematika tankönyv nagyon szemléletes bevezető feladatokat tartalmaz, amely jól előkészíti a témakört.

Elsősorban ebből a három tankönyvből merítettem ötleteket, illetve a saját elképzeléseim szerint építettem fel a témakört.

3. Érettségi feladatok

Ebben a fejezetben megnézem 2005-től kezdve, hogy a középszintű és az emelt szintű érettségi feladatsorokban milyen típusú feladatok fordultak elő ebben a témakörben, majd megvizsgálom, hogy a forgalomban lévő tankönyvek megfelelnek-e a követelményeknek, biztosítanak-e az érettségi vizsga feladataihoz gyakorló feladatokat a témakörből, jól felkészítik-e a tanulókat az érettségi vizsgára.

3.1. Középszintű érettségi feladatok[6]

7 típusú feladat fordul elő a középszintű érettségi feladatokban. Ezek a következők:

1. Exponenciális függvény
2. Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek
3. Logaritmus definíciója
4. Logaritmus azonosságai
5. Logaritmusfüggvény
6. Logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek
7. Alkalmazási feladatok

3.1.1. Exponenciális függvény

1. <u>2010. október 19.</u>

Milyen valós számokat jelöl az a, ha tudjuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto a^x$ függvény szigorúan monoton növekvő?

2 pont

[6] http://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/feladatsorok

3.1.2. Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek

1. <u>2006. május 9.</u>

Oldja meg a következő egyenletet!

$9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$ 6 pont

2. <u>2007. október 25.</u>

a) Mely pozitív egész számokra igaz a következő egyenlőtlenség?

$$5^{x-2} < 5^{13-2x}$$

4 pont

b) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$9^{\sqrt{x}} = 3^{x-3}$$

8 pont

Összesen: 12 pont

3. <u>2011. május 3.</u>

Adja meg az alábbi két egyenlet valós gyökeit!

a) $5^{2x} = 625$ 1 pont

b) $2^y = \frac{1}{32}$ 1 pont

Összesen: 2 pont

4. <u>2012. május 8.</u>

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$5^{x+1} + 5^{x+2} = 30$

5. <u>2013. május 7.</u>

Adja meg az *x* négy tizedesjegyre kerekített értékét, ha $4 \cdot 3^x + 3^x = 20$.

4 pont

3.1.3. Logaritmus definíciója

1. <u>2007. október 25.</u>

Melyik a nagyobb: $A = \sin\frac{7\pi}{2}$ vagy $B = \log_2 \frac{1}{4}$?

A		*B*

(Írja a megfelelő relációs jelet a válaszmezőbe! Válaszát indokolja!)

2 pont

2. <u>2009. május 5.</u>

Adja meg a $\log_3 81$ kifejezés pontos értékét!

2 pont

3. <u>2011. május 3.</u>

Melyik szám nagyobb?

$A = \lg\frac{1}{10}$ vagy $B = \cos 8\pi$

2 pont

4. <u>2012. május 8.</u>

Adja meg azokat az *x* valós számokat, melyekre teljesül: $\lg_2 x^2 = 4$

Válaszát indokolja!

3 pont

3.1.4. Logaritmus azonosságai

1. **<u>2006. február 21.</u>**

Mekkora x értéke, ha lg x = lg 3 + lg 25

2 pont

2. **<u>2007. október 25.</u>**

Adja meg a $\lg x^2 = 2 \lg x$ egyenlet megoldáshalmazát!

2 pont

3. **<u>2010. május 4.</u>**

Az $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto 3 + \log_2 x$ függvény az alább megadott függvények közül melyikkel azonos?

A) $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto 3\log_2 x$

B) $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto \log_2(8x)$

C) $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto \log_2(3x)$

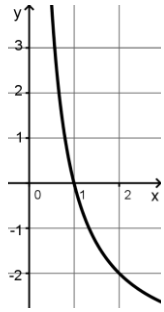
D) $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto \log_2(x^3)$

2 pont

3.1.5. Logaritmusfüggvény

1. **<u>2011. október 18.</u>**

István az $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x \quad x > 0$ függvény grafikonját akarta felvázolni, de ez nem sikerült neki, több hibát is elkövetett (a hibás vázlat látható a mellékelt ábrán). Döntse el, hogy melyik igaz az alábbi állítások közül!



A) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény szigorúan monoton csökkenő.

B) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény 2-höz –2-t rendel.

C) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény zérushelye 1.

2 pont

3.1.6. Logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek

1. **<u>2005. október 25.</u>**

Oldja meg az alábbi egyenletet!

$\log_3\left(\sqrt{x+1}+1\right)=2$ x valós szám, és x ≥ -1

6 pont

2. **<u>2006. május 9.</u>**

Adott a következő egyenletrendszer:

$$(1)\ 2\lg(y+1)=\lg(x+11)$$
$$(2)\ y=2x$$

a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben azokat a $P(x;\ y)$ pontokat, amelyeknek koordinátái kielégítik a (2) egyenletet!

2 pont

b) Milyen *x*, illetve y valós számokra értelmezhető mindkét egyenlet?

2 pont

c) Oldja meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

11 pont

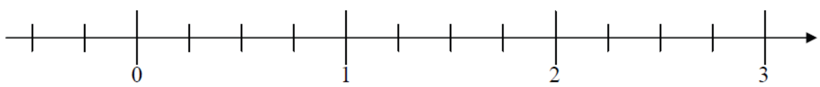
d) Jelölje meg az egyenletrendszer megoldáshalmazát az a) kérdéshez használt derékszögű koordináta-rendszerben!

2 pont

Összesen: 7 pont

3. <u>2007. május 8.</u>

Oldja meg a pozitív valós számok halmazán a $\log_{16} x = -\frac{1}{2}$ egyenletet! Jelölje a megadott számegyenesen az egyenlet megoldását!



3 pont

4. <u>2008. május 6.</u>

Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\lg(x+15)^2 - \lg(3x+5) = \lg 2$ 6 pont

b) $25^{\sqrt{x}} = 5 \cdot 5^{3\sqrt{x}}$ 6 pont

Összesen: 12 pont

5. <u>2008. október 21.</u>

Határozza meg az alábbi egyenlet valós megoldásait!

$(\log_2 x - 3)(\log_2 x^2 + 6) = 0$ 7 pont

3.1.7. Alkalmazási feladatok

1. <u>2006. október 25.</u>

A szociológusok az országok statisztikai adatainak összehasonlításánál használják a következő tapasztalati képletet: $É = 75{,}5 - 5 \cdot 10^{\frac{6000-G}{6090}}$.

A képletben az *É* a születéskor várható átlagos élettartam években, *G* az ország egy főre jutó nemzeti összterméke (a GDP) reálértékben, átszámítva 1980-as dollárra.

a) Mennyi volt 2005-ben a várható élettartam abban az országban, amelyben akkor a *G* nagysága 1090 dollár volt?

4 pont

b) Mennyivel változhat ebben az országban a várható élettartam 2020-ra, ha a gazdasági előrejelzések szerint ekkorra *G* értéke a 2005-ös szint háromszorosára nő?

5 pont

c) Egy másik országban 2005-ben a születéskor várható átlagos élettartam 68 év. Mekkora volt ekkor ebben az országban a GDP (*G*) nagysága (reálértékben, átszámítva 1980-as dollárra)?

8 pont

Összesen: 17 pont

2. 2008. május 6.

A Kis család 700 000 Ft megtakarított pénzét éves lekötésű takarékban helyezte el az *A* Bankban, kamatos kamatra. A pénz két évig kamatozott, évi 6%-os kamatos kamattal. (A kamatláb tehát ebben a bankban 6% volt.)

a) Legfeljebb mekkora összeget vehettek fel a két év elteltével, ha a kamatláb a két év során nem változott?

3 pont

A Nagy család a *B* Bankban 800 000 Ft-ot helyezett el, szintén két évre, kamatos kamatra.

b) Hány százalékos volt a *B* Bankban az első év folyamán a kamatláb, ha a bank ezt a kamatlábat a második évre 3%-kal növelte, és így a második év végén a Nagy család 907 200 Ft-ot vehetett fel?

10 pont

c) A Nagy család a bankból felvett 907 200 Ft-ért különféle tartós fogyasztási cikkeket vásárolt. Hány forintot kellett volna fizetniük ugyanezekért a fogyasztási cikkekért két évvel korábban, ha a vásárolt termékek ára az eltelt két év során csak a 4%-os átlagos éves inflációnak megfelelően változott? (A 4%-os átlagos éves infláció szemléletesen azt jelenti, hogy az előző évben 100 Ft-ért vásárolt javakért idén 104 Ft-ot kell fizetni.)

4 pont

Összesen: 17 pont

3. 2008. október 21.

Csilla és Csongor ikrek, és születésükkor mindkettőjük részére takarékkönyvet nyitottak a nagyszülők. 18 éves korukig egyikőjük számlájáról sem vettek fel pénzt.

Csilla számlájára a születésekor 500 000 Ft-ot helyeztek el. Ez az összeg évi 8%-kal kamatozik.

a) Legfeljebb mekkora összeget vehet fel Csilla a 18. születésnapján a számlájáról, ha a kamat mindvégig 8%? (A pénzt forintra kerekített értékben fizeti ki a bank.)

5 pont

Csongor számlájára a születésekor 400 000 Ft-ot helyeztek el. Ez az összeg félévente kamatozik, mindig azonos kamatlábbal.

b) Mekkora ez a félévenkénti kamatláb, ha tudjuk, hogy Csongor a számlájáról a 18. születésnapján 2 millió forintot vehet fel? (A kamatláb mindvégig állandó.) A kamatlábat két tizedesjegyre kerekítve adja meg!

7 pont

Összesen: 12 pont

4. <u>2009. október 20.</u>

Ha az eredetileg I_0 $\left(\frac{watt}{m^2}\right)$ intenzitású lézersugár x mm (x ≥ 0) mélyre hatol egy bizonyos anyagban, akkor ebben a mélységben intenzitása $I(x) = I_0 \cdot 0{,}1^{\frac{x}{6}} \left(\frac{watt}{m^2}\right)$ lesz.

Ezt az anyagot $I_0 = 800$ $\left(\frac{watt}{m^2}\right)$ intenzitású lézersugárral világítják meg.

a) Töltse ki az alábbi táblázatot! (Az intenzitásra kapott mérőszámokat egészre kerekítve adja meg!)

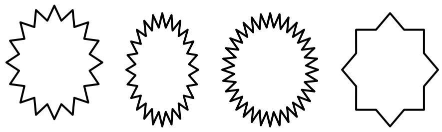
x (mm)	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x)\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$	800						

3 pont

b) Mekkora mélységben lesz a behatoló lézersugár intenzitása az eredeti érték (I_0) 15%-a? (A választ tizedmilliméterre kerekítve adja meg!)

6 pont

c) Egy gyermekszínház műsorának valamelyik jelenetében dekorációként az ábrán látható elrendezés szerinti négy csillag közül egyeseket zöld vagy kék lézerfénnyel rajzolnak ki. Hány különböző dekorációs terv készülhet, ha legalább egy csillagot ki kell rajzolni a lézerrel?



8 pont

Összesen: 17 pont

5. <u>2010. május 4.</u>

Statisztikai adatok szerint az 1997-es év utáni években 2003-mal bezárólag a világon évente átlagosan 1,1%-kal több autót gyártottak, mint a megelőző évben. A 2003-at követő években, egészen 2007-tel bezárólag évente átlagosan már 5,4%-kal gyártottak többet, mint a megelőző évben.

2003-ban összesen 41,9 millió autó készült.

a) Hány autót gyártottak a világon 2007-ben?

4 pont

b) Hány autót gyártottak a világon 1997-ben?

4 pont

Válaszait százezerre kerekítve adja meg!

2008-ban az előző évhez képest csökkent a gyártott autók száma, ekkor a világon összesen 48,8 millió új autó hagyta el a gyárakat. 2008-ban előrejelzés készült a következő 5 évre vonatkozóan. Eszerint 2013-ban 38 millió autót fognak gyártani. Az előrejelzés úgy számolt, hogy minden évben az előző évinek ugyanakkora százalékával csökken a termelés.

c) Hány százalékkal csökken az előrejelzés szerint az évenkénti termelés a 2008-at követő 5 év során?

4 pont

Az eredményt egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!

d) Elfogadjuk az előrejelzés adatát, majd azt feltételezzük, hogy 2013 után évente 3%-kal csökken a gyártott autók száma. Melyik évben lesz így az abban az évben gyártott autók száma a 2013-ban gyártottaknak a 76%-a?

5 pont

Összesen: 17 pont

6. <u>2011. május 3.</u>

Egy új típusú, az alacsonyabb nyomások mérésére kifejlesztett műszer tesztelése során azt tapasztalták, hogy a műszer által mért p_m és a valódi p_v nyomás között a $\lg p_m = 0{,}8 \cdot \lg p_v + 0{,}301$ összefüggés áll fenn.

A műszer által mért és a valódi nyomás egyaránt pascal (Pa) egységekben szerepel a képletben.

a) Mennyit mér az új műszer 20 Pa valódi nyomás esetén?

4 pont

b) Mennyi valójában a nyomás, ha a műszer 50 Pa értéket mutat?

6 pont

c) Mekkora nyomás esetén mutatja a műszer a valódi nyomást?

7 pont

A pascalban kiszámított értékeket egész számra kerekítve adja meg!

Összesen:17 pont

7. <u>2011. október 18.</u>

A 2000 eurós tőke évi 6 %-os kamatos kamat mellett hány teljes év elteltével nőne 4024 euróra? Megoldását részletezze!

4 pont

8. <u>2011. október 18.</u>

Újsághír: *„Szeizmológusok számításai alapján a 2004. december 26-án Szumátra szigetének közelében kipattant földrengés a Richter-skála szerint 9,3-es erősségű volt; a rengést követő cunami (szökőár) halálos áldozatainak száma megközelítette a 300 ezret."*

A földrengés Richter-skála szerinti „erőssége" és a rengés középpontjában felszabaduló energia között fennálló összefüggés: $M = -4{,}42 + \frac{2}{3}\lg E$.

Ebben a képletben E a földrengés középpontjában felszabaduló energia mérőszáma (joule-ban mérve), M pedig a földrengés erősségét megadó nem negatív szám a Richterskálán.

a) A Nagasakira 1945-ben ledobott atombomba felrobbanásakor felszabaduló energia $1{,}344 \cdot 10^{14}$ joule volt. A Richter-skála szerint mekkora erősségű az a földrengés, amelynek középpontjában ekkora energia szabadul fel?

3 pont

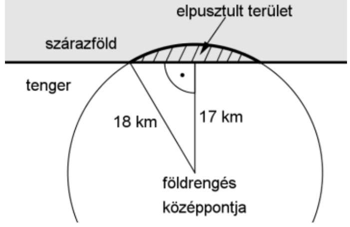
b) A 2004. december 26-i szumátrai földrengésben mekkora volt a felszabadult energia?

