

LUNDBERG APPROXIMÁCIÓK BIZTOSÍTÁSI  
ALKALMAZÁSOKKAL: A CSŐD BEKÖVETKEZÉSI  
IDEJÉNEK BECSLÉSE

Szakdolgozat

Írta: Klimaj Bettina

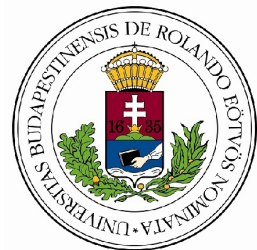
Biztosítási és Pénzügyi Matematika MSc  
Aktuárius szakirány

2014

Témavezető:

Dr. Michaletzky György  
egyetemi tanár

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Természettudományi Kar



Budapesti Corvinus Egyetem  
Közgazdaságtudományi Kar

# Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Michaletzky Györgynek, amiért felkeltette az érdeklődésemet a téma iránt, és hasznos tanácsaival, észrevételeivel segítette a dolgozatom elkészülését. Kérdéseimmel bármikor bizalommal fordulhattam hozzá, és végig felhívta a figyelmemet az esetleges hibákra. Hálával tartozom a családomnak, akiktől rengeteg támogatást és biztatást kaptam. Végül szeretném megköszönni Herczeg Bonifácnak, hogy matematikai hozzáértésével segítette a munkámat, mindig megértő volt velem, és mindenben támogatott.

# Tartalomjegyzék

<b>Bevezetés</b>	<b>4</b>
<b>1. Kockázati modellek</b>	<b>7</b>
1.1. Összetett kockázati modellek . . . . .	7
1.2. Klasszikus rizikófolyamat . . . . .	10
1.3. Egyensúlyi eloszlás . . . . .	11
1.4. A csőd valószínűsége . . . . .	12
<b>2. Tijms-approximációk</b>	<b>15</b>
2.1. Aszimptotikusan geometrikus eset . . . . .	15
2.2. Módosított geometriai eloszlás . . . . .	17
2.3. A Tijms-approximáció tulajdonságai . . . . .	17
<b>3. Nem teljes felújítási egyenlet</b>	<b>21</b>
3.1. A nem teljes felújítási egyenlet néhány tulajdonsága . . . . .	22
3.2. A csőd ideje . . . . .	24
<b>4. A csőd idejének sűrűségfüggvénye és momentumai exponenciális kárnagyságeloszlás esetén</b>	<b>35</b>
4.1. Rekurzív kiszámítás . . . . .	35
4.2. Explicit kiszámítás . . . . .	41
<b>5. A momentumok numerikus számítása</b>	<b>49</b>
5.1. Formulák a momentumokra . . . . .	49
5.2. Approximáció a momentumokra . . . . .	51
5.3. Numerikus számítások . . . . .	52
<b>Összefoglalás</b>	<b>59</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>60</b>

# Bevezetés

Az utóbbi évek biztosítási csőd elméletével kapcsolatos kutatásai a csőd idejének momentumainak a meghatározására fókuszáltak. Lin és Willmot (1999, 2000) tovább fejlesztették Gerber és Shiu (1998) eredményeit, és olyan rekurzív eljárást hoztak létre, mellyel a csőd idejének momentumaira explicit kifejezések nyerhetők, amennyiben a csődvalószínűsége létezik explicit képlet. Egídio dos Reis (2000) megalkotott egy rekurziós módszert a csőd idejének momentumainak a kiszámítására a diszkrét idejű kockázati modellekben, és ezt arra használta, hogy közelítse vele ezen momentumokat a klasszikus folytonos idejű kockázati modellekben. Míg Picard és Lefèvre (1998) a klasszikus kockázati modellt vette alapul a közelítő megoldások előállításához, de diszkrétizált kárnagyság-eloszlással. Végül Dickson és Waters (2002) megmutatták, hogyan használhatók Lin és Willmot (2000) eredményei a csőd idejének momentumainak közelítésére akkor, amikor nem létezik explicit képlet a csődvalószínűsége.

A biztosításmatematika egyik kiemelt témaköre a klasszikus kockázati modellek, ennek az alapjait tekintjük át a dolgozat első fejezetében. A legalapvetőbb kockázati folyamat a klasszikus rizikófolyamat, ami leírja a biztosítóintézet pillanatnyi tőkéjének időbeni alakulását, mely a leegyszerűsített modellekben a kezdeti tőkéből, a díjbevételből és a negatív kárkifizetésből tevődik össze. Az összetett kockázati modellekben a kárszám és a károkkal kapcsolatos kifizetések a véletlentől függő mennyiségek, melyek meghatároznak egy véletlen tagszámú összeget, az aggregált kárkifizetés nagyságát. Megjegyezzük, hogy a dolgozatban egyszerűsítés végett röviden csak kárnagyságot fogunk írni, ezalatt mindig a kárkifizetés nagyságát kell érteni. Az összetett geometriai farokeloszlás a kockázati modellek számos fontos mennyiségének leírására alkalmas. A témakör egyik alapkérdése, hogy milyen valószínűséggel vesz fel a biztosítóintézet pillanatnyi tőkéje negatív értéket, vagyis mekkora a tönkremenés valószínűsége. Látni fogjuk, hogy a csődvalószínűség is egy összetett geometriai eloszlású valószínűségi változó, a maximális aggregált veszteség farokeloszlásaként adódik.

Az összetett farokeloszlásra azonban általában nem adható zárt képlet, ezért a második fejezetben az approximálását tűzzük ki célul. Azt az általánosabb esetet vizsgáljuk, amikor a kárszám aszimptotikusan geometrikus eloszlású, ugyanis ekkor az összetett farokeloszlás rendelkezik a tulajdonsággal, hogy aszimptotikusan exponenciális. A Tijms-approximáció alapötlete az, hogy az aszimptotikus értéket egy korrekciós taggal egészítjük ki úgy, hogy az így nyert közelítés a pontos értéket vegye fel a 0 helyen, várható értéke egyezzen meg az eredeti várható értékkel, és a megfelelő aszimptotikus viselkedés is megmaradjon. Általában a korrekciós tagot úgy választjuk, hogy a közelítés két exponenciális eloszlás kombinációjaként áll elő. Belátjuk, hogy eloszlások egy nagyobb osztályánál teljesülnek a Tijms-approximációval kapcsolatban elvárt tulajdonságok, ráadásul bizonyos esetekben a közelítés a pontos értéket is visszaadja.

A harmadik fejezet témája a csőd idejének várható értékének, illetve magasabb momentumainak a meghatározása azon feltétel mellett, hogy a csőd biztosan bekövetkezik. Ehhez bevezetjük a nem teljes felújítási egyenletet, és belátjuk, hogy a megoldása kifejezhető a megfelelő összetett geometriai farokeloszlás segítségével, illetve hogy az összetett geometriai farokeloszlás felírható egy nem teljes felújítási egyenlet megoldásaként. A csőd idejének Laplace-transzformáltja egy összetett geometriai farokeloszlás, így kielégíti a nem teljes felújítási egyenletet. Ezen tulajdonság felhasználásával vezetjük le az általános formulát a csőd várható idejére. Végül megadjuk a tönkremenés várható időpontjának Tijms-approximációját, valamint ismertetjük a magasabb momentumaira vonatkozó általános formulákat is.

Speciálisan feltesszük a negyedik fejezetben, hogy a kárnagyságeloszlás exponenciális, illetve két exponenciális eloszlás kombinációja. Ezen eloszlás feltevések mellett ugyanis explicit képlet is elérhető a csődvalószínűsége, mely az általános formulák szerves részét képezi. Emiatt az általános formula leegyszerűsödik, könnyen számítható explicit képletté alakul. Először az egyszerűbb, rekurzív úton történő meghatározást tekintjük át, majd bonyolultabb eszközök segítségével érjük el az explicit képletet. Abban az esetben is sikerül explicit képletet szolgáltatnunk a várható értékre, amikor az összetett farokeloszlás exponenciálisok kombinációjaként áll elő, mely eredmény azért jelentős, mert a Tijms-approximáció is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Általában azonban a csődvalószínűsége nem adható explicit képlet, hogy ebben az esetben mihez kezdhetünk, azzal az ötödik fejezet foglalkozik. Az általános formulákat át kell alakítanunk úgy, hogy az integrálási tartomány véges legyen, mert ekkor alkalmazhatunk integrál közelítő összegeket. Az improprius integrálok helyét a maximális aggregált veszteség momentumai veszik át, melyek egyszerűen

számíthatók a kárnagyságeloszlás momentumaiból. Mivel a csődvalószínűség egy összetett farokeloszlás, közelítő értékei a kárnagyság eloszlásának diszkretizálása után a Panjer-rekurzió segítségével számíthatók. Így már minden feltétel adott ahhoz, hogy numerikus számításokat végezzünk a csőd idejének várható értékére és szórására vonatkozóan különböző eloszlásfeltevések, és paraméterválasztások mellett. A Matlab programban megvalósított számítások eredményeit a fejezet végén táblázatok és ábrák szemléltetik. Az eredmények pontosságának ellenőrzésére az előző fejezetek során megalkotott explicit képleteket alkalmazzuk.

# 1. fejezet

## Kockázati modellek

A kockázati modellek témaköre a biztosításmatematikában kiemelt jelentőséggel bír. A klasszikus kockázati modellekben a biztosítóintézet pénzforgalmát egy olyan leegyszerűsített modell segítségével írjuk le, melynek építőegységei a biztosító alaptőkéje, a biztosítottak által befizetett díj, és az ennek fejében a biztosítottaknak járó kárkifizetések. A biztosítóintézet pillanatnyi tőkéjét megadó kockázati folyamatot klasszikus rizikófolyamatnak nevezzük. A biztosítási portfólió aggregált kárkifizetésének nagysága az összetett kockázati modellek segítségével írható le. Az aggregált kárnagyság farokeloszlása megadja, hogy milyen valószínűséggel lesz a biztosítási portfólió kára egy bizonyos érték fölött. Az összetett farokeloszlás vizsgálata azért fontos, mert ez határozza meg a biztosító csődjének valószínűségét és várható idejét. Jelen fejezet a [2] könyv eredményein alapszik.

### 1.1. Összetett kockázati modellek

Egy biztosítási portfólió aggregált kárának modellezésére széles körben alkalmaznak összetett eloszlásokat. A véletlen tagszámú összegben a számláló valószínűségi változó reprezentálja a biztosítási portfólió kárainak számát, míg a független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata az egymást követő károk nagyságát adja.

Legyen  $N$  számláló valószínűségi változó, a következő valószínűség-eloszlással:

$$p_n = P(N = n); \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

és farokeloszlással:

$$a_n = P(N > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A biztosítási témakörben  $N$  jelöli a károk vagy veszteségek számát. Továbbá legyen  $\{Y_1, Y_2, \dots\}$  független, azonos eloszlású, pozitív valószínűségi változók sorozata,

melyek függetlenek  $N$ -től. Legyen a közös eloszlásfüggvény,  $F(y) = P(Y \leq y)$ ,  $y \geq 0$ , ahol  $Y$  tetszőleges  $Y_i$ -nek felel meg, valamint jelölje  $\bar{F}(y) = 1 - F(y)$  az  $Y$  valószínűségi változó túlélési függvényét. A továbbiakban a  $\{p_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$  valószínűség-eloszlást kárszámeloszlásnak nevezzük, míg  $F(y)$  az egyes kárnagyságok eloszlásához tartozó eloszlásfüggvényt jelenti.

Jelölje  $n = 1, 2, 3, \dots$  esetén  $F^{*n}(y) = P(Y_1 + \dots + Y_n \leq y)$  az  $n$ -edik konvolúció hatványhoz tartozó eloszlásfüggvényt,  $\bar{F}^{*n}(y) = P(Y_1 + \dots + Y_n > y)$  pedig a farokeloszlást. Fontos lesz a későbbiekben az  $X = Y_1 + \dots + Y_N$  véletlen tagszámú összeg, mely az aggregált kárnagyságot adja ( $N = 0$  esetén legyen  $X = 0$ ). Az  $X$  úgynevezett összetett eloszlású valószínűségi változó momentumai az alábbi képletek alapján számíthatók:

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n E\left(\sum_{i=1}^N Y_i \middle| N = n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n E\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = E(N)E(Y), \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n E\left(\left(\sum_{i=1}^N Y_i\right)^2 \middle| N = n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n E\left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} Y_i Y_j\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n [nE(Y^2) + n(n-1)E^2(Y)] = E(N)D^2(Y) + E(N^2)E^2(Y), \quad (1.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^3) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n E\left(\left(\sum_{i=1}^N Y_i\right)^3 \middle| N = n\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n E\left(\sum_{i=1}^n Y_i^3 + 3 \sum_{i \neq j} Y_i^2 Y_j + 6 \sum_{i \neq j \neq k} Y_i Y_j Y_k\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n [nE(Y^3) + 3n(n-1)E(Y^2)E(Y) + n(n-1)(n-2)E(Y)^3] = \\ &= E(N)E(Y^3) + [3E(N^2) - 3E(N)]E(Y^2)E(Y) + \\ &+ [E(N^3) - 3E(N^2) + 2E(N)]E(Y)^3. \quad (1.3) \end{aligned}$$

Jelölje az  $X$  összetett eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényét  $G(x) = P(X \leq x)$ . Könnyen adódik, hogy

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x), \quad x \geq 0, \quad (1.4)$$

ahol  $F^{*0}(x) = 1$ , és ezért a farokeloszlásra

$$\bar{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \bar{F}^{*n}(x), \quad x \geq 0 \quad (1.5)$$



teljesül. Általában az aggregált kárnagyság  $\bar{G}(x)$  farokeloszlásának kiszámítása a konvolúciók jelenléte miatt nehéz feladat. Egy lehetséges megoldás  $X$  Laplace-transzformáltjának felhasználása, melyre a

$$\begin{aligned} E(e^{-sX}) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n E(e^{-s \sum_{i=1}^n Y_i} | N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n E(e^{-s \sum_{i=1}^n Y_i}) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n E\left(\prod_{i=1}^n e^{-sY_i}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \{E(e^{-sY})\}^n = \mathcal{G}_N\{E(e^{-sY})\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

összefüggés teljesül, ahol

$$\mathcal{G}_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$$

az  $N$  valószínűségi változó generátorfüggvénye.

Nézzünk is egy példát a  $\bar{G}(x)$  farokeloszlás kiszámítására a Laplace-transzformáltra nyert összefüggés segítségével. Legyen  $X$  összetett geometriai eloszlású

$$p_n = (1 - \phi)\phi^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

eloszlású  $N$  számláló valószínűségi változóval és  $F(y) = 1 - e^{-\mu y}$ ,  $y \geq 0$  exponenciális kárnagyság-eloszlásfüggvénnyel. Ekkor a farokeloszlásra (1.5) alapján

$$\bar{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \phi)\phi^n \bar{F}^{*n}(x), \quad x \geq 0$$

adódik, és  $G(0) = 1 - \phi$ . Továbbá a Laplace-transzformáltakra felírhatók az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned} E(e^{-sX}) &= G(0) + \int_0^{\infty} e^{-sy} dG(y) = 1 - \phi + \int_0^{\infty} e^{-sy} dG(y), \quad (1.7) \\ E(e^{-sY}) &= \int_0^{\infty} e^{-sy} dF(y) = \int_0^{\infty} \mu e^{-(s+\mu)y} dy = \frac{\mu}{\mu + s}. \end{aligned}$$

Mivel a geometriai eloszlás generátorfüggvénye

$$\mathcal{G}_N(z) = \frac{1 - \phi}{1 - \phi z},$$

(1.6) alkalmazásával, majd egyszerű átalakítások végrehajtásával a következő adódik:

$$E(e^{-sX}) = \frac{1 - \phi}{1 - \phi \frac{\mu}{\mu + s}} = \frac{(1 - \phi)(\mu + s)}{s + \mu(1 - \phi)} = 1 - \phi \frac{s}{s + \mu(1 - \phi)} = 1 - \phi + \phi \frac{\mu(1 - \phi)}{s + \mu(1 - \phi)}.$$

Ekkor felhasználva, hogy

$$\frac{\mu(1 - \phi)}{s + \mu(1 - \phi)} = \int_0^{\infty} \mu(1 - \phi) e^{-\{s + \mu(1 - \phi)\}y} dy$$

teljesül, behelyettesítünk a fenti kifejezésbe, mellyel  $X$  Laplace-transzformáltjára a következőt kapjuk eredményül:

$$E(e^{-sX}) = 1 - \phi + \int_0^{\infty} e^{-sy} \mu(1 - \phi)\phi e^{-\mu(1-\phi)y} dy. \quad (1.8)$$

Az (1.7) és (1.8) kifejezések összevetésével arra a következtetésre juthatunk, hogy az összetett geometriai farokeloszlásra a

$$\bar{G}(x) = \phi e^{-\mu(1-\phi)x} \quad (1.9)$$

explicit képlet adható exponenciális kárnagyságeloszlás esetén. A későbbiekben ez az eredmény kulcsfontosságú lesz.

A klasszikus kockázati modelleken belül megismerkedtünk az összetett kockázati modellel, így most már bevezethetjük az ezen alapuló klasszikus rizikófolyamatot.

## 1.2. Klasszikus rizikófolyamat

A klasszikus kockázati modellekben az egyes biztosítóintézetek pillanatnyi tőkéje három fontos elemből tevődik össze: a biztosítottak által befizetett díj, a biztosító kezdeti tőkéje, valamint a káreseményekkel kapcsolatos kifizetései. A pillanatnyi tőkét, s így az összkár értékét az idő függvényében fogjuk vizsgálni, ezért a kárszámot megadó  $N$  valószínűségi változó is az idő függvénye, vagyis sztochasztikus folyamat.

