Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Matematikai Intézet

Matematikatanítási és Módszertani Központ

Szakácsné Györey Bernadett

Véges geometriai problémák bevezetése az iskolában

Szakdolgozat

Témavezető: Vancsó Ödön

Budapest, 2013

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Szakdolgozatom témája egy szakkörsorozat kidolgozása, elemzése. A feladatsorok feladatait a véges geometriák területéről választottam úgy, hogy azok fogalmilag ne legyenek túl nehezek. A feladatsorokat tehetséges, kombinatorikus megfontolásokban jártas, új területek iránt érdeklődő diákoknak szánom – a feladatsorok magas szintű absztrakciós készséget, a pontos logikai következtetés képességét követelik meg. A bevezetett ismeretek megértését minél több konkrét példával, a szemléltetés eszközeivel, ismétlésekkel, a definiált fogalmak lehető legegyszerűbb leírásával igyekeztem megkönnyíteni. Csak a feladatokban használt fogalmakat definiáltam pontosan, a kapcsolódó fogalmakról – melyekről néhol említést teszek – csupán intuitív kép kialakítását próbáltam előkészíteni, hogy azok absztrakt definiálása már ne terhelje a tanulókat.

A feladatsor egyik célja a véges geometriák bevezetése, egyszerűbb kérdéseinek megértése. Másik fő cél az axiomatikus felépítés, modell, konstrukció fogalmának megértése, valamint az axiomatikusan felépített struktúrák egyszerű problémáinak csak axiómákat felhasználó megoldásaiban való jártasság megszerzése.

A feladatsorozat nyolc feladatsorból áll. Az egyes feladatsorok feladatai egy, vagy néhány összefüggő véges geometriai fogalomhoz kapcsolódnak. A feladatsorok elején az érintett fogalmak megértését, megerősítését célzó feladatok szerepelnek. A feladatsorok további feladatai a fogalom tulajdonságairól fogalmaznak meg állításokat. A feladatok megoldásai a fogalom problémamegoldásban való használatának módszereibe, technikáiba adnak betekintést.

A definíciókat és feladatokat Kiss György - Szőnyi Tamás: Véges geometriák című könyvéből válogatott definíciók, állítások, tételek alapján fogalmaztam meg.

Minden feladatsor elején összefoglalom, milyen új fogalmakat, összefüggéseket vezet be az új feladatsor. Leírom, fogalmilag miben épít, mennyiben kapcsolódik az adott feladatsor korábbi ismeretekhez, előző feladatsorokhoz, hogyan integrálhatók az új ismeretek a fogalmi hálóba. Didaktikailag elemzem még a feladatsor felvezetésében a feladatsor céljait, módszereit.

Az egyes feladatok, majd megoldásuk ismertetése után leírom a feladat célját, a megoldásához használt eszközöket, a tanulóknak szánt rávezető, kapcsolódó problémákat felvető kérdéseket, megjegyzéseket.

Köszönöm Vancsó Ödönnek a szakdolgozat megtervezésében és megírásában nyújtott segítségét, hasznos tanácsait, segítőkészségét.

Köszönetet mondok Szőnyi Tamásnak, aki a Véges geometria szeminárium vezetőjeként, nagyszerű előadójaként felkeltette érdeklődésemet a terület iránt, majd phd témavezetőmként segített jobban megismernem e területet.

Köszönöm matematika szakos édesanyám, gimnáziumi matematikatanáraim, férjem matematikatanárnője és az általa megismert tanáregyéniségek nagyszerű példáját, melyekből tanulhattam a matematika tanításáról, a pálya szeretetéről.

Megköszönöm férjemnek és fiaimnak, hogy támogattak a dolgozat megírásában.

I. Feladatsor (Projektív sík)

A feladatsor két fő célja a a projektív sík fogalmának bevezetése és általában az axiomatikus felépítéssel való ismerkedés. A feladatok megoldása példákon keresztül bevezeti a modell fogalmát. A modellekkel való ismerkedés során a projektív sík axiómáinak megerősítése történik. A feladatsor a projektív sík három modelljét is bemutatja, mely rámutat az axiomatikus felépítés azon jellemzőjére, hogy nem egy adott struktúra pontos leírásáról van szó, hanem struktúrák közös, alapvető tulajdonságait fogalmazzák meg az axiómák.

Projektív sík axiómái

Nevezzük egy alaphalmaz elemeit pontoknak, bizonyos részhalmazait egyeneseknek, a tartalmazást pedig hívjuk illeszkedésnek. Ha az egyenesek, mint részhalmazok halmaza kielégíti az alábbi axiómákat, akkor a pontokat, egyeneseket és a köztük fennálló illeszkedések együttesét projektív síknak nevezzük:

`P1.` Bármely két ponthoz pontosan egy olyan egyenes van, melyre mindkét pont illeszkedik.

`P2.` Bármely két egyeneshez pontosan egy olyan pont van, mely illeszkedik mindkét egyenesre.

`P3.` Minden egyenesre legalább három pont illeszkedik.

`P4.` Minden pont legalább három egyenesre illeszkedik.

1. Feladat: A projektív sík axiómái közül melyek teljesülnek az euklideszi síkra?

Megoldás: `P1`, `P3`, `P4` axiómák teljesülnek az euklideszi síkon. `P2` párhuzamos egyenesek esetén nem teljesül. □

A feladat az axiómák jelentésének megértését segíti elő, és egyben előkészíti a második feladatot.

2. Feladat: Miként egészíthetnénk ki az euklideszi síkot, hogy minden axióma teljesüljön?

Megoldás: Párhuzamos egyenesek minden csoportjához, tehát minden irányhoz rendeljünk egy új pontot – nevezzük ezeket ideális pontoknak. Minden egyenes tartalmazza még – a „régi” pontjai mellett – az irányához rendelt új pontot. Az ideális pontok alkossanak egy új egyeneset, amit nevezzünk ideális egyenesnek. Ez a struktúra kielégíti a `P1-P4` axiómákat. □

A második feladat szemléletességre törekedve, a jól ismert euklideszi síkban mozogva mélyíti el az ismertetett axiómák jelentését. A tanulók a szokásos egyenes fogalommal dolgozva operálhatnak, hogy az axiómákat kielégítő konstrukcióhoz jussanak.

3. Feladat: Igazoljuk, hogy a pontok egy halmaza és a részhalmazaikként értelmezett egyenesek halmaza pontosan akkor alkot projektív síkot, ha a `P1` és `P2` axiómák mellett kielégíti az alábbi két axióma egyikét:

`P3'`: Létezik négy általános helyzetű pont, azaz négy olyan pont, melyek közül semelyik három nincs egy egyenesen.

`P3"`: A sík bármely két egyeneséhez létezik olyan pont, amelyik a két egyenes egyikén sincs rajta.

Megoldás: {`P1`, `P2`, `P3`, `P4`} $\Rightarrow$ {`P1`, `P2`, `P3'`} $\Rightarrow$ {`P1`, `P2`, `P3"`} $\Rightarrow$ {`P1`, `P2`, `P3`, `P4`} következtetéseket fogjuk belátni, melyekből következnek az ekvivalenciák.

Tegyük fel, hogy egy sík kielégíti a `P1`, `P2`, `P3` és `P4` axiómákat. Egy tetszőleges P ponton át `P4` miatt megy három különböző egyenes, legyenek ezek e, f és g. `P3` miatt léteznek E_1 és E_2 az e-re illeszkedő, F az f-re illeszkedő és G a g-re illeszkedő pontok. Az FG egyenesen az E_1 és E_2 pontok közül legalább az egyik nincs rajta – feltehető, hogy ez E_1. Ekkor P, F, G és E_1 négy általános helyzetű pont, tehát a sík kielégíti a `P1`, `P2` és `P3'` axiómákat.

Tegyük fel, hogy egy sík kielégíti a `P1`, `P2`, és `P3'` axiómákat, de nem elégíti ki a `P3"` axiómát. Ha két egyenes, az e és f egyenesek tartalmazzák a sík összes pontját, akkor `P3'` miatt léteznek E_1 és E_2 e-re illeszkedő, F_1 és F_2 f-re illeszkedő pontok, melyek mind különböznek e és f metszéspontjától. Viszont `P1` és `P2` miatt létezik az E_1F_1 és E_2F_2 egyenesek metszéspontja, mely sem az e, sem az f egyenesen nem lehet rajta. Ellentmondás, tehát a sík kielégíti a `P1`, `P2` és `P3"` axiómákat.