3 pont

c) A 2007-es chilei nagy földrengés erőssége a Richter-skála szerint 2-vel nagyobb volt, mint annak a kanadai földrengésnek az erőssége, amely ugyanebben az évben következett be. Hányszor akkora energia szabadult fel a chilei földrengésben, mint a kanadaiban?

5 pont

d) Az óceánban fekvő egyik szigeten a földrengést követően kialakuló szökőár egy körszelet alakú részt tarolt le. A körszeletet határoló körív középpontja a rengés középpontja, sugara pedig 18 km. A rengés középpontja a sziget partjától 17 km



távolságban volt (lásd a felülnézeti ábrán). Mekkora a szárazföldön elpusztult rész területe egész négyzetkilométerre kerekítve?

6 pont

Összesen: 17 pont

9. 2012. október 12.

Stefi mobiltelefon-költségeinek fedezésére feltöltőkártyát szokott vásárolni. A mobiltársaság ebben az esetben sem előfizetési díjat, sem hívásonkénti kapcsolási díjat nem számol fel. Csúcsidőben a percdíj 25 forinttal drágább, mint csúcsidőn kívül. Stefi az elmúlt négy hétben összesen 2 órát telefonált és 4000 Ft-ot használt fel kártyája egyenlegéből úgy, hogy ugyanannyi pénzt költött csúcsidőn belüli, mint csúcsidőn kívüli beszélgetésekre.

a) Hány percet beszélt Stefi mobiltelefonján csúcsidőben az elmúlt négy hétben?

11 pont

A mobiltársaság Telint néven új mobilinternet csomagot vezet be a piacra január elsején. Januárban 10 000 új előfizetőt várnak, majd ezután minden hónapban az előző havinál 7,5%-kal több új előfizetőre számítanak. Abban a hónapban, amikor az adott havi új előfizetők száma eléri a 20 000-et, a társaság változtatni szeretne a Telint csomag árán.

b) Számítsa ki, hogy a tervek alapján melyik hónapban éri el a Telint csomag egyhavi új előfizetőinek a száma a 20 000-et!

6 pont

Összesen: 17 pont

A középszintű érettségi feladatok értékelése

A 7 típus közül az alkalmazási feladatokból szerepel a legtöbb az érettségi feladatsorokban. Előfordul kamatos kamat számítás, illetve az életből vett gyakorlati példák, amelyek exponenciális vagy logaritmikus összefüggéseket írnak le. Ezek a feladatok az érettségi feladatsor második részében találhatóak, általában a választható feladatok között.

Az exponenciális, illetve a logaritmus függvény ábrázolásáról, illetve a függvény tulajdonságairól szóló feladat kevés van, összesen kettőt találtam, egy exponenciális függvényt, és egy logaritmus függvényt.

A logaritmus definíciójára és azonosságaira rákérdező feladatot többet is találtam az érettségi feladatsorok első részében.

Exponenciális és logaritmikus egyenletekből is elég sok feladat szerepel, illetve egy egyszerűbb egyenletrendszert is találtam, és egy könnyebb exponenciális egyenlőtlenséget.

A forgalomban lévő tankönyvek közül az érettségire legjobban a Sokszínű matematika és a Vancsó-féle tankönyv készít fel. Minden tankönyvben szerepelnek szép számmal az exponenciális és logaritmus függvényről szóló feladatok, a logaritmus definícióját gyakoroltató feladatok, egyenletek, de alkalmazási feladatokból elég kevés szerepel a tankönyvekben. Az érettségiben pedig ebből a típusból van leginkább. A Sokszínű matematikában és a Vancsó-féle tankönyvben is több kidolgozott példa szerepel az exponenciális függvény és a logaritmus függvény alkalmazására. A Vancsó-féle tankönyvben ezen kívül sok gyakorló feladat is szerepel.

3.2. EMELT SZINTŰ ÉRETTSÉGI FELADATOK

A középszintű érettségi feladatsorokban előforduló feladattípusokat megnéztem az emelt szintű érettségi feladatsorokban is.

1. Exponenciális függvény
2. Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek
3. Logaritmus definíciója
4. Logaritmus azonosságai
5. Logaritmusfüggvény
6. Logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek
7. Alkalmazási feladatok

3.2.1. Exponenciális függvény

Nem találtam ilyen jellegű feladatot.

3.2.2. Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek

2006. október 25.

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$2^x = 3^{2x+1}$$

6 pont

3.2.3. Logaritmus definíciója

1. **2007. május 8.**

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{x^2 - 10x - 24}{x^2 - x - 6} = \sin\frac{\pi}{2} - \lg 1 + 2^{\log_2 9}$$

11 pont

2. **2012. október 16.**

Az alábbi három kifejezés mindegyike esetén adja meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a kifejezés értelmezhető!

a) $\cos(\log_2 \sqrt{x})$ 3 pont

b) $\sqrt{\log_2(\cos x)}$ 5 pont

c) $\log_{\sqrt{x}}(\cos^2 x)$ 5 pont

Összesen: 13 pont

3.2.4. Logaritmus azonosságai

Nem találtam ilyen jellegű feladatot.

3.2.5. Logaritmusfüggvény

Nem találtam ilyen jellegű feladatot.

3.2.6. Logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

1. **2005.október 25.**

Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\log_x(x^2y^3) + \log_y(x^3y) = 9$$
$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 0$$

16 pont

2. **2006. május 9.**

Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y valós számok!

$$10^y = x - 3$$
$$\lg(x^2 - 4x + 3) = 2y + 1$$

11 pont

3. <u>2006. május 9.</u>

Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\lg(x+y)=2\lg x$$
$$\lg x=\lg 2+\lg(y-1)$$

9 pont

4. <u>2007. október 25.</u>

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\lg(x+7)+\lg(3x+1)=2$$

5 pont

5. <u>2008. október 21.</u>

Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$(x-2)\cdot\lg(x^2-8)=0$$

5 pont

6. <u>2009. május 5.</u>

Igazolja, hogy az alábbi négy egyenlet közül az a) és b) jelű egyenletnek pontosan egy megoldása van, a c) és d) jelű egyenletnek viszont nincs megoldása a valós számok halmazán!

a) $\dfrac{2x^2+x-10}{2^{x-1}-2}=0$ 4 pont

b) $\sqrt{x+16}+\sqrt{x-9}=5$ 4 pont

c) $\lg(x^2+x-6)=\lg(1-x^2)$ 4 pont

d) $\sin x-1=\sqrt{\lg(\cos^2 x-1{,}5\cos x)}$ 4 pont

Összesen: 16 pont

7. <u>2009. október 20.</u>

Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $0{,}5^{2-\log_{0,5} x} = 3$, ahol $x > 0$ és $x \in \mathbf{R}$

4 pont

b) $7 + 6\log_x \frac{1}{2} = \log_2 x$, ahol $1 < x \le 2$ és $x \in \mathbf{R}$

7 pont

Összesen: 11 pont

8. <u>2011. május 3.</u>

Legyen $A = \left\{x \in R \middle| \sqrt{x-1} \ge \sqrt{5-x}\right\}$ és $B = \left\{x \in R \middle| \sqrt{x-1} \ge \log_{\frac{1}{2}}(2x-4) \succ -2\right\}$

Adja meg az $A \cup B, A \cap B$, $B \setminus A$ halmazokat!

13 pont

9. <u>2011. október 18.</u>

Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x és y valós számok, továbbá $x > 0$, $x \neq 1$, és $y > 0$, $y \neq 1$.

$$\log_x y + \log_y x = 2$$
$$\sin(2x + 3y) + \sin(4x + y) = 1$$

13 pont

3.2.7. Alkalmazási feladatok

1. 2005. október 25.

Péter nagypapája minden évben félretett némi pénzösszeget egy perselybe unokája számára. 5000 Ft-tal kezdte a takarékoskodást 1996. január 1-én. Ezután minden év első napján hozzátett az addig összegyűlt összeghez, mégpedig az előző évben félretettnél 1000 Ft-tal többet. 2004. január 1-jén a nagypapa bele tette a perselybe a megfelelő összeget, majd úgy döntött, hogy a perselyt unokájának most adja át.

a) Mekkora összeget kapott Péter?

5 pont

b) Péter nagypapája ajándékából vett néhány apróságot, de elhatározta, hogy a kapott összeg nagyobb részét 2005. január 1-jén bankszámlára teszi. Be is tett 60000 Ft-ot évi 4%-os kamatos kamatra (a kamatok minden évben, év végén hozzáadódnak a tőkéhez). Legalább hány évig kell Péternek várnia, hogy a számláján legalább 100000 Ft legyen úgy, hogy közben nem fizet be erre a számlára?

9 pont

Összesen: 14 pont

2. 2007. október 25.

Egy dolgozó az év végi prémiumként kapott 1 000 000 Ft-ját akarja kamatoztatni a következő nyárig, hat hónapon át. Két kedvező ajánlatot kapott. Vagy kéthavi lekötést választ kéthavi 1,7%-os kamatra, kéthavonkénti tőkésítés mellett, vagy a forintot átváltja euróra, és az összeget havi 0,25%-os kamattal köti le hat hónapra, havi tőkésítés mellett.

a) Mennyi pénze lenne hat hónap után a forintszámlán az első esetben? (Az eredményt Ft-ra kerekítve adja meg.)

3 pont

b) Ha ekkor éppen 252 forintot ért egy euró, akkor hány eurót vehetne fel hat hónap múlva a második ajánlat választása esetén? (Az eredményt két tizedes jegyre kerekítve adja meg.)

4 pont

c) Legalább hány százalékkal kellene változnia a 252 forint/euró árfolyamnak a félév alatt, hogy a második választás legyen a kedvezőbb? (Az eredményt két tizedes jegyre kerekítve adja meg.)

5 pont

(A tőkésítés melletti befektetés azt jelenti, hogy a tőkésítési időszak alatt elért kamatot az időszak végén hozzáadják az időszak kezdetén befektetett tőkéhez, és a következő időszakban az így kapott, kamattal megnövelt összeg után számítják a kamatot. Ez a folyamat annyiszor ismétlődik, ahány tőkésítési időszak van a befektetés időtartama alatt.)

Összesen: 12 pont

3. 2008. október 21.

Egy bank a „Gondoskodás” nevű megtakarítási formáját ajánlja újszülöttek családjának. A megtakarításra vállalkozó családok a gyermek születését követő év első banki napján számlát nyithatnak 100 000 forint összeggel. Minden következő év első banki napján szintén 100 000 forintot kell befizetniük a számlára. Az utolsó befizetés annak az évnek az első banki napján történhet, amely évben a gyermekük betölti a 18. életévét.
A bank év végén a számlán lévő összeg után évi 8%-os kamatot ad, amit a következő év első banki napjára ír jóvá. A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján férhet hozzá a számlához.

a) Mekkora összeg van ekkor a számlán? A válaszát egész forintra kerekítse!

8 pont

A gyermek a 18. születésnapját követő év első banki napján felveheti a számláján lévő teljes összeget. Ha nem veszi fel, akkor választhatja a következő lehetőséget is:

Hat éven keresztül minden év első banki napján azonos összeget vehet fel. Az első részletet a 18. születésnapját követő év első banki napján veheti fel. A hatodik pénzfelvétellel a számla kiürül. Ha ezt a lehetőséget választja, akkor a bank – az első pénzfelvételtől számítva – minden év végén a számlán lévő összeg után évi 5%-os kamatot garantál, amit a következő év első banki napjára ír jóvá.

b) Ebben az esetben mekkora összeget vehet fel alkalmanként? A válaszát egész forintra kerekítse!

8 pont

Az emelt szintű érettségi feladatsorokban leginkább exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek, illetve egyenletrendszerek fordulnak elő, ezek közül is a legtöbb feladatban logaritmus szerepel. Jóval kevesebb az alkalmazási feladatok száma, mint a középszintű érettségiben. A függvényekkel kapcsolatos feladatok, és a logaritmus azonosságaira vonatkozó feladatok hiányoznak.

4. Fogalmak tanítása

A fogalom dolgok, tulajdonságok, viszonyok stb. gondolati tükröződése, minden ésszerű gondolkodás egyik alapeleme; egy szónak megfelelő jelentéstartalom, amelyben az objektív valóság tárgyainak és jelenségeinek lényeges, általános jegyei, tulajdonságai és kapcsolatai kapnak kifejezést. [7]

Dörfler szerint egy matematikai fogalom tartalmazza a matematikai értelemben tipikust, a lényegest, a sémát, egy szituációnak, feladatnak, tevékenységnek, folyamatnak stb. a struktúráját. Ezáltal a fogalom a sokféle feladatban, szituációban meglevő közöst mint általánost reprezentálja. [8]

Fogalmak elsajátítása

Vollrath szerinte egy tanuló akkor sajátított el fogalmat, ha a következő ellenőrizhető képességekkel rendelkezik:

1. A fogalom egy definícióját képes megadni.
2. El tudja dönteni, hogy egy adott objektum ez bizonyos fogalomhoz tartozik-e (fogalomazonosítás).
3. Tud példákat felsorolni (konstruálni) az adott fogalomra (fogalomrealizálás).
4. Ismeri a fogalom tulajdonságait.
5. Képes a fogalmat és annak tulajdonságait adott szituációk leírására, illetve problémák megoldására felhasználni.
6. El tudja helyezni az adott fogalmat fogalmak hierarchikus rendszerébe. (Ismeri az alá-, ill. fölérendelt fogalmakat.)[9]

A fogalmak bevezetésének három különféle módja lehetséges:

Induktív út

Konkrét egyedi példák összehasonlítása, közös tulajdonságok kiemelése. A tanuló absztrakció révén jut el az általánosításhoz.

---

[7] Ambrus András: Bevezetés a matematika-didaktikába, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004 (57. oldal)
[8] Ambrus András: Bevezetés a matematika-didaktikába, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004 (58. oldal)
[9] Ambrus András: Bevezetés a matematika-didaktikába, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004 (66. oldal)

Az induktív út előnyei: jelentős mennyiségű önálló tanulói munkát tesz lehetővé; hozzájárul az általános szellemi képességek, nyelvi-logikai képességek fejlesztéséhez; már a definíció bevezetése előtt kialakulhat egy helyes képzet a kérdéses fogalomról; lehetővé teszi, hogy a tanulók önállóan fogalmazzák meg a bevezetendő fogalom definícióját.
Az induktív út hátrányai: időigényesség; csak akkor célszerű a használata, ha megfelelő minőségű és számú kiindulási példa, illetve ellenpélda áll rendelkezésre; igényes munkát követel a tanártól mind az előkészítésben, mind az óra levezetésében.

Deduktív út

A tanuló az általánostól jut el a konkréthoz.
A deduktív út előnyei: időmegtakarítás; jól felkészülnek a tanulók a felsőfokú tanulmányokra.
A deduktív út hátrányai: olyan általános szellemi képességek, mint összehasonlítás, absztrakció, háttérben maradnak; feltételezi a módszer a fölérendelt fogalom és a meghatározó tulajdonság(ok) ismeretét.