A klasszikus folytonos idejű kockázati modellekben egy biztosítási portfólió kárainak száma,  $N_t$   $\lambda$  paraméterű Poisson-folyamatot követ. Az  $Y_1, Y_2, \dots$  kárnagyságeloszlások pozitív, független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek  $N_t$  folyamattól is függetlenek. A közös eloszlásfüggvényt jelölje  $H(y) = P(Y \leq y)$ , és a közös várható értéket  $E(Y) = \int_0^{\infty} y dH(y)$ . Legyen  $\{S_t; t \geq 0\}$  az aggregált kárfolyamat, melyre  $S_t = Y_1 + \dots + Y_{N_t}$  ( $N_t = 0$  esetén legyen  $S_t = 0$ ). Nyilvánvalóan az  $S_t$  aggregált kárfolyamat összetett Poisson-eloszlású. Továbbá  $\{U_t, t \geq 0\}$  az úgynevezett rizikófolyamat, mely a pillanatnyi tőkét adja meg, azaz  $U_t = u + ct - S_t$ , ahol  $u \geq 0$  a kezdeti tőke,  $c = \lambda E(Y)(1 + \theta)$  az egységnyi időre szóló díj, és  $\theta > 0$  a biztonsági loading.

Az elkövetkezőkben bevezetjük a témakör legfontosabb fogalmait, a csődvalószínűséget és a csőd idejét. Azt az eseményt vizsgáljuk, hogy a rizikófolyamat valamely időpillanatban negatív értéket vesz föl, ekkor beszélünk tönkremenésről vagy csődről. Az esemény valószínűségét csődvalószínűségnek, bekövetkezésének első időpontját a tönkremenés idejének fogjuk nevezni.

### 1.3. Egyensúlyi eloszlás

A következőkben teszünk egy rövid kitérőt, ugyanis szükséges bevezetnünk egy fontos fogalmat, az egyensúlyi eloszlást, melyet a későbbiek során többször is segítségül hívunk majd. Ezen felül az egyensúlyi eloszlás momentumait is meghatározzuk.

Tegyük fel most, hogy  $Y$  valószínűségi változó várható értéke,  $E(Y)$  létezik és véges, azaz  $E(Y) = \int_0^\infty y dF(y) < \infty$ . Ekkor parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int_0^\infty y dF(y) = -y\bar{F}(y)|_0^\infty + \int_0^\infty \bar{F}(y) dy = -\lim_{y \rightarrow \infty} y\bar{F}(y) + \int_0^\infty \bar{F}(y) dy.$$

Továbbá

$$0 \leq y\bar{F}(y) = y \int_y^\infty dF(x) \leq \int_y^\infty x dF(x)$$

teljesül, és mivel  $E(Y) < \infty$ , következik, hogy

$$0 \leq \lim_{y \rightarrow \infty} y\bar{F}(y) \leq \lim_{y \rightarrow \infty} \int_y^\infty x dF(x) = 0,$$

azaz  $\lim_{y \rightarrow \infty} y\bar{F}(y) = 0$ . Így a

$$E(Y) = \int_0^\infty \bar{F}(y) dy \tag{1.10}$$

összefüggés adódik, melyet a későbbiekben többször is alkalmazunk majd.

Az (1.10) egyenletet elosztva  $E(Y)$ -nal  $\int_0^\infty \{\bar{F}(y)/E(Y)\} dy = 1$  adódik, miszerint  $f_1(y) = \bar{F}(y)/E(Y)$  egy sűrűségfüggvény. A megfelelő eloszlásfüggvény pedig az

$$F_1(y) = 1 - \bar{F}_1(y) = \int_0^y \{\bar{F}(x)/E(Y)\} dx, \quad y \geq 0,$$

melyet  $F(y)$  egyensúlyi eloszlásfüggvényének nevezünk. Az egyensúlyi eloszlás  $n$ -edik momentumát parciális integrálással kapjuk:

$$\int_0^\infty y^n \frac{\bar{F}(y)}{E(Y)} dy = \frac{y^{n+1}\bar{F}(y)}{(n+1)E(Y)} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{y^{n+1} dF(y)}{(n+1)E(Y)} = \tag{1.11}$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^{n+1}\bar{F}(y)}{(n+1)E(Y)} + \frac{E(Y^{n+1})}{(n+1)E(Y)}. \tag{1.12}$$

Mivel

$$0 \leq y^{n+1}\bar{F}(y) = y^{n+1} \int_y^\infty dF(x) \leq \int_y^\infty x^{n+1} dF(x)$$

teljesül, ha  $E(Y^{n+1}) = \int_0^\infty x^{n+1} dF(x) < \infty$ , akkor

$$0 \leq \lim_{y \rightarrow \infty} y^{n+1}\bar{F}(y) \leq \lim_{y \rightarrow \infty} \int_y^\infty x^{n+1} dF(x) = 0$$

adódik. Alkalmazva, hogy  $\lim_{y \rightarrow \infty} y^{n+1} \bar{F}(y) = 0$  a következő összefüggést nyerjük  $n \geq 0$  esetén:

$$\int_0^\infty y^n dF_1(y) = \frac{E(Y^{n+1})}{(n+1)E(Y)}. \quad (1.13)$$

Speciálisan az egyensúlyi várható értéket kapjuk  $n = 1$ -re:

$$\int_0^\infty y dF_1(y) = \frac{E(Y^2)}{2E(Y)}. \quad (1.14)$$

Az elkövetkezőkben egy hasznos összefüggést vezetünk le  $F(y)$  és  $F_1(y)$  között. Parciális integrálással  $y \geq 0$  esetén azt kapjuk, hogy

$$\int_y^\infty x dF(x) = -x \bar{F}(x) \Big|_y^\infty + \int_y^\infty \bar{F}(x) dx.$$

Alkalmazzuk ismét, hogy  $E(Y) < \infty$  esetén  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \bar{F}(x) = 0$  teljesül, ekkor

$$\int_y^\infty x dF(x) = y \bar{F}(y) + E(Y) \bar{F}_1(y), \quad y \geq 0$$

adódik, melyet átrendezve a következő összefüggést kapjuk eredményül:

$$\bar{F}_1(y) = \frac{\int_y^\infty (x-y) dF(x)}{E(Y)}, \quad y \geq 0. \quad (1.15)$$

Az egyensúlyi eloszlás felhasználására a következő alfejezetben sort kerítünk, ahol a csődvalószínűség meghatározásával foglalkozunk.

## 1.4. A csőd valószínűsége

Ebben a részben azt a speciális esetet vizsgáljuk, amikor a biztosítási portfólió kárainak a száma geometriai eloszlást követ. Az összetett geometriai eloszlás fontos szerepet játszik a biztosítási alkalmazásokban, mert a portfólió maximális aggregált vesztesége a klasszikus kockázati modellekben összetett geometriai eloszlású. Az egyik alapvető kérdés a kockázati folyamatok témakörében az, hogy mi a valószínűsége annak, hogy valamely  $t$  időpillanatban a pillanatnyi tőke nagyságát megadó  $U_t$  folyamat értéke negatívvá válik. Ezt az időpontot a tönkremenés, avagy a csőd bekövetkezési idejének fogjuk nevezni. Továbbá rávilágítunk arra a fontos összefüggésre, miszerint a csődvalószínűséget éppen a maximális aggregált veszteséget megadó valószínűségi változó farokeloszlása adja.

Definiálja  $T = \inf\{t; U(t) < 0\}$  az első olyan időpontot, amikor a pillanatnyi tőke negatívvá válik, vagyis a csőd bekövetkezésének az időpontját. Ekkor a  $\psi(u) = P(T < \infty)$  függvény a csőd valószínűségét adja meg  $u$  függvényében. Könnyen

belátható, hogy  $\psi(u)$  egy összetett geometriai eloszlású valószínűségi változó farok-eloszlása, nevezetesen  $\psi(u) = P(L > u)$ , ahol  $L$  összetett geometriai eloszlású

$$p_n = \frac{\theta}{1+\theta} \left( \frac{1}{1+\theta} \right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.16)$$

eloszlású  $N$  számláló valószínűségi változóval és

$$H_1(y) = \int_0^y \{ \bar{H}(t)/E(Y) \} dt, \quad y \geq 0, \quad (1.17)$$

kárnagyság-eloszlásfüggvénnyel, ahol  $H_1(y)$  a  $H(y)$  függvényhez tartozó egyensúlyi eloszlásfüggvény. Ezen eredményt a későbbi levezetések során is megkapjuk majd egy általánosabb tétel speciális eseteként.

A  $H_1(y)$  függvény biztosítási interpretációja az, hogy a hozzá tartozó valószínűségi változó megadja, mekkora a kezdeti és a pillanatnyi tőke különbsége, vagyis a pillanatnyi tőke esésének nagysága akkor, amikor a pillanatnyi tőke először a kezdeti tőke értéke alá megy. Más szóval az eloszlásfüggvénye az  $S_t - ct$  valószínűségi változónak feltéve, hogy  $S_t - ct > 0$  és  $S_x - cx \leq 0$ ,  $0 \leq x < t$  esetén. Az  $L$  valószínűségi változót úgy értelmezhetjük, mint a maximális aggregált veszteséget, azaz a  $\max_{t \geq 0} \{S_t - ct\}$  értéket, ugyanis

$$P(\max_{t \geq 0} \{S_t - ct\} > u) = P(\exists t \geq 0 : S_t - ct - u > 0) = \psi(u)$$

éppen a csődvalószínűséget adja.

Végezetül határozzuk meg az  $L$  valószínűségi változó momentumait. Ehhez az (1.1), (1.2), (1.3) és (1.13) összefüggéseket használjuk fel az alábbiak szerint:

$$E(L) = \int_0^\infty \psi(x) dx = E(N) \int_0^\infty y dH_1(y) = \frac{E(Y^2)}{2\theta E(Y)}, \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} E(L^2) &= 2 \int_0^\infty x\psi(x) dx = & (1.19) \\ &= E(N) \left\{ \int_0^\infty y^2 dH_1(y) - \left[ \int_0^\infty y dH_1(y) \right]^2 \right\} + E(N^2) \left\{ \int_0^\infty y dH_1(y) \right\}^2 = \\ &= \frac{1}{\theta} \left\{ \frac{E(Y^3)}{3E(Y)} - \left[ \frac{E(Y^2)}{2E(Y)} \right]^2 \right\} + \frac{2+\theta}{\theta^2} \left\{ \frac{E(Y^2)}{2E(Y)} \right\}^2 = \frac{E(Y^3)}{3\theta E(Y)} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{E(Y^2)}{\theta E(Y)} \right\}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(L^3) &= 3 \int_0^\infty x^2 \psi(x) dx = E(N) \int_0^\infty y^3 dH_1(y) + & (1.20) \\ &+ [3E(N^2) - 3E(N)] \left\{ \int_0^\infty y^2 dH_1(y) \right\} \left\{ \int_0^\infty y dH_1(y) \right\} + \\ &+ [E(N^3) - 3E(N^2) + 2E(N)] \left\{ \int_0^\infty y dH_1(y) \right\}^3 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{E(Y^4)}{4\theta E(Y)} + \left[ \frac{3(2+\theta)}{\theta^2} - \frac{3}{\theta} \right] \frac{E(Y^3)E(Y^2)}{6\{E(Y)\}^2} + \\
&+ \left[ \frac{6+6\theta+\theta^2}{\theta^3} - \frac{3(2+\theta)}{\theta^2} + \frac{2}{\theta} \right] \left\{ \frac{E(Y^2)}{2E(Y)} \right\}^3 = \\
&= \frac{E(Y^4)}{4\theta E(Y)} + \frac{3}{4} \left\{ \frac{E(Y^2)}{\theta E(Y)} \right\}^3 + \frac{E(Y^2)E(Y^3)}{\{\theta E(Y)\}^2}.
\end{aligned}$$

Az elkövetkező fejezetekben az elsődleges célunk a tönkremenés idejének becslése lesz, amennyiben a csőd biztosan bekövetkezik. A numerikus számításaink során felhasznált képletek fontos építőkövei lesznek a csődvalószínűség és az  $L$  valószínűségi változó momentumai is.

## 2. fejezet

# Tijms-approximációk

Az összetett eloszlások bonyolultsága miatt néhány speciális esettől eltekintve általában nem adható zárt képlet az összetett farokeloszlásra, így a továbbiakban ennek az approximálásával foglalkozunk. A következőkben áttekintésre kerülő approximáció alapötlete Tijms nevéhez fűződik, aki exponenciálisok kombinációjával közelítette az összetett farokeloszlást. A paraméterek megválasztásánál azon szempontokat vette alapul, miszerint a közelítés legyen pontos a 0 helyen, és a várható értéke egyezzen meg az eredeti várható értékkel. Ahogy látni fogjuk, ezen approximáció nagyon jó eredményeket produkál, amikor a kárszámeloszlás aszimptotikusan geometrikus. Ekkor az egyes kárnagyság-eloszlások egy nagy osztályánál a közelítő eloszlás aszimptotikus viselkedése megegyezik az eredeti eloszlásával. Ráadásul bizonyos esetekben az approximáció az összetett farokeloszlás pontos értékeit is reprodukálja. A fejezet a [2] könyv alapján készült.

### 2.1. Aszimptotikusan geometrikus eset

Az összetett eloszlások esetében a rekurzív, numerikus számítások az utóbbi időben egyre nagyobb figyelmet kapnak, ugyanakkor az aszimptotikus megközelítés is megfelelő eredményre vezethet. Embrechts, Maejima és Teugels (1985) belátták, hogy amennyiben

$$p_n \sim C_1 n^\alpha \phi^n, \quad n \rightarrow \infty$$

teljesül, ahol  $C_1 > 0$ ,  $-\infty < \alpha < \infty$ , és  $0 < \phi < 1$ , akkor

$$\bar{G}(x) \sim \frac{C_1 x^\alpha e^{-\kappa x}}{\kappa \{\phi E(Y e^{\kappa Y})\}^{\alpha+1}}, \quad x \rightarrow \infty \quad (2.1)$$

adódik, ahol  $\kappa > 0$  kielégíti a

$$E(e^{\kappa Y}) = \int_0^\infty e^{\kappa y} dF(y) = \frac{1}{\phi} \quad (2.2)$$

egyenletet, ha  $Y$  eloszlásfüggvénye nem rászós. (2.2) az úgynevezett Lundberg-illeszkedési egyenlet, mely nagy jelentőséggel bír az aszimptotikus vizsgálatok során.

Tegyük fel, hogy a kárszámeloszlás,  $p_n, n = 0, 1, 2, \dots$  olyan, hogy

$$p_n \sim C_1 \phi^n, \quad n \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

teljesül, ahol  $C_1 > 0$  és  $0 < \phi < 1$ , azaz  $p_n, n = 0, 1, 2, \dots$  aszimptotikusan geometrikus. Ekkor, ha  $\kappa > 0$  teljesíti a (2.2) szerinti Lundberg-illeszkedési egyenletet, a (2.1) aszimptotikus formulából következik, hogy ha  $F(y)$  nem rászós, akkor

$$\bar{G}(x) \sim C e^{-\kappa x}, \quad x \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

teljesül, ahol

$$C = C_1 \left\{ \kappa \phi \int_0^\infty y e^{\kappa y} dF(y) \right\}^{-1}. \quad (2.5)$$

Más szavakkal az összetett farokeloszlás aszimptotikusan exponenciális a  $\kappa$  illeszkedési együtthatóval, mint paraméterrel.

Definiáljuk a  $\bar{G}(x)$  farokeloszlás Tijms-approximációját az alábbiak szerint:

$$\bar{G}_T(x) = (1 - p_0 - C) \bar{H}(x) + C e^{-\kappa x}, \quad x \geq 0, \quad (2.6)$$

ahol  $H(x)$  eloszlásfüggvény a  $(0, \infty)$ -en, mely a várható érték előállításához szükséges az alábbiak szerint:

$$E(N)E(Y) = (1 - p_0 - C) \int_0^\infty \bar{H}(x) dx + \frac{C}{\kappa}. \quad (2.7)$$

Az approximáció azon az ötleten alapszik, hogy az aszimptotikus formulát tovább fejleszthetjük, kiegészíthetjük egy korrekciós taggal. Ezt úgy választjuk, hogy a közelítés pontos legyen az  $x = 0$  pontban, azaz egyezzen meg a  $\bar{G}(0) = 1 - p_0$  értékkel, valamint az aszimptotikus értékkel  $x = \infty$  esetén, vagyis  $\bar{G}_T(x) \sim C e^{-\kappa x}$  teljesüljön, ha  $x \rightarrow \infty$ , továbbá a közelítés várható értéke az eredeti várható érték legyen.

Analitikus vizsgálódásokhoz a  $\bar{H}(x) = e^{-\mu x}$  megfelelő választás lehet, azaz a (2.6) kifejezés az alábbiak szerint módosul:

$$\bar{G}_T(x) = (1 - p_0 - C) e^{-\mu x} + C e^{-\kappa x}, \quad x \geq 0, \quad (2.8)$$

ahol a (2.7) összefüggésnek megfelelően

$$\mu = (1 - p_0 - C) \left\{ E(N)E(Y) - \frac{C}{\kappa} \right\}^{-1} \quad (2.9)$$

teljesül a paraméterre.

A következő alfejezetben a módosított geometriai eloszlás esetét vizsgáljuk.