Ha egy sík kielégíti a `P1`, `P2` és `P3"` axiómákat, akkor `P3"` miatt a sík minden pontján át legalább három egyenes megy, tehát `P4` teljesül. Ha e tetszőleges egyenes, akkor `P3"` miatt létezik rajta nem lévő P pont. P-n át legalább három különböző egyenes megy, ezek `P2` miatt metszik e-t, tehát e-n legalább három különböző pont van, vagyis `P3` is teljesül. $\square$

A harmadik feladat az axiomatikus felépítés azon jellemzőjére mutat rá, hogy az nem tartalmaz olyan állítást, mely a többiből következik. Emellett megerősíti azt, hogy csupán az axiómákból indulhatunk, ha az axiómarendszer minden modelljére igaz következtetést szeretnénk levonni.

A feladat megoldása új környezetben követeli meg a logikai műveletek biztos használatát, az ekvivalencia bizonyításában való gyakorlatot.

4. Feladat: Tekintsük egy háromszög csúcsait, oldalfelező pontjait és súlypontját. Határozzunk meg ezeken a pontokon egyeneseket úgy, hogy ezen pontok, egyenesek és a köztük fennálló illeszkedések kielégítsék a projektív sík axiómáit.

Megoldás: Alkosson egyenest a háromszög két csúcsa a rajtuk fekvő oldal felezőpontjával. Így kapunk három egyenest, melyek páronként egy pontban, a háromszög valamely csúcsában metszik egymást.

Alkosson egyenest a háromszög egy csúcsa, a szemközti oldal felezőpontja és a súlypont. Így kapunk újabb három egyenest, melyek páronként egy pontban, a súlypontban metszik egymást. Ezen egyenesek az első három egyenessel is páronként egy pontban metszik egymást.

Hetedik egyenes legyen a három oldalfelező pont. Ez az egyenes a többi egyenest egy-egy pontban metszi, mert azok mindegyike egy oldalfelező pontot tartalmazott. □

A 4. Feladatban a projektív sík fogalmának produktív gyakorlása történik. A kapott konstrukció arra is rámutat, hogy az axiómákban szereplő egyenes fogalom jóval tágabb értelemben értelmezendő, mint ahogy az euklideszi síkon, vagy akár a kiegészített euklideszi síkon az egyenesre gondoltunk.

A feladat kapcsán megfogalmazhatjuk, mit nevezünk egy axiómarendszer modelljének.

5. Feladat: Tekintsünk egy szabályos 13-szöget.

(a) Válasszunk ki négy csúcsot úgy, hogy közülük bármely kettő távolsága különböző legyen.
(b) Igazoljuk, hogy ha a pontok a 13-szög csúcsai, az egyenesek a fenti négyszög csúcsokba való elforgatottjainak csúcsai, akkor ezek kielégítik a projektív sík axiómáit.

Megoldás:

(a) Számozzuk sorban a 13-szög csúcsait 1-től 13-ig. Az $1, 2, 5, 7$ csúcsok kielégítik a feladat feltételeit.
(b) A `P3` és `P4` axiómák nyilvánvalóan teljesülnek.

Az K négyszög 1,2,5,7 csúcsai között - az (a) feladat szerint - mind előfordulnak az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ „oldalnyi" távolságok. Ha tetszőlegesen választjuk két különböző csúcsát a 13-szögnek, azok távolsága legfeljebb 6 „oldalnyi", így a K négyszög vele megegyező hosszú oldala ráforgatható a 13-szög középpontja körül. Tehát bármely két pontra illeszkedik egyenes, azaz `P1` axióma teljesül.

Legyen $\alpha = 2\pi/13$. A K négyszög $a\alpha$ szöggel való K_a és $b\alpha$ szöggel való K_b elforgatottjainak pontosan akkor közös pontja a P pont, ha $a\alpha + k\alpha = b\alpha + l\alpha + m2\pi$, ahol $a, b \in \{0, 1, \ldots, 12\}$, $k, l \in \{1, 2, 5, 7\}$ P pont pedig a 13-as csúcs $(a + k)\alpha = (b + l)\alpha + m2\pi$ szöggel való elforgatottja. Ez pontosan akkor teljesül, ha $a - b = l - k$ $(mod\ 13)$. Mivel pontosan egyféleképpen tudjuk úgy választani l-et és k-t, hogy $a - b = l - k$ $(mod\ 13)$ legyen, a K_a és K_b négyszögeknek pontosan egy közös pontja van, tehát `P2` teljesül. □

Az 5. Feladat kombinatorikus jellegű. Az (a) rész nem használ új fogalmat. A (b) rész kombinatorikailag is nehezebb módon gyakoroltatja a projektív sík axiómáinak ellenőrzését. Ez akár házi feladatként is szerepelhet, az előző feladatok pár napos érlelődése, újragondolása után.

II. Feladatsor (Projektív sík rendje, affin sík)

A feladatsor ismeretanyagban a véges geometriák rendjének bevezetését tartalmazza, illetve a projektív és affin síkok kapcsolatát vizsgálja. Épít az előző feladatsor 4. és 5. feladatában látott példákra. Ezek példát szolgáltatnak a másod- és harmadrendű projektív síkra, és egyben felidézhetjük a már látott példákat.

A feladatok megoldási módszerei között megjelenik az általánosítás, a gondolatmenet megfordítása. A konstrukciók megalkotását célzó feladatok a már megszerzett ismeretek produktív gyakorlására nyújtanak lehetőséget, megkívánják a formalizálás képességét. Az új fogalmak, ismeretek bevezetése, megerősítése azok kombinatorikus megfontolásokban való használatával történik - azon tanulók, akiknek e feladatsorozatot szánom, igen jártasak, sikeresek és motiváltak kombinatorikus megfontolásokban.

1. Feladat: Igazoljuk, hogy ha egy projektív síknak van olyan egyenese, amelyre $n+1$ pont illeszkedik, akkor

(a) minden egyenesén $n+1$ pont van,
(b) minden pontján át $n+1$ egyenes megy,
(c) összesen n^2+n+1 pontot és ugyanennyi egyenest tartalmaz.

Megoldás:

(a) Jelöljük az $n+1$ pontot tartalmazó egyenest e-vel, a rajta lévő pontokat pedig $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$-gyel. Ha Q olyan pont, mely nincs rajta az e egyenesen, akkor a `P1` axióma miatt Q-t valamennyi P_i ponttal ($i = 1, 2, \ldots, n+1$) össze tudjuk kötni, és a QP_i egyenesek mind különbözőek, mert Q nincs rajta e-n. Másrészt minden Q-n átmenő egyenes metszi e-t a `P2` axióma miatt, s ez a metszéspont csak a P_i pontok valamelyike lehet, tehát Q-n $n+1$ egyenes megy át. A gondolatmenetben a pontok és egyenesek, illetve a `P1` és `P2` axióma szerepét felcserélve kapjuk, hogy ha van olyan E pont, amelyen át $n+1$ egyenes megy, akkor minden olyan egyenesen $n+1$ pont van, amelyik nem megy át E-n.

   Ha f tetszőleges, e-től különböző egyenes, akkor `P4` miatt az e és f metszéspontján át megy legalább egy e-től és F-től is különböző egyenes, aminek `P3` miatt van az e és f metszéspontjától különböző R pontja. Mivel R nincs rajta e-n, ezért rá $n+1$ egyenes illeszkedik. De az R f-en sincs rajta, ezért f-re is $n+1$ pont illeszkedik, amivel az (a) állítást beláttuk.

(b) Ha P a sík tetszőleges pontja, akkor `P3` és `P4` miatt van a síknak rajta át nem menő egyenese. Ezen az egyenesen az (a) állítás miatt $n+1$ pont van. Az (a) rész bizonyításában látottak miatt így P-re $n+1$ egyenes illeszkedik.

(c) A `P1` axióma szerint a sík összes pontjainak a számát megkapjuk, ha egy rögzített P ponttal összekötött pontokat megszámoljuk. Tudjuk, hogy

P-n át $n+1$ egyenes megy, melyek mindegyike P-n kívül n darab pontot tartalmaz. Tehát a projektív sík pontjainak a száma $1+(n+1)n = n^2+n+1$.

A P2 axióma szerint a sík egyeneseit megkaphatjuk úgy, hogy megszámoljuk egy rögzített e egyenes pontjaira illeszkedő egyenesek számát. Az (a) és (b) állítás eredményei szerint e mind az $n+1$ pontjára e-n kívül még n darab egyenes illeszkedik, így a sík egyeneseinek száma $1+(n+1)n = n^2+n+1$. □

Véges geometriákkal foglalkozva a projektív sík axiómáinak rutinszerű alkalmazása szükséges. A feladat megoldása kombinatorikus megfontolásokat igényel, emellett az axiómák használatát gyakoroltatja a tanulókkal. A feladat állítása pedig megmutatja, hogy a projektív sík rendjének alábbi definíciója értelmes definíció.

Definíció: Egy projektív sík rendje n, ha van olyan egyenese, amelyre $n+1$ pont illeszkedik.

A definíció megértése után beszéljük meg a tanulókkal, miért értelmes a definíció, és miért lehettek volna aggályaink a definícióval, ha az első feladat előtt szerepel.