Konstruktív út

A szóban forgó fogalom egy konkrét reprezentánsának előállítása bizonyos feltételek mellett, az eljárás általánosítása, majd a definíció megfogalmazása. A konstruktív út az induktív és a deduktív út között foglal helyet. Konkrét objektumból indul ki, de ennek előállításához minden reprezentánst jellemző tulajdonsággal fölhasznál. [10]

Az exponenciális és logaritmus függvény tanításánál a konstruktív utat választom. Egy konkrét, gyakorlati életből vett példán keresztül megértetjük a fogalmat, megismerjük a mögötte lévő tartalmakat, és csak ezután fogalmazzuk meg matematikailag a fogalmat. A fogalmak tanításánál a következő feladattípusokkal dolgozom:

1. Olyan szituációk elemzése, melyeket egy adott fogalom jól tükröz vissza, tulajdonságok kiemelése, motivációs feladatok.
2. Fogalom definiálása.

[10] Ambrus András: Bevezetés a matematika-didaktikába, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004 (66-68. oldal)

3. Egy adott fogalommal kapcsolatban különböző definiálási lehetőségek keresése, definíciók ekvivalenciájának megmutatása. Adott definíciók felülvizsgálata, értékelése.
4. Egy adott fogalommal kapcsolatos példák és ellenpéldák adása. Fogalomrealizálás.
5. Fogalomazonosítás. Szituációk felülvizsgálata abból a szempontból, hogy egy adott fogalmat reprezentálnak-e.
6. Egy fogalom beágyazása egy fogalomrendszerbe. (Fogalomspecializáció, fogalomáltalánosítás.) Fogalmakkal kapcsolatos kijelentések értékelése.
7. Egy definíció következményeinek levonása.
8. Alkalmazások[11]

[11] Ambrus András: Bevezetés a matematika-didaktikába, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004 (70-72. oldal)

5. Az exponenciális és a logaritmusfüggvény tanításához használt tanmenet

Ebben a fejezetben a tankönyvek elemzésénél is vizsgált 4 témakört fogom részletesen kidolgozni. Ezek a témakörök a következők:

1. Az exponenciális függvény bevezetése
2. A logaritmus fogalmának bevezetése
3. A logaritmusfüggvény
4. A logaritmus azonosságai

A témakörök kidolgozását a fent említett feladattípusok mentén végzem el.

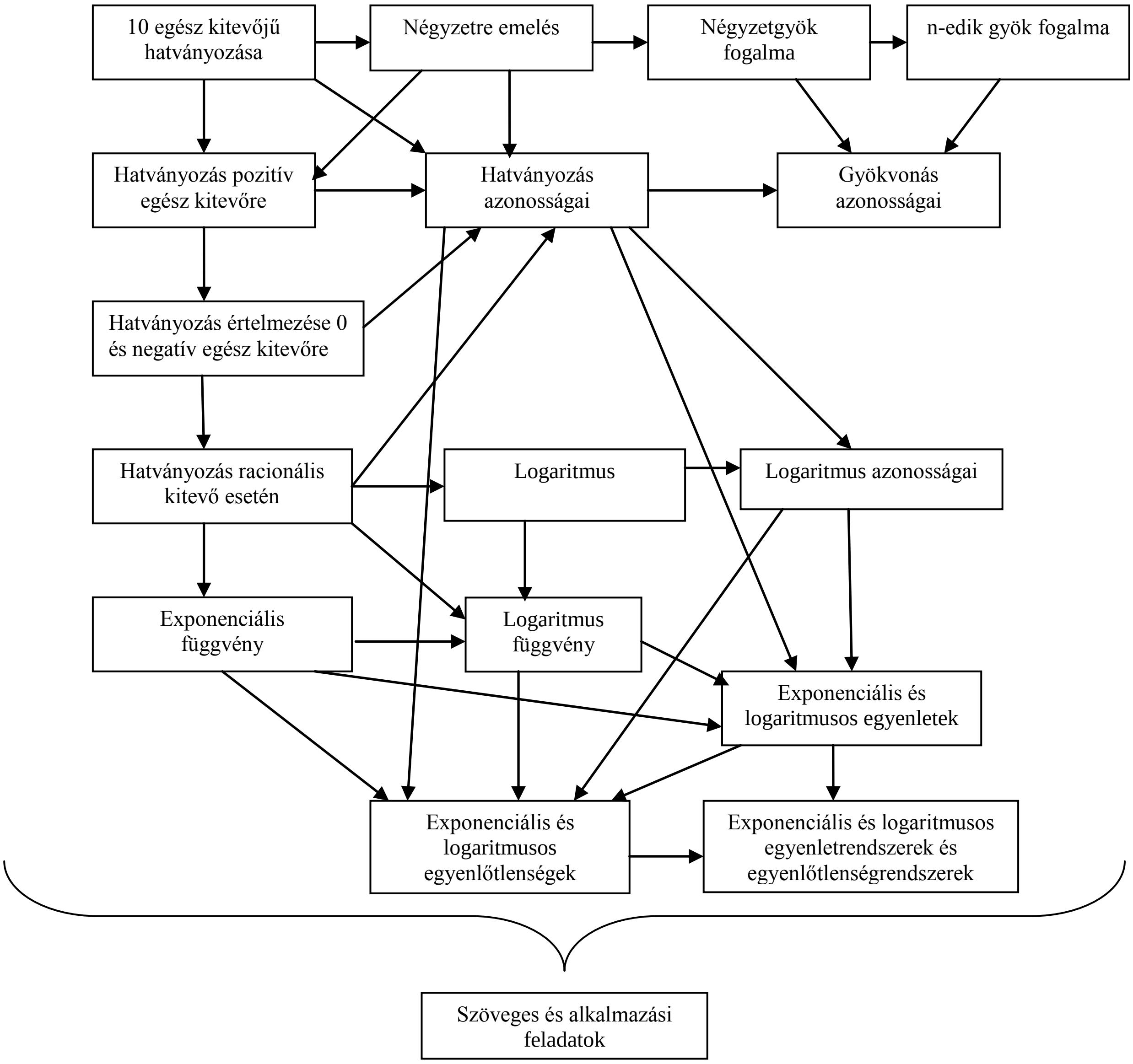
5.1. A TÉMA ELHELYEZKEDÉSE A TANANYAGBAN, A TÉMA ELŐZMÉNYEI

Az exponenciális és a logaritmus függvény is a 11-es tananyagban szerepel a Hatvány, gyök, logaritmus témakörben. Az exponenciális és logaritmus függvény előkészítése már 6. évfolyamon elkezdődik. Az alábbiakban áttekintem, hogy 11. évfolyamig hogyan jutunk el az exponenciális és logaritmus függvény bevezetéséig.

A téma előzményei:

ÉVFOLYAM	**TARTALOM**
6. évfolyam	10 egész kitevőjű hatványai és használatuk átváltásoknál.
7. évfolyam	Hatványozás fogalma egész kitevőre, a hatványozás azonosságai konkrét példákon.
8. évfolyam	A négyzetgyök fogalma.
9. évfolyam	A hatványozás értelmezése 0 és negatív egész kitevőre, a hatványozás azonosságai.
10. évfolyam	A négyzetgyökvonás azonosságainak használata egyszerű esetekben, az n-edik gyök fogalma.
11. évfolyam	A hatványozás kiterjesztése pozitív alap esetén racionális kitevőkre. A hatványozás azonosságai és alkalmazásuk. A logaritmus értelmezése. A logaritmus, mint a hatványozás inverz művelete. A logaritmus azonosságai. A definíciókon és a megismert azonosságokon alapuló exponenciális és logaritmikus egyenletek. A 2^x, a 10^x függvény, az exponenciális függvény vizsgálata, exponenciális folyamatok a természetben. A logaritmus függvény, mint az exponenciális függvény inverze.

5.2. Fogalmak, tételek, eljárások logikai hálója



5.3. A TÉMA SZAKASZAI, DIDAKTIKAI SÚLYPONTOK

A téma szakaszai

- A hatványozásról tanultak átismétlése
- A hatványozás kiterjesztése racionális kitevőre
- A hatványozás azonosságai
- Irracionális kitevőjű hatványozás
- Exponenciális függvény
- A logaritmus fogalma
- A logaritmus azonosságai
- Logaritmus függvény
- Exponenciális és logaritmus egyenletek
- Exponenciális és logaritmusos egyenlőtlenségek
- Exponenciális és logaritmusos egyenlet-, és egyenlőtlenségrendszerek
- Szöveges feladatok
- Alkalmazási feladatok

Didaktikai súlypontok

Az exponenciális és a logaritmus függvény tanítása közben a következő kompetenciákat fejleszthetjük:

Problémamegoldó kompetencia fejlesztése
Következtetési kompetencia fejlesztése
Modellalkotási kompetencia fejlesztése
Kommunikációs kompetencia fejlesztése
Rendszerezett, logikus gondolkodás fejlesztése
Mindennapi problémák értelmezése
Elektronikus eszközök (számológép, számítógép, Internet) célszerű használata
Tulajdonságok, dolgok közti kapcsolatok keresése, felismerése
A matematika hasznosíthatóságának, alkalmazhatóságának felismerésére vonatkozó képesség fejlesztése

5.4. Tanmenetrészlet

Hatványozás ismétlése, azonosságok	1 óra
Hatványozás kiterjesztése racionális, majd valós kitevőre	2 óra
Exponenciális függvények	2 óra
Alkalmazási feladatok	1 óra
Logaritmus fogalma, példák	2 óra
Logaritmus azonosságai	2 óra
Logaritmusos gyakorló feladatok, alkalmazási feladatok	2 óra
Logaritmus függvények	2 óra
Exponenciális és logaritmusos egyenletek	3 óra
Exponenciális és logaritmusos egyenlőtlenségek	1 óra
Exponenciális és logaritmusos egyenlet- és egyenlőtlenségrendszerek	1 óra
Alkalmazási feladatok	1 óra
Összefoglalás	2 óra
Témazáró	1 óra
Javítás, tanulságok	1 óra
Összesen	**24 óra**

5.5. Egy lehetőség az exponenciális és a logaritmusfüggvény tanítására

5.5.1. Az exponenciális függvény bevezetése

5.5.1.1. Bevezető, motiváló feladat

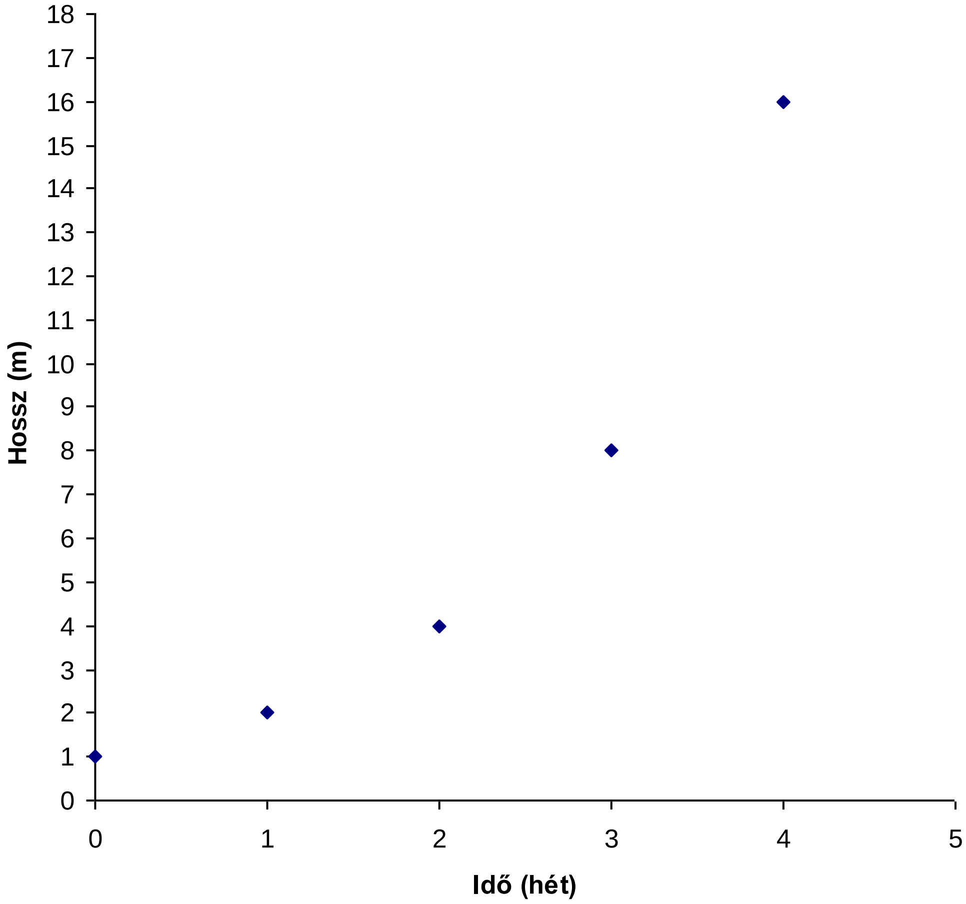
1. A tengeri barna alga hetente megduplázza a hosszát. A kezdetben 1 méteres barna alga mekkora lesz

   1 hét, 2 hét, 3 hét, 4 hét múlva?

   Töltsük ki a táblázatot!

Idő (hét)	0	1	2	3	4
Hossz (m)	1				

Ábrázoljuk a pontokat derékszögű koordinátarendszerben!



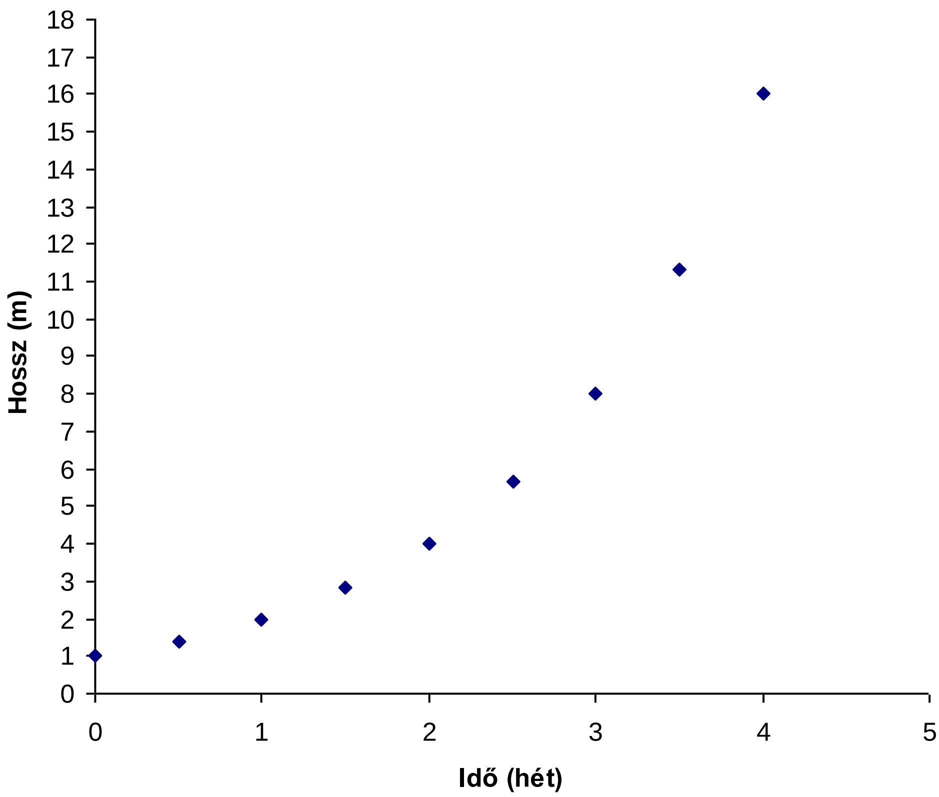
2. Milyen hosszú lesz a barna alga

$\frac{1}{2}$ hét, $\frac{3}{2}$ hét, $\frac{5}{2}$ hét, $\frac{7}{2}$ hét múlva?