## 2.2. Módosított geometriai eloszlás

Az elkövetkezőkben szeretnénk az eddigi eredményeket egy speciális esetre alkalmazni. Amennyiben  $0 \leq p_0 < 1$  és

$$p_n = (1 - p_0)(1 - \phi)\phi^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.10)$$

teljesül, ahol  $0 < \phi < 1$ , a  $\{p_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$  eloszlást módosított geometriai eloszlásnak nevezzük. Ekkor a farokeloszlásra

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k = (1 - p_0)(1 - \phi)\phi^n \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{k-1} = (1 - p_0)\phi^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

adódik. Ha  $p_n$  módosított geometriai eloszlású, (2.3) egyenlőséggel teljesül, ahol  $C_1 = (1 - p_0)(1 - \phi)/\phi$ , továbbá  $E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = (1 - p_0)/(1 - \phi)$ . Ekkor a Tijms-approximáció (2.6) szerinti, és a várható értékekkel kapcsolatos (2.7) feltétel az alábbira módosul:

$$\frac{(1 - p_0)E(Y)}{(1 - \phi)} = (1 - p_0 - C) \int_0^{\infty} \bar{H}(x) dx + \frac{C}{\kappa}.$$

Megjegyezzük, hogy összetett módosított geometriai eloszlás esetén, amennyiben a kárnagságeloszlás exponenciális,

$$\bar{G}(x) = (1 - p_0)e^{-\frac{1-\phi}{E(Y)}x}, \quad x \geq 0$$

teljesül (ld. [2], p. 110, 7.1.15), tehát  $\bar{G}(x)$  maga is egy exponenciális farokeloszlás. Ekkor a (2.4) kifejezés egyenlőséggel teljesül minden  $x \geq 0$  esetén, így az additív korrekciós tag szükségtelen, azaz  $C = 1 - p_0$ . Mivel ebben az esetben  $F(y) = 1 - e^{-y/E(Y)}$ , a (2.2) egyenlet  $\kappa = (1 - \phi)/E(Y)$  választással teljesül, valamint a módosított geometriai eloszlásra, mint láttuk  $E(N) = (1 - p_0)/(1 - \phi)$  adódik.

Számunkra elsősorban a nem triviális eset érdekes, amikor is a farokeloszlást közelíteni kell, mert az csak aszimptotikusan exponenciális. A következő alfejezetben belátjuk, hogy a Tijms-approximáció egy olyan közelítést ad, mely megtartja ezt a tulajdonságot, vagyis aszimptotikusan jól viselkedik.

## 2.3. A Tijms-approximáció tulajdonságai

Visszatérve az általánosabb esethez a következőkben egy aszimptotikus eredményt ismertetünk. Először is szükségünk lesz két definícióra. Tegyük fel, hogy az  $F(y)$  eloszlásfüggvény abszolút folytonos, azaz létezik  $f(y) = F'(y)$  sűrűségfüggvénye, ekkor a hazard rátát a következőképpen definiáljuk:

$$\mu(y) = \frac{f(y)}{\bar{F}(y)} = -\frac{d}{dy} \ln \bar{F}(y), \quad y \geq 0,$$

ahol  $\bar{F}(y) = 1 - F(y)$  jelöli az  $Y$  túlélési függvényét. A hazard ráta nagy értékei vékonyabb farokeloszlást indukálnak. Ezután eloszlások egy osztályát szeretnénk definiálni. Azt mondjuk, hogy az  $F(y)$  eloszlásfüggvény NWUC (NBUC), ha

$$\bar{F}_1(x+y) \geq (\leq) \bar{F}_1(y)\bar{F}(x)$$

teljesül minden  $x \geq 0, y \geq 0$  esetén. Most már kimondhatjuk a tételt:

**2.3.1. Tétel.** Tegyük fel, hogy

- $p_n$  aszimptotikusan geometrikus a (2.3) formulának megfelelően, és  $0 < \phi < 1$ ,
- $a_n \leq (\geq) a_0\phi^n, n = 1, 2, 3, \dots$ ,
- $\kappa > 0$  illeszkedési együttható teljesíti a (2.2) egyenletet,
- $C$  a (2.5) formula szerint adott,
- $H(x)$  abszolút folytonos eloszlásfüggvény teljesíti a (2.7) egyenletet, és
- $\mu_H(x) = -\frac{d}{dx} \ln \bar{H}(x)$ , melyre  $\mu_H(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \mu_H(x) \geq 1 / \int_0^\infty \bar{H}(x) dx$ .

Ha az  $F(y)$  nem rácsos eloszlásfüggvény NWUC (NBUC), akkor  $C \leq (\geq) 1 - p_0$  és a (2.6) összefüggés szerint adott  $\bar{G}_T(x)$ -re teljesül, hogy

$$\bar{G}_T(x) \sim Ce^{-\kappa x}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

*Bizonyítás.* Mivel  $\bar{G}(x) \leq (\geq) (1 - p_0)e^{-\kappa x}$  igazolható (lsd. [2], p. 95, 6.1.4 következmény), valamint (2.4) szerint  $\bar{G}(x) \sim Ce^{-\kappa x}$  teljesül, ha  $x \rightarrow \infty, C \leq (\geq) 1 - p_0$  adódik. A továbbiakban feltesszük, hogy  $C \neq 1 - p_0$ , valamint hogy  $\kappa \neq (1 - \phi)/E(Y)$  vagy  $E(N) \neq (1 - p_0)/(1 - \phi)$  teljesül, ugyanis ellenkező esetben a módosított geometriai eloszlásnál megemlített speciális esetet kapjuk, melyre már láttuk, hogy igaz a tétel állításának második fele is.

Felírható az alábbi összefüggés, miszerint

$$\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\mu_H(\infty)} \geq \frac{1}{\kappa} - \int_0^\infty \bar{H}(x) dx,$$

melyet (2.7) felhasználásával átalakítva

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\mu_H(\infty)} &\geq \frac{1}{1 - p_0 - C} \left\{ \frac{1 - p_0 - C}{\kappa} - E(N)E(Y) + \frac{C}{\kappa} \right\} \\ \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\mu_H(\infty)} &\geq \frac{1 - p_0}{1 - p_0 - C} \left\{ \left( \frac{1}{\kappa} - \frac{E(Y)}{1 - \phi} \right) + E(Y) \left( \frac{1}{1 - \phi} - \frac{E(N)}{1 - p_0} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

adódik. A feltételekből  $E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq (\geq) a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \phi^n = (1 - p_0)/(1 - \phi)$  következik, azaz

$$\frac{1}{1 - \phi} - \frac{E(N)}{1 - p_0} \geq (\leq) 0. \quad (2.13)$$

Mivel  $F(y)$  NWUC (NBUC), a definícióra  $x = 0$  esetén  $\bar{F}(y) \leq (\geq) \bar{F}_1(y)$  adódik. Ezt felhasználva belátható az alábbi összefüggés (lsd. Ross (1996) eredményei):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi} &= \int_0^{\infty} e^{\kappa y} dF(y) \leq (\geq) \int_0^{\infty} e^{\kappa y} dF_1(y) = \frac{\int_0^{\infty} e^{\kappa y} dF(y) - 1}{\kappa E(Y)} \\ \frac{1}{\phi} &\leq (\geq) \frac{(\frac{1}{\phi} - 1)}{\kappa E(Y)} = \frac{1}{\phi} \frac{1 - \phi}{\kappa E(Y)} \\ \frac{1}{\kappa} - \frac{E(Y)}{1 - \phi} &\geq (\leq) 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Mivel  $\kappa = (1 - \phi)/E(Y)$  és  $E(N) = (1 - p_0)/(1 - \phi)$  nem teljesülhet egyszerre, (2.13) és (2.14) közül legalább az egyik kifejezésben szigorú egyenlőtlenség van, amiből a

$$\left( \frac{1}{\kappa} - \frac{E(Y)}{1 - \phi} \right) + E(Y) \left( \frac{1}{1 - \phi} - \frac{E(N)}{1 - p_0} \right) > (<) 0 \quad (2.15)$$

összefüggés következik. Mivel  $1 - p_0 - C > (<) 0$  és (2.15) teljesül, a (2.12) egyenlőtlenség jobb oldala pozitív (negatív) előjelű kifejezések hányadosa, így pozitív. Tehát

$$\frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\mu_H(\infty)} > 0$$

következik, azaz  $\mu_H(\infty) > \kappa$  adódik. Eszerint  $\mu_H(x) > \kappa$  teljesül minden elég nagy  $x$  esetén, melyből az  $\int_0^{\infty} (\mu_H(x) - \kappa) dx = \infty$  vagy ekvivalensen  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\kappa x} \bar{H}(x) = 0$  összefüggéshez jutunk. Végezetül (2.6) alapján  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\kappa x} \bar{G}_T(x) = C$  adódik, vagyis beláttuk, hogy (2.11) teljesül. ■

A  $\bar{G}(x)$ -re adódó (2.6) approximáció nagyobb (kisebb), mint a (2.4) szerinti aszimptotikus eredmény, mivel  $1 - p_0 - C > (<) 0$  teljesül, és a közelítés aszimptotikusan jól viselkedik  $x \rightarrow \infty$  esetén, amennyiben  $F(y)$  NWUC (NBUC). A már korábban is megemlített  $\bar{H}(x) = e^{-\mu x}$  függvénnyel a tétel megfelelő feltételei teljesülnek. Ezzel a speciális választással bizonyos feltevések mellett minden  $x$ -re reprodukálhatók  $\bar{G}(x)$  valódi értékei, ahogy azt a következő tételben látni fogjuk.

**2.3.2. Tétel.** Tegyük fel, hogy  $p_n$  aszimptotikusan geometrikus a (2.3) formulának megfelelően, és  $0 < \phi < 1$ , a  $\kappa > 0$  együttható teljesíti a (2.2) egyenletet, valamint  $\int_0^{\infty} ye^{\kappa y} dF(y) < \infty$ . Ha  $F(y)$  nem rácsos, és

$$\bar{G}(x) = A_1 e^{-R_1 x} + A_2 e^{-R_2 x}, \quad x \geq 0 \quad (2.16)$$

teljesül, ahol  $A_1 \neq 0, A_2 \neq 0$ , és  $R_1 \neq R_2$ , akkor  $\overline{G}(x) = \overline{G}_T(x)$ , ahol  $\overline{G}_T(x)$  a (2.8) összefüggés szerint adott a (2.9) szerinti  $\mu$ -vel.

*Bizonyítás.* Mivel a feltételekben kikötöttük, hogy (2.3) és (2.2) teljesül, a (2.4) összefüggés is fennáll, ekvivalensen  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\kappa x} \overline{G}(x) = C$ , ahol  $C$  (2.5) szerint adott. Feltehető, hogy  $R_1 > R_2$ , ekkor (2.16) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{R_2 x} \overline{G}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (A_1 e^{-(R_1 - R_2)x} + A_2) = A_2.$$

Ekkor szükségképpen  $R_2 = \kappa$ , ugyanis amennyiben  $R_2 \neq \kappa$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{R_2 x} \overline{G}(x) = C \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(R_2 - \kappa)x}$$

teljesülne, ami 0, ha  $R_2 < \kappa$ , és  $\infty$ , ha  $R_2 > \kappa$ , de ez nem lehetséges.  $R_2 = \kappa$  miatt  $A_2 = C$ , így (2.16) átalakul a  $\overline{G}(x) = A_1 e^{-R_1 x} + C e^{-\kappa x}$ ,  $x \geq 0$  kifejezéssé. Az  $x = 0$  behelyettesítésével azt kapjuk, hogy  $1 - p_0 = A_1 + C$ , azaz  $A_1 = 1 - p_0 - C$ . A várható értékre

$$E(N)E(Y) = \int_0^\infty \overline{G}(x) dx = \frac{1 - p_0 - C}{R_1} + \frac{C}{\kappa}$$

adódik, ebből kifejezhetjük  $R_1$ -et:

$$R_1 = (1 - p_0 - C) \left\{ E(N)E(Y) - \frac{C}{\kappa} \right\}^{-1},$$

miszerint (2.9) alapján  $R_1 = \mu$ . ■

Összegezve a fejezet legfőbb eredményeit elmondható, hogy a Tijms-approximáció produkálja a megfelelő aszimptotikus viselkedést, mind az NWUC és NBUC osztályoknál. Ráadásul bizonyos speciális esetekben az approximáció  $\overline{G}(x)$  pontos értékeit is visszaadja.

## 3. fejezet

# Nem teljes felújítási egyenlet

A nem teljes felújítási egyenlet az alkalmazott valószínűségszámítás számos különböző területén megjelenik, például lényeges szerepet játszik a biztosítási kockázat elméletében is. Számunkra azért nagy jelentőségű, mert a klasszikus kockázati modellek bizonyos fontos, a csőd idejéhez kapcsolódó mennyiségei felírhatók egy nem teljes felújítási egyenlet megoldásaként. Az előző fejezetek során már foglalkoztunk az összetett geometriai eloszlással és megismerhettük számos hasznos tulajdonságát is. A továbbiakban feltárjuk a kapcsolatot a nem teljes felújítási egyenlet és az összetett geometriai eloszlás között, miszerint az összetett geometriai farokeloszlás tekinthető egy nem teljes felújítási egyenlet megoldásaként, illetve a nem teljes felújítási egyenlet megoldása kifejezhető a megfelelő összetett geometriai farokeloszlás segítségével. Ezen kapcsolatnak köszönhetően a nem teljes felújítási egyenlet megoldásának approximálásához alkalmazhatók azok a közelítő eredmények, melyek az összetett geometriai farokeloszlásra adódtak.

A fejezet második részében bevezetjük a várható diszkontált büntetés függvényét, melynek speciális esetei közé tartoznak a csődvalószínűség, a csőd idejének Laplace-transzformáltja és a csőd bekövetkezéskori deficit momentumai. Ezután belátjuk, hogy a várható diszkontált büntetés megkapható egy nem teljes felújítási egyenlet megoldásaként. Megbizonyosodhatunk arról is, hogy a csőd idejének Laplace-transzformáltja nem csak egy nem teljes felújítási egyenlet megoldása, hanem egy összetett geometriai farokeloszlás is egyben. Mindezek felhasználásával sikerül meghatározunk a tönkremenés várható időpontját feltéve, hogy a csőd biztosan bekövetkezik. Végezetül a csőd várható idejének becsléséhez alkalmazzuk a Tijms-approximációt. Ezen fejezet a [2] könyv eredményeit dolgozza fel.

### 3.1. A nem teljes felújítási egyenlet néhány tulajdonsága

Ebben az alfejezetben a nem teljes felújítási egyenlet és az összetett geometriai eloszlás közötti kapcsolatra mutatunk rá. Majd ezt felhasználva megadjuk a nem teljes felújítási egyenlet megoldásának Tijms-approximációját.

Tegyük fel, hogy  $0 < \phi < 1$  teljesül, valamint jelölje  $F(y)$   $[0, \infty)$ -en vett eloszlásfüggvény újfent az egyes kárnagyságok eloszlását. Az  $m(x)$  teljesíti a nem teljes felújítási egyenletet, amennyiben

$$m(x) = \phi \int_0^x m(x-y)dF(y) + v(x), \quad x \geq 0, \quad (3.1)$$

ahol  $v(x)$  a  $[0, \infty)$ -en folytonos függvény. Ez az egyenlet meghatározó szerepet tölt be a biztosítási kockázat elméletében. Szükségünk lesz a már említett összetett geometriai eloszlás  $G(x)$  eloszlásfüggvényére, melyre az alábbi teljesül:

$$\bar{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\phi)\phi^n \bar{F}^{*n}(x), \quad x \geq 0. \quad (3.2)$$

A most következő tételben kifejezzük  $m(x)$ -et a  $G(x)$  eloszlásfüggvény segítségével.

**3.1.1. Tétel.** A (3.1) egyenlet  $m(x)$  megoldása a következő alakra hozható:

$$m(x) = \frac{1}{1-\phi} \int_0^x v(x-y)dG(y) + v(x). \quad (3.3)$$

*Bizonyítás.* A geometriai eloszlás generátorfüggvénye  $\mathcal{G}_N(z) = (1-\phi)/(1-\phi z)$ , így az (1.6) és (3.2) összefüggésekből következik, hogy

$$\tilde{g}(s) = \frac{1-\phi}{1-\phi \tilde{f}(s)}, \quad (3.4)$$

ahol

$$\tilde{g}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}dG(x) + G(0) \quad \text{és} \quad \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}dF(x)$$

a megfelelő Laplace-transzformáltak. Ekkor a (3.1) egyenletből kiindulva kapjuk, hogy

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}m(x)dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-sx}v(x)dx}{1-\phi \tilde{f}(s)} = \frac{\tilde{g}(s)}{1-\phi} \int_0^{\infty} e^{-sx}v(x)dx.$$

Ezen kifejezés inverz Laplace-transzformáltja éppen (3.3). ■

Mivel az előző fejezetek során  $\bar{G}(x)$  számos tulajdonságát beláttuk, sokkal használhatóbb összefüggésre tehetnénk szert, ha sikerülne kifejezni  $m(x)$ -et  $dG(y)$  helyett  $\bar{G}(x)$  függvényeként. A következő tétel erre vonatkozik.

**3.1.2. Tétel.** Amennyiben  $v(x)$  differenciálható, a (3.1) egyenlet  $m(x)$  megoldása a következő alakra hozható:

$$m(x) = \frac{1}{1-\phi}v(x) - \frac{v(0)}{1-\phi}\bar{G}(x) - \frac{1}{1-\phi}\int_0^x \bar{G}(x-y)v'(y)dy. \quad (3.5)$$

*Bizonyítás.* Parciális integrálással adódik, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^x v(x-y)dG(y) &= [-v(x-y)\bar{G}(y)]_{y=0}^x - \int_0^x v'(x-y)\bar{G}(y)dy = \\ &= v(x)\bar{G}(0) - v(0)\bar{G}(x) - \int_0^x v'(x-y)\bar{G}(y)dy. \end{aligned}$$

Mivel  $\bar{G}(0) = \phi$ , a (3.3) egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$m(x) = \frac{1}{1-\phi}\left\{\phi v(x) - v(0)\bar{G}(x) - \int_0^x v'(x-y)\bar{G}(y)dy\right\} + v(x),$$

ami éppen a (3.5) kifejezéssel egyezik meg. ■

A (3.1) egyenlet egy speciális megoldására tehetünk szert megfelelő  $v(x)$  választása esetén. A (3.4) kifejezés és Feller (1971) eredményének felhasználásával belátható az alábbi összefüggés :

$$\int_0^\infty e^{-sx}\bar{G}(x)dx = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{1-\phi}{1-\phi\tilde{f}(s)}\right) = \frac{\phi}{1-\phi\tilde{f}(s)} \cdot \frac{1-\tilde{f}(s)}{s}, \quad (3.6)$$

melyet átrendezve

$$\int_0^\infty e^{-sx}\bar{G}(x)dx = \phi\tilde{f}(s) \int_0^\infty e^{-sx}\bar{G}(x)dx + \phi\frac{1-\tilde{f}(s)}{s}$$

adódik, melyből inverz Laplace-transzformációval a következő egyenlethez jutunk:

$$\bar{G}(x) = \phi \int_0^x \bar{G}(x-y)dF(y) + \phi\bar{F}(x), \quad x \geq 0. \quad (3.7)$$

Ismerjük fel, hogy (3.7) éppen a (3.1) kifejezés  $v(x) = \phi\bar{F}(x)$  választással, amikor is az  $m(x) = \bar{G}(x)$  a nem teljes felújítási egyenlet egy lehetséges megoldását adja.