2. Feladat: Ha egy projektív sík egyeneseit tekintjük pontoknak, definiáljunk egyeneseket és illeszkedést úgy, hogy projektív síkot kapjunk!

Megoldás: Feleltessük meg az egyeneseket az eredeti sík pontjainak. Azon pontokat tartalmazza egy egyenes, mely pontoknak megfelelő egyenes az eredeti síkon illeszkedett az egyenesnek megfelelő eredetei síkbeli pontra. Ez a struktúra kielégíti a projektív sík axiómáit. □

A feladat a duális sík fogalmának konstruktív bevezetése. Megoldásához elég az az ötlet, hogy a pontokat definiáljuk egyeneseknek. Felvethetjük a kérdést a tanulóknak, miből adódik, hogy a pontok és egyenesek szerepe felcserélhető. Fontos tapasztalat, hogy bármely, minden modellre érvényes kérdés esetén csak az axiómákból indulhatunk ki – e kérdés válaszát keresve is oda kell visszanyúlnunk. Fogalmazzuk meg, hogy a pontok és egyenesek szerepe az axiómákban felcserélhető!

Definíció: Egy projektív sík duális síkját úgy kapjuk, hogy az eredeti sík egyeneseit, illetve pontjait tekintjük a duális sík pontjainak , illetve egyeneseinek, az illeszkedést pedig úgy definiáljuk, hogy a duális sík egy pontja pontosan akkor van rajta a duális sík egy egyenesén, ha az eredeti síkon a pontnak megfelelő egyenesre illeszkedik az egyenesnek megfelelő pont.

3. Feladat: Ha egy n-edrendű projektív síkból elhagyunk egy egyenest (a rá illeszkedő pontokkal együtt), mely axiómák teljesülnek továbbra is?

Megoldás: A P1 és a P4 axiómák teljesülnek továbbra is biztosan. □

Affin sík axiómái

Nevezzük egy alaphalmaz elemeit **pontok**nak, bizonyos részhalmazait **egyenesek**nek, a tartalmazást pedig hívjuk **illeszkedés**nek. Ha az egyenesek, mint részhalmazok halmaza kielégíti az alábbi axiómákat, akkor a pontokat, egyeneseket és a köztük fennálló illeszkedések együttesét **affin sík**nak nevezzük:

`A1.` Bármely két különböző ponthoz pontosan egy olyan egyenes van, melyre mindkét pont illeszkedik.

`A2.` Ha a P pont nem illeszkedik az e egyenesre, akkor pontosan egy olyan egyenes van, melyre illeszkedik P, de egyetlen e-re illeszkedő pont sem illeszkedik rá.

`A3.` Minden egyenesre legalább két különböző pont illeszkedik.

`A4.` Minden pont legalább három egyenesre illeszkedik.

4. Feladat: Van egy affin síkunk. Hogyan egészíthetnénk ki projektív síkká?

Megoldás: Nevezzük párhuzamosnak a diszjunkt egyeneseket. Az ekvivalenciareláció fogalmának bevezetése nélkül, a tranzitivitás belátásával elfogadjuk, hogy ha a párhuzamos egyeneseket egy osztályba soroljuk, diszjunkt osztályokat kapunk, melyek együttese az összes egyenest magába foglalja.

Ezt követően az I./2. Feladathoz hasonlóan fejezzük be a megoldást. □

A feladat megoldása komoly absztrakciós készséget igényel. A megoldás az euklideszi sík kibővítésének mintájára vihető végig, ám most nem a megszokott párhuzamosság fogalommal kell dolgozniuk a tanulóknak, hanem szükséges megfogalmazniuk maguk számára egy absztrakt párhuzamosság fogalmat.

5. Feladat: Ha egy affin síknak van olyan egyenese, amelyre n pont illeszkedik, akkor

(a) minden egyenesén n pont van,
(b) minden pontján át $n+1$ egyenes megy,
(c) összesen n^2 pontot és n^2+n egyenest tartalmaz.

Megoldás: A megoldás a 4. és 1. Feladat eredményeit használva könnyen adódik. □

Definíció: Egy affin sík rendje n, ha van olyan egyenese, amelyre n pont illeszkedik.

Az 5. Feladat lehetőséget ad arra, hogy a tanulók a feladatsor korábbi feladatainak eredményeivel kombináljanak. A megoldás végigvitele megerősíti a projektív-, illetve affin-sík rendjének fogalmát.

III. Feladatsor (Illeszkedési mátrix)

A feladatsor bevezeti az illeszkedési mátrix fogalmát.

Az előző feladatok sok új, absztrakt fogalmat tartalmaztak. E harmadik feladatsor új ismeretként kevéssé absztrakt fogalmat vezet be, egy konkrét projektív sík leírásának lehetőségét mutatja be.

Az első két feladat megoldása mechanikus. Ezek részben az illeszkedési mátrix fogalmának megerősítését célozzák, másrészt megoldásuk során a tanulók átismételhetik a projektív síkra már látott példákat.

A felrajzolt illeszkedési mátrixok szemléletesen, más reprezentációs síkon is mutatják az axiómák jelentését, a projektív sík eddig megismert tulajdonságait.

A feladatsor utolsó feladata bár új fogalmat nem használ, mégis komoly absztrakciós készséget igényel, új ismeretek tekintetében ez a feladat nevezhető e feladatsor céljának, lényegének.

Definíció: $k \times n$-es mátrixon egy olyan téglalap alakú táblázatot értünk, melynek k sora és n oszlopa van, és amelynek elemei számok.

Definíció: Egy n-edrendű projektív sík illeszkedési mátrixán egy $(n^2+n+1) \times (n^2+n+1)$-es mátrixot értünk, melynek oszlopait a sík pontjaival, sorait pedig a sík egyeneseivel indexelünk. Egy pontnak megfelelő oszlop és egy egyenesnek megfelelő sor kereszteződésében pontosan akkor áll 1, ha a pont illeszkedik az egyenesre, ellenkező esetben 0 áll a mezőben.

1. Feladat: Rajzoljuk fel a Fano-síkot, és nevezzük el a pontjait és egyeneseit. Rajzoljuk fel a Fano-sík illeszkedési mátrixát.

Megoldás:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

□

A feladat konkrét példán keresztül erősíti meg az illeszkedési mátrix fogalmát. A Fano-sík felrajzolása, az illeszkedések áttekintése egyben az ismert példa átismétlése is. Az illeszkedési mátrix szemléletesen mutatja a második feladatsorban bevezetett rend fogalmának jól definiáltságát, és rávilágít a sík szimmetriáira. A szimmetriák említése visszautal a II./2. Feladatban bevezetett duális sík fogalmára, és előkészíti az ötödik feladatsoron bár nem definiált, de intuitíve érintett kollineáció fogalmát. E kérdések felvetésének egy módja lehet annak megvitatása, miért fordulhat elő, hogy a tanulók különböző illeszkedési mátrixokat kaphattak (a sorok és oszlopok különböző pontokkal, illetve egyenesekkel való indexelése biztosan elő fog fordulni).

2. Feladat: Rajzold fel az I./5. Feladatban ismertetett projektív sík illeszkedési mátrixát!

Megoldás:

$$
\begin{array}{c}
\\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \\ e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc}
P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 & P_8 & P_9 & P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13}
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$\square$

3. Feladat: Induljunk ki 4 pontból ($P_1, \ldots, P_4$) és 6 egyenesből ($e_1, \ldots, e_6$). A köztük fennálló illeszkedéseket a következő 6×4-es mátrix írja le:

$$
\begin{array}{c}
\\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
P_1 & P_2 & P_3 & P_4
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

(a) Igazold, hogy `P1` teljesül, `P2` pedig nem teljesül ezen a síkon!
(b) `P2` „érdekében” mit tehetünk?
(c) Ellenőrizd, hogy a módosított síkon `P1` nem teljesül. Mit tehetünk a módosított síkon `P1` „érdekében”?
(d) Ha végtelenszer „javítunk”, teljesül-e mind a négy axióma?

Megoldás:

(a) Síkunk nyilvánvalóan kielégíti a `P1` axiómát, `P2`-t viszont nem, mert vannak olyan egyenespárok, amelyeknek nincs metszéspontjuk.

(b) Tekintsük az összes nem metsző egyenespárt, és mindegyikhez definiáljunk egy olyan új pontot, amelyik csak erre a két egyenesre illeszkedik. Az új pontoknak megfelelő oszlopokat vegyük hozzá a táblázatunkhoz. Módosított síkunk kielégíti a `P2` axiómát.

(c) Módosított síkunk nem elégíti ki a `P1` axiómát, mert vannak olyan pontpárok, amelyeknek nincs összekötő egyenesük. Tekintsük az össze ilyen pontpárt, és a következő lépésben mindegyikhez definiáljunk egy olyan új egyenest, amelyik csak erre a két pontra illeszkedik. Az új egyeneseknek megfelelő sorokat vegyük hozzá a táblázatunkhoz. Az így kapott táblázat kielégíti `P1`-et.