Egészítsük ki a táblázatot!

Idő (hét)	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
Hossz (m)									

Jelöljük be ezeket a pontokat is a koordinátarendszerben!



3. A kezdetben 1 méteres tengeri barna alga milyen hosszú volt a megfigyelés előtt

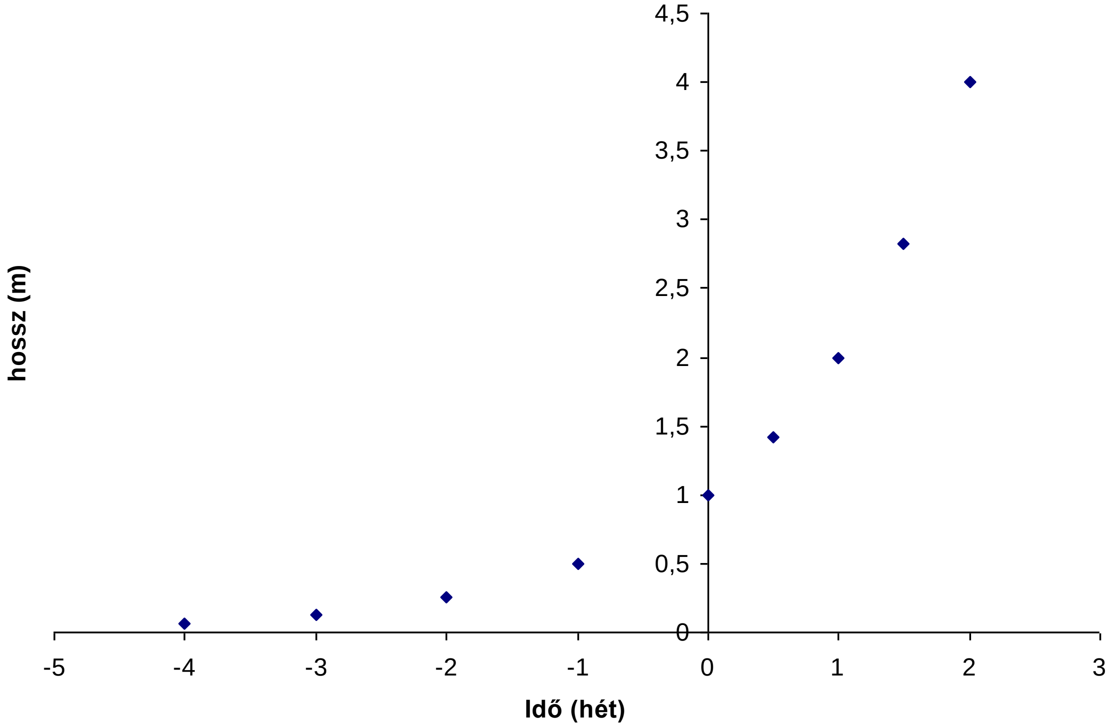
1 héttel, 2 héttel, 3 héttel, 4 héttel?

Feltételezhetjük, hogy a mérés megkezdése előtt is ugyanilyen törvényszerűségek szerint változott az alga hossza.

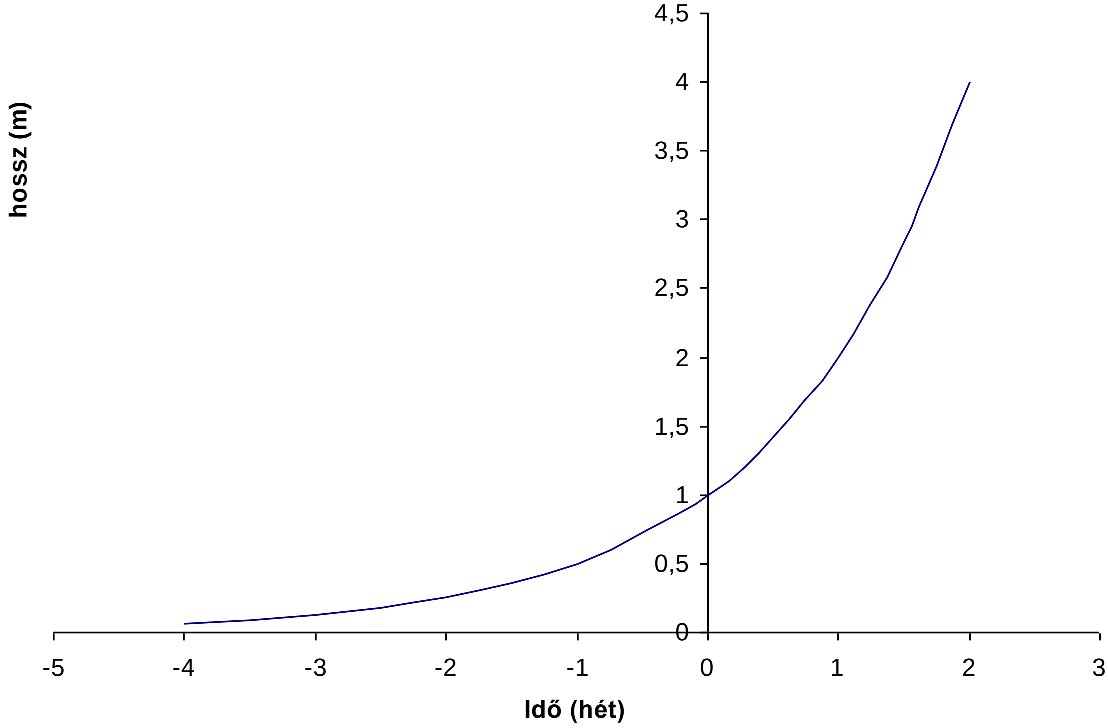
Töltsük ki a táblázatot!

Idő (hét)	-4	-3	-2	-1
Hossz (m)				

Ábrázoljuk ezeket a pontokat is!



4. Adjunk matematikai modellt a tengeri barna alga időbeli változására! Milyen függvénnyel jellemezhetjük a barna alga hosszának változását?
5. Ábrázoljuk a függvény grafikonját derékszögű koordinátarendszerben!



6. Az ábrázolt grafikon segítségével írjuk fel hatvány alakban a következő számokat!

   5; 9; 7, 3; 4, 6; 0, 5; 0, 8

   Számológéppel ellenőrizzük a függvény grafikonjáról való leolvasásunk pontosságát![12]

7. A grafikon segítségével határozzuk meg $2^{\sqrt{2}}$ értékét!

5.5.1.2. Fogalom definiálása, többféle definíció

- Az f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = a^x$; $a > 0$ függvényt *exponenciális függvénynek* nevezzük.
- Az *exponenciális függvény* általános alakja: $f(x) = b \cdot a^x$, ahol $a > 0$, és $a \neq 1$.
- Az olyan függvényt, amely leképezési szabályában a változó a kitevőben szerepel, továbbá az alap pozitív szám, *exponenciális függvénynek* nevezzük.

Feladat

A következő definíciók közül melyik a helyes? Javítsa ki, amelyik nem helyes!

- Az olyan függvényt, amely leképezési szabályában a változó a kitevőben szerepel, *exponenciális függvénynek* nevezzük.
- Az f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $f(x) = a^x$; $a > 0$ függvényt *exponenciális függvénynek* nevezzük.
- Ha a adott pozitív valós szám, akkor f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$, $x \mapsto a^x$ függvényt a alapú exponenciális függvénynek nevezzük.
- Az *exponenciális függvény* általános alakja: $f(x) = b \cdot a^x$

[12] Dr.Czeglédy István – Dr. Hajdu Sándor – Hajdu Sándor Zoltán – Dr. Kovács András: Matematika Középiskola 11. osztály, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2008, 18. oldal

5.5.1.3. Fogalomazonosítási feladatok

1. Válassza ki az exponenciális függvényeket!

   $f(x) = 3^x$

   $g(x) = 5^{3x+1}$

   $h(x) = 2x - 3$

   $i(x) = x^3$

   $j(x) = 2^x + 1$

   $k(x) = x^2 + 1$

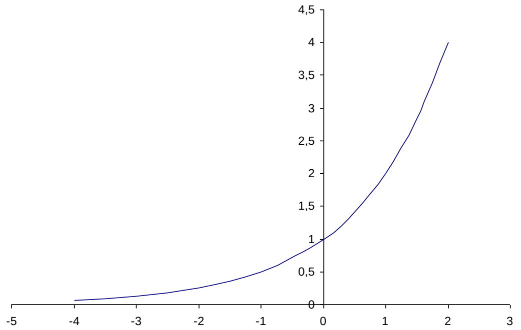
   $l(x) = 3 \cdot 5^x$

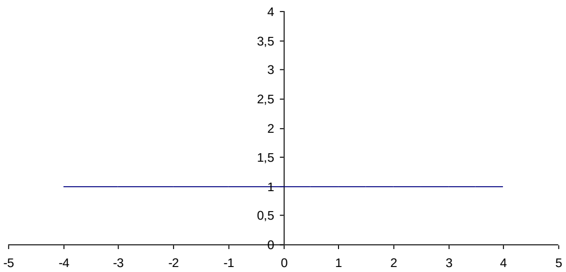
2. Az alábbi kapcsolatok közül válassza ki azokat, amelyeket exponenciális függvény ír le!

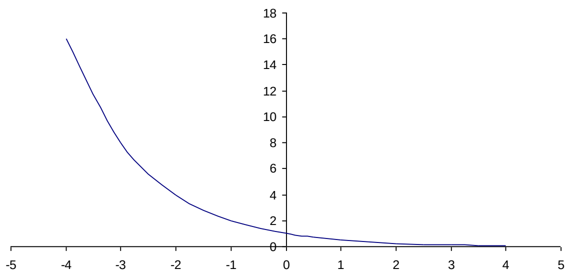
   - Egy baktériumtörzs egyedei minden nap kettéosztódnak, így a tenyészet egyedszáma naponta megduplázódik.
   - Az *n* oldalú konvex sokszög átlóinak száma.
   - Egy *n* tagú társaságban a kézfogások száma, ha mindenki mindenkivel kezet fogott.
   - Egy közlekedési vállalat bérlet eladása évente 2,7%-os ütemben nő.
   - A használat során egy fénymásoló gép mindenkori értéke egy év alatt 20%-kal csökken. Idő és a fénymásoló gép ára közötti kapcsolat.
   - Négyzet oldala és kerülete.
   - Év elején beteszünk a bankba 100 ezer forintot, évi 8%-os kamatra. Idő és a kamatokkal megnövelt összeg kapcsolata.

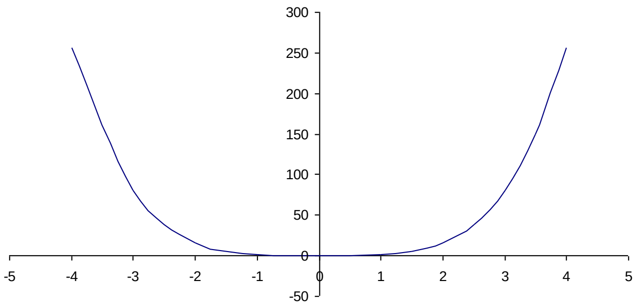
3. A következő folyamatok lineáris vagy exponenciális függvénnyel írhatók le? Válaszát indokolja!
   - Egy használt autó ára az autókatalógus szerint minden évben 25%-kal kevesebb, mint az előző évben.
   - Egy gépnek a nyilvántartásban szereplő értéke évente az új ár 20%-ával csökken.
   - Egy szakszervezeti képviselő követelése: az egy havi bér minden évben a jelenlegi minimálbér 5%-ával emelkedjen.
   - Egy szakértő azt ajánlja, hogy egy üdülőövezetben a férőhelyek száma az elkövetkező tíz évben mindig az előző évi 2, 5%-ával növekedjen.

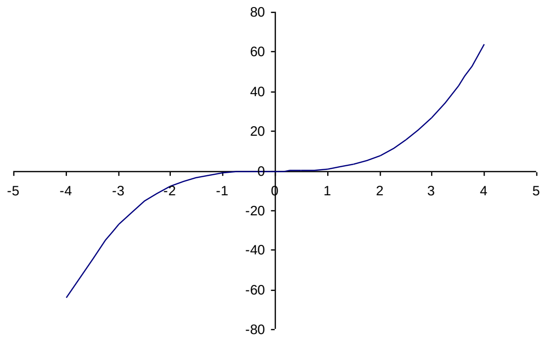
4. Az alábbi grafikonok közül válassza ki azokat, amelyek exponenciális függvény grafikonjai lehetnek!

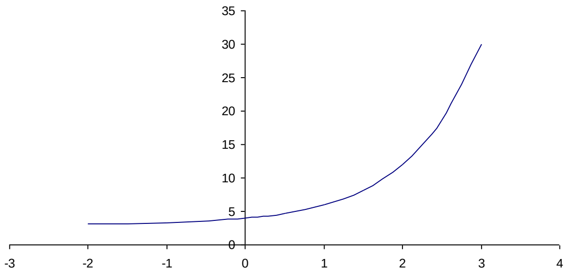








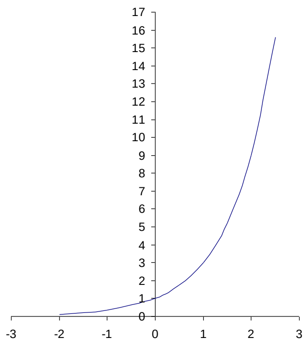




5.5.1.4. Fogalomrealizálási feladatok

1. Adjon meg egy exponenciális függvényt
   - szöveggel
   - grafikonnal
   - szimbolikusan
   - táblázattal!

2. Töltse ki a következő táblázatot!

<table>
<tr><th>Szövegesen</th><th>Grafikonnal</th><th>Szimbolikusan</th><th>Táblázattal</th></tr>
<tr><td>A tavirózsa a megfigyelés kezdetekor 1 m^2 vízfelületet fed le. Havonta megduplázódik a lefedett terület. Vizsgáljuk az idő és a lefedett terület kapcsolatát.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$
$f(x) = 100 \cdot 2^x$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td><table>
<tr><td>Idő (hét)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Hossz (m)</td><td>1</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{8}$</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

3. Az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ függvénynek csak néhány értékét ismerjük. Lehetséges-e, hogy f egy $f(x) = b \cdot a^x$ alakú exponenciális függvény? Válaszát indokolja! Ha ilyen alakú a függvény, adja meg a hozzárendelési szabályát!

   a) $f(1) = 2$; $f(-2) = 0{,}25$; $f(3) = 8$

   b) $f(-1) = 0{,}1$; $f(0) = 0{,}3$; $f(2) = 3$

   c) $f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f(3) = 10$

5.5.1.5. Beágyazása fogalomhierarchiába

1. Venn diagram segítségével ábrázolja a hozzárendelések, függvények és exponenciális függvények kapcsolatát!

2. Venn diagram segítségével ábrázolja a monoton, szigorúan monoton, és az exponenciális függvények kapcsolatát!

3. Nevezzük el a következő egyenletben szereplő számokat!

   $10^3 = 1000$

   Melyik a hatványkitevő, a hatványalap, hatványérték?