A következőkben a (3.1) szerinti nem teljes felújítási egyenlet  $m(x)$  megoldását szeretnénk közelíteni a Tijms típusú approximációk segítségével. Ehhez szükségünk lesz a már korábban említett Lundberg-illeszkedési egyenletre:

$$\int_0^\infty e^{\kappa y}dF(y) = \frac{1}{\phi}. \quad (3.8)$$

Amennyiben (3.8) fennáll és  $F(y)$  nem rácsos, a (2.1) összefüggésből következik, hogy  $\bar{G}(x) \sim Ce^{-\kappa x}$  teljesül  $x \rightarrow \infty$  esetén, ahol

$$C = \frac{1-\phi}{\phi\kappa \int_0^\infty ye^{\kappa y}dF(y)},$$

mivel geometriai eloszlás esetén  $C_1 = 1 - \phi$  és  $\alpha = 0$ . A (2.8) Tijms-approximáció  $\bar{G}(x)$ -re ebben az esetben  $\bar{G}_T(x)$ , melyre

$$\bar{G}_T(x) = (\phi - C)e^{-\mu x} + Ce^{-\kappa x}, \quad x \geq 0 \quad (3.9)$$

teljesül, ahol (2.9) alapján

$$\mu = (\phi - C) \left\{ \frac{\phi}{1 - \phi} \int_0^\infty y dF(y) - \frac{C}{\kappa} \right\}^{-1} \quad (3.10)$$

adódik felhasználva, hogy  $E(N) = \phi/(1 - \phi)$ .

Az  $m(x)$ -re vonatkozó Tijms-approximációt a következőképpen definiálhatjuk a (3.3) egyenletnek megfelelően:

$$m_T(x) = \frac{1}{1 - \phi} \int_0^x v(x - y) dG_T(y) + v(x), \quad x \geq 0. \quad (3.11)$$

Deriválva a (3.9) kifejezést  $G'_T(y) = -\bar{G}'_T(y) = \mu(\phi - C)e^{-\mu y} + \kappa C e^{-\kappa y}$  adódik, melyet felhasználva (3.11) az alábbi kifejezéssé módosul:

$$\begin{aligned} m_T(x) &= \frac{1}{1 - \phi} \int_0^x \mu(\phi - C) e^{-\mu(x-z)} v(z) dz + \frac{1}{1 - \phi} \int_0^x \kappa C e^{-\kappa(x-z)} v(z) dz + v(x) = \\ &= \frac{\mu(\phi - C)}{1 - \phi} e^{-\mu x} \int_0^x e^{\mu y} v(y) dy + \frac{\kappa C}{1 - \phi} e^{-\kappa x} \int_0^x e^{\kappa y} v(y) dy + v(x), \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Az előbbiekkel teljesen megegyező módon, parciális integrálást alkalmazva belátható, hogy (3.11) a következő alakra hozható:

$$m_T(x) = \frac{1}{1 - \phi} v(x) + \frac{v(0)}{1 - \phi} \bar{G}_T(x) - \frac{1}{1 - \phi} \int_0^x \bar{G}_T(x - y) v'(y) dy,$$

amikor is  $v(y)$  deriválható. Ez éppen a (3.5) kifejezésnek megfelelő, amennyiben  $\bar{G}(x)$ -et  $\bar{G}_T(x)$ -re, illetve  $\bar{G}(x - y)$ -t  $\bar{G}_T(x - y)$ -ra cseréljük.

Rávilágítottunk tehát az összetett geometriai farokeloszlás és a nem teljes felújítási egyenlet kapcsolatára, melynek segítségével a következő részben kiszámítjuk a tönkremenés idejének momentumait.

## 3.2. A csőd ideje

Ebben az alfejezetben az eddigi eredmények kerülnek felhasználásra a csőd várható idejének meghatározásához. Amikor a tönkremenés időpontjáról beszélünk, azt mindig azon feltétel mellett értjük, hogy a csőd véges időn belül biztosan bekövetkezik. Először bevezetjük a várható diszkontált büntetést, majd megbizonyosodunk arról, hogy kielégíti a nem teljes felújítási egyenletet. Meghatározzuk a hozzá

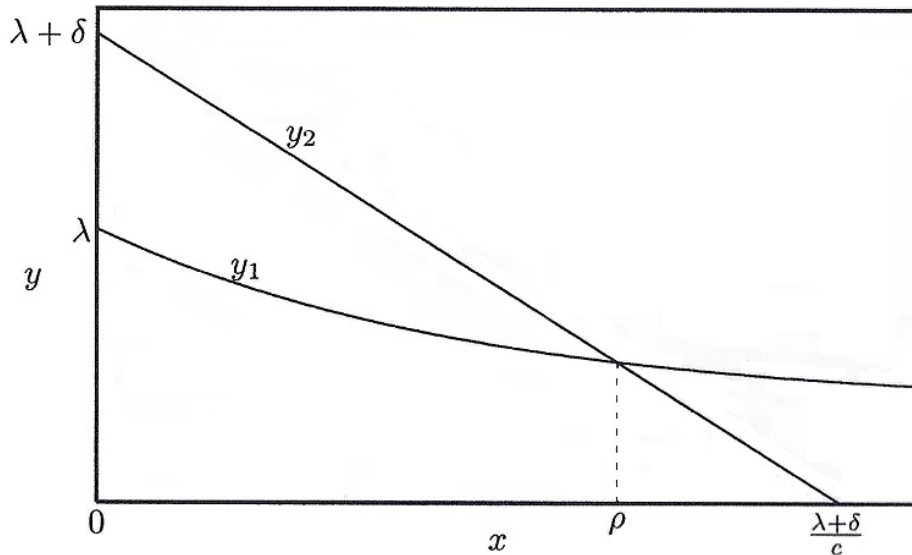


tartozó megfelelő farokeloszlást, mely éppen a várható diszkontált büntetés egy speciális esete, a csőd idejének Laplace-transzformáltja lesz. Ezek után kifejezzük a Lundberg-illeszkedési egyenletet egy sokkal egyszerűbb alakban. Végül a Laplace-transzformált deriváltjának felhasználásával sikerül meghatároznunk a csőd várható időpontját. A nem teljes felújítási egyenletre alkalmazott Tijms-approximáció segítségével egy közelítő megoldást is szolgáltatunk a tönkremenés várható időpontjára. Ezen felül ismertetjük a csőd idejének magasabb momentumaira vonatkozó formulákat is.

A továbbiakban definiáljuk  $|U_T|$  a deficitet a csőd bekövetkezésekor, ahol  $T$  a csőd bekövetkezésének időpontja. Minket a deficit egy nemnegatív függvénye,  $w(|U_T|)$  érdekel.  $w(x)$ -re tekinthetünk úgy, mint egyfajta büntetésre, amikor a deficit éppen  $|U_T| = x$ . Ekkor legyen

$$m(u) = E\{e^{-\delta T} w(|U_T|) I(T < \infty)\}$$

a várható diszkontált büntetés, ahol  $u$  a kezdeti tőke, és  $\delta \geq 0$  a diszkont faktor.  $m(u)$  egyes speciális esetekben fontos mennyiségeket jelöl. Például  $\delta = 0$  és  $w(x)=1$  esetén éppen a  $\psi(u)$  csődvalószínűségre egyszerűsödik, illetve a  $\delta = 0$  és  $w(x) = x^k$  választással a deficit  $k$ -adik momentumát kapjuk eredményül. A későbbiekben  $m(u)$  segítségével fogjuk meghatározni a csőd bekövetkezési idejének momentumait is.



3.1. ábra.  $y_1(x) = \lambda \tilde{h}(x)$  és  $y_2(x) = \lambda + \delta - cx$  függvények

Először is legyen  $\tilde{h}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dH(x)$  a kárnagyság-eloszlásfüggvény Laplace-Stieltjes-transzformáltja, és tekintsük az  $y_1(x) = \lambda \tilde{h}(x)$  és  $y_2(x) = \lambda + \delta - cx$  függvényeket, melyek a 3.1 ábrán láthatók. Ha  $\delta > 0$ , akkor  $y_2(0) = \lambda + \delta >$

$\lambda = y_1(0)$ . Mivel  $y_1'(x) < 0$  és  $y_1''(x) > 0$  teljesül  $x > 0$  esetén, az  $y_1(x) = y_2(x)$  egyenletnek egyetlen pozitív  $\rho = \rho(\delta)$  gyöke van a  $(0, \frac{\lambda+\delta}{c})$  intervallumon, vagyis  $\rho$ -ra az alábbi kifejezés teljesül:

$$\lambda \tilde{h}(\rho) = \lambda + \delta - c\rho. \quad (3.12)$$

Ha  $\delta = 0$ , akkor  $y_1(0) = y_2(0)$  és  $y_1'(0) = -\lambda E(Y) > -c = y_2'(0)$  teljesül, így  $\rho=0$  az egyetlen nemnegatív gyök. Ezen  $\rho = \rho(\delta)$  mennyiség fontos szerepet játszik a  $m(u)$  függvény analízálásában, ahogy azt az elkövetkezőkben látni fogjuk.

Gerber és Shiu (1998) megmutatták, hogy  $m(u)$  az alábbi alakra hozható:

$$m(u) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u m(u-y) \int_y^\infty e^{-\rho(t-y)} dH(t) dy + v(u), \quad (3.13)$$

ahol

$$v(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\rho u} \int_u^\infty e^{-\rho y} \int_y^\infty w(t-y) dH(t) dy. \quad (3.14)$$

A következőkben erről fogjuk belátni, hogy egy nem teljes felújítási egyenlet. Szükségünk lesz a hátralévő élettartam  $1 - \bar{H}(y+t)/\bar{H}(t)$  eloszlásfüggvényére, valamint az  $F(y)$  eloszlásfüggvényre, amit a következőképpen határozunk meg:

$$\bar{F}(y) = \frac{\int_0^\infty e^{-\rho t} \bar{H}(y+t) dt}{\int_0^\infty e^{-\rho t} \bar{H}(t) dt} = \frac{e^{\rho y} \int_y^\infty e^{-\rho t} \bar{H}(t) dt}{\int_0^\infty e^{-\rho t} \bar{H}(t) dt}, \quad (3.15)$$

továbbá az egyensúlyi eloszlás  $H_1'(t) = \bar{H}(t)/E(Y)$  sűrűségfüggvényére. Vegyük ismét a Laplace-Stieltjes-transzformáltat, miszerint  $\tilde{h}_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} dH_1(t)$ , és deriváljuk a (3.15) kifejezést. Ekkor az  $\int_0^\infty e^{-\rho t} \bar{H}(t) dt = E(Y) \tilde{h}_1(\rho)$  összefüggés felhasználásával a következő adódik:

$$F'(y) = -\bar{F}'(y) = \frac{\bar{H}(y) - \rho e^{\rho y} \int_y^\infty e^{-\rho t} \bar{H}(t) dt}{E(Y) \tilde{h}_1(\rho)}.$$

Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int_y^\infty \rho e^{-\rho t} \bar{H}(t) dt = e^{-\rho y} \bar{H}(y) - \int_y^\infty e^{-\rho t} dH(t),$$

melyet behelyettesítve

$$F'(y) = \frac{e^{\rho y} \int_y^\infty e^{-\rho t} dH(t)}{E(Y) \tilde{h}_1(\rho)} \quad (3.16)$$

adódik, majd ezt átrendezve az

$$\int_y^\infty e^{-\rho(t-y)} dH(t) = E(Y) \tilde{h}_1(\rho) F'(y)$$

összefüggéshez jutunk. Visszatérve a (3.13) egyenlethez, és behelyettesítve a most nyert kifejezést,  $m(u)$  függvény a következőképpen módosul:

$$m(u) = \frac{\lambda E(Y) \tilde{h}_1(\rho)}{c} \int_0^u m(u-y) F'(y) dy + v(u).$$

Tudjuk, hogy  $c = \lambda E(Y)(1 + \theta)$ , így (3.13) a következő alakra hozható:

$$m(u) = \phi \int_0^u m(u-y) dF(y) + v(u),$$

ahol

$$\phi = \frac{\tilde{h}_1(\rho)}{1 + \theta}. \quad (3.17)$$

Mivel  $0 < \phi < 1$  teljesül, sikerült belátnunk, hogy  $m(u)$  kielégíti a nem teljes felújítási egyenletet. Továbbá felhasználva a

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{E(Y)(1 + \theta)} = \frac{\phi}{E(Y)\tilde{h}_1(\rho)}$$

összefüggést, a  $v(u)$  függvényre vonatkozó (3.14) a

$$v(u) = \frac{\phi}{E(Y)\tilde{h}_1(\rho)} e^{\rho u} \int_u^\infty e^{-\rho y} \int_y^\infty w(t-y) dH(t) dy. \quad (3.18)$$

kifejezésre módosul.

A továbbiakban feltárjuk a kapcsolatot a  $m(u)$  várható diszkontált büntetés és a megfelelő  $\bar{G}(u)$  farokeloszlás között, melyet a (3.2) képlettel definiáltunk. Ezen kapcsolat hasznunkra lesz a későbbiekben a tönkremenés időpontjának momentumainak a kiszámításában.

**3.2.1. Tétel.** Legyen  $\delta \geq 0$  esetén

$$\bar{G}(u) = E\{e^{-\delta T} I(T < \infty)\}, \quad (3.19)$$

vagyis  $\bar{G}(u)$  a várható diszkontált büntetés  $w(x) = 1$  választással. Ekkor  $\bar{G}(u)$  azon összetett geometriai eloszlás farokeloszlása, melyre

$$\bar{G}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \phi) \phi^n \bar{F}^{*n}(u),$$

ahol  $\phi$  a (3.17), és  $F(u)$  a (3.16) kifejezés szerint meghatározott. Más szóval  $\bar{G}(u)$  éppen az  $m(u)$ -hoz tartozó megfelelő farokeloszlás.

*Bizonyítás.* A (3.18) összefüggésből  $w(x) = 1$  és (3.15) felhasználásával

$$v(u) = \frac{\phi}{\int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{H}(y) dy} e^{\rho u} \int_u^\infty e^{-\rho y} \int_y^\infty dH(t) dy = \phi \frac{e^{\rho u} \int_u^\infty e^{-\rho y} \bar{H}(y) dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{H}(y) dy} = \phi \bar{F}(u)$$

adódik. Így (3.1) megoldása éppen  $m(u) = \bar{G}(u)$  (lsd. (3.7)). ■

Speciális esetként megemlítendő, hogy  $\delta = 0$  esetén  $\bar{G}(u)$  éppen a  $\psi(u) = E\{I(T < \infty)\}$  csődvalószínűséget adja. Mivel  $\delta = 0$  esetén  $\rho = 0$ ,  $h_1(0) = 1$ ,

valamint  $F'(y) = \overline{H}(y)/E(Y) = H_1'(y)$  adódik, ezért  $\phi = 1/(1 + \theta)$  és  $F(y) = H_1(y)$  teljesül. Tehát megkaptuk, hogy a csődvalószínűség egy összetett geometriai farok-eloszlás, melyre

$$p_n = \frac{\theta}{1 + \theta} \left( \frac{1}{1 + \theta} \right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

és a kárnagyság-eloszlásfüggvény  $H_1(y)$ , mely megegyezik az első fejezetben ismertett eredményekkel.

Ahogy azt korábban már láthattuk, a  $\overline{G}(u)$ -ra vonatkozó aszimptotikus eredmények meghatározásához szükség van a  $\kappa > 0$  együtthatóra, mely kielégíti a Lundberg-illeszkedési egyenletet, azaz

$$\frac{1}{\phi} = \tilde{f}(-\kappa) = \int_0^\infty e^{\kappa y} dF(y). \quad (3.20)$$

A (3.20) egyenlet egyszerűbb alakban is kifejezhető, az alábbiakban ezt ismertetjük. Először is a (3.16) és a  $\tilde{h}_1(\rho) = \{1 - \tilde{h}(\rho)\}/\{\rho E(Y)\}$  összefüggések felhasználásával végezzük el a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s) &= \int_0^\infty e^{-sy} F'(y) dy = \int_0^\infty e^{-sy} \frac{e^{\rho y} \int_y^\infty e^{-\rho t} dH(t)}{E(Y) \tilde{h}_1(\rho)} dy = \\ &= \frac{\rho}{1 - \tilde{h}(\rho)} \int_0^\infty e^{-(s-\rho)y} \int_y^\infty e^{-\rho t} dH(t) dy. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-(s-\rho)y} \int_y^\infty e^{-\rho t} dH(t) dy &= \frac{1}{s - \rho} \int_0^\infty e^{-\rho t} dH(t) - \\ &- \int_0^\infty \frac{e^{-(s-\rho)y}}{s - \rho} e^{-\rho y} dH(y) = \frac{\tilde{h}(s) - \tilde{h}(\rho)}{\rho - s}, \end{aligned}$$

melyet beírva a (3.21) kifejezésbe, az alábbi eredményre jutunk:

$$\tilde{f}(s) = \frac{\rho}{\rho - s} \cdot \frac{\tilde{h}(s) - \tilde{h}(\rho)}{1 - \tilde{h}(\rho)}.$$

A most nyert formulát behelyettesítve a (3.20) egyenletbe

$$\frac{\rho}{\rho + \kappa} \cdot \frac{\tilde{h}(-\kappa) - \tilde{h}(\rho)}{1 - \tilde{h}(\rho)} = \frac{(1 + \theta)\rho E(Y)}{1 - \tilde{h}(\rho)}$$

adódik a (3.17) és a  $\tilde{h}_1(\rho) = \{1 - \tilde{h}(\rho)\}/\{\rho E(Y)\}$  összefüggések felhasználásával. Egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$\frac{\tilde{h}(-\kappa) - \tilde{h}(\rho)}{\rho + \kappa} = (1 + \theta)E(Y) = \frac{c}{\lambda},$$

melyet átrendezve

$$\lambda \tilde{h}(-\kappa) - \lambda \tilde{h}(\rho) = c(\rho + \kappa)$$

teljesül, és végezetül (3.12) alkalmazásával az alábbi egyenletet kapjuk eredményül, mely tehát ekvivalens a Lundberg-illeszkedési egyenlettel:

$$\lambda \tilde{h}(-\kappa) = \lambda + \delta + c\kappa. \quad (3.22)$$

Megjegyezzük, hogy (3.22) szerint  $-\kappa$  negatív megoldása a (3.12) egyenletnek.