(d) A kapott táblázat ismét nem elégíti ki `P2`-t. A következő lépésben ezért ismét definiáljunk pontokat, az azutániban egyeneseket, és így tovább. Eljárásunk minden egyes lépésében véges sok pontot vagy egyenest veszünk hozzá a táblázathoz, maga az eljárás azonban nem véges. Az így kapott végtelen táblázat projektív sík illeszkedéstáblája:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}
e_1	1	1			1			1						
e_2	1		1			1			1					
e_3	1			1			1			1				
e_4		1	1				1				1			
e_5		1		1		1						1		
e_6			1	1	1								1	
e_7					1	1				1	1			
e_8					1		1		1			1		
e_9						1	1	1					1	
e_{10}														

`P1` axióma teljesül, mert ha A és B a sík két különböző pontja, akkor pontosan egy olyan k természetes szám létezik, melyre igaz, hogy mindkét pont definiálva van a k-adik lépésben, de a $k-1$-edik lépésben legalább az egyikük még nincs. A és B a k-adik lépés után legfeljebb egy egyenessel vannak összekötve. Ha A és B a k-adik lépés után még nincsenek összekötve, akkor a $k+1$-edik lépésben pontosan egy egyenessel fogjuk összekötni őket.

Ugyanígy látható, hogy `P2` is teljesül.

A `P3` és `P4` axiómák pedig azért teljesülnek, mert amikor egy pontot vagy egy egyenest definiálunk, akkor az pontosan két régi elemhez illeszkedik, viszont vannak olyan régi elemek is, amelyekhez nem illeszkedik. Ezért a rákövetkező lépésben biztos, hogy legalább egy új elemhez fog illeszkedni.

$\square$

A feladat a *Hall–féle szabad sík* konstruktív bevezetése. Példát szolgáltat egy végtelen sok lépésben megalkotott konstrukcióra, bevezet a végtelen konstrukció tulajdonságainak vizsgálatába. A feladat megoldásához szükséges a projektív sík axiómáinak és az illeszkedési mátrix fogalmának ismerete, és lehetőséget nyújt ezen ismeretek alkalmazott gyakorlására.

A feladatot részfeladatonként beszéljük meg a tanulókkal, mert bár a részfeladatok megoldása egymásra épül, megoldásuk azonban újszerű gondolkodást igényel, elakadhatnak a tanulók az egyéni munka folyamán.

IV. Feladatsor (Ívek)

A feladatsor bevezeti az ív, teljes ív, ovális és hiperovális fogalmát. A fogalmakkal kapcsolatos állítások bizonyítása kombinatorikus megfontolások útján véghezvihető. A megoldások szépek, frappánsak, olyan téren igényelnek komolyabb teljesítményt a tanulóktól, melyben már jártasak, sikeresek. A feladatok megoldása azt példázza, a tanulók immár képesek a véges geometriák területén szép megoldások kigondolására, megfogalmazására.

Definíció: Projektív sík olyan ponthalmazát, amelynek nincs három pontja egy egyenesen, **ív**nek nevezzük. Ha az ív k pontú, akkor k-ívről beszélünk.

1. Feladat: Bizonyítsd be, hogy n-edrendű sík bármely k-ívére $k \leq n+2$.

Megoldás: Válasszuk ki az ív egy P pontját. Ezen a ponton $n+1$ egyenes megy át, melyek mindegyikén a P-n kívül legfeljebb egy további pontja lehet az ívünknek. Így összesen legfeljebb $1+(n+1)=n+2$ pontú lehet az ív. $\square$

A feladat megoldásához a projektív sík axiómáinak és a rend fogalmának ismerete szükséges. A feladat ezen fogalmak alkalmazott gyakorlása közben segít megérteni a fent definiált ív fogalmát, és alapvető ismeretet nyújt az új fogalomról.

A feladat megoldása egy szép ötletre épül: tekintsünk egy pontot, és a rajta átmenő egyeneseket. A feladat megoldása rövid, frappáns, könnyen érthető - ez sikerélményhez juttathatja a tanulókat a véges geometriák területén.

2. Feladat: Igazold, hogy ha n páratlan, akkor $k \leq n+1$ is igaz.

Megoldás: Tegyük fel, hogy n páratlan, de létezik $n+2$ pontú ív. Ekkor az ív bármely P pontját választva igaz, hogy a P-n átmenő egyenesek P-n kívül további egy pontot tartalmaznak. Más szóval, bármely egyenes, mely metszi az ívet, pontosan két pontban metszi azt. Vegyünk egy R pontot, mely nincs az íven. Az R-en átmenő egyenesek 0 vagy 2 pontban metszik az ívünket, tehát ha az ív pontjait összekötjük R-rel, akkor ezzel az ív pontjait párba állítjuk, azaz ívünk mérete páros szám kell legyen. Ha viszont $n+2$ páros, akkor n is páros, ellentmondás a feladat feltételével. $\square$

A következő kérdésekkel vihetjük előre a gondolatmenetet:

Javasoljuk az indirekt megoldást az első feladat fényében. Segítsük megfogalmazni a tanulóknak, hogy az indirekt feltétel a $(n+2)$-ív létezése.

Hány pontot tartalmazhat a $(n+2)$-ívből az ív egy pontján átmenő egyenes?

Metszheti-e a $(n+2)$-ívet egy egyenes páratlan sok pontban?

Lehet-e páratlan sok pontja egy $(n+2)$-ívnek?

3. Feladat: Igazold, hogy egy n-edrendű projektív sík minden pontjának egyenesekkel való lefedéséhez legalább $n+1$ egyenes szükséges!

Megoldás: Tegyük fel, hogy ez $e_1, e_2, \ldots, e_k$ egyenesek lefogják a sík pontjait. Legyen f egy semelyik e_i-vel nem azonos egyenes. Az f egyenes minden pontjára illeszkedik legalább egy e_i egyenes, és a különböző pontokra illeszkedő e_i egyenesek különbözőek. Így $k \geq n+1$. $\square$

A feladat mind állításában, mind a projektív sík egyenesekkel való lefedettségének gondolatában a 4. Feladat előkészítése. Emellett megoldásának ötlete igen hasznos, sokszor alkalmazott technika véges geometriai problémák megoldásában.

Definíció: Egy projektív sík k-ívét teljesnek mondjuk, ha tartalmazásra nézve maximális, azaz nem része $k+1$-ívnek.

4. Feladat: Igazold, hogy k-ív nem lehet teljes ív, ha $n \geq k(k-1)/2$.

Megoldás: Ha a k-ív teljes, akkor az ívre nézve szelő egyenesek a sík minden pontját lefedik. Mivel a 3. Feladat szerint a pontok lefedéséhez legalább $n+1$ egyenes szükséges, adódik, hogy a k-ív pontjai által meghatározott egyenesek száma legalább $n+1$. Tehát ha a k-ív teljes, akkor $k(k-1)/2 \geq n+1$, azaz $n \geq k(k-1)/2$ esetén a k-ív nem lehet teljes. $\square$

A feladat megoldásának ötlete, hogy egy teljes ív pontpárjai meghatározzák a sík összes egyenesét. Ez a gondolat segít megérteni a teljes ív fogalmának lényegét. Ennek megértése után csupán egy egyszerű kombinatorikai megfontolással megoldható a feladat.

Definíció: Az ív érintő egyenese a projektív sík olyan egyenese, melynek az ívvel egy közös pontja van.

Definíció: Oválisnak olyan ívet nevezünk, amelynek minden pontjában egyetlen érintő egyenese van.

5. Feladat: Igazold, hogy az oválisok az $n+1$ ívek.

Megoldás: Az ovális egy pontjára illeszkedő egyenes vagy érintő, vagy az ovális két pontjára illeszkedik. Mivel az ovális egy P pontjára illeszkedő egyenesek pontosan egyike érintő, a további n egyenes az ovális pontosan két pontjára illeszkedik, azaz P-n kívül az ovális még egy pontját tartalmazza. Mivel a P-re illeszkedő egyenesek a sík minden pontját, így az ovális minden pontját is lefedik, az ovális pontjainak számát a P-re illeszkedő egyenesek szerint összeszámolhatjuk, és kapjuk, hogy $1+n$. $\square$

A feladat megoldása az ovális fogalmán kívül az előző feladatokban gyakorolt fogalmakat, az ott látott megoldási stratégiákat használja, növelve ezzel a tanulók jártasságát az ilyen jellegű gondolatmenetek végigvitelében.

Definíció: Hiperoválisnak az olyan íveket nevezzük, melyeknek nincs érintő egyenesük.