4. A következő egyenleteknél milyen művelettel kaphatjuk meg az x ismeretlent?

   Ha a kérdés a hatványérték: $10^3 = x$.

   Ha a kérdés a hatványalap: $x^3 = 1000$.

   Ha a kérdés a hatványkitevő: $10^x = 1000$.

5.5.1.6. Definíció következményeinek levonása

- Az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $x \mapsto a^x$ függvény szigorúan monoton növekvő, ha a > 1.
- Az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $x \mapsto a^x$ függvény szigorúan monoton csökkenő, ha 0 < a < 1.
- Az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $x \mapsto a^x$ függvény állandó, ha a = 1.
- Valamely a ($a > 0$; $a \neq 1$) valós szám minden valós kitevőjű hatványa pozitív valós szám, és minden pozitív valós szám felírható a valós kitevőjű hatványaként.
- Az f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $x \mapsto a^x$, ahol $a > 0$; $a \neq 1$, $a \in \mathbf{R}$ függvény kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a valós és a pozitív valós számok között. Az exponenciális függvény invertálható függvény.

Feladatok

1. Egy baktériumtenyészet egyedszámának (N) növekedését az $N = 120 \cdot 2^{1,5t}$ képlettel írhatjuk le, ahol t az eltelt órák száma.

   a) Hány egyedből állt a tenyészet a kísérlet kezdetekor?

   b) Hány egyed lesz jelen 10 óra múlva?

   c) Hány egyedből állt a populáció 2 órával a kísérlet kezdete előtt?

   d) Hány óra alatt duplázódik meg a baktériumok száma?

   e) Körülbelül hány óra alatt tízszereződik meg a baktériumok száma?[13]

   Változtassuk meg a képletet úgy, hogy a baktériumok száma óránként a felére csökkenjen, és válaszoljunk a következő kérdésekre!

   f) Hány egyedből állt a tenyészet a kísérlet kezdetekor?

[13] Dömel András – Dr. Marosvári Péter – Mezei József – Nagyné Szokol Ágnes – Szász Antónia - Székely Péter – Dr. Szabadi László – Dr. Vancsó Ödön: Matematika 11. osztályosok számára, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2004, 73. oldal

g) Hány egyed volt jelen a kísérlet megkezdése előtt 10 órával?

h) Hány egyed lesz jelen 2 óra múlva?

i) Hány óra alatt feleződik meg a baktériumok száma?

j) Körülbelül hány óra alatt lesz tizedannyi a baktériumok száma?

2. Ábrázoljuk az előző feladatban szereplő két függvény grafikonját derékszögű koordináta-rendszerben, és jellemezzük őket!

3. Írjuk fel az 5-öt a következő valós számok hatványaként!

   2; 3; 5; 25; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{25}$

5.5.1.7. Alkalmazási feladatok

1. Egy biológus megfigyelte, hogy egy táptalajon nevelt sejtkultúra területe óránként 45%-kal növekszik. Számítsa ki, hogy mekkora lesz a sejtkultúra területe

   1, 2, 3, 4, 5, n

   óra múlva, ha a megfigyelés kezdetén 1000 mm^2 nagyságú volt! (Tegyük fel, hogy a táptalaj elég nagy.)

   Adjon matematikai modellt a folyamat leírására!

   <u>Megoldás:</u>

   Ha kezdetben 1000 mm^2 volt a sejtkultúra területe, és óránként 45 %-kal növekszik a területe, akkor 1 óra múlva $1000 \cdot 1{,}45$ mm^2.

   1 óra múlva $1000 \cdot 1{,}45\ mm^2 = 1450\ mm^2$

   2 óra múlva $1450 \cdot 1{,}45 = 1000 \cdot 1{,}45^2 = 2103\ mm^2$

   3 óra múlva $2103 \cdot 1{,}45 = 1000 \cdot 1{,}45^3 = 3049\ mm^2$

4 óra múlva $3049 \cdot 1,45 = 1000 \cdot 1,45^4 = 4421$ mm^2

5 óra múlva $4421 \cdot 1,45 = 1000 \cdot 1,45^5 = 6410$ mm^2

n óra múlva $1000 \cdot 1,45^n$

Matematikai modell a folyamat leírására:

Legyen a sejtkultúra területe kezdetben a mm^2. Ha a területe óránként 45%-kal növekszik, akkor x óra múlva a sejtkultúra területe: $a \cdot 1,45^x$

2. Egy baktériumkultúrában a megfigyelés kezdetén 10000 baktérium volt. A sejtek 3 óránként osztódnak.
    - Számítsa ki, hogy 12 óra, 1 nap, illetve 2 nap múlva hány baktérium lesz!
    - Határozza meg az óránkénti százalékos növekedést!

Megoldás:

Ha kezdetben 10000 baktérium volt, akkor 3 óra múlva $10\,000 \cdot 2 = 20\,000$ baktérium lesz. 12 óra = $4 \cdot 3$ óra, ezért 12 óra múlva $10\,000 \cdot 2^4 = 160\,000$ baktérium lesz.

1 nap = 24 óra, 24 óra = $8 \cdot 3$ óra, azért 24 óra múlva $10000 \cdot 2^8 = 2\,560\,000$

2 nap = 48 óra, 48 óra = $16 \cdot 3$ óra, ezért 48 óra múlva $10000 \cdot 2^{16} = 655\,360\,000$

3. A radioaktív bomlási folyamatok közelítőleg exponenciálisan mennek végbe. A következő képlet alapján számítható ki, hogy t másodperc múlva hány darab lesz a bomló anyag atomjaiból:

$$N(t) = N_0 \cdot a^t,$$

ahol N az atomok száma a megfigyelés kezdetén, $N(t)$ pedig a t másodperc múlva még fel nem bomlott atomok száma.

Hány atom van 1, 2, 10 másodperc múlva, ha:

- $N = 1000$ $a = 0,9$

- $N = 10^5$ $a = 0,2$
- $N = 10^{14}$ $a = 0,05$

<u>Megoldás:</u>

- $N = 1000$ $a = 0,9$

1 másodperc múlva: $N(t) = N_0 \cdot a^t = 1000 \cdot 0,9^1 = 900$

2 másodperc múlva: $N(t) = N_0 \cdot a^t = 1000 \cdot 0,9^2 = 810$

10 másodperc múlva: $N(t) = N_0 \cdot a^t = 1000 \cdot 0,9^{10} = 349$

- $N = 10^5$ $a = 0,2$

1 másodperc múlva: $N(t) = N_0 \cdot a^t = 10^5 \cdot 0,2^1 = 20\,000$

2 másodperc múlva: $N(t) = N_0 \cdot a^t = 10^5 \cdot 0,2^2 = 4000$

10 másodperc múlva: $N(t) = N_0 \cdot a^t = 10^5 \cdot 0,2^{10} = 0,01024$

- $N = 10^{14}$ $a = 0,05$

1 másodperc múlva: $N(t) = N_0 \cdot a^t = 10^{14} \cdot 0,05^1 = 5 \cdot 10^{12}$

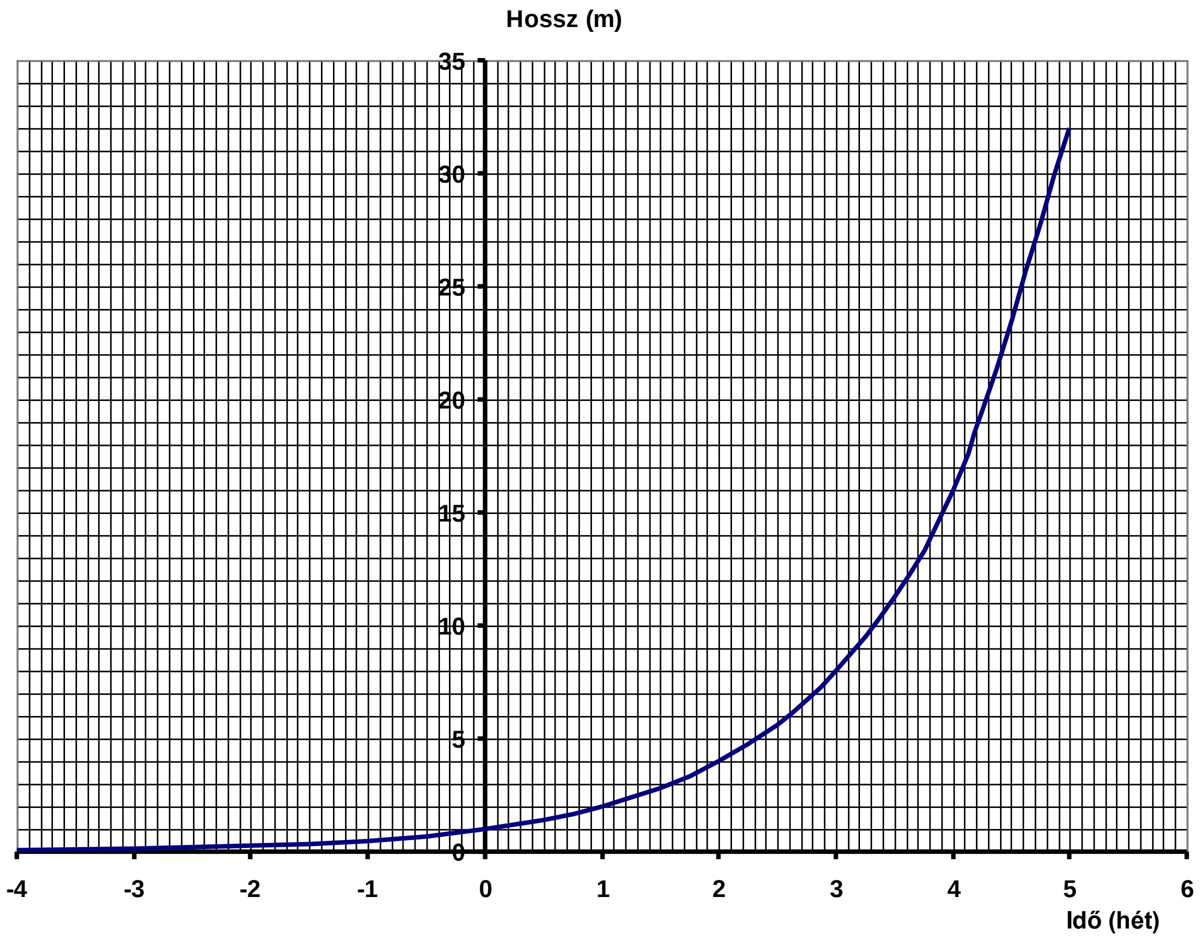
2 másodperc múlva: $N(t) = N_0 \cdot a^t = 10^{14} \cdot 0,05^2 = 2,5 \cdot 10^{11}$

10 másodperc múlva: $N(t) = N_0 \cdot a^t = 10^{14} \cdot 0,05^{10} = 9,77$

5.5.2. A LOGARITMUS FOGALMÁNAK BEVEZETÉSE

5.5.2.1. Bevezető, motiváló feladat

A tengeri barna alga hetente megduplázza a hosszát. Az alábbi grafikon a barna alga növekedését ábrázolja 1 m-ről kiindulva.



- A kezdetben 1 méteres barna alga hány hét múlva lesz 4 méter, 8 méter, 16 méter hosszú?
- Hány hét múlva lesz 20 méteres? Becsüld meg a grafikon alapján! Ellenőrizzük számológéppel az eredményt!

- Hány hét múlva lesz 40 m, 80 m, 10 m hosszú? Az utolsó kérdésre adott választ ellenőrizd a grafikonon!

Ezután kerül bevezetésre egy kontextusfüggő definíció: $\log_2 20$ jelenti azt az időmennyiséget, amely szükséges ahhoz, hogy a tengeri barna alga hossza 20 m legyen, ha a növekedési faktor 2 és a kiindulási hossz 1 m.
Általánosan az algás definíció: Ha a tengeri barna alga kezdetben 1 méteres és hetente *a*-szorosára változik a hossza, akkor $\log_a b$ jelenti azt az időt, amennyi idő alatt *b* hosszú lesz az alga.

- Fogalmazzuk meg a definíció alapján, hogy mit jelent $\log_2 40$, $\log_2 80$, $\log_2 10$?
- Mennyi az értéke a következő kifejezéseknek?
  $\log_2 4$, $\log_2 8$, $\log_2 16$
- Miért igazak az alábbi egyenlőségek?
  $\log_3 27 = 3$
  $\log_5 25 = 2$
  $\log_4 16 = 2$

5.5.2.2. Fogalom definiálása, többféle definíció

- Legyen $a \neq 1$ pozitív valós szám. Tetszőleges *b* pozitív valós szám esetén létezik pontosan egy olyan *c* valós szám, hogy $b = a^x$. Ekkor a *c* hatványkitevőt a *b* szám *a* alapú logaritmusának nevezzük. Jelölés: $\log_a b = x$
- Az *a* alapú logaritmus *b* jelenti azt az *x* kitevőt, amelyre *a*-t emelve *b*-t kapunk. ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$).
- Egy pozitív *b* szám *a* alapú logaritmusa ($a > 0$, $a \neq 1$) az a kitevő, melyre az *a* alapot emelve éppen *b*-t kapjuk:

  $\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$, ahol $b > 0$, és $a > 0$, $a \neq 1$.

- Ha egy pozitív valós számot adott, 1-től különböző alapú hatvány alakban írunk fel, akkor ennek a hatványnak a kitevőjét logaritmusnak nevezzük.

Feladatok

A következő definíciók közül melyik a helyes? Javítsa ki, amelyik nem helyes!