Értelmezzük most a  $\delta$  diszkont faktort úgy, hogy  $\bar{G}(u)$  egy Laplace-transzformált  $\delta$  paraméterrel. Ekkor vehetjük a  $\bar{G}(u)$  kifejezés  $\delta$  szerinti deriváltját, melynek felhasználásával megadhatjuk a tönkremenés idejének első momentumát, vagyis a csőd várható bekövetkezési idejét feltéve, hogy ez véges. Továbbá szükségünk lesz az alábbi lemmára.

**3.2.1. Lemma.** A  $\bar{G}(u) = E\{e^{-\delta T} I(T < \infty)\}$  függvény kielégíti a

$$\bar{G}(u) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u \bar{G}(u-y) \tau(y, \rho) dy + \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \tau(x, \rho) dx, \quad (3.23)$$

egyenletet, ahol

$$\tau(y, \rho) = \int_y^\infty e^{-\rho(t-y)} dH(t). \quad (3.24)$$

*Bizonyítás.* A (3.13) összefüggés (3.24) felhasználásával a következő alakra hozható:

$$\bar{G}(u) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u \bar{G}(u-y) \tau(y, \rho) dy + v(u).$$

Így csak azt kell megmutatnunk, hogy ebben az esetben  $v(u) = \lambda/c \int_u^\infty \tau(x, \rho) dx$ . A 3.2.1 tétel következtében  $v(u) = \phi \bar{F}(u) = \phi \int_u^\infty F'(x) dx$  teljesül. Ezért (3.16) és (3.17) összefüggéseket alkalmazva a következő adódik:

$$\phi F'(x) = \phi \frac{e^{\rho x} \int_x^\infty e^{-\rho t} dH(t)}{E(Y) \tilde{h}_1(\rho)} = \frac{\int_x^\infty e^{-\rho(t-x)} dH(t)}{E(Y)(1+\theta)} = \frac{\lambda}{c} \tau(x, \rho). \quad \blacksquare$$

Most már minden szükséges eszköz a rendelkezésünkre áll ahhoz, hogy meghatározzuk a csőd várható időpontját azon feltétel mellett, hogy a tönkremenés véges időn belül biztosan bekövetkezik.

**3.2.2. Tétel.** A csőd várható bekövetkezési ideje az alábbi képlettel adható meg:

$$E(T|T < \infty) = \frac{E\{TI(T < \infty)\}}{P(T < \infty)} = \frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}, \quad (3.25)$$

ahol  $\psi_1(u)$  kielégíti a nem teljes felújítási egyenletet:

$$\psi_1(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi_1(u-x) dH_1(x) + \frac{1}{c} \int_u^\infty \psi(x) dx, \quad (3.26)$$

és az alábbi összefüggés segítségével adott:

$$\psi_1(u) = \frac{1}{\lambda\theta E(Y)} \left\{ \int_0^u \psi(u-x)\psi(x) dx + \int_u^\infty \psi(x) dx - \frac{E(Y^2)}{2\theta E(Y)} \psi(u) \right\}. \quad (3.27)$$

*Bizonyítás.* Induljunk ki a 3.2.1 lemmából és differenciáljuk a (3.23) kifejezést  $\delta$  szerint:

$$\begin{aligned} \frac{c}{\lambda} \frac{\partial \bar{G}(u)}{\partial \delta} &= \int_0^u \left\{ \frac{\partial}{\partial \delta} \bar{G}(u-y) \right\} \tau(y, \rho) dy + \\ &+ \rho'(\delta) \int_0^u \bar{G}(u-y) \frac{\partial}{\partial \rho} \tau(y, \rho) dy + \rho'(\delta) \int_u^\infty \frac{\partial}{\partial \rho} \tau(y, \rho) dy. \end{aligned} \quad (3.28)$$

A (3.12) összefüggés  $\delta$  szerinti differenciálásával  $\lambda \tilde{h}'(\rho(\delta)) \rho'(\delta) = 1 - c\rho'(\delta)$  adódik, továbbá mivel  $\rho(0) = 0$  és  $\tilde{h}'(s) = -\int_0^\infty x e^{-sx} dH(x)$  teljesül, azt kapjuk, hogy

$$\lambda \tilde{h}'(0) \rho'(0) = -\lambda \left\{ \int_0^\infty x dH(x) \right\} \rho'(0) = -\lambda E(Y) \rho'(0) = 1 - c\rho'(0),$$

melyet átrendezve a

$$\rho'(0) = \{c - \lambda E(Y)\}^{-1} = \{\lambda E(Y)(1 + \theta) - \lambda E(Y)\}^{-1} = \{\lambda \theta E(Y)\}^{-1}$$

eredményre jutunk. Továbbá a (3.24) kifejezésből kiindulva (1.15) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \tau(y, \rho)|_{\rho=0} = - \int_y^\infty (t-y) e^{-\rho(t-y)} dH(t)|_{\rho=0} = - \int_y^\infty (t-y) dH(t) = -E(Y) \bar{H}_1(y).$$

Vegyük észre, hogy  $\psi_1(u) = E\{TI(T < \infty)\} = -\frac{\partial}{\partial \delta} \bar{G}(u)|_{\delta=0}$ . Így a (3.28) kifejezés  $\delta = 0$  esetén felhasználva, hogy  $\tau(y, 0) = \int_y^\infty dH(t) = 1 - H(y)$  és  $\bar{G}(u)|_{\delta=0} = \psi(u)$  teljesül, a következőképpen módosul:

$$\begin{aligned} -\frac{c}{\lambda} \psi_1(u) &= \int_0^u \{-\psi_1(u-y)\} \bar{H}(y) dy + \\ &+ \frac{1}{\lambda \theta E(Y)} \int_0^u \psi(u-y) \{-E(Y) \bar{H}_1(y)\} dy + \\ &+ \frac{1}{\lambda \theta E(Y)} \int_u^\infty \{-E(Y) \bar{H}_1(y)\} dy. \end{aligned}$$

Továbbá átrendezéssel, majd egyszerű átalakítások révén a fenti egyenlet a következő alakra egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} \psi_1(u) &= \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi_1(u-y) dH_1(y) + \\ &+ \frac{1}{c\theta} \int_0^u \psi(u-y) \bar{H}_1(y) dy + \frac{1}{c\theta} \int_u^\infty \bar{H}_1(y) dy. \end{aligned}$$

A (3.26) összefüggés már könnyen adódik, amennyiben sikerül belátnunk az alábbi:

$$\theta \int_u^\infty \psi(y)dy = \int_0^u \psi(u-y)\bar{H}_1(y)dy + \int_u^\infty \bar{H}_1(y)dy. \quad (3.29)$$

Induljunk ki a (3.7) egyenletből, mely  $\delta = 0$  esetén a következő alakra módosul:

$$(1 + \theta)\psi(y) = \int_0^y \psi(y-x)dH_1(x) + \bar{H}_1(y)$$

felhasználva, hogy  $\phi = \tilde{h}_1(0)/(1 + \theta) = 1/(1 + \theta)$ . Integráljuk a fenti kifejezést  $u$ -tól  $\infty$ -ig:

$$(1 + \theta) \int_u^\infty \psi(y)dy = \int_u^\infty \int_0^y \psi(y-x)dH_1(x)dy + \int_u^\infty \bar{H}_1(y)dy,$$

majd bontsuk ki az első tagot az integrálás sorrendjének felcserélésével:

$$\begin{aligned} \int_u^\infty \int_0^y \psi(y-x)dH_1(x)dy &= \\ &= \int_0^u \int_u^\infty \psi(y-x)dydH_1(x) + \int_u^\infty \int_x^\infty \psi(y-x)dydH_1(x) = \\ &= \int_0^u \int_{u-x}^\infty \psi(y)dydH_1(x) + \int_u^\infty \int_0^\infty \psi(y)dydH_1(x) = \\ &= \int_0^u \int_{u-x}^\infty \psi(y)dydH_1(x) + \bar{H}_1(u) \int_0^\infty \psi(y)dy. \end{aligned}$$

Helyettesítsük vissza a most nyert kifejezést:

$$(1 + \theta) \int_u^\infty \psi(y)dy = \int_0^u \int_{u-x}^\infty \psi(y)dydH_1(x) + \bar{H}_1(u) \int_0^\infty \psi(y)dy + \int_u^\infty \bar{H}_1(y)dy,$$

ezután integráljuk parciálisan az első tagot:

$$\begin{aligned} - \int_0^u \int_{u-x}^\infty \psi(y) dy \{-H_1'(x)\} dx &= \\ &= - \left[ \int_{u-x}^\infty \psi(y) dy \bar{H}_1(x) \right]_{x=0}^u + \int_0^u \psi(u-x)\bar{H}_1(x) dx = \\ &= \int_u^\infty \psi(y) dy - \bar{H}_1(u) \int_0^\infty \psi(y) dy + \int_0^u \psi(u-x)\bar{H}_1(x) dx. \end{aligned}$$

Ezt visszahelyettesítve

$$(1 + \theta) \int_u^\infty \psi(y)dy = \int_u^\infty \psi(y)dy + \int_0^u \psi(u-x)\bar{H}_1(x)dx + \int_u^\infty \bar{H}_1(y)dy$$

adódik, melyből már egyenesen következik (3.29). Tehát a (3.1) egyenlet fennáll, vagyis teljesül a nem teljes felújítási egyenlet  $m(x) = \psi_1(x)$ ,  $\phi = 1/(1 + \theta)$  és  $v(x) = \int_x^\infty \psi(t)dt/c$  választással.

A megoldás a (3.5) összefüggésből kiindulva a következő alakba írható:

$$\psi_1(u) = \frac{1+\theta}{\theta c} \int_u^\infty \psi(x) dx - \frac{1+\theta}{\theta c} \left\{ \int_0^\infty \psi(x) dx \right\} \psi(u) + \frac{1+\theta}{\theta c} \int_0^u \psi(u-x)\psi(x) dx.$$

Ez éppen a (3.27) képletet adja, mivel  $(1+\theta)/(\theta c) = (1+\theta)/\{\theta \lambda E(Y)(1+\theta)\} = 1/\{\lambda \theta E(Y)\}$  teljesül, és  $\int_0^\infty \psi(x) dx$  az összetett geometriai eloszlás várható értéke, mely (1.14) szerint a  $E(Y^2)/\{2\theta E(Y)\}$  kifejezéssel egyenlő. ■

Megjegyezzük, hogy  $\psi_1(u)$  könnyen számítható (3.27) alapján, amennyiben a kárnagságeloszlás exponenciális, hiszen ebben az esetben a csődvalószínűsége létezik explicit képlet, melyet az első fejezetben meg is adtunk. Tehát ebben a speciális esetben a tönkremenés várható időpontja egyszerűen meghatározható. Mivel  $\psi_1(u)$  értékének kiszámítása általában komplikáltabb feladat, a továbbiakban szeretnénk approximálni a csőd várható bekövetkezési idejét.

### 3.2.1. Példa. Tijms-approximáció a csőd várható idejére

A (3.9) összefüggésnek megfelelően a tönkremenés valószínűsége az alábbiak szerint közelíthető:

$$\psi_T(u) = C_1 e^{-\kappa_1 u} + C e^{-\kappa u},$$

ahol

$$C_1 = \frac{1}{1+\theta} - C,$$

és (3.10) alapján

$$\kappa_1 = C_1 \left\{ \frac{E(Y^2)}{2\theta E(Y)} - \frac{C}{\kappa} \right\}^{-1},$$

ugyanis  $\phi/(1-\phi) = 1/\theta$  és (1.14) szerint  $\int_0^\infty y dH_1(y) = E(Y^2)/\{2E(Y)\}$  teljesül. Továbbá, amennyiben a (3.25) és (3.27) összefüggésekben  $\psi(u)$ -t  $\psi_T(u)$ -ra cseréljük, az alábbi approximációt nyerjük a csőd várható bekövetkezési idejére:

$$E(T|T < \infty) \approx \frac{\int_0^u \psi_T(u-x)\psi_T(x) dx + \int_u^\infty \psi_T(x) dx}{\lambda \theta E(Y) \psi_T(u)} - \frac{E(Y^2)}{2\lambda \theta^2 \{E(Y)\}^2}.$$

Kiintegrálva a fenti kifejezéseket

$$\begin{aligned} \int_u^\infty \psi_T(x) dx &= \int_u^\infty (C_1 e^{-\kappa_1 x} + C e^{-\kappa x}) dx = \\ &= \left[ \frac{C_1}{-\kappa_1} e^{-\kappa_1 x} + \frac{C}{-\kappa} e^{-\kappa x} \right]_u^\infty = \frac{C_1}{\kappa_1} e^{-\kappa_1 u} + \frac{C}{\kappa} e^{-\kappa u}, \end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned} \int_0^u \psi_T(u-x)\psi_T(x) dx &= \int_0^u (C_1 e^{-\kappa_1(u-x)} + C e^{-\kappa(u-x)})(C_1 e^{-\kappa_1 x} + C e^{-\kappa x}) dx = \\ &= \int_0^u (C_1^2 e^{-\kappa_1 u} + C_1 C e^{-\kappa_1(u-x)-\kappa x} + C C_1 e^{-\kappa(u-x)-\kappa_1 x} + C^2 e^{-\kappa u}) dx = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= C_1^2 u e^{-\kappa_1 u} + C_1 C e^{-\kappa_1 u} \left[ \frac{e^{(\kappa_1 - \kappa)x}}{\kappa_1 - \kappa} \right]_0^u + C C_1 e^{-\kappa u} \left[ \frac{e^{(\kappa - \kappa_1)x}}{\kappa - \kappa_1} \right]_0^u + C^2 u e^{-\kappa u} = \\
&= C_1^2 u e^{-\kappa_1 u} + C_1 C \frac{e^{-\kappa u}}{\kappa_1 - \kappa} - C_1 C \frac{e^{-\kappa_1 u}}{\kappa_1 - \kappa} + C C_1 \frac{e^{-\kappa_1 u}}{\kappa - \kappa_1} - C C_1 \frac{e^{-\kappa u}}{\kappa - \kappa_1} + C^2 u e^{-\kappa u}
\end{aligned}$$

adódik, melyekből egyszerű algebrai átalakítások révén a

$$E(T|T < \infty) \approx \frac{C_1(C_1 u + \frac{1}{\kappa_1} - \frac{2C}{\kappa_1 - \kappa})e^{-\kappa_1 u} + C(Cu + \frac{1}{\kappa} - \frac{2C_1}{\kappa - \kappa_1})e^{-\kappa u}}{\lambda \theta E(Y)(C_1 e^{-\kappa_1 u} + C e^{-\kappa u})} - \frac{E(Y^2)}{2\lambda \theta^2 \{E(Y)\}^2}$$

közelítést kapjuk eredményül. ■

Végezetül az alábbi egyszerű felső korlátot ismertetjük a tönkremenés várható időpontjára.

### 3.2.1. Következmény.

$$E(T|T < \infty) \leq \frac{1}{\lambda \theta E(Y)} \left\{ \frac{\{2\theta E(Y)\}u - E(Y^2)}{2\theta E(Y)} + \frac{1}{\psi(u)} \int_u^\infty \psi(x) dx \right\}.$$

*Bizonyítás.* Brown (1998) megmutatta, hogy az összetett geometriai eloszlás eloszlásfüggvénye NWU, azaz  $\psi(u-x)\psi(x) \leq \psi(u)$  teljesül. Ennek felhasználásával a 3.2.2 tételből már könnyen adódik a becslés, miszerint

$$\begin{aligned}
E(T|T < \infty) &= \frac{\psi_1(u)}{\psi(u)} = \frac{1}{\lambda \theta E(Y)} \left\{ \int_0^u \frac{\psi(u-x)\psi(x)}{\psi(u)} dx + \int_u^\infty \frac{\psi(x)}{\psi(u)} dx - \frac{E(Y^2)}{2\theta E(Y)} \right\} \\
E(T|T < \infty) &\leq \frac{1}{\lambda \theta E(Y)} \left\{ u + \frac{1}{\psi(u)} \int_u^\infty \psi(x) dx - \frac{E(Y^2)}{2\theta E(Y)} \right\}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

A csőd bekövetkezési idejének magasabb momentumai is meghatározhatók az előzőeknek megfelelően, vagyis a  $\bar{G}(u)$  Laplace-transzformált  $\delta$  szerinti deriváltjainak segítségével. A momentumokra az alábbi rekurzív összefüggés adható:

$$E(T^k|T < \infty) = \frac{E\{T^k I(T < \infty)\}}{P(T < \infty)} = \frac{\psi_k(u)}{\psi(u)}, \quad k = 2, 3, 4, \dots,$$

ahol  $\psi_k(u)$  kielégíti a nem teljes felújítási egyenletet:

$$\psi_k(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi_k(u-x) dH_1(x) + \frac{k}{c} \int_u^\infty \psi_{k-1}(x) dx, \quad k = 2, 3, 4, \dots,$$

és az alábbi összefüggés segítségével adott:

$$\psi_k(u) = \frac{k}{\lambda \theta E(Y)} \left\{ \int_0^u \psi(u-x)\psi_{k-1}(x) dx + \int_u^\infty \psi_{k-1}(x) dx - \psi(u) \int_0^\infty \psi_{k-1}(x) dx \right\}. \quad (3.30)$$

A fenti formula előnye, hogy explicit kifejezést szolgáltat a  $k$ -adik momentumra, így nem szükséges a nem teljes felújítási egyenletet megoldani.