6. Feladat: Igazold, hogy a hiperoválisok a $n+2$ ívek.

Megoldás: A hiperovális egy pontjára illeszkedő egyenesek mindegyike a hiperovális pontosan egy további pontját tartalmazza. Mivel az egy pontra illeszkedő egyenesek lefedik a sík, így a hiperovális pontjait is, a hiperovális pontjaina a száma $1+(n+1)=n+2$. □

A feladat megoldása a hiperovális fogalmának megerősítését, valamint legfontosabb jellemzőjének megismerését célozza. A feladat az előző feladat analógiájára oldható meg.

V. Feladatsor (Lefogó ponthalmazok)

A feladatsor bevezeti a lefogó ponthalmaz, blokkoló ponthalmaz, (k, m)-ív és t-szeresen lefogó ponthalmaz fogalmát.

Az első három feladat az előző feladatsor technikáival, ötleteivel oldható meg, a jelen feladatsor némely állítása az IV. Feladatsor egy adott állításának analógiájára igazolható. A megfogalmazott állítások valamivel nehezebbek, mint a IV. Feladatsor állításai, mely nehézséget az ilyen jellegű fogalmak használatában, illetve a megoldási technikákban szerzett nagyobb jártasság kompenzál.

Definíció: Egy projektív sík valamely B ponthalmaza lefogó ponthalmaz, ha minden egyenes metszi B-t.

1. Feladat:

(a) Igazold, hogy egy n-edrendű projektív sík bármely B lefogó ponthalmaza legalább $n+1$ pontból áll.
(b) Igazold, hogy ha a B lefogó ponthalmaz elemszáma $n+1$, akkor az egyenes.

Megoldás:

(a) Tekintsünk egy P pontot, mely nem eleme a B lefogó ponthalmaznak. Ezen a P ponton $n+1$ egyenes megy át, melyeknek a P-n kívül nincs közös pontja, és mindegyikük metszi a B lefogó ponthalmazt, tehát a B lefogó ponthalmaz legalább $n+1$ elemű.
(b) Tekintsük az $n+1$ elemű B lefogó ponthalmaz P és Q pontját, valamint a rájuk illeszkedő e egyenest. Ha B lefogó ponthalmaz nem maga az e egyenes, akkor van az e egyenesnek egy R pontja, mely nem eleme a B lefogó ponthalmaznak. Az (a) feladat megoldásának gondolatmenete alapján minden R-re illeszkedő egyenes metszi a lefogó ponthalmazt, emellett az e egyenes legalább két pontban (P és Q), így a lefogó ponthalmaz mérete legalább $n+2$ kell legyen, ami ellentmondás. $\square$

Érdemes összevetni a feladat megoldását a IV./3. Feladat megoldásával. Próbálják meg a tanulók maguk megfogalmazni, min alapszik a két megoldás közötti analógia. Ha már átgondolták, hogy a pontok és egyenesek szerepének felcseréléséről van szó, megkérdezhetjük, milyen fogalommal találkoztak a korábbi feladatsorokban, mely a pontok és egyenesek szimmetriáját írja le. Végül pontosan felidézhetjük a II. Feladatsorban ismertetett duális sík fogalmát.

Felvethetjük, hogy felhasználva a duális síkról való tudásukat valamint a IV./3. Feladat eredményét, tudnak-e mondani egy másik megoldást a tanulók az (a) feladatra? Majd megkérhetjük, fogalmazzák meg a diákok a IV./3. feladat (b) részét - ott nem szerepelt az $n+1$ elemű lefedő egyenes halmaz egyértelműségének bizonyítása, ami a jelen feladat (b) részének duális állítása. Végül megfogalmazhatjuk, mit nevezünk duális problémának.

Definíció: Az olyan lefogó ponthalmazt, amely nem tartalmaz teljes egyenest, blokkoló ponthalmaznak nevezzük.

2. Feladat: Igazold, hogy egy n-edrendű projektív sík B blokkoló ponthalmazát minden egyenes legfeljebb $|B| - n$ pontban metszi!

Megoldás: Legyen e egy tetszőleges egyenes, P pedig az e egyenes egy olyan pontja, mely nincs B-ben. P-re az e egyenesen kívül n egyenes illeszkedik, melyek lefogásához legalább n darab B-beli pont szükséges, tehát $|B \setminus e| \geq n$. Ebből az állítás adódik. □

Beszéljünk a feladat megoldása előtt a tanulókkal arról, mit is jelent a megfogalmazott állítás. Először talán nem világos, hogy az állításban szereplő egyenlőtlenség a blokkoló ponthalmazok méretéről mond-e valamit, vagy más tulajdonságot fogalmaz meg. Jussunk el addig a meglátásig, hogy az állítás arról szól, „mennyire tömörülhetnek” a blokkoló ponthalmaz pontjai egy egyenesre. Ennek megértése rávezet a megoldás azon ötletére is, hogy tekintsünk egy egyenest, és az azon kívüli pontokat vizsgáljuk.

Definíció: egy n-edrendű projektív vagy affin sík K részhalmazát (k, m)-ívnek nevezzük, ha $|K| = k$, minden egyenes legfeljebb m pontban metszi, és van olyan egyenes, amely pontosan m pontban metszi K-t.

3. Feladat:

(a) Igazold, hogy egy n-edrendű sík bármely (k, m)-ívének méretére $k \leq mn - n + m$ teljesül!
(b) Igazold, hogy egyenlőség esetén m osztója n-nek!

Megoldás:

(a) Jelölje a (k, m)-ívet K. Legyen P a K egy pontja, és tekintsük a P-n átmenő egyeneseket. Ezek mindegyikén P-t nem számítva legfeljebb $m - 1$ további pontja van K-nak, amiből adódik, hogy $k \leq 1+(n+1)(m-1) = nm-n+m$.
(b) Ha fenti egyenlőtlenségben egyenlőség áll fenn, akkor – a fenti megfontolás alapján – minden olyan egyenes, amely metszi K-t, pontosan m pontban kell messe. Más szóval minden egyenes 0 vagy m pontban metszi K-t. Legyen most P' egy K-n kívüli pont, és tekintsük az ezen átmenő egyeneseket. Ezek mindegyikén 0 vagy m pontja van K-nak, tehát összesen m-mel osztható pontja kell legyen K-nak. Mivel $|K| = mn + m - n$, az előbbi oszthatóságból adódik, hogy m osztja n-et. □

Az (a) feladat a (k, m)-ív definíciójának értelmezése egy ismert ötlettel - a IV. Feladatsor 1. és 2. feladatában is az ív egy pontjára illeszkedő egyeneseket vizsgáltuk - kombinálva.

A (b) feladat megoldása a IV./2. Feladat megoldásának általánosítása. Mivel már az (a) feladat megoldásakor felidéztük a IV./1. és 2. feladatokat, valamint a

IV./2. feladatban párosságról, jelen feladatban az ív paraméterével való oszthatóságról van szó, mindezek segítik megsejteni a megoldások közötti analógiát.

Definíció: Egy n-edrendű projektív vagy affin sík B részhalmazát t-szeresen lefogó ponthalmaznak nevezzük, ha B-t minden egyenes legalább t pontban metszi, és van olyan egyenes, amely pontosan t pontban metszi B-t.

4. Feladat: Igazold, hogy egy n-edrendű projektív vagy affin sík bármely t-szeresen lefogó ponthalmazának mérete legalább $t(n+1)$!

Megoldás: Tekintsünk egy B t-szeresen lefogó ponthalmazt, és rajta kívül egy P pontot. A P ponton átmenő $n+1$ egyenes mindegyikén legalább t, így összesen legalább $(n+1)t$ pontja kell legyen B-nek. $\square$

A használt fogalom, a feladat és megoldása a feladatsor 1. feladatában használt fogalomnak, az 1. feladatnak és megoldásának általánosítása. A megoldás annyit kíván meg a tanulóktól, hogy egy újonnan definiált fogalommal operálva is használják a már többször látott megoldási módszert.

A t-szeresen lefogó ponthalmaz fogalmának bevezetése új kérdések megfogalmazására motiválhatja a tanulókat. Az érdeklődő tanulók belegondolhatnak, mely állítások általánosíthatók, esetleg mely eddig használt fogalmak általánosíthatók még.

VI. Feladatsor (Általánosított négyszögek)

A VI. és VII. Feladatsor témájában és céljaiban is eltér a megelőző feladatsoroktól. Míg eddig a projektív- és affin-sík axiómáival, tulajdonságaival, fogalmaival ismerkedtek a tanulók, ez a feladatsor egy új axiómarendszert, egy új struktúrát, az általánosított négyszöget vezeti be.

A tanulók öt feladatsoron keresztül dolgoztak a – lassan természetessé váló – projektív sík axiómáival. Jártasságot szereztek abban, hogy magyarázataikban csupán az axiómára, vagy a már axiómák felhasználásával belátott állításokra hagyatkozzanak – a szemléletet, intuitív képet megtanulták „csupán” az ötletek kitalálására, megoldási módszer megválasztására használni.