- Tetszőleges *b* valós szám esetén létezik pontosan egy olyan *c* szám, hogy $b = a^x$. Ekkor a *c* hatványkitevőt a *b* szám *a* alapú logaritmusának nevezzük. Jelölés: $\log_a b = x$
- Az *a* alapú logaritmus *b* jelenti azt az *x* kitevőt, amelyre *a*-t emelve *b*-t kapunk. ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$).
- Egy pozitív *a* szám *b* alapú logaritmusa ($a > 0$, $a \neq 1$) az a kitevő, melyre a *b* alapot emelve éppen *a*-t kapjuk:

  $\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$, ahol $b > 0$, és $a > 0$, $a \neq 1$.
- Ha egy pozitív valós számot adott, 1-től különböző alapú hatvány alakban írunk fel, akkor ennek a hatványnak a kitevőjét logaritmusnak nevezzük.

5.5.2.3. Fogalomazonosítási feladatok

1. Melyik a helyes átírása a $3^2 = 9$ egyenletnek?

   $\log_2 3 = 9$

   $\log_3 9 = 2$

   $\log_2 9 = 3$

2. Írjuk le, hogy kell kiolvasni a következő kifejezéseket!

   $\log_3 27$

   $\log_2 3$

   $\log_4 5$

   $\lg 8$

3. Írjuk le szimbolikusan!

   5-ös alapú logaritmus 9

   10-es alapú logaritmus 100

   $\frac{1}{2}$ alapú logaritmus $\frac{1}{4}$

5.5.2.4. Fogalomrealizálási feladatok

1. Egy táptalajon nevelt sejtkultúra területe óránként megháromszorozódik. A megfigyelés kezdetén a sejtkultúra 1 cm^2 terület nagyságú volt. Fejezzük ki logaritmussal azt az időmennyiséget, amely szükséges

   9 cm^2 10cm^2, 20 cm^2, 27 cm^2

   terület lefedéséhez.

2. Írja át logaritmusra!

$3^2 = 9$

$2^3 = 8$

$2^1 = 2$

$2^0 = 1$

$7^2 = 49$

3. Írja át hatvány alakba a következő egyenleteket!

$\log_3 27 = 3$

$\log_4 16 = 2$

$\log_4 4 = 1$

$\log_5 1 = 0$

$\lg 1000 = 3$

$\log_4 \frac{1}{16} = -2$

$\log_2 \frac{1}{2} = -1$

4. Határozza meg *x* értékét!

$\log_x 36 = 2$	$\log_x 4 = \frac{1}{2}$	$\log_x 8 = \frac{3}{2}$	$\log_x 10^{-6} = -3$
$\log_2 x = 4$	$\log_2 x = -5$	$\log_4 x = 0{,}5$	$\log_5 x = -2$
$\lg x = 3$	$\lg x = -3$	$\lg x = \frac{1}{2}$	$\lg x = \frac{3}{2}$

5.5.2.5. Beágyazása fogalomhierarchiába

A megadott egyenleteket írja fel hatvány- gyök- és logaritmus formában is![14]

Hatvány	**Gyök**	**Logaritmus**
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$\log_2 8 = 3$
$10^3 = 1000$	……………..	……………..
……………..	$\sqrt{49} = 7$	……………..
……………..	……………..	$\log_5 625 = 4$

5.5.2.6. Definíció következményeinek levonása

$\log_a a = 1$, hiszen $a^1 = a$

$\log_a 1 = 0$, hiszen $a^0 = 1$

$\log_a a^x = x$, hiszen $a^x = a^x$

$a^{\log_a x} = x$, mert tudjuk, hogy $\log_a x$ azt a kitevőt jelenti, amelyre a-t emelve éppen x-et kapjuk.

Feladatok

Írjuk fel logaritmussal a következőket!

- A megfigyelés kezdetekor a tengeri barna alga 1 méter hosszú. Hosszát hetente megduplázza.

[14] Dömel András – Dr. Marosvári Péter – Mezei József – Nagyné Szokol Ágnes – Szász Antónia - Székely Péter – Dr. Szabadi László – Dr. Vancsó Ödön: Matematika 11. osztályosok számára, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2004, 95. oldal

- A kezdetben 1 méteres tengeri barna alga mennyi idő múlva lesz 2 méter hosszú, ha hetente megduplázza a hosszát?
- Ha az alga 1 hét alatt kétszeresére nő, akkor hányszorosára nő 4 hét alatt?
- Ha a tengeri barna alga hetente megduplázza a hosszát, akkor a kezdetben 1 méteres alga mennyi idő múlva lesz 3 m hosszú? Logaritmussal kifejezve mennyi *x* értéke?

  $2^x = 3$

5.5.2.7. Alkalmazási feladatok

1. Egy oldat pH értéke az oxóniumion-koncentráció 10-es alapú logaritmusának (-1)-szerese.
   a) A fenti meghatározás szerint mennyi annak az oldatnak a pH értéke, amelyben az oxóniumion-koncentráció 10^{-3} mol/dm^3?
   b) Imi szerint ez is lehetne a definíció: Egy oldat pH értéke az oxóniumion-koncentráció reciprokának 10-es alapú logaritmusával egyenlő.” Döntse el, hogy igaza van-e Iminek!
   c) Lúgos közeg pH-ja 13. Mekkora az oldatban az oxóniumion-koncentráció?[15]

Megoldás:

a) pH = $-\lg\left[H_3O^+\right]$ = - lg 10^{-3} = - (-3) = 3

b) Imi szerint a definíció: pH = $\lg\frac{1}{\left[H_3O^+\right]} = \lg\left[H_3O^+\right]^{-1} = -\lg\left[H_3O^+\right]$

   Igaza van Iminek.

c) pH = 13 = $-\lg\left[H_3O^+\right]$

[15] Hortobágyi István – Marosvári Péter – Pálmay Lóránt – Pósfai Péter – Siposs András – Vancsó Ödön: Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika I., Konsept-H Könyvkiadó, Piliscsaba, 2003, 69. oldal

$-13 = \lg\left[H_3O^+\right]$

$\lg 10^{-13} = \lg\left[H_3O^+\right]$

$10^{-13} = \left[H_3O^+\right]$

Tehát az oxóniumion-koncentráció 10^{-13} mol/dm^3.

2. 150 ezer Ft-ot évi 20%-os kamatos kamatra beteszünk a takarékba.
   a) Hány forintunk lesz 13 év múlva?
   b) Hány év múlva lenne kétmillió Ft a betétünk névértéke?[16]

Megoldás:

a) $150\,000 \cdot 1{,}2^{13} = 1\,604\,898$

Tehát 13 év múlva 1 604 898 forintunk lesz.

b) $2\,000\,000 = 150\,000 \cdot 1{,}2^{x}$

$13{,}33 = 1{,}2^{x}$

$\lg 13{,}33 = \lg 1{,}2^{x}$

$\lg 13{,}33 = x \cdot \lg 1{,}2$

$$x = \frac{\lg 13{,}33}{\lg 1{,}2} = 14{,}21$$

Tehát 14 év múlva lenne kétmillió forint a betétünk névértéke.

3. Egy erdő faállománya a tapasztalat szerint évente 3,8%-kal nő.
   a) Hány év alatt fog a faállomány megkétszereződni, illetve megháromszorozódni?
   b) Jelenleg a faállomány 7200 m^3. azt tervezik, hogy a következő három évben 2000 m^3 fát kivágnak. Mikorra lesz újra annyi fa az erdőben, mint jelenleg?

[16] Hortobágyi István – Marosvári Péter – Pálmay Lóránt – Pósfai Péter – Siposs András – Vancsó Ödön: Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika I., Konsept-H Könyvkiadó, Piliscsaba, 2003, 69. oldal

Megoldás:

a) $2 = 1{,}038^x$

$\lg 2 = \lg 1{,}038^x$

$\lg 2 = x \cdot \lg 1{,}038$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}038} = 18{,}59$$

Tehát körülbelül 19 év múlva kétszereződik meg a faállomány.

$3 = 1{,}038^x$

$\lg 3 = \lg 1{,}038^x$

$\lg 3 = x \cdot \lg 1{,}038$

$$x = \frac{\lg 3}{\lg 1{,}038} = 29{,}46$$

Tehát körülbelül 29 év múlva háromszorozódik meg a faállomány.

b) A harmadik év végén $7200 \cdot 1{,}038^3 = 8052$ m^3 fa lesz, ebből 2000 m^3-t kivágnak, így 6052 m^3 fa lesz.

Ezután már nem vágnak ki fát.

$7200 = 6052 \cdot 1{,}038^x$

$1{,}19 = 1{,}038^x$

$\lg 1{,}19 = \lg 1{,}038^x$

$\lg 1{,}19 = x \cdot \lg 1{,}038$

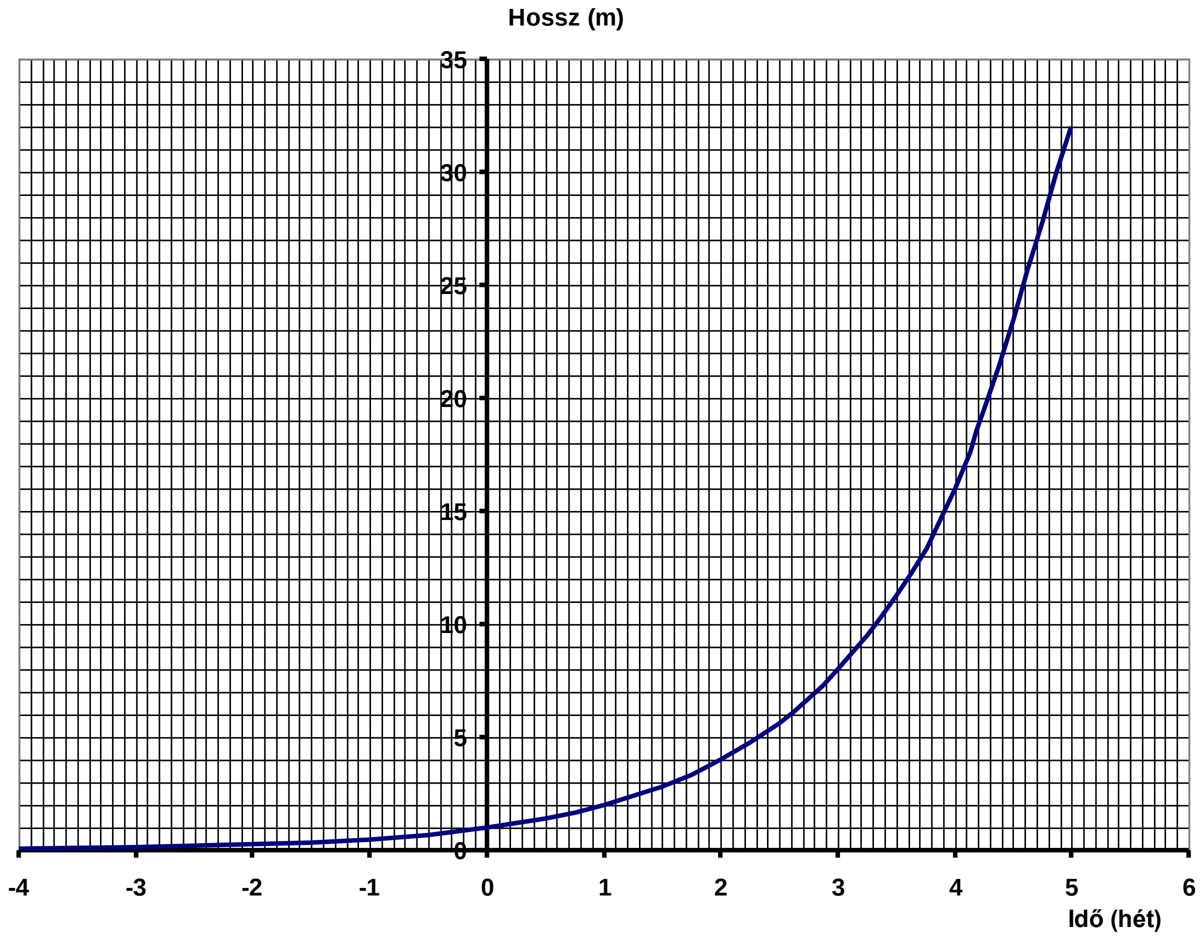
$$x = \frac{\lg 1{,}19}{\lg 1{,}038} = 4{,}66$$

Tehát a nyolcadik évben lesz az erdő faállománya ugyanannyi.

5.5.3. A LOGARITMUSFÜGGVÉNY

5.5.3.1. Bevezető, motiváló feladat

A tengeri barna alga hetente megduplázza a hosszát. Az alábbi grafikon a barna alga növekedését ábrázolja 1 m-ről kiindulva.



A kezdetben 1 méteres barna alga mennyi idő múlva lesz

- 2 méteres
- 4 méteres
- 10 méteres

- 16 méteres
- 20 méteres
- 30 méteres?

A grafikon alapján becsüljük meg és töltsük ki a táblázatot!

Hossz (m)	1	2	4	10	16	20	30
Idő (hét)	0						

Mikor volt a tengeri barna alga hossza

$\frac{1}{2}$ méter, $\frac{1}{4}$ méter, $\frac{1}{8}$ méter?

Egészítsük ki a táblázatot!

Hossz (m)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	10	16	20	30
Idő (hét)				0						

Adjunk matematikai modellt a folyamat leírására!

Ábrázoljuk az eltelt időt a barna alga hosszának függvényében!

Milyen függvénnyel jellemezhetjük a folyamatot?

Jellemezzük a függvényt!

5.5.3.2. Fogalom definiálása, többféle definíció

- Az *f*: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $f(x) = \log_a x$ ($0 < a$ és $a \neq 1$) függvényt logaritmusfüggvénynek nevezzük.
- Az *f*: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \log_a x$ ($0 < a$ és $a \neq 1$) függvényt logaritmusfüggvénynek nevezzük.
- Az *f*: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $f(x) = \log_a x$ ($0 < a$ és $a \neq 1$) függvény a *g*: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $g(x) = a^x$ exponenciális függvény inverze.

Feladatok

A következő definíciók közül melyik a helyes? Javítsa ki, amelyik nem helyes!

- Az *f*: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $f(x) = \log_a x$ ($0 < a$ és $a \neq 1$) függvényt logaritmusfüggvénynek nevezzük.
- Az *f*: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \log_a x$ függvényt logaritmusfüggvénynek nevezzük.
- Az $f(x) = \log_a x$ ($0 < a$ és $a \neq 1$) függvény a $g(x) = a^x$ exponenciális függvény inverze.