Ebben a fejezetben sikerült megadnunk egy a csőd várható bekövetkezési idejének meghatározásához szükséges képletet, azonban ennek a kiszámítása, mint láthattuk nem minden esetben egyszerű feladat. Az elkövetkezőkben először megvizsgáljuk az egyszerűbb esetet, amikor is exponenciális kárnagyságeloszlás esetén a csődvalószínűségre létezik explicit képlet. Ekkor a tönkremenés idejének momentumaira sokkal egyszerűbb formulákat is sikerül létrehozni, melyek már könnyen számíthatók. Ezután rátérünk arra a kérdésre, hogy mit lehet tenni általánosabb esetben, amikor nem létezik explicit képlet a csődvalószínűségre.

## 4. fejezet

# A csőd idejének sűrűségfüggvénye és momentumai exponenciális kárnagságeloszlás esetén

Ezen fejezet célja a tönkremenés idejének momentumainak meghatározása exponenciális kárnagságeloszlás esetén feltéve, hogy a csőd biztosan bekövetkezik. Az előző fejezetben már levezettünk egy általános formulát, azonban ennek a kiszámítása nem minden esetben egyszerű. Felhasználva, hogy a csődvalószínűségekre létezik explicit kifejezés, ha a kárnagságeloszlás exponenciális vagy két exponenciális kombinációja, könnyen számítható képletekre tehetünk szert. Először olyan formulákat ismertetünk, melyek a momentumok rekurzív módon történő kiszámítására alkalmasak. Ezután a második részben exponenciális kárnagság-eloszlásnál hosszadalmas számítások eredményeként sikerül előállítanunk egy még hasznosabb explicit képletet is.

### 4.1. Rekurzív kiszámítás

A tönkremenés idejének momentumaira ismertetett képletet exponenciális kárnagságeloszlás esetén egyszerűbb alakra hozhatjuk felhasználva, hogy a csődvalószínűségekre explicit kifejezés adható. Ebben az alfejezetben a momentumokat rekurzív módon határozzuk meg. Az első két momentum esetében zárt alakra hozzuk a képletet, ami ugyanezen az elven a magasabb momentumok esetében is megvalósítható.

Az alfejezet második részében rátérünk arra az esetre is, amikor a kárnagságeloszlás két exponenciális eloszlás kombinációja. Belátjuk, hogy ebben az esetben az összetett geometriai farokeloszlás is ilyen alakú. A második fejezetben láthattuk,

hogy a Tijms-approximáció is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. A csőd idejére levezetésre kerülő várható érték tehát minden olyan farokeloszlásra fennáll, mely két exponenciális kombinációjaként írható fel. Ezen alfejezet a [2] könyv, valamint a [11] és [12] cikkek eredményeire épül.

## Exponenciális eloszlás

Az exponenciális az egyik legegyszerűbb eloszlás, mégis széles körben használják, éppen az egyszerűsége, valamint jó tulajdonságai miatt. Legyen tehát ebben az esetben  $H(y)$  exponenciális kárnagyság-eloszlásfüggvény, azaz  $\bar{H}(y) = e^{-\mu y}$ . A 3.2.1 tétel szerint  $\delta = 0$  esetén a  $\bar{G}(u)$  farokeloszlás éppen a csődvalószínűséget adja, valamint  $F(y) = H(y)$  és  $\phi = 1/(1+\theta)$  teljesül. Ekkor (1.9) alapján a csődvalószínűsége  $\psi(u) = Ce^{-Ru}$  adódik, ahol  $R = \mu\theta/(1+\theta)$  és  $C = 1/(1+\theta)$ . Továbbá a (3.30) képletből kiindulva teljes indukcióval könnyen belátható, hogy

$$\psi_k(u) = e^{-Ru} \sum_{j=0}^k \bar{C}_{j,k} \frac{(Ru)^j}{j!} \quad (4.1)$$

teljesül megfelelő  $\bar{C}_{j,k}$  konstansokkal. A következőkben egy rekurzív formulát származtatunk ezen  $\bar{C}_{j,k}$  együtthatók meghatározására. A (3.30) kifejezést (4.1) behelyettesítése után tagonként kiértékelve a következőt kapjuk eredményül:

$$\begin{aligned} \int_0^u \psi(u-x)\psi_{k-1}(x)dx &= \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru} \sum_{j=0}^{k-1} \bar{C}_{j,k-1} \int_0^u \frac{(Rx)^j}{j!} dx = \\ &= \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru} \sum_{j=0}^k \bar{C}_{j,k-1} \left[ \frac{R^j x^{j+1}}{(j+1)!} \right]_0^u = \\ &= \frac{1}{1+\theta} R^{-1} e^{-Ru} \sum_{j=1}^k \bar{C}_{j-1,k-1} \frac{(Ru)^j}{j!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_u^\infty \psi_{k-1}(x)dx &= R^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} \bar{C}_{j,k-1} \int_u^\infty \frac{R^{j+1} x^j e^{-Rx}}{j!} dx = \\ &= R^{-1} e^{-Ru} \sum_{j=0}^{k-1} \left( \sum_{i=j}^{k-1} \bar{C}_{i,k-1} \right) \frac{(Ru)^j}{j!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\psi(u) \int_0^\infty \psi_{k-1}(x)dx &= -R^{-1} e^{-Ru} \sum_{j=0}^{k-1} \left( \sum_{i=j}^{k-1} \bar{C}_{i,k-1} \right) \frac{(Ru)^j}{j!} \Big|_{u=0} \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru} = \\ &= -\frac{1}{1+\theta} e^{-Ru} R^{-1} \sum_{i=0}^{k-1} \bar{C}_{i,k-1}. \end{aligned}$$

Ezek után az  $(Ru)^j/j!$  tagok együtthatóira felhasználva, hogy

$$\frac{k}{\lambda^{\frac{1}{\mu}}\theta}R^{-1} = \frac{k(1+\theta)}{\lambda\theta^2} = \frac{k(1+\theta)^2}{c\mu\theta^2},$$

$$\frac{k}{\lambda^{\frac{1}{\mu}}\theta}R^{-1}\left(1 - \frac{1}{1+\theta}\right) = \frac{k(1+\theta)}{c\mu\theta}$$

teljesül, az  $e^{-Ru}$  kifejezéssel való egyszerűsítés után az alábbi egyenlőségek írhatók fel:

$$\bar{C}_{0,k} = \frac{k(1+\theta)}{c\mu\theta} \sum_{i=0}^{k-1} \bar{C}_{i,k-1},$$

$$\bar{C}_{j,k} = \frac{k(1+\theta)^2}{c\mu\theta^2} \left[ \frac{1}{1+\theta} \bar{C}_{j-1,k-1} + \sum_{i=j}^{k-1} \bar{C}_{i,k-1} \right], \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

ahol  $\sum_{i=k}^{k-1} = 0$  és  $\bar{C}_{0,0} = C = 1/(1+\theta)$ . Az első két momentum könnyen meghatározható az együtthatókra felírt rekurzív képletek segítségével:

$$\bar{C}_{0,1} = \frac{1+\theta}{c\mu\theta} \bar{C}_{0,0} = \frac{1}{c\mu\theta},$$

$$\bar{C}_{1,1} = \frac{(1+\theta)^2}{c\mu\theta^2} \frac{1}{1+\theta} \bar{C}_{0,0} = \frac{1}{c\mu\theta^2}.$$

Ekkor  $\psi_1(u)$  kiszámítása után, miszerint

$$E\{TI(T < \infty)\} = e^{-Ru} \left[ \frac{1}{c\mu\theta} + \frac{1}{c\mu\theta^2}(Ru) \right],$$

az alábbi formulát nyerjük az első momentumra:

$$E(T|T < \infty) = \frac{e^{-Ru}}{\psi(u)} \left[ \frac{1}{c\mu\theta} + \frac{1}{c\mu\theta^2}(Ru) \right] = (1+\theta) \frac{Ru + \theta}{c\mu\theta^2}.$$

Teljesen analóg módon kapjuk a második momentum meghatározásához szükséges képletet is. Először kiszámítjuk a megfelelő együtthatókat a rekurziós összefüggés segítségével:

$$\bar{C}_{0,2} = \frac{2(1+\theta)}{c\mu\theta} [\bar{C}_{0,1} + \bar{C}_{1,1}] = \frac{2(1+\theta)}{c\mu\theta} \left[ \frac{1}{c\mu\theta} + \frac{1}{c\mu\theta^2} \right] = \frac{2(1+\theta)^2}{c^2\mu^2\theta^3},$$

$$\bar{C}_{1,2} = \frac{2(1+\theta)^2}{c\mu\theta^2} \left[ \frac{1}{1+\theta} \bar{C}_{0,1} + \bar{C}_{1,1} \right] =$$

$$= \frac{2(1+\theta)^2}{c\mu\theta^2} \left[ \frac{1}{1+\theta} \frac{1}{c\mu\theta} + \frac{1}{c\mu\theta^2} \right] = \frac{2(1+\theta)(1+2\theta)}{c^2\mu^2\theta^4},$$

$$\bar{C}_{2,2} = \frac{2(1+\theta)^2}{c\mu\theta^2} \frac{1}{1+\theta} \bar{C}_{1,1} = \frac{2(1+\theta)^2}{c\mu\theta^2} \frac{1}{1+\theta} \frac{1}{c\mu\theta^2} = \frac{2(1+\theta)}{c^2\mu^2\theta^4},$$

majd meghatározzuk a  $\psi_2(u)$  függvényt:

$$\begin{aligned} E\{T^2 I(T < \infty)\} &= e^{-Ru} \left[ \frac{2(1+\theta)^2}{c^2 \mu^2 \theta^3} + \frac{2(1+\theta)(1+2\theta)}{c^2 \mu^2 \theta^4} (Ru) + \frac{2(1+\theta)}{c^2 \mu^2 \theta^4} \frac{(Ru)^2}{2!} \right] = \\ &= e^{-Ru} \frac{2}{c^2 \mu^2 \theta^3} \left[ (1+\theta)^2 + \frac{(1+\theta)(1+2\theta)}{\theta} (Ru) + \frac{1+\theta}{\theta} \frac{(Ru)^2}{2!} \right], \end{aligned}$$

melyből már könnyen adódik a második momentum képlete a  $\psi(u)$  kifejezéssel való leosztás után:

$$\begin{aligned} E(T^2 | T < \infty) &= \frac{e^{-Ru}}{\psi(u)} \frac{2}{c^2 \mu^2 \theta^3} \left[ (1+\theta)^2 + \frac{(1+\theta)(1+2\theta)}{\theta} (Ru) + \frac{1+\theta}{\theta} \frac{(Ru)^2}{2!} \right] = \\ &= \frac{2}{c^2 \mu^2 \theta^3} \left[ (1+\theta)^3 + \frac{(1+\theta)^2(1+2\theta)}{\theta} (Ru) + \frac{(1+\theta)^2}{\theta} \frac{(Ru)^2}{2!} \right]. \end{aligned}$$

Összegezve elmondható, hogy exponenciális kárnagyságeloszlás esetén sikerült a csőd idejének első két momentumára egyszerű, könnyen számítható explicit képletet szolgáltatnunk. Ez a számítási módszer alkalmazható a magasabb momentumok meghatározására is, azonban a rekurziós összefüggés miatt a módszer kivitelezése egyre nehezkesebbé válik. Még ebben a fejezetben kiküszöböljük ezt a problémát, és szert teszünk egy zárt képletre is. Előtte azonban vizsgáljuk meg azt az esetet is, amikor a kárnagyság-eloszlásfüggvény exponenciálisok kombinációja.

## Exponenciális eloszlások kombinációja

Két exponenciális eloszlás kombinációja alkalmas az összetett farokeloszlások közelítésére, ahogy azt a Tijms-approximációknál is láthattuk. Amennyiben a kárnagyságeloszlás exponenciálisok kombinációja, az összetett geometriai farokeloszlás is vele megegyező alakú. Ebben az alfejezetben megnézzük, milyen képlet adható a csőd idejének várható értékére, amennyiben az összetett geometriai farokeloszlás felírható exponenciálisok kombinációjaként.

Először megnézzük, hogy milyen képlet adható az összetett geometriai farokeloszlásra, ha a kárnagyságeloszlás két exponenciális eloszlás kombinációja, azaz

$$F(y) = 1 - qe^{-\mu_1 y} - (1-q)e^{-\mu_2 y}, \quad y > 0.$$

Feltehető, hogy  $\mu_1 < \mu_2$ . Induljunk ki a (3.6) összefüggésből, miszerint

$$\int_0^\infty e^{-sx} \bar{G}(x) dx = \frac{\phi}{s} \cdot \frac{1 - \tilde{f}(s)}{1 - \phi \tilde{f}(s)}$$

teljesül. Ekkor  $Y$  Laplace-transzformáltjára azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s) &= \int_0^\infty e^{-sy} dF(y) = \int_0^\infty q\mu_1 e^{-(\mu_1+s)y} + (1-q)\mu_2 e^{-(\mu_2+s)y} dy = \\ &= q \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} + (1-q) \frac{\mu_2}{\mu_2 + s}, \end{aligned}$$

melyet behelyettesítve a fenti kifejezésbe, majd elvégezve a szükséges átalakításokat

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-sx}\overline{G}(x)dx &= \frac{\phi}{s} \cdot \frac{q\frac{s}{\mu_1+s} + (1-q)\frac{s}{\mu_2+s}}{1 - \phi\left\{q\frac{\mu_1}{\mu_1+s} + (1-q)\frac{\mu_2}{\mu_2+s}\right\}} = \\ &= \phi \cdot \frac{q(\mu_2+s) + (1-q)(\mu_1+s)}{(\mu_1+s)(\mu_2+s) - \phi\{q\mu_1(\mu_2+s) + (1-q)\mu_2(\mu_1+s)\}} = \\ &= \phi \cdot \frac{s + \mu_1(1-q) + \mu_2q}{s^2 + \{(1-q\phi)\mu_1 + [1 - (1-q)\phi]\mu_2\}s + (1-\phi)\mu_1\mu_2}\end{aligned}$$

adódik. A nevezőben van egy másodfokú egyenlet, melynek két különböző valós gyöke van, mivel a diszkriminánsa pozitív:

$$\begin{aligned}&\{\mu_1(1-q\phi) + \mu_2[1 - (1-q)\phi]\}^2 - 4\mu_1\mu_2(1-\phi) = \\ &= \{\mu_1(1-q\phi) + \mu_2q\phi - \mu_2(1-\phi)\}^2 + 4\mu_2q\phi(1-\phi)(\mu_2 - \mu_1) > 0.\end{aligned}$$

Legyen a két valós gyök  $R_1$  és  $R_2$ , azaz

$$s^2 + \{\mu_1(1-q\phi) + \mu_2[1 - (1-q)\phi]\}s + (1-\phi)\mu_1\mu_2 = (s + R_1)(s + R_2)$$

teljesül, valamint alkalmazzuk a  $\Psi = \mu_1(1-q) + \mu_2q$  jelölést. Ekkor  $\overline{G}(x)$  Laplace-transzformáltja a következő alakra egyszerűsödik:

$$\int_0^\infty e^{-sx}\overline{G}(x)dx = \phi \cdot \frac{s + \Psi}{(s + R_1)(s + R_2)},$$

melyet tovább alakítva a parciális törtekre bontás módszerével

$$\int_0^\infty e^{-sx}\overline{G}(x)dx = \frac{\phi}{R_2 - R_1} \left\{ \frac{\Psi - R_1}{s + R_1} + \frac{R_2 - \Psi}{s + R_2} \right\}$$

adódik. A Laplace-transzformált egyértelműsége miatt a

$$\overline{G}(u) = \frac{\phi}{R_2 - R_1} [(\Psi - R_1)e^{-R_1u} + (R_2 - \Psi)e^{-R_2u}], \quad u \geq 0$$

kifejezést nyerjük a farokeloszlásra. A továbbiakban alkalmazzuk az alábbi jelölést:

$$\overline{G}(u) = C_1e^{-R_1u} + C_2e^{-R_2u}, \quad u \geq 0, \quad (4.2)$$

ahol

$$C_1 = \frac{\phi}{R_2 - R_1}(\Psi - R_1), \quad C_2 = \frac{\phi}{R_2 - R_1}(R_2 - \Psi).$$

A (4.2) formula a  $\overline{G}(u)$  farokeloszlásra nem csak akkor állhat fenn, amikor a kárnagyságeloszlás exponenciálisok kombinációja, hanem általánosabb esetekben is. Továbbá ha a  $\overline{G}(u)$  farokeloszlásra komplikált, vagy nem is lehetséges explicit képletet adni, akkor használhatjuk a Tijms-approximációt, mely szintén a (4.2)

kifejezésnek megfelelő alakú. A következőkben csak arra lesz szükségünk, hogy  $\bar{G}(u)$  a (4.2) formulának megfelelő legyen, így azt sem szükséges feltenni, hogy a kárnagyságeloszlás exponenciálisok kombinációja.