A VI. Feladatsor feladatainak megoldása során a tanulóknak ismét egy új, ismét nem természetes axiómarendszer axiómáival kell dolgozniuk. Mivel már van jártasságuk egy axiómarendszerből való kiindulásban, ezen a feladatsoron - két modell bemutatását követően - már megjelennek kombinatorikailag nehezebb feladatok, melyeket az általánosított négyszögek axiómarendszerének „új környezetében” kell megoldaniuk.

A feladatsor célja tehát az általánosított négyszög fogalmának bevezetése mellett az új axiómarendszerekkel való munka gyakorlása.

Definíció: Nevezzük egy alaphalmaz elemeit **pontok**nak, bizonyos részhalmazait **egyenesek**nek, a tartalmazást pedig **illeszkedés**nek. Ha az egyenesek, mint részhalmazok kielégítik a következő axiómákat, akkor a pontokat, egyeneseket és a köztük fennálló illeszkedés együttesét (s, t)-rendű **általánosított négyszög**nek nevezzük:

`GQ1`. Bármely pont pontosan $t + 1$ egyenesre illeszkedik.

`GQ2`. Bármely egyenes pontosan $s + 1$ pontot tartalmaz.

`GQ3`. Minden (P, e) nem illeszkedő pont-egyenes párhoz pontosan egy olyan (P', e') pont-egyenes pár található, ahol P' pont illeszkedik az e egyenesre, és e' egyenes illeszkedik a P és P' pontokra. (Azaz egyértelműen létezik adott ponton átmenő, a pontra nem illeszkedő egyenest metsző egyenes.)

1. Feladat: Tekintsük a $K_{t+1,t+1}$ teljes páros gráfot. Definiálj pontokat és egyeneseket a gráf objektumain úgy, hogy azok eleget tegyenek az általánosított négyszög axiómáinak!

Megoldás: Legyenek a pontok a gráf csúcsai, az egyeneseknek pedig feleltessük meg a gráf éleit. Egy pont akkor illeszkedjen egy egyenesre, ha a gráf megfelelő csúcsát tartalmazza a megfelelő él. Az általánosított négyszög axiómái itt teljesülnek. □

A feladat lehetőséget biztosít az axiómák megértésének ellenőrzésére.

A feladat egy példát szolgáltat az általánosított négyszög axiómákkal definiált fogalmára. A látott példa segíti a definiált struktúráról alkotott intuitív kép kialakítását, sejtet valamit az általánosított négyszög tulajdonságairól.

2. Feladat: Tekintsünk a klasszikus euklideszi síkon egy derékszögű koordinátarendszert, és rögzítsünk egy s pozitív egész számot. Tekintsük az (x, y) rácspontokat, ahol $0 \leq x$, $y \leq s$. Definiálj ezen rácspontokon, mint alaphalmazon egyeneseket úgy, hogy azok kielégítsék az általánosított négyszög axiómáit!

Megoldás: Legyenek az egyenesek az $x = c$ és $y = d$ egyenletű egyenesek, ahol $0 \leq c$, $d \leq s$. Az illeszkedés legyen az euklideszi síkbeli illeszkedés. Az általánosított négyszög axiómái itt teljesülnek. $\square$

Egy újabb példa konstruálása elmélyíti az axiómák megértését, ismeretét.

A feladat egy „nagyobb” példát szolgáltat az általánosított négyszög fogalmára. A két példa összevetése tovább segíti annak leolvasását, mi jellemző általában az általánosított négszögre, és mi a példák saját jellemzője.

3. Feladat: A pont, egyenes és illeszkedés fogalmát használva írd le a háromszög definícióját! Tartalmazhat-e általánosított négyszög háromszöget?

Megoldás: Nevezzünk háromszögnek olyan három különböző pontot, melyek nincsenek egy egyenesen, és közülük bármely kettőre illeszkedik egyenes.

Tegyük fel, hogy A, B és C egy általánosított négyszög pontjai, és a fent meghatározott értelemben háromszöget alkotnak. Tekintsük az A és B pontokat, valamint a rájuk illeszkedő e egyenest. A `GQ3` axióma szerint pontosan egy olyan C-n átmenő egyenes van, mely metszi az e egyenest. Így az A és C, illetve B és C pontpár valamelyike biztosan nem illeszkedik egy egyenesre, ellentmondás. Általánosított négyszög tehát nem tartalmazhat háromszöget. $\square$

A feladat egy a tanulók számára természetes fogalom absztrahálását kéri. Precíz matematikai gondolkodást kíván a korrekt definíció megadása. Várható hiba, hogy a tanulók nem teszik meg azt a kitételt, hogy különböző pontokról beszéljünk, illetve a kollineárisság kizárásának elhagyása is előfordulhat. Bármelyik hiba előfordulása esetén jelezzük a definíció nem pontos voltát a hiba elárulása nélkül, és kérjünk példát a hiányos definíciót kielégítő, ám a háromszög „elképzelésünknek” nem megfelelő objektumra.

A feladat második felében megfogalmazott kérdés megválaszolása a legnehezebb axióma alaposabb megértését segíti. A kérdésre adott válasz pedig az általánosított négyszög egy fontos tulajdonságát fogalmazza meg.

4. Feladat: Igazold, hogy ha az S általánosított négyszög rendje (s, t), akkor

(a) S-nek $v = (s + 1)(st + 1)$ pontja van,
(b) S-nek $b = (t + 1)(st + 1)$ egyenese van!

Megoldás:

(a) Legyen e az S általánosított négyszög egy rögzített egyenese. A `GQ2` axióma miatt e-re $s+1$ pont illeszkedik, `GQ1` miatt ezek mindegyikén t darab e-től különböző egyenes megy át. Ezeken az egyeneseken összesen $(s+1)ts$ e-re nem illeszkedő pont van. A `GQ3` axióma miatt minden e-re nem illeszkedő pont pontosan egy ilyen egyenesen van rajta. Tehát az S összes pontjainak száma $(s+1)+(s+1)ts = (s+1)(st+1)$.

(b) A (b) állítás az (a) állítás duális problémája. □

Az (a) feladat megoldási módszere az előző feladatsorokon alkalmazott, a projektív-síkon megfogalmazott problémák megoldása során látottakhoz hasonló. A „szokásos" leszámolása helyességének ellenőrzésekor nyilvánvalóan adódik, mikor kell a nem számosságról szóló `GQ3` axiómát alkalmazni.

A (b) állítás kapcsán felmerül, általánosított négyszög esetén is beszélhetünk-e dualitásról. Eközben felidézzük, új axiómák körében dolgozunk a dualitás fogalmával. Az újabb példa megerősíti azt a tapasztalatot, a megismert axiomatikus felépítésű struktúrák problémái esetén hasznos bizonyítási módszert, hogy érdemes egy probléma duális problémáját tekinteni, hátha arról több ismeretünk van már.

Definíció: Ha az S általánosított négyszög két nem feltétlenül különböző P és Q pontjához van olyan egyenes, amelyik P-re is és Q-ra is illeszkedik, akkor a pontokat kollineárisnak mondjuk, és ezt $P \sim Q$-val jelöljük. Jelöljük $P^{\perp}$-vel a P-vel kollineáris pontok halmazát.

5. Feladat: Igazold, hogy ha az S általánosított négyszög két különböző pontja P és Q, akkor

$$|P^{\perp} \cap Q^{\perp}| = \begin{cases} s+1, & \text{ha } P \sim Q \\ t+1, & \text{ha nem } P \sim Q \end{cases}$$

Megoldás: Ha $P \sim Q$, akkor $P^{\perp} \cap Q^{\perp}$ nyilván tartalmazza a PQ egyenesen lévő $s+1$ pontot. Más pontot viszont nem tartalmaz, mert általánosított négyszög nem tartalmaz háromszöget (3. Feladat). Tehát $|P^{\perp} \cap Q^{\perp}| = s+1$, ha $P \sim Q$.

Ha P és Q nem kollineáris, akkor `GQ3` axióma miatt minden P-n átmenő egyenesen pontosan egy Q-val kollineáris pont van – ezek a pontok páronként különbözőek a 4. Feladat szerint. A `GQ1` axióma szerint P-n át $t+1$ egyenes megy, ezért $|P^{\perp} \cap Q^{\perp}| = t+1$, ha P és Q nem kollineáris. □

A feladat megoldásának módszere az előző feladatsorokban, a projektív síkon megfogalmazott feladatok megoldási módszereihez hasonlít. A tanulóknak azt kell megvalósítani, hogy a eddig alkalmazott technikákat (jól megválasztott pont, egyenes vizsgálata) most nem a korábbi feladatsorokban megszokott `P1`-`P4` axiómák, hanem az általánosított négyszög új axiómáinak felhasználásával alkalmazzák.