5.5.3.3. Fogalomazonosítási feladatok

1. Válassza ki a logaritmus függvényeket!

   $f(x) = \lg x$

   $g(x) = \ln(x+6)$

   $h(x) = 2^x$

$i(x) = x^5$

$j(x) = 5\log_3 x^2$

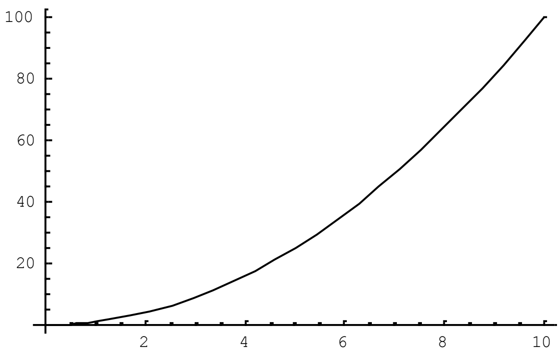
$k(x) = 7x + 2$

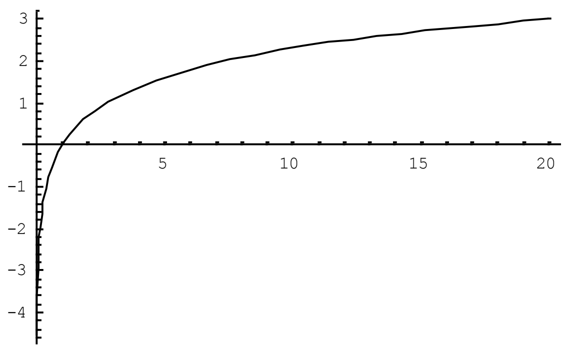
$l(x) = 6^{\log_6 x}$

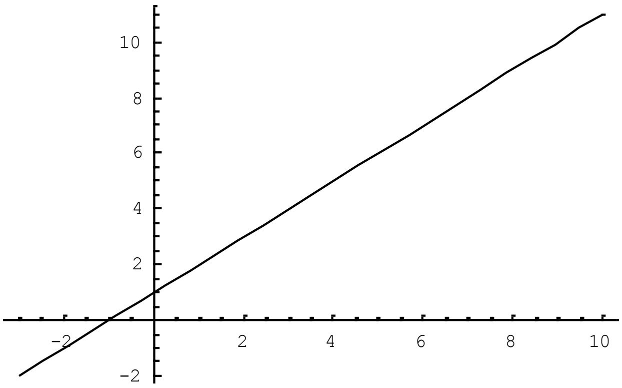
2. Az alábbi kapcsolatok közül válassza ki azokat, amelyeket logaritmus függvény ír le!

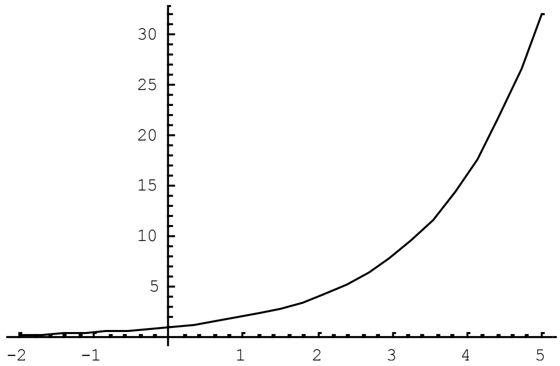
   - Négyzet oldala és területe.
   - Évi 10%-os kamatra beteszünk 20 000 forintot az OTP-be. Idő és a kamatokkal megnövelt összeg kapcsolata.
   - Afrika lakossága évente átlagosan 3%-kal nő. Idő és a lakosság száma közötti kapcsolat.
   - Autó fékezése esetén a megtett út és idő kapcsolata. (állandó gyorsulást feltételezünk)
   - A radioaktív izotóp felbomlása.

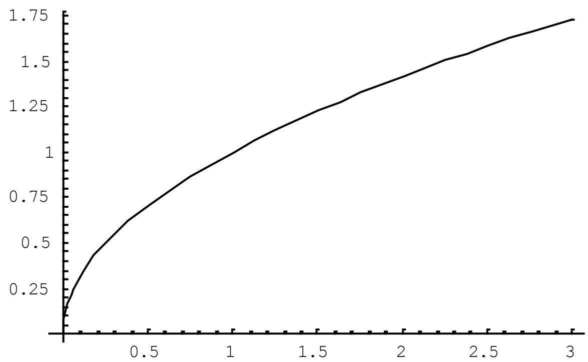
3. Az alábbi grafikonok közül válassza ki azokat, amelyek logaritmus függvény grafikonja lehetnek!







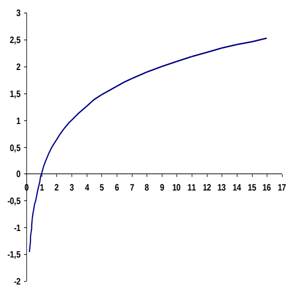




5.5.3.4. Fogalomrealizálási feladatok

1. Adjon meg egy logaritmus függvényt
   - szöveggel
   - grafikonnal
   - szimbolikusan
   - táblázattal!

2. Töltse ki a következő táblázatot!

Szövegesen	Grafikonnal	Szimbolikusan	Táblázattal
A tavirózsa a megfigyelés kezdetekor 1 m^2 vízfelületet fed le. Havonta megduplázódik a lefedett terület. Vizsgáljuk a lefedett terület és az idő kapcsolatát.			
			
		$f\colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ $f(x) = \log_4 x$	
			<table><tr><td>**Hossz (m)**</td><td>1</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{8}$</td></tr><tr><td>**Idő (hét)**</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>

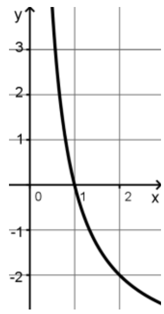
3. Az f: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ függvénynek csak néhány értékét ismerjük. Lehetséges-e, hogy f egy $f(x) = \log_a b$ alakú logaritmus függvény? Válaszát indokolja! Ha ilyen alakú a függvény, adja meg a hozzárendelési szabályát!

   a) $f(2) = 1$; $f(0{,}25) = -1$; $f(8) = 3$

   b) $f(0{,}1) = -1$; $f(0{,}3) = 0$; $f(3) = 2$

   c) $f(1) = 0$; $f(2) = 1$; $f(10) = 3$

4. István az $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}} x \quad x > 0$ függvény grafikonját akarta felvázolni, de ez nem sikerült neki, több hibát is elkövetett (a hibás vázlat látható a mellékelt ábrán). Döntse el, hogy melyik igaz az alábbi állítások közül!



   A) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény szigorúan monoton csökkenő.

   B) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény 2-höz –2-t rendel.

   C) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény zérushelye 1.

5.5.3.5. Beágyazása fogalomhierarchiába

1. Venn diagram segítségével ábrázolja a hozzárendelések, függvények, exponenciális függvények, logaritmus függvények kapcsolatát!
2. Venn diagram segítségével ábrázolja a monoton, szigorúan monoton, az exponenciális és a logaritmus függvények kapcsolatát!

3. Ábrázolja közös koordinátarendszerben a következő függvényeket, és jellemezze őket!

   $f:\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ f(x) = \log_2 x$ és $g:\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+,\ g(x) = 2^x$

   Milyen kapcsolat van a két függvény között?

4. Párosítsa össze a következő fogalmakat! Írjon mindegyikre 1-1 példát! Fogalmazza meg, hogy milyen kapcsolat van közöttük!

   Hatványozás

   Négyzetre emelés

   Gyökfüggvény

   Négyzetgyökvonás

   Hatványfüggvény

   Exponenciális függvény

   Gyökvonás

   Logaritmusfüggvény

5.5.3.6. Definíció következményeinek levonása

- Az f: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto \log_a x$ függvény szigorúan monoton növekvő, ha a > 1.
- Az f: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto \log_a x$ függvény szigorúan monoton csökkenő, ha 0 < a < 1.
- Két azonos alapú logaritmus egyenlőségéből következik, hogy a kifejezések, melyeknek a logaritmusát vettük, maguk is egyenlők, azaz ha $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$, ahol $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.

Feladatok

1. Egy baktériumtenyészet egyedszámának (N) növekedését az $N = 120 \cdot 2^{1,5t}$ képlettel írhatjuk le, ahol t az eltelt órák száma.

   a) Hány egyedből állt a tenyészet a kísérlet kezdetekor?

   b) Hány óra múlva lesz az egyedek száma 480?

   c) Mikor volt az egyedek száma 30?

   d) Hány óra alatt duplázódik meg a baktériumok száma?

   e) Körülbelül hány óra alatt tízszereződik meg a baktériumok száma?

   Változtassuk meg a képletet úgy, hogy a baktériumok száma óránként a felére csökkenjen, és válaszoljunk a következő kérdésekre!

   f) Hány egyedből állt a tenyészet a kísérlet kezdetekor?

   g) Mikor volt az egyedek száma 480?

   h) Mikor lesz az egyedek száma 30?

   i) Hány óra alatt feleződik meg a baktériumok száma?

   j) Körülbelül hány óra alatt lesz tizedannyi a baktériumok száma?

2. Fejezzük ki logaritmussal az előző feladatban szereplő két egyenletből az eltelt időt!

3. Ábrázoljuk a két függvény grafikonját derékszögű koordináta-rendszerben és jellemezzük őket!

5.5.3.7. Alkalmazási feladatok

1. A Föld népessége 1995-ben mintegy 5,7 milliárd fő volt.
   a) A népesség egyes becslések szerint ebben az időszakban már csak évi 1,2%-kal nőtt. Ha ezt a növekedési rátát állandónak tekintjük, mikorra érné el a népesség a 10 milliárdot?
   b) Más becslések szerint 2020-ra a népesség eléri a 7,9 milliárdot. Más eredményt ad-e ez a becslés, mint az előző? Ha igen, e szerint mikorra érné el a népesség a 10 milliárdot?[17]

Megoldás:

a) $10 = 5{,}7 \cdot 1{,}012^x$

$1{,}754 = 1{,}012^x$

$\lg 1{,}754 = \lg 1{,}012^x$

$\lg 1{,}754 = x \cdot \lg 1{,}012$

$$x = \frac{\lg 1{,}754}{\lg 1{,}012} = 47{,}12$$

Tehát a népesség 47 év múlva érné el a 10 milliárdot, ha a növekedési rátát állandónak tekintjük.

b) 1995-től 2020-ig 25 év telt el. Kiszámoljuk, hogy évi hány százalékkal nő a népesség az adott időszakban.

$7{,}9 = 5{,}7 \cdot x^{25}$

$1{,}386 = x^{25}$

$1{,}386 = x^{25}$

$x = 1{,}013$

[17] Dömel András – Dr. Marosvári Péter – Mezei József – Nagyné Szokol Ágnes – Szász Antónia - Székely Péter – Dr. Szabadi László – Dr. Vancsó Ödön: Matematika 11. osztályosok számára, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2004, 103. oldal

Ez évi 1,3%-os növekedést jelent, tehát más eredményt ad, mint az előző becslés.

$10 = 5{,}7 \cdot 1{,}013^x$

$1{,}754 = 1{,}013^x$

$\lg 1{,}754 = \lg 1{,}013^x$

$\lg 1{,}754 = x \cdot \lg 1{,}013$

$$x = \frac{\lg 1{,}754}{\lg 1{,}013} = 43{,}52$$

Tehát 44 év múlva érné el a népesség a 10 milliárdot, ha évente 1,3%-kal növekszik a népesség.

2. Egy szigeten egy rágcsáló-populáció 6561 egyedből áll. Tudjuk, hogy ez a rágcsáló fajta évente 2 alkalommal szaporodik. Minden egyes szaporodási időszak végén az állomány létszáma 1,5-szeresére nő. Hány évvel ezelőtt telepedett meg a szigeten ez a kis rágcsáló, ha kezdetben a populáció 256 egyedből állt?[18]

Megoldás:

$6561 = 256 \cdot 1{,}5^x$

$25{,}63 = 1{,}5^x$

$\lg 25{,}63 = \lg 1{,}5^x$

$\lg 25{,}63 = x \cdot \lg 1{,}5$

$$x = \frac{\lg 25{,}63}{\lg 1{,}5} = 8$$

Tehát a rágcsáló 8 alkalommal szaporodott, ami azt jelenti, hogy 4 évvel ezelőtt telepedett meg a szigeten.

3. A Föld különböző növényzetű övezeteit vizsgálva a kutatók arra jutottak, hogy az éves csapadékmennyiség és a termelődött új hajtások között a $\lg T = 0{,}8 \cdot \lg C + 1{,}2$

[18] Hortobágyi István – Marosvári Péter – Pálmay Lóránt – Pósfai Péter – Siposs András – Vancsó Ödön: Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika II., Konsept-H Könyvkiadó, Piliscsaba, 2003, 313. oldal

tapasztalati összefüggés állítható fel, ahol T a termékenység (szárazanyag-tartalomra számítva, g/m^2/év egységben), C pedig az éves csapadékmennyiség, cm-ben. Kb. mekkora termékenységűek az évi 1 m-es csapadékú övezetek (pl. a mérsékelt égövi füves területek)?[19]

Megoldás:

1 m = 100 cm

$\lg T = 0{,}8 \cdot \lg C + 1{,}2 = 0{,}8 \cdot \lg 100 + 1{,}2 = 0{,}8 \cdot 2 + 1{,}2 = 2{,}8$

Tehát kb. 2,8 g/m^2/év termékenységűek az évi 1m-es csapadékú övezetek.

[19] Hortobágyi István – Marosvári Péter – Pálmay Lóránt – Pósfai Péter – Siposs András – Vancsó Ödön: Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika II., Konsept-H Könyvkiadó, Piliscsaba, 2003, 328. oldal

5.5.4. A LOGARITMUS AZONOSSÁGAI

5.5.4.1. Bevezető, motiváló feladat

$$\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c \text{ azonosság}$$

1. A tengeri barna alga hetente megduplázza a hosszát.
   - 2 hét, illetve 3 hét alatt hányszorosára nő a hossza?
   - Hányszorosára nő 5 hét, azaz 2 + 3 hét múlva?

$$\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 4 \cdot 8 = \log_2 32$$

2. A tengeri barna alga hetente megduplázza a hosszát.
   - Hány hét múlva lesz négyszerese, illetve nyolcszorosa a kezdeti hosszának?
   - Hány hét múlva lesz 32-szerese, azaz 4 · 8-szorosa a kezdeti hosszának?

$$\log_2 32 = \log_2 4 \cdot 8 = \log_2 4 + \log_2 8$$

3. Magyarázzuk meg, miért teljesül!
   - $\log_2 3 + 1 = \log_2 6$
   - $\log_2 7 + 1 = \log_2 14$
   - $\log_2 6 + \log_2 2 = \log_2 12$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c} \text{ azonosság}$$

1. Magyarázzuk meg, miért teljesül!
   - $\log_2 10 - 1 = \log_2 5$
   - $\log_2 12 - 1 = \log_2 6$
   - $\log_2 14 - \log_2 2 = \log_2 7$

2. A tengeri barna alga hetente megduplázza a hosszát.
   - 2 hét, illetve 7 hét alatt hányszorosára nő a hossza?
   - Hányszorosára nő 5 hét, azaz 7 - 2 hét múlva?

$$\log_2 128 - \log_2 4 = \log_2 \frac{128}{4} = \log_2 32$$

3. A tengeri barna alga hetente megduplázza a hosszát.
   - Hány hét múlva lesz négyszerese, illetve 128-szorosa a kezdeti hosszának?
   - Hány hét múlva lesz 32-szerese, azaz $\frac{128}{4}$-szerese kezdeti hosszának?

$$\log_2 32 = \log_2 \frac{128}{4} = \log_2 128 - \log_2 4$$

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x \text{ azonosság}$$

1. A tengeri barna alga hetente megduplázza a hosszát.
   - Hány hét múlva lesz a hossza 2 m, 4 m, 8 m, 16 m, 32 m?
   - Hányszorosára nő 5 hét alatt?