Megjegyezzük, hogy ekkor az alábbi általános formula igazolható a  $\psi_k(u)$  függvényre:

$$\psi_k(u) = \sum_{j=0}^k [A_{j,k}e^{-R_1u} + B_{j,k}e^{-R_2u}] \frac{u^j}{j!}.$$

Az  $A_{j,k}$  és  $B_{j,k}$  együtthatók rekurzívan határozhatók meg, hasonlóan az előzőekben tárgyalt exponenciális esethez. Most csak  $\psi_1(u)$  előállítására szorítkozunk, melyet a formula és az együtthatók kiszámítása nélkül is meg tudunk határozni.

Mivel a 3.2.1 tétel szerint  $\delta = 0$  esetén a  $\bar{G}(u)$  farokeloszlás éppen a csődvalószínűséget adja,  $\psi(u) = C_1e^{-R_1u} + C_2e^{-R_2u}$  teljesül, és  $\phi = 1/(1+\theta)$ . Innentől a levezetés egyes részei meg is egyeznek a csőd idejének Tijms-approximációjánál látottakkal. A (3.27) képletet tagonként kifejtve az alábbi adódik:

$$\begin{aligned} \int_0^u \psi(u-x)\psi(x)dx &= \int_0^u C_1^2e^{-R_1u} + C_2^2e^{-R_2u} + C_1C_2e^{-(R_2-R_1)x}e^{-R_1u} + \\ &+ C_1C_2e^{-(R_1-R_2)x}e^{-R_2u}dx = C_1^2ue^{-R_1u} + C_2^2ue^{-R_2u} + \\ &+ \left[ C_1C_2 \frac{e^{-(R_2-R_1)x}}{R_1-R_2} e^{-R_1u} \right]_0^u + \left[ C_1C_2 \frac{e^{-(R_1-R_2)x}}{R_2-R_1} e^{-R_2u} \right]_0^u = \\ &= C_1^2ue^{-R_1u} + C_2^2ue^{-R_2u} + \frac{2C_1C_2}{R_2-R_1} [e^{-R_1u} - e^{-R_2u}], \end{aligned}$$

$$\int_u^\infty \psi(x)dx = \left[ \frac{C_1}{R_1}e^{-R_1x} + \frac{C_2}{R_2}e^{-R_2x} \right]_u^\infty = \frac{C_1}{R_1}e^{-R_1u} + \frac{C_2}{R_2}e^{-R_2u},$$

$$-\psi(u) \int_0^\infty \psi(x)dx = -\left( \frac{C_1}{R_1} + \frac{C_2}{R_2} \right) (C_1e^{-R_1u} + C_2e^{-R_2u}).$$

Összegezve a fentieket, és beszorozva az  $1/\{\lambda\theta E(Y)\} = (1+\theta)/(c\theta)$  kifejezéssel,  $\psi_1(u)$  függvényre az alábbi képlet adódik:

$$\begin{aligned} E\{TI(T < \infty)\} &= \frac{1+\theta}{c\theta} \left\{ C_1^2ue^{-R_1u} + C_2^2ue^{-R_2u} + \right. \\ &+ \left[ \frac{C_1}{R_1} + \frac{2C_1C_2}{R_2-R_1} - \left( \frac{C_1}{R_1} + \frac{C_2}{R_2} \right) C_1 \right] e^{-R_1u} + \\ &+ \left. \left[ \frac{C_2}{R_2} - \frac{2C_1C_2}{R_2-R_1} - \left( \frac{C_1}{R_1} + \frac{C_2}{R_2} \right) C_2 \right] e^{-R_2u} \right\}, \end{aligned}$$

mely a tönkremenés időpontjának Tijms-approximációjánál kapott eredményeknek megfelelő. A csőd idejének várható értéke feltéve, hogy a csőd véges időn belül



biztosan bekövetkezik, a  $\psi(u)$  csődvalószínűséggel való leosztás után azonnal adódik a fenti képletből. Ezt a várható értéket kapjuk tehát minden olyan esetben, amikor az összetett geometriai farokeloszlás előáll exponenciálisok kombinációjaként.

## 4.2. Explicit kiszámítás

A fejezet első részében olyan képletet sikerült előállítanunk, mellyel rekurzív módon határozható meg a tönkremenés idejének momentumai exponenciális kárnagyságeloszlás esetén. Most más oldalról közelítjük meg a problémát. Először meghatározzuk a csőd idejének sűrűségfüggvényét a megfelelő Laplace-transzformált inverziójával, majd ennek felhasználásával kifejezzük a momentumokat. Hosszas átalakításokat végzünk olyan mennyiségek segítségével, mint a módosított Bessel-függvény vagy a Gauss-féle hipergeometrikus sor, míg végül sikerül a momentumok előállítására egy explicit, zárt formulát nyernünk. Ezen alfejezet Drekcic és Willmot (2003) cikkének eredményeit dolgozza fel.

A csőd idejének Laplace-transzformáltja, mint láthattuk kielégíti a nem teljes felújítási egyenletet, valamint előáll egy összetett geometriai farokeloszlás alakjában (lsd. 3.2.1 tétel). Mindezt képletekkel megfogalmazva:

$$\tilde{f}(\delta) = E\{e^{-\delta T} I(T < \infty)\} = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \phi) \phi^n \bar{F}^{*n}(x), \quad (4.3)$$

ahol

$$\phi = \frac{\tilde{h}_1(\rho)}{1 + \theta} = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\rho y} \bar{H}(y) dy}{(1 + \theta) E(Y)}, \quad (4.4)$$

melyre  $\rho = \rho(\delta)$  a Lundberg-illeszkedési egyenlet egyetlen nemnegatív gyöke, vagyis

$$\lambda \int_0^{\infty} e^{-\rho y} dH(y) = \lambda + \delta - c\rho \quad (4.5)$$

teljesül, és  $\bar{F}^{*n}(x)$  azon  $F(x)$  eloszlásfüggvényhez tartozó eloszlás  $n$ -edik konvolúció hatványának farokeloszlása, melyre

$$\bar{F}(x) = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\rho y} \bar{H}(x + y) dy}{\int_0^{\infty} e^{-\rho y} \bar{H}(y) dy}. \quad (4.6)$$

Abban a speciális esetben, amikor a kárnagyságeloszlás exponenciális, vagyis  $\bar{H}(x) = e^{-\mu x}$ ,  $x \geq 0$ , a (4.6) összefüggésre  $\bar{F}(x) = \bar{H}(x)$  adódik, és (4.3) a következőre egyszerűsödik az (1.9) képletnek megfelelően:

$$\tilde{f}(\delta) = \phi e^{-\mu(1-\phi)x}, \quad (4.7)$$

ahol (4.4) szerint

$$\phi = \frac{\int_0^{\infty} e^{-(\mu+\rho)y} dy}{(1 + \theta) E(Y)} = \frac{\mu}{(\mu + \rho)(1 + \theta)}.$$

Továbbá (4.5) az alábbiaknak megfelelően módosul:

$$\begin{aligned}\lambda\mu \int_0^\infty e^{-(\mu+\rho)y} dy &= \lambda + \delta - c\rho, \\ \frac{\lambda\mu}{\mu + \rho} &= \lambda + \delta - c\rho, \\ c\rho^2 - (\lambda + \delta - c\mu)\rho - \delta\mu &= 0,\end{aligned}$$

és ezen másodfokú egyenlet megoldására

$$\rho = \frac{\lambda + \delta - c\mu + \sqrt{(\lambda + \delta - c\mu)^2 + 4\delta c\mu}}{2c}$$

adódik, vagy ekvivalens alakban

$$\rho = \frac{\lambda + \delta - c\mu + \sqrt{(\lambda + \delta + c\mu)^2 - 4\lambda c\mu}}{2c}. \quad (4.8)$$

A következő részben invertáljuk a (4.3) szerinti Laplace-transzformáltat, hogy megkapjuk az  $f(t)$  sűrűségfüggvényt, melyre  $\tilde{f}(\delta) = \int_0^\infty e^{-\delta t} f(t) dt$  teljesül. Ezután már a tönkremenés idejének – feltéve, hogy a csőd biztosan bekövetkezik –  $g(t)$  sűrűségfüggvénye is könnyen meghatározható. Invertálás után az úgynevezett módosított Bessel-függvény segítségével a sűrűségfüggvényt olyan alakra tudjuk hozni, melynek felhasználásával végül sikerül explicit képleteket előállítani a momentumokra. Ezek pedig már nem igénylik a korábbi elemek rekurzívan történő kiszámítását, mint ahogy azt az előző alfejezetben tapasztaltuk.

## A csőd idejének sűrűségfüggvénye

Mielőtt invertálnánk a (4.3) összefüggés szerinti Laplace-transzformáltat, jegezzük meg, hogy  $\overline{H}(y) = e^{-\mu y}$  esetén (4.4) és (4.5) felhasználásával a következő összefüggésre tehetünk szert:

$$\phi = \frac{\int_0^\infty e^{-\rho y} dH(y)}{(1 + \theta)} = \frac{\lambda + \delta - c\rho}{\lambda(1 + \theta)}.$$

Mivel ebben az esetben  $c\mu = \lambda(1 + \theta)$  teljesül, a (4.8) összefüggést alkalmazva

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{\lambda(1 + \theta)} \left\{ \lambda + \delta - \frac{\lambda + \delta - c\mu + \sqrt{(\lambda + \delta + c\mu)^2 - 4\lambda c\mu}}{2} \right\} = \\ &= \frac{\lambda + \delta + c\mu - \sqrt{(\lambda + \delta + c\mu)^2 - 4\lambda c\mu}}{2c\mu}\end{aligned} \quad (4.9)$$

adódik, így  $\phi$  explicit reprezentációját kapjuk  $\delta$  függvényében. Mielőtt a most nyert kifejezést behelyettesítenénk a (4.7) összefüggésbe, szükségünk lesz az alábbi átalakításra:

$$\tilde{f}(\delta) = \phi e^{-\mu(1-\phi)x} = e^{-\mu x} \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{n+1} \frac{(\mu x)^n}{n!}. \quad (4.10)$$

Most már behelyettesíthetjük a (4.9) kifejezést a (4.10) összefüggésbe. Ekkor

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\delta) &= e^{-\mu x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu x)^n}{n!} \left\{ \frac{\lambda + \delta + c\mu - \sqrt{(\lambda + \delta + c\mu)^2 - 4\lambda c\mu}}{2c\mu} \right\}^{n+1} = \\ &= \frac{e^{-\mu x}}{2c\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2c}\right)^n}{n!} \{s - \sqrt{s^2 - a^2}\}^{n+1}\end{aligned}\quad (4.11)$$

adódik, ahol  $s = \lambda + \delta + c\mu$  és  $a = 2\sqrt{\lambda c\mu}$ .

Jelölje  $f(t) = L^{-1}[\tilde{f}(\delta)]$  az  $\tilde{f}(\delta)$  inverz Laplace-transzformáltját, és invertáljuk (4.11) mindkét oldalát:

$$f(t) = \frac{e^{-\mu x}}{2c\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2c}\right)^n}{n!} L^{-1}[\{s - \sqrt{s^2 - a^2}\}^{n+1}]. \quad (4.12)$$

Az inverz Laplace-transzformált kiszámításához Schiff (1999) formuláját használjuk fel, így arra a következtetésre jutunk, hogy

$$L^{-1}[\{s - \sqrt{s^2 - a^2}\}^{n+1}] = e^{-(\lambda+c\mu)t} \frac{(n+1)(2\sqrt{\lambda c\mu})^{n+1} I_{n+1}(2t\sqrt{\lambda c\mu})}{t} \quad (4.13)$$

teljesül, ahol

$$I_{\nu}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!(k+\nu)!}$$

a  $\nu$ -ed rendű módosított Bessel-függvény. Behelyettesítve a (4.13) kifejezést a (4.12) összefüggésbe, valamint felhasználva ismét, hogy  $c = \lambda(1+\theta)/\mu$ , arra jutunk, hogy

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{e^{-\mu x}}{2\lambda(1+\theta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\mu x}{2\lambda(1+\theta)}\right)^n}{n!} e^{-\lambda(2+\theta)t} \frac{(n+1)(2\lambda\sqrt{1+\theta})^{n+1} I_{n+1}(2\lambda t\sqrt{1+\theta})}{t} = \\ &= \frac{e^{-\mu x} e^{-\lambda(2+\theta)t}}{t\sqrt{1+\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\left(\frac{\mu x}{\sqrt{1+\theta}}\right)^n I_{n+1}(2\lambda t\sqrt{1+\theta})}{n!}, \quad t > 0.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Mivel a csőd idejének sűrűségfüggvényére  $g(t) = f(t)/\psi(x)$ , a csődvalószínűsége pedig  $\psi(x) = e^{-Rx}/(1+\theta)$  teljesül, ahol  $R = \mu\theta/(1+\theta)$ , az osztás elvégzése után a következőt kapjuk eredményül:

$$g(t) = \frac{\sqrt{1+\theta} e^{-\frac{\mu x}{1+\theta}} e^{-\lambda(2+\theta)t}}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\left(\frac{\mu x}{\sqrt{1+\theta}}\right)^n I_{n+1}(2\lambda t\sqrt{1+\theta})}{n!}, \quad t > 0.$$

Sikerült megfelelő alakra hoznunk a csőd idejének sűrűségfüggvényét, melyet a továbbiakban a momentumok meghatározásánál alkalmazunk. Először az  $f(t)$  sűrűségfüggvény felhasználásával kiszámítjuk a  $\psi_k(x)$  függvényt, melyből a Gauss-féle hipergeometrikus sort segítségül hívva, és elvégezve a szükséges átalakításokat explicit kifejezést alkotunk. A csődvalószínűséggel történő leosztás után a tönkremenés idejének momentumaira vonatkozó képlet már azonnal adódik.

## A csőd idejének momentumai

Legyen ismét  $\psi_k(x) = E\{T^k I(T < \infty)\}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  esetén. A  $\psi_k(x)$  függvény meghatározásához felhasználjuk a (4.14) kifejezést:

$$\begin{aligned}\psi_k(x) &= \int_0^\infty t^k f(t) dt = \\ &= \frac{e^{-\mu x}}{\sqrt{1+\theta}} \sum_{n=0}^\infty \frac{(n+1) \left(\frac{\mu x}{\sqrt{1+\theta}}\right)^n}{n!} \int_0^\infty t^{k-1} e^{-\lambda(2+\theta)t} I_{n+1}(2\lambda t \sqrt{1+\theta}) dt.\end{aligned}$$

A következőkben alkalmazzuk Gradshteyn és Ryzhik (1994) eredményét, miszerint

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} J_\nu(\beta t) t^{\sigma-1} dt = \frac{\left(\frac{\beta}{2}\right)^\nu \Gamma(\nu + \sigma)}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)^{\nu+\sigma}} \Gamma(\nu + 1)} \mathcal{F}\left(\frac{\nu + \sigma}{2}, \frac{1 - \sigma + \nu}{2}; \nu + 1; \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\right) \quad (4.15)$$

teljesül, amennyiben  $\text{Re}(\nu + \sigma) > 0$ ,  $\text{Re}(\alpha + i\beta) > 0$ , és  $\text{Re}(\alpha - i\beta) > 0$ . A (4.15) összefüggésben  $\mathcal{F}(a, b; c; z)$  a Gauss-féle hipergeometrikus sort jelöli, melyet a következőképpen definiálunk:

$$\mathcal{F}(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}$$

és  $J_\nu(iz) = i^\nu I_\nu(z)$  teljesül, ahol  $i^2 = -1$ . Legyen  $\alpha = \lambda(2 + \theta)$ ,  $\nu = n + 1$ ,  $\beta = 2\lambda i \sqrt{1 + \theta}$ , és  $\sigma = k$ . Ekkor könnyen látható, hogy teljesülnek a fenti feltételek, így alkalmazhatjuk a (4.15) összefüggést. Tehát felhasználva, hogy  $\lambda^2(2 + \theta)^2 - 4\lambda^2(1 + \theta) = \lambda^2\theta^2$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\alpha t} J_\nu(\beta t) t^{\sigma-1} dt &= \frac{i^{n+1} (\lambda \sqrt{1+\theta})^{n+1} (n+k)!}{(n+1)! \sqrt{\{\lambda^2(2+\theta)^2 - 4\lambda^2(1+\theta)\}^{n+k+1}}} \cdot \\ &\cdot \mathcal{F}\left(\frac{n+k+1}{2}, \frac{n-k+2}{2}; n+2; \frac{-4\lambda^2(1+\theta)}{\lambda^2(2+\theta)^2 - 4\lambda^2(1+\theta)}\right) = \\ &= \frac{i^{n+1} \sqrt{1+\theta}}{\lambda^k \theta^{k+1}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+\theta}}{\theta}\right)^n \cdot \frac{(n+k)!}{(n+1)!} \cdot \\ &\cdot \mathcal{F}\left(\frac{n+k+1}{2}, \frac{n-k+2}{2}; n+2; \frac{-4(1+\theta)}{\theta^2}\right)\end{aligned}$$

adódik. Mivel  $J_\nu(\beta t) = J_{n+1}(2\lambda i t \sqrt{1+\theta}) = i^{n+1} I_{n+1}(2\lambda t \sqrt{1+\theta})$ , azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{k-1} e^{-\lambda(2+\theta)t} I_{n+1}(2\lambda t \sqrt{1+\theta}) dt &= \frac{\sqrt{1+\theta}}{\lambda^k \theta^{k+1}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+\theta}}{\theta}\right)^n \cdot \frac{(n+k)!}{(n+1)!} \cdot \\ &\cdot \mathcal{F}\left(\frac{n+k+1}{2}, \frac{n-k+2}{2}; n+2; \frac{-4(1+\theta)}{\theta^2}\right),\end{aligned}$$

melyet felhasználva a  $\psi_k(x)$  függvényre a következő adódik:

$$\begin{aligned} \psi_k(x) &= \frac{e^{-\mu x}}{\sqrt{1+\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) \left(\frac{\mu x}{\sqrt{1+\theta}}\right)^n \sqrt{1+\theta}}{n! \lambda^k \theta^{k+1}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+\theta}}{\theta}\right)^n \\ &\cdot \frac{(n+k)!}{(n+1)!} \cdot \mathcal{F}\left(\frac{n+k+1}{2}, \frac{n-k+2}{2}; n+2; \frac{-4(1+\theta)}{\theta^2}\right) = \\ &= \frac{e^{-\mu x}}{\lambda^k \theta^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)! \left(\frac{\mu x}{\theta}\right)^n}{(n!)^2} \mathcal{F}\left(\frac{n+k+1}{2}, \frac{n-k+2}{2}; n+2; \frac{-4(1+\theta)}{\theta^2}\right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