VII. Feladatsor (Möbius-síkok)

A feladatsor bevezeti a Möbius-sík fogalmát. A fogalom ismertetése mellett a VII. Feladatsor célja hasonló a VI. Feladatsoréhoz: új axiómarendszerrel való dolgozás gyakorlása.

Definíció: Nevezzük egy alaphalmaz elemeit **pontok**nak, bizonyos részhalmazait **körök**nek, a tartalmazást pedig **illeszkedés**nek. Ha a körök, mint részhalmazok kielégítik a következő axiómákat, akkor a pontokat, köröket és a köztük fennálló illeszkedés együttesét **Möbius-sík**nak nevezzük:

`M1.` Bármely három ponthoz pontosan egy olyan kör létezik, mely illeszkedik mindhárom pontra.

`M2.` Bármely P és P' pontokhoz, és a P-t tartalmazó, ám a P'-t nem tartalmazó k körhöz pontosan egy olyan k' kör létezik, melyre k és k' egyetlen közös pontja P, és k' tartalmazza P'-t. (Azaz egyértelműen létezik adott kört adott pontjában érintő és egy másik adott ponton átmenő kör.)

`M3.` Létezik négy olyan pont, amelyek nincsenek egy körön.

1. Feladat: Möbius-síkot alkotnak-e az euklideszi sík körei és pontjai az euklideszi illeszkedéssel?

Megoldás: Tekintsünk egy k kört, rajta egy P pontot, a k kör P pontbeli e érintő egyenesét, és az e egyenes egy P-től különböző Q pontját. A k kör, a rá illeszkedő P pont és a rá nem illeszkedő Q pont nem teljesítik az `M2` axiómát. Az euklideszi sík körei és pontjai az euklideszi illeszkedéssel nem alkotnak Möbius-síkot. □

A feladat megoldása az axiómák megértésének ellenőrzését szolgálja. A feladat felvetése és megoldása sejteti, hogy az euklideszi sík köreinek tulajdonságai alapjául szolgálnak egy intuitív kép kialakításának, ám rámutat az euklideszi sík köreinek „hibájára".

2. Feladat: Möbius-síkot alkotnak-e az euklideszi térben egy gömbfelszín pontjai, mint pontok és a gömbön lévő körvonalak, mint körök?

Megoldás: Az `M1` és `M3` axiómák nyilvánvalóan teljesülnek.

Tekintsük a gömbfelszínen egy k kört, rajta egy P pontot, és a k körre nem illeszkedő Q pontot. Legyen e a k kör síkjában a P-beli érintő egyenes. Az e egyenes és a Q pont által meghatározott sík és a gömbfelszín metszeteként kapott k' kör kielégíti az `M2` axiómában megfogalmazott feltételeket.

Tehát az euklideszi térben egy gömbfelszín pontjai és a gömbön lévő körvonalak Möbius-síkot alkotnak. □

A feladatban látott példa már alapja egy helyes intuitív kép kialakításának, mely előkészíti az absztraktabb, véges példákkal való problémamegoldást.

3. Feladat: Legyen P a Möbius-sík egy pontja, K_P pedig a sík P-t tartalmazó körei. Tekintsük a Möbius-sík pontjait P-t kivéve, mint egy alaphalmaz elemeit, a K_P köreit elvéve belőlük P-t, mint részhalmazokat, és a Möbius-síkon köztük fennálló illeszkedéseket. Igazold, hogy ezek, mint pontok, egyenesek és a köztük lévő illeszkedések affin síkot alkotnak! (Jelöljük ezen pontok, egyenesek és a köztük lévő illeszkedések együttesét $\mathcal{M}_P$-vel.)

Megoldás: Ha A és B két P-től különböző pont, akkor `M1` axióma miatt egyértelműen létezik az A, B és P pontokra illeszkedő kör. Tehát $\mathcal{M}_P$-ben bármely két pontra illeszkedik egyenes, azaz $\mathcal{M}_P$ kielégíti az `A1` axiómát.

Ha adott egy $k \in K_P$ kör, valamint egy rajta kívül fekvő A pont, akkor az `M2` axióma miatt egyértelműen létezik A-n átmenő, k-t P-ben érintő k' kör. Így $k' \setminus P$ létezésével $\mathcal{M}_P$ kielégíti az `A2` axiómát.

Az `A3` és `A4` axióma triviálisan következik `M3`-ból. □

E feladat ismét „szigorúbban” axiomatikus gondolkodást követel meg a tanulóktól – szemben az előző két feladattal, mely az intuitív gondolkodás alakítását célozta a Möbius-sík fogalmának megerősítése mellett. A Möbius-sík axiómáinak használata mellett a tanulóknak fel kell idézniük az affin sík axiómáit is.

Érdemes megemlíteni, hogy mint azt korábban láttuk, az affin síkot a projektív síktól egy egyenes, a Möbius-síktól egy pont „választja el” – ez motiválhatja a tanulókat arra, hogy összevessék a megismert struktúrákat, azok axiómarendszerét, keressék az összefüggések gyökerét.

Definíció: A fent definiált $\mathcal{M}_P$ affin síkot a Möbius-sík P szerinti derivált síkjának nevezzük.

4. Feladat: Mi a 2. Feladatban szereplő Möbius-sík egy derivált síkja?

Megoldás: Sztereografikus vetítéssel látható, hogy az euklideszi-síkot kapjuk a derivált sík képzésével. □

Ez a feladat összefogja a feladatsor első három feladatát. Amit absztraktan, axiomatikusan végiggondoltak a tanulók a 3. Feladatban, azt e feladat megoldása során átvihetik a bevezető példákra. Ezzel intuitív képet alkothatnak arról, mi történt a 3. Feladatban, mit jelent a derivált sík képzése.

Felvethető a kérdés, mit tesz a sztereografikus vetítés inverze az euklideszi síkkal. Megfogalmazhatunk erről egy szemléletes képet a tanulókkal: Összecsípjük az euklideszi-sík „szélét” egy ponttá. Nevezzük ezt végtelen pontnak, mellyel egészítsük ki az összes egyenest. Megkérdezhetjük, hogy ezzel „megoldódott-e az a probléma”, amely miatt az 1. Feladatban az euklideszi-sík nem bizonyult Möbius-síknak.

Megállapíthatjuk, hogy míg korábban egy egyenes hozzávételével projektív-síkká alakítottuk az euklideszi síkot, most egy pont hozzávételével Möbius-síkká tettük azt. Fontos kiemelni, hogy ez több, mint egy tetszőleges Möbius-sík és derivált síkjának kapcsolata, melyről a 3. Feladat után beszéltünk: Nem csupán a kiegészített egyenesek, az eredeti sík objektumai, az euklideszi-sík körei is köröknek felelnek a konstruált Möbius-síkon.

Ezek a felvetések elősegítik a tanulók divergens gondolkozását, valamint a végigvitt gondolatmenetek mélyebb megértését.

5. Feladat: Igazold, hogy ha egy véges Möbius-síknak van olyan köre, amelyre $n+1$ pont illeszkedik, akkor

(a) a síkon összesen n^2+1 pont van,
(b) a sík minden körén $n+1$ pont van,
(c) a sík minden pontján át $n(n+1)$ kör megy,
(d) a síkon összesen $n(n^2+1)$ kör van.

Megoldás:

(a) Ha az $\mathcal{M}$ Möbius-síknak van olyan k köre, melyre $n+1$ pont illeszkedik, akkor k minden P pontja esetén igaz, hogy az $\mathcal{M}_P$ derivált affin sík rendje n. Az $\mathcal{M}$ sík pontjainak a száma eggyel több, mint a derivált sík pontjainak a száma. Mivel az n-edrendű affin sík pontjainak a száma n^2, az $\mathcal{M}$ sík pontjainak a száma n^2+1.

(b) A fenti megfontolást a k kör minden pontjára alkalmazva, illetve az n-edrendű affin sík egyeneseinek számára és az egy egyenesen fekvő pontok számára vonatkozó ismereteket felhasználva kapjuk, hogy a k kör minden pontján át $n(n+1)$ kör megy, és minden k-t metsző kör $n+1$ pontot tartalmaz. Ha k' az $\mathcal{M}$ Möbius-sík egy tetszőleges köre, akkor létezik a síkon olyan $\mathcal{M}$ kör, melynek k-val és k'-vel is van közös pontja. Mivel a k-t metsző körökre, így $\mathcal{M}$-re is láttuk, hogy $n+1$ pontot tartalmaz. Így $\mathcal{M}$-ről mindaz elmondható, amit k-ról beláttunk. Tehát az $\mathcal{M}$-et metsző körök, így k' is $n+1$ pontra illeszkedik,

(c) valamint $\mathcal{M}$ minden pontján $n(n+1)$ kör megy. Mivel bármely pont illeszkedik k-t metsző körre, ezzel beláttuk a (b) mellett a (c) állítást is.