$\log_2 2^5 = 5 \cdot \log_2 2$

2. A tengeri barna alga hossza 2 hét alatt a négyszeresére nő.
   - Hányszorosára nő 4 hét, 6 hét, 8 hét, 10 hét alatt?
   - Hányszorosára nő 24 hét alatt?

$12 \cdot \log_2 4 = \log_2 4^{12}$

3. A tengeri barna alga hossza 2 hét alatt a négyszeresére nő.
   - Hány hét múlva nő 8-szorosára, 16-szorosára, 64-szorosára?
   - Hány hét múlva nő 4^{12}-szeresére?

$\log_2 4^{12} = 12 \cdot \log_2 4$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ tétel, áttérés más alapra}$$

A tengeri barna alga hetente megduplázza a hosszát.

- Hány hét alatt lesz 64 m a hossza, ha kezdetben 1m hosszú?
- Hány hét alatt lenne 64 m hosszú, ha hetente négyszeresére nőne?

$$\log_4 64 = \frac{\log_2 64}{2} = \frac{\log_2 64}{\log_2 4} = 3$$

- Hány hét alatt lenne 64 m hosszú, ha hetente nyolcszorosára nőne?

$$\log_8 64 = \frac{\log_2 64}{3} = \frac{\log_2 64}{\log_2 8} = 2$$

5.5.4.2. Tétel megfogalmazása

Az előző feladatok segítségével fogalmazzuk meg a logaritmus azonosságaira vonatkozó tételeket.

1. $\log_2 4 \cdot 8 = \log_2 4 + \log_2 8$

   $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$, ahol $x, y > 0$; $a > 0$; $a \neq 1$

   Szövegesen: Szorzat logaritmusa megegyezik a tényezők logaritmusának összegével.

2. $\log_2 \frac{128}{4} = \log_2 128 - \log_2 4$

   $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, ahol $x, y > 0$; $a > 0$; $a \neq 1$

   Szövegesen: Tört logaritmusa a számláló és a nevező logaritmusának különbsége.

3. $\log_2 4^{12} = 12 \cdot \log_2 4$

   $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$, ahol $x > 0$; $a > 0$; $a \neq 1$; $k \in \mathbf{R}$

   Szövegesen: Hatvány logaritmusa az alap logaritmusának és a kitevőnek a szorzata.

4. $\log_4 64 = \dfrac{\log_2 64}{\log_2 4}$

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, ahol $a, b, c > 0$; $a \neq 1$; $c \neq 1$.

Szövegesen: Tetszőleges $b > 0$ szám $a > 0$ és $a \neq 1$ alapú logaritmusa átírható tetszőleges c alapú logaritmussá ($c > 0$ és $c \neq 1$)

5.5.4.3. Kapcsolat más tételekkel

Mivel a logaritmus kitevőt jelöl, ezért a hatványozás azonosságaival hozható kapcsolatba, ahogy ezt a tételek bizonyításánál fel is fogunk használni.

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

A bizonyítás megkezdése előtt átismételjük ezeket és megnézzük mi a kapcsolat a hatványozás azonosságai, illetve a logaritmus azonosságai között, melyikkel hogyan lehet számolni. A feladat a Hajdu-féle matematika tankönyvben szerepel a logaritmus azonosságai előtt. Párhuzamosan egymás mellett számol a 10 hatványaival, illetve logaritmussal nagyon szemléletesen. A feladat ötletet nyújthat a logaritmus azonosságainak bizonyításához.

Feladat[20]:

Az óceán valamely térségében 48,5 mg alga képződött, amelynek tömege naponta 3,6-szeresére nő. Változatlan növekedési ütemet feltételezve 180 nap múlva hányszorosa lenne az algák tömege a Föld tömegének?

A Föld tömege mintegy: $5{,}97 \cdot 10^{30}$ mg.

Az algatömeg változása: $48{,}5 \cdot 3{,}6^{180}$

A keresett arány: $k = \dfrac{48{,}5 \cdot 3{,}6^{180}}{5{,}97 \cdot 10^{30}}$

A $3{,}6^{180}$ érték kiszámításánál a számológép hibát jelez. Az írásbeli műveletek algoritmusát alkalmazva kicsit körülményes lenne a műveletek elvégzése. Célszerűen alkalmazhatjuk viszont a 10 hatványairól és a 10-es alapú logaritmusról tanultakat.

[20] Dr.Czeglédy István – Dr. Hajdu Sándor – Hajdu Sándor Zoltán – Dr. Kovács András: Matematika Középiskola 11. osztály, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2008, 38. oldal

A 10 hatványaival számolva	A logaritmusokkal számolva
Ha a számokat 10 hatványaként írjuk fel, akkor alkalmazhatjuk a hatványozás azonosságait. Hatványt úgy hatványozunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.	A bal oldali hasábban végrehajtott számítások esetén elegendő csak a kitevőket kiírnunk. Így a hatványozás azonosságait átfogalmazhatjuk a logaritmusokkal végzett műveletekre.
$3{,}6^{180}=(10^{\lg 3{,}6})^{180}=10^{180\lg 3{,}6}$	A hatvány logaritmusát megkapjuk, ha az alap logaritmusát szorozzuk a kitevővel.
Egyenlő alapú hatványokat úgy szorozhatunk össze, hogy az alapot a kitevők összegére emeljük.	$\lg(3{,}6^{180})=180\cdot\lg 3{,}6\approx 180\cdot 0{,}556$
$48{,}5\cdot 3{,}6^{180}=10^{\lg 48{,}5}\cdot 10^{180\lg 3{,}6}=$ $=10^{\lg 48{,}5+180\lg 3{,}6}$	A szorzat logaritmusa egyenlő a tényezők logaritmusának összegével.
Egyenlő alapú hatványokat úgy oszthatunk el egymással, hogy az alapot az osztandó és az osztó kitevőjének különbségére emeljük.	$\lg(48{,}5\cdot 3{,}6^{180})=\lg 48{,}5+180\cdot\lg 3{,}6\approx$ $\approx 1{,}686+180\cdot 0{,}556$
$k=\dfrac{48{,}5\cdot 3{,}6^{180}}{5{,}97\cdot 10^{30}}=\dfrac{10^{\lg 48{,}5+180\lg 3{,}6}}{10^{30+\lg 5{,}97}}$	A hányados logaritmusa egyenlő az osztandó és az osztó logaritmusának különbségével.
$10^{\lg k}=10^{(\lg 48{,}5+180\lg 3{,}6)-(30+\lg 5{,}97)}$	$\lg k=\lg\left(\dfrac{48{,}5\cdot 3{,}6^{180}}{5{,}97\cdot 10^{30}}\right)=$ $=(\lg 48{,}5+180\cdot\lg 3{,}6)-(30+\lg 5{,}97)$

A hatványalapok és a kitevők megegyeznek, ezért a kitevőknek is meg kell egyezniük.

$$\lg k=(\lg 48{,}5+180\cdot\lg 3{,}6)-(30+\lg 5{,}97)$$

$$\lg k\approx(1{,}686+180\cdot 0{,}556)-(30+0{,}776)$$

$$\lg k\approx 70{,}99\approx 71$$

$$k\approx 10^{71}$$

5.5.4.4. Bizonyítás

1. Tétel:

$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$, ahol $x, y > 0$; $a > 0$; $a \neq 1$

Szövegesen: Szorzat logaritmusa megegyezik a tényezők logaritmusának összegével.

Bizonyítás:

Az előző példa alapján használjuk a logaritmus tulajdonságait és a hatványozás már ismert azonosságait. Írjuk fel x-et, y-t és $x \cdot y$-ot a hatványaként.

$$x = a^{\log_a x}$$

$$y = a^{\log_a y}$$

$$x \cdot y = a^{\log_a x \cdot y}$$

Felhasználjuk a hatványok szorzatára vonatkozó összefüggést:

$$x \cdot y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

Ebből következik.

$$a^{\log_a x \cdot y} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

Az exponenciális függvénykölcsönös egyértelműsége miatt a kitevők egyenlők:

$$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$$

2. Tétel:

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, ahol $x, y > 0$; $a > 0$; $a \neq 1$

Szövegesen: Tört logaritmusa a számláló és a nevező logaritmusának különbsége.

Bizonyítás:

A bizonyítás menete ugyanaz, mint a szorzás logaritmusának bizonyítása. Írjuk fel x-et, y-t és $\frac{x}{y}$-t a hatványaként.

$$x = a^{\log_a x}$$

$$y = a^{\log_a y}$$

$$\frac{x}{y} = a^{\log_a \frac{x}{y}}$$

Felhasználjuk a hatványok osztására vonatkozó összefüggést:

$$\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}$$

Ebből következik:

$$a^{\log_a \frac{x}{y}} = a^{\log_a x - \log_a y}$$

Az exponenciális függvénykölcsönös egyértelműsége miatt a kitevők egyenlők:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

3. Tétel:

$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$, ahol $x > 0$; $a > 0$; $a \neq 1$; $k \in \mathbf{R}$

Szövegesen: Hatvány logaritmusa az alap logaritmusának és a kitevőnek a szorzata.

Bizonyítás:

Most is a hatványozás azonosságait fogjuk felhasználni a bizonyításhoz. Írjuk fel *x*-et és x^y-t a hatványaként!

$$x = a^{\log_a x}$$

$$x^k = a^{\log_a x^k}$$

A hatványozás azonosságait felhasználva:

$$x^k = \left(a^{\log_a x}\right)^k = a^{k \cdot \log_a x}$$

Ebből következik:

$$a^{\log_a x^k} = a^{k \cdot \log_a x}$$

Az exponenciális függvény kölcsönös egyértelműsége miatt a kitevők egyenlők:

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$$

4. Tétel:

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, ahol *a, b, c* >0; $a \neq 1$; $c \neq 1$.

Bizonyítás:

Írjuk fel *b*-t *a* hatványaként!

$$b = a^{\log_a b}$$

Induljunk ki $\log_c b$-ből, helyettesítsük be *b* helyére $a^{\log_a b}$-t és használjuk a hatvány logaritmusára vonatkozó szabályt!

$$\log_c b = \log_c a^{\log_a b} = \log_a b \cdot \log_c a$$

Ebből kapjuk:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

5.5.4.5. Alkalmazási feladatok

1. Egy táptalajon nevelt élesztőgomba havonta megháromszorozza a tömegét.
   a) Hány hónap alatt lesz 729 kg a tömege, ha kezdetben 1 kg?
   b) Hány hónap alatt lenne 729 kg, ha havonta 9-szeresére nőne a tömege?

Megoldás:

a) $\log_3 729 = 6$, tehát 6 hónap múlva lesz 729 kg a tömege.

b) $\log_9 729 = 3$, tehát 3 hónap alatt lenne 729 kg a tömege.

A logaritmus azonosságaival megoldva:

$$\frac{\log_3 729}{\log_3 9} = \frac{6}{2} = 3$$

2. Egy baktériumtenyészetben a baktériumok egyedszáma 10 000. Számuk óránként megnégyszereződik. Egy másik tenyészetben csak 5000 baktérium van, viszont számuk óránként ötszörösére nő. Melyik tenyészetben lesz több baktérium 10 hét múlva? Hányszor több?

Megoldás:

10 hét = 1680 óra

Az egyik tenyészetben:
$10\,000 \cdot 4^{1680}$
Számológéppel nem tudjuk kiszámolni az eredményt.

A másik tenyészetben:
$5000 \cdot 5^{1680}$
A számológép erre se ad eredményt.

Becslések alapján a második tenyészetben lesz több baktérium, mivel ott nagyobb számot hatványozunk.

A keresett arány:

$$k = \frac{5000 \cdot 5^{1680}}{10000 \cdot 4^{1680}} = 0{,}5 \cdot 1{,}25^{1680}$$

$$\lg k = \lg(0{,}5 \cdot 1{,}25^{1680})$$

$$\lg k = \lg 0{,}5 + \lg 1{,}25^{1680} = \lg 0{,}5 + 1680 \cdot \lg 1{,}25 =$$

$$= -0{,}301 + 1680 \cdot 0{,}09691 = 162{,}51$$

$$k = 10^{163}$$

Tehát a második tenyészetben lesz több baktérium, 10^{163}-szor több mint az elsőben.

Összegzés

Szakdolgozatomban igyekeztem bemutatni a realisztikus matematika oktatás előnyeit, fontosságát. A tankönyvek egy része megpróbálja követni ezt a szemléletet, de sajnos van olyan tankönyv is, amelyikben szinte egyáltalán nem szerepelnek ilyen jellegű feladatok, hiányoznak az olyan jellegű feladatok, amelyek a fogalmak azonosítására, a fogalom realizálására szolgálnak.

A 2005-ben bevezetett új típusú érettségi vizsgákban szép számmal vannak a hétköznapi életből vett, életszerű, alkalmazási példák. Sajnos nem mindegyik tankönyv készíti fel megfelelően a diákokat arra, hogy gördülékenyen meg tudják oldani az ilyen típusú feladatokat.

A nehezebb fogalmaknál, mint például a logaritmus, sokat segíthet a diákoknak a megértéshez a kézzel fogható, valóságból vett példa, és a megfelelően felépített tanítási folyamat.

Irodalomjegyzék

- Ambrus András: Bevezetés a matematika-didaktikába, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1995
- Czapáry Endre - Gyapjas Ferenc: Matematika a középiskolák 11. évfolyama számára, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2003
- Dr.Czeglédy István – Dr. Hajdu Sándor – Hajdu Sándor Zoltán – Dr. Kovács András: Matematika Középiskola 11. osztály, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2008
- Dömel András – Dr. Marosvári Péter – Mezei József – Nagyné Szokol Ágnes – Szász Antónia - Székely Péter – Dr. Szabadi László – Dr. Vancsó Ödön: Matematika 11. osztályosok számára, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2004
- Hajnal Imre – Számadó László – Békéssy Szilvia: Matematika a gimnáziumok 11. évfolyama számára, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2003
- Hortobágyi István – Marosvári Péter – Pálmay Lóránt – Pósfai Péter – Siposs András – Vancsó Ödön: Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika I-II., Konsept-H Könyvkiadó, Piliscsaba, 2003
- Kosztolányi József – Kovács István – Pintér Klára – Urbán János – Vincze István: Sokszínű matematika 11., Mozaik Kiadó, Szeged, 2003
- Lugosi Attila: A logaritmus tanítása a középiskolában, Eötvös Loránd Tudomány, Természettudományi Kar, Szakdolgozat, 2008
- www.oh.gov.hu
- www.oktatas.hu
- www.nefmi.gov.hu
- www.trefort.elte.hu