(d) Az (a) és (c) állítást használva kapjuk, hogy az $\mathcal{M}$ síkon a pont-kör illeszkedések száma $(n^2+1)n(n+1)$, s mivel minden körre $n+1$ pont illeszkedik, a sík köreinek száma ezek hányadosa, azaz $(n^2+1)n$. □

Definíció: A fenti n számot a Möbius-sík rendjének nevezzük.

Az (a) feladat megoldása a 3. Feladat és az n-edrendű affin síkról szerzett ismeretek alkalmazása.

A (b) és (c) feladat megoldásához precíz logikai gondolkodás szükséges. Kevéssé ötletre épül a bizonyítás, inkább már látott technikák adódó alkalmazását, odafigyelést, pontos következtetéseket igényel – ami az új struktúrában gondolkozva egy komoly feladat.

A (d) feladat megoldása olyan módszert alkalmaz – illeszkedések számolását –, ami már láttak a tanulók, és számtalan más kombinatorikai probléma megoldása során hasznos lehet még számukra.

VIII. Feladatsor (Alkalmazás)

A feladatsor célja, hogy az eddigi, csupán a véges geomatriák újonnan megismert fogalmaival dolgozó feladatsorokkal szemben, a feladatsor sorozat zárásaként egy pici kitekintést adjon a véges geometriák és más területek kapcsolatára.

Egy komolyabb feladatot a SET játék kipróbálása követ, ezzel játékosabbá, könnyedebbé téve a záró szakköri alkalmat.

1. Feladat:

(a) Igazold, hogy egy $n \times n$-es mátrixban legfeljebb $\frac{n}{2}(1+\sqrt{4n-3})$ egyes lehet, ha nincs két-két olyan sor és oszlop, amelyek keresztezési mezőiben négy egyes volna!

(b) Igazold, hogy ha $n \geq 4$, akkor egyenlőség esetén a mátrix egy projektív sík illeszkedési mátrixa!

Megoldás:

(a) Jelölje a mátrix sorvektorait a_i, oszlopvektorait a_j^*. A csupa egyes kizárt részmátrix pontosan azt jelenti, hogy $a_i a_j = 0$ vagy 1, és $a_i^* a_j^* = 0$ vagy 1 ($a_i a_j$ a skalárszorzatot jelöli). Az $a_i a_i = r_i$ az i-edik sorban, $a_i^* a_i^* = c_i$ az i-edik oszlopban lévő egyesek száma. Az r_i-ket illetve a c_i-ket összegezve is a mátrixban található egyesek számát kapjuk, jelölje ezt e.

Tekintsük a következő egyenlőséget:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = (a_1^2 + \ldots + a_n^2) + 2(a_1 a_2 + \ldots + a_{n-1} a_n)$$

A bal oldal $c_1^2 + \ldots + c_2^2$-tel egyenlő. Mivel a c_i-k összege e, ez az összeg a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenség szerint leglább e^2/n.

A jobb oldal első tagja az r_i-k összege, ami e, második tagja pedig legfeljebb $n(n-1)$, hiszen minden benne szereplő skaláris szorzat 0 vagy 1. Ebből kapjuk, hogy $e^2/n \leq e + n(n-1)$, mely egy e-ben másodfokú egyenlőtlenség, amiből az e-re vonatkozó felső becslés azonnal adódik.

(b) Az (a) rész bizonyításából láthatjuk, hogy az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha bármely két különböző sor, illetve oszlop skaláris szorzata 1, továbbá, ha minden sor és oszlop ugyanannyi egyest tartalmaz. Ez azt jelenti, hogy a mátrixunk által definiált illeszkedési struktúrára teljesül a projektív sík első két axiómája, és benne minden egyenes azonos méretű.

A `P3` és `P4` axiómák is teljesülnek ezen a struktúrán, ha valamely egyenesen legalább három pont van. A fentiek miatt ugyanis minden egyenesen ugyanannyi pont van, és az egyenes-pont illeszkedések számát vizsgálva kapjuk, hogy a pontokra is az egyenesek elemszámával megegyező számú egyenes illeszkedik.

Ha nem lenne legalább három pontú egyenes, akkor $e = n$ vagy $2n$ lenne. Így az egyenlőségből $n = 1$ vagy 3 adódna. Tehát `P3` és `P4` is teljesül, a mátrix által definiált illeszkedési struktúra egy projektív sík. □

Az (a) részt közösen, a sorok és oszlopok skalár szorzatának vizsgálatával, az egyesek számának velük való leírásával, lépésről-lépésre rávezető kérdésekkel oldanám meg, ezt követően a (b) rész már önállóan megoldható.

A feladat megoldása során más, a feladatsoron kívüli ismereteket, módszereket kell kombinálniuk a tanulóknak az új ismereteikkel – szemben az eddigi feladatsorokkal, melyek a megelőző feladatokra, itt definiált fogalmakra építettek csupán. A feladat állítása pedig picit rámutat arra, hogy a véges geometriák kapcsolatban áll más területekkel, eredményei alkalmazhatóak.

2. Feladat: A *SET* játék ismertetése:

A SET játék csomag 81 kártyából áll. Minden kártya különböző. A kártyák a következő paraméterekkel jellemezhetők:

Darabszám: A kártyán 1, 2 vagy 3 alakzat található.

Szín: A kártyán látható alakzat/alakzatok pirosak, kékek vagy zöldek (az egy kártyán található alakzatok azonos színűek).

Forma: A kártyán látható alakzat/alakzatok formája ellipszis, téglalap vagy hullám (az egy kártyán található alakzatok ugyanolyan formájúak).

Kitöltöttség: A kártyán látható alakzat/alakzatok kitöltöttsége lehet üres, tele vagy sraffozott.

Három lap együtt SET-et alkot, ha a fenti jellemzők mindegyike vagy mind a három lapon egyforma, vagy mind a három lapon különböző.

A játék menete:

A 81 lapot összekeverjük, és színnel lefele egy pakliban az asztalra helyezzük.

12 lapot a pakli tetejéről felveszünk, és színnel felfelé 3 sorban és 4 oszlopban az asztalra helyezzük.

A játékosok arra törekszenek, hogy minél gyorsabban SET-et találjanak. Aki SET-et vél felfedezni, az bemondja, hogy SET. Ha valóban SET-et talált, elveheti a három lapot. Ha tévedett, addig nem játszhat, míg egy másik játékos SET-et nem talál.

A felvett lapokat a pakliból pótoljuk. Ha nincs SET az asztalon, akkor további három lapot helyezünk az asztalra.

A játék akkor ér véget, ha elfogytak a kártyák a pakliból, és már nincs SET az asztalon. Az a játékos nyer, aki legtöbb lepot vette fel.

Milyen kapcsolatban áll a SET játék a véges geometriákkal?

Először játsszanak a tanulók a SET játékkal. Ha már jól megismerték a kártyákat, ráéreztek a játékra, felvethetjük a fenti kérdést. Javasoljuk, hogy elöször csak a piros teli kártyákat vizsgálják. E kilenc kártyáról könnyen belátható, hogy megfeleltethetők egy harmadrendű affin sík pontjainak – el is helyezhetők a kártyák szemléletesen úgy, hogy jól látható legyen, mely hármasok alkotnak egyeneseket.

A fogalmak pontos definiálása nélkül említést tehetünk arról, hogy az egész pakli pedig egy négy dimenziós affin tér pontjainak felel meg, ahol a kártyák paraméterei a dimenziók megfelelői.

A szakkörsorozat folytathatósága

A feladatsorok révén megismert fogalmakra, megszerzett ismeretekre építve összeállíthatók további véges geometriák témájú feladatsorok.

Bevezethető a projektív síkok koordinátázása, ami alapja a véges geometriák további problémái vizsgálatának. Konkrét, kis rendű koordinátázott projektív síkon dolgozva megfogalmazhatók középiskolás tanulók számára is érthető, kezelhető problémák.

Mutathatunk példát a tanulóknak prímhatvány rendű projektív síkra. Érinthető a probléma, milyen egész szám lehet projektív sík rendje. Ez egy motiváció lehet a test fogalmának bevezetésére.

Bevezethető - az e feladatsorok által előkészített - kollineáció fogalma, mely alapvető jellemzőinek bizonyítása feladatként kijelölhető.

A koordinátázás megértését követően definiálható a magasabb dimenziós projektív terek fogalma, vizsgálhatók alaptulajdonságai.

A mátrix műveleteket bevezetve, a kollineációk fogalmának ismeretére építve megfogalmazhatók geometriai állítások, transzformációkkal kapcsolatos észrevételek.

Irodalomjegyzék:

[1] Ambrus András: Bevezetés a matematikai didaktikába

[2] Kiss György - Szőnyi Tamás: Véges geometriák