A továbbiakban a Gauss-féle hipergeometrikus sorra alkalmazunk egy egyszerűsítést a (4.16) képletben. A következőkben használatos hipergeometrikus sorra vonatkozó összefüggéseket Abramowitz és Stegun (1972) eredményei alapján írjuk föl. Legyen  $a = (n+k+1)/2$ ,  $b = (n-k+2)/2$ , valamint  $z = -4(1+\theta)/\theta^2$ , és megjegyezzük, hogy ekkor  $a-b+1/2 = k$ , és  $a+b+1/2 = n+2$  teljesül. Ezután alkalmazva az egyik ismert összefüggést, majd további átalakításokat végezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}\left(\frac{n+k+1}{2}, \frac{n-k+2}{2}; n+2; \frac{-4(1+\theta)}{\theta^2}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4(1+\theta)}{\theta^2}}\right)^{-2\left(\frac{n+k+1}{2}\right)} \mathcal{F}\left(n+k+1, k; n+2; \frac{\sqrt{1 + \frac{4(1+\theta)}{\theta^2}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{4(1+\theta)}{\theta^2}} + 1}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta+2}{\theta}\right)^{-(n+k+1)} \mathcal{F}\left(n+k+1, k; n+2; \frac{\frac{\theta+2}{\theta} - 1}{\frac{\theta+2}{\theta} + 1}\right) = \\ &= \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{k+1} \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^n \mathcal{F}\left(n+k+1, k; n+2; \frac{1}{1+\theta}\right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

adódik. Helyettesítsük be a (4.17) kifejezést a (4.16) összefüggésbe, ekkor azt kapjuk, hogy

$$\psi_k(x) = \frac{\omega^{k+1} e^{-\mu x}}{\lambda^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)! (\mu x \omega)^n}{(n!)^2} \mathcal{F}(n+k+1, k; n+2; \omega),$$

ahol az  $\omega = (1+\theta)^{-1}$  jelölést alkalmaztuk. Ezután ismét felhasználunk egy a Gauss-féle hipergeometrikus sorra vonatkozó összefüggést, miszerint

$$\mathcal{F}(a'+m, b'; c; \omega) = \frac{\Gamma(a')}{\Gamma(a'+m)} \omega^{-(a'-1)} \frac{d^m}{d\omega^m} \left[ \omega^{a'+m-1} \mathcal{F}(a', b'; c; \omega) \right]. \quad (4.18)$$

Itt és a későbbiekben is a függvény 0-dik deriváltja jelentse magát a függvényt. Az  $a' = n+2$ ,  $b' = k$ ,  $c = n+2$  és  $m = k-1$  választás esetén (4.18) felhasználásával a

következő adódik:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(n+k+1, k; n+2; \omega) &= \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+k+1)} \omega^{-(n+1)} \frac{d^{k-1}}{d\omega^{k-1}} \left[ \omega^{n+k} \mathcal{F}(n+2, k; n+2; \omega) \right] = \\ &= \frac{(n+1)!}{(n+k)!} \omega^{-(n+1)} \frac{d^{k-1}}{d\omega^{k-1}} \left[ \omega^{n+k} \mathcal{F}(n+2, k; n+2; \omega) \right].\end{aligned}\quad (4.19)$$

További a Gauss-féle hipergeometrikus sorra vonatkozó ismert összefüggések alapján felírható, hogy

$$\mathcal{F}(n+2, k; n+2; \omega) = \mathcal{F}(k, n+2; n+2; \omega) = (1-\omega)^{-k}$$

teljesül, melyet behelyettesítve a (4.19) képletbe az alábbi kifejezést nyerjük:

$$\mathcal{F}(n+k+1, k; n+2; \omega) = \frac{(n+1)!}{(n+k)!} \omega^{-(n+1)} \frac{d^{k-1}}{d\omega^{k-1}} \omega^{n+k} (1-\omega)^{-k}.$$

Ezt felhasználva (4.16) a következő alakra módosul:

$$\begin{aligned}\psi_k(x) &= \frac{e^{-\mu x} \omega^k}{\lambda^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(\mu x)^n}{n!} \frac{d^{k-1}}{d\omega^{k-1}} \omega^{n+k} (1-\omega)^{-k} \Big|_{\omega=1/(1+\theta)} = \\ &= \frac{e^{-\mu x}}{\lambda^k (1+\theta)^k} \cdot \frac{d^{k-1}}{d\omega^{k-1}} \left[ \omega^k (1-\omega)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(\mu x \omega)^n}{n!} \right] \Big|_{\omega=1/(1+\theta)}.\end{aligned}$$

Továbbá, jegyezzük meg, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(\mu x \omega)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu x \omega)^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu x \omega)^n}{n!} = e^{\mu x \omega} (1 + \mu x \omega)$$

teljesül, ezért az

$$\psi_k(x) = \frac{e^{-\mu x}}{\lambda^k (1+\theta)^k} \cdot \frac{d^{k-1}}{d\omega^{k-1}} \left[ \omega^k (1-\omega)^{-k} e^{\mu x \omega} (1 + \mu x \omega) \right] \Big|_{\omega=1/(1+\theta)} \quad (4.20)$$

képletbe jutunk.

A (4.20) kifejezésből nyilvánvaló, hogy mivel  $\psi_k$  felépítésében itt már csak véges sok elemi függvény vesz részt, ahhoz, hogy eljussunk egy zárt képletbe már csak a deriváltakat kell meghatározni. Ehhez definiáljuk a  $p(\omega) = \omega^k (1-\omega)^{-k}$  és  $q(\omega) = e^{\mu x \omega} (1 + \mu x \omega)$  függvényeket. Ezután alkalmazzuk a Leibniz-szabályt, miszerint

$$\frac{d^k}{d\omega^k} [p(\omega)q(\omega)] = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{d^j}{d\omega^j} p(\omega) \frac{d^{k-j}}{d\omega^{k-j}} q(\omega),$$

mellyel azt kapjuk, hogy

$$\psi_k(x) = \frac{e^{-\mu x}}{\lambda^k (1+\theta)^k} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} p^{(j)} \left( \frac{1}{1+\theta} \right) q^{(k-1-j)} \left( \frac{1}{1+\theta} \right), \quad (4.21)$$

ahol  $p^{(n)}(\omega)$  és  $q^{(n)}(\omega)$  jelöli  $p$ -nek és  $q$ -nak az  $n$ -edik deriváltját az  $\omega$  helyen. Indukcióval nem nehéz belátni, hogy

$$q^{(n)}(\omega) = (\mu x)^n e^{\mu x \omega} (n + 1 + \mu x \omega)$$

teljesül. Ebből az

$$\begin{aligned} e^{-\mu x} q^{(k-1-j)}\left(\frac{1}{1+\theta}\right) &= e^{-\mu x(1-\frac{1}{1+\theta})} (\mu x)^{k-1-j} \left(k - j + \frac{\mu x}{1+\theta}\right) = \\ &= \psi(x)(1+\theta)(\mu x)^{k-1-j} \left(k - j + \frac{\lambda x}{c}\right) \end{aligned}$$

összefüggésre következtethetünk, melyet behelyettesítve a (4.21) képletbe a  $\psi_k(x)$  függvényre az alábbi adódik:

$$\psi_k(x) = \frac{\psi(x)}{\lambda^k (1+\theta)^{k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} (\mu x)^{k-1-j} \left(k - j + \frac{\lambda x}{c}\right) p^{(j)}\left(\frac{1}{1+\theta}\right). \quad (4.22)$$

A fennmaradó deriváltak kiszámítására ismét alkalmazva a Leibniz-szabályt, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} p^{(j)}(\omega) &= \sum_{n=0}^j \binom{j}{n} \frac{k!}{(k+n-j)!} \omega^{k-j+n} \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!} (1-\omega)^{-k-n} = \\ &= j! \sum_{n=0}^j \binom{k}{j-n} \binom{k+n-1}{n} \omega^{k-j+n} (1-\omega)^{-k-n}, \end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned} p^{(j)}\left(\frac{1}{1+\theta}\right) &= j! \sum_{n=0}^j \binom{k}{j-n} \binom{k+n-1}{n} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{k-j+n} \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{-k-n} = \\ &= j! (1+\theta)^j \sum_{n=0}^j \binom{k}{j-n} \binom{k+n-1}{n} \theta^{-k-n}. \end{aligned}$$

Ismét behelyettesítünk, s így felhasználva, hogy  $\mu/(1+\theta) = \lambda/c$  teljesül, (4.22) a következő alakra módosul:

$$\psi_k(x) = \psi(x) \frac{(k-1)!}{\lambda^k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\left(\frac{\lambda x}{c}\right)^{k-1-j}}{(k-1-j)!} \left(k - j + \frac{\lambda x}{c}\right) \sum_{n=0}^j \binom{k}{j-n} \binom{k+n-1}{n} \theta^{-k-n}, \quad (4.23)$$

mely már a végső összefüggés  $\psi_k(x)$  függvényre.

Végezetül a (4.23) képletet elosztva a  $\psi(x)$  csődvalószínűséggel, azonnal adódik az alábbi explicit kifejezés a csőd idejének  $k$ -edik momentumára,  $k = 1, 2, \dots$  esetén:

$$E(T^k | T < \infty) = \frac{(k-1)!}{\lambda^k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\left(\frac{\lambda x}{c}\right)^{k-1-j}}{(k-1-j)!} \left(k - j + \frac{\lambda x}{c}\right) \sum_{n=0}^j \binom{k}{j-n} \binom{k+n-1}{n} \theta^{-k-n}$$

A fenti eredmény egy továbbfejlesztése az előző alfejezetben ismertetett rekurzív összefüggésnek. Speciálisan az első két momentumra az  $R = \mu\theta/(1 + \theta)$  jelölés alkalmazásával a következőt kapjuk:

$$E(T|T < \infty) = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{\lambda x}{c}\right) \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\lambda\theta} + \frac{x}{c\theta} = \frac{(1 + \theta)\theta}{c\mu\theta^2} + \frac{\mu\theta x}{c\mu\theta^2} = \frac{(1 + \theta)(Rx + \theta)}{c\mu\theta^2}, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} E(T^2|T < \infty) &= \frac{1}{\lambda^2} \left[ \frac{\lambda x}{c} \left(2 + \frac{\lambda x}{c}\right) \frac{1}{\theta^2} + \left(1 + \frac{\lambda x}{c}\right) \left(\frac{2}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{c^2\mu^2\theta^3} \left[ 2(1 + \theta)^3 + 4\mu(1 + \theta)\theta x + 2\mu(1 + \theta)x + \mu^2\theta x^2 \right] = \\ &= \frac{2}{c^2\mu^2\theta^3} \left[ (1 + \theta)^3 + \frac{(1 + \theta)^2(1 + 2\theta)}{\theta} (Rx) + \frac{(1 + \theta)^2}{\theta} \frac{(Rx)^2}{2!} \right] = \\ &= \frac{1}{c^2\mu^2\theta^4} \left\{ (1 + \theta)^2 (Rx + \theta)^2 + (1 + \theta)^2 [(2 + \theta)\theta + 2(1 + \theta)Rx] \right\}, \end{aligned}$$

mely teljesen megfelel az előző alfejezetben nyert eredményeknek. Végezetül a második momentumból levonva az első négyzetét, a varianciára a

$$D^2(T|T < \infty) = \frac{(1 + \theta)^2 [2(1 + \theta)Rx + (2 + \theta)\theta]}{c^2\mu^2\theta^4} \quad (4.25)$$

explicit kifejezés adódik.

Az eddig levezetett képletek segítségünkre lesznek a következő fejezetben ismeretetésre kerülő numerikus számítások során, hiszen az elérhető explicit összefüggések révén ellenőrizhetjük a közelítő megoldásaink pontosságát exponenciális eloszlás esetén.



## 5. fejezet

# A momentumok numerikus számítása

Ebben a fejezetben a csőd idejének momentumainak meghatározásával, illetve approximálásával foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy a második fejezetben ismertett eredmények alkalmasak a momentumok közelítő értékeinek előállítására akkor is, amikor nem létezik explicit képlet a csődvalószínűsége. Ehhez a meglévő képleteket át kell alakítanunk úgy, hogy alkalmazhassunk numerikus integrálást, valamint egy diszkretizációs technika segítségével közelítenünk kell a csődvalószínűséget. Mivel a csődvalószínűség egy összetett eloszlású valószínűségi változó farokeloszlásaként adódik, a megfelelő kárnagyságeloszlás diszkretizálása után a Panjer-rekurzió alkalmazásával approximálható.

Először általános esetben ismertetjük a momentumok kiszámításához szükséges formulákat, majd ezeket alkalmazzuk a gyakorlatban is exponenciális, illetve Pareto-kárnagyságeloszlás feltételezése mellett. Az exponenciális eloszlás esetével már részletesebben is foglalkoztunk az előző fejezetben, így szert tettünk explicit képletekre is, melyek alkalmasak lesznek a momentumokra nyert közelítések pontosságának ellenőrzésére. Az approximációs eljárás megvalósítása Matlab programmal történt. A fejezet a [6] cikk és a [19] könyv eredményeinek felhasználásával íródott.

### 5.1. Formulák a momentumokra

A következő részben az általános formulák átalakításával foglalkozunk. Azt szeretnénk elérni, hogy az integrálási tartományok minden esetben végesek legyenek, hogy a számításaink során alkalmazhassunk numerikus integrálást. Ehhez segítségül hívjuk a maximális aggregált veszteséget megadó  $L$  valószínűségi változó momentumait is, melyeket az átalakítások után az improprius integrálok helyére írhatunk,

ezek pedig már könnyen számíthatók a kárnagságeloszlás momentumaiból.

Először is tegyünk néhány feltevést a későbbiekre vonatkozóan. Delbaen (1988) bebizonyította, hogy csak akkor léteznek a csőd idejének – feltéve, hogy ez véges – a  $k$ -adik momentuma, ha létezik az egyes kárnagságok eloszlásának a  $k + 1$ -edik momentuma. Ezért a továbbiakban feltesszük, hogy  $E(Y^4)$  létezik, illetve azt is, hogy  $\psi(x)$ -et ki tudjuk számolni az  $x = 0, h, 2h, \dots, u$  pontokban, ahol  $u$  a konstans  $h$  egész számú többszöröse.

A következőkben a 3.2.2 tételben felírt eredményekre lesz szükségünk. Vezessük be a  $\bar{\psi}(u) = 1 - \psi(u)$  jelölést, ekkor felhasználva az (1.18) kifejezést a  $\psi_1(u)$  függvényre vonatkozó (3.27) összefüggés a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned}\psi_1(u) &= \frac{1}{\lambda\theta E(Y)} \left( \int_0^u \psi(u-x)\psi(x)dx + E(L) - \int_0^u \psi(x)dx - E(L)\psi(u) \right) = \\ &= \frac{1}{\lambda\theta E(Y)} \left( \int_0^u \psi(u-x)\psi(x)dx + E(L)\bar{\psi}(u) - \int_0^u \psi(x)dx \right) = \\ &= \frac{1}{\lambda\theta E(Y)} \left( E(L)\bar{\psi}(u) - \int_0^u \bar{\psi}(u-x)\psi(x)dx \right),\end{aligned}\quad (5.1)$$

miszerint  $\psi_1(u)$  numerikus integrálás segítségével számítható.

A  $k$ -adik momentumokra felírt (3.30) képletet írjuk fel a következő alakban:

$$\psi_k(u) = \frac{k}{\lambda\theta E(Y)} \left( \int_0^u \psi(u-x)\psi_{k-1}(x)dx + \bar{\psi}(u) \int_0^\infty \psi_{k-1}(x)dx - \int_0^u \psi_{k-1}(x)dx \right) du.$$

Hasonlóan az előzőekhez ez a képlet is tartalmaz egy olyan tagot, melynél végtelen tartományon kell integrálni, így nem alkalmas közvetlenül  $\psi_2(u)$  és  $\psi_3(u)$  kiszámítására. A többi tag numerikus integrálás segítségével meghatározható, míg az improprius integrál kiszámítása az alábbiak szerint történik (3.27) és (1.19) felhasználásával:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \psi_1(u)du &= \frac{1}{\lambda\theta E(Y)} \int_0^\infty \left( \int_0^u \psi(u-x)\psi(x)dx + \int_u^\infty \psi(x)dx - E(L)\psi(u) \right) du \\ &= \frac{1}{\lambda\theta E(Y)} \left( \int_0^\infty \int_x^\infty \psi(u-x)du\psi(x)dx + \int_0^\infty \int_0^x du\psi(x)dx - E(L)^2 \right) \\ &= \frac{1}{\lambda\theta E(Y)} \left( E(L)^2 + \int_0^\infty x\psi(x)dx - E(L)^2 \right) = \frac{E(L^2)}{2\lambda\theta E(Y)}.\end{aligned}$$

Ezért  $\psi_2(u)$  a következő alakban írható:

$$\psi_2(u) = \frac{2}{\lambda\theta E(Y)} \left( \frac{E(L^2)\bar{\psi}(u)}{2\lambda\theta E(Y)} - \int_0^u \bar{\psi}(u-x)\psi_1(x)dx \right).\quad (5.2)$$

Hasonlóan  $\psi_3(u)$  esetében is az improprius integrál kivételével a többi tag numerikus integrálás segítségével számítható. (3.30) felhasználásával az alábbi összefüggés

adódik:

$$\int_0^\infty \psi_2(u)du = \frac{2}{\lambda\theta E(Y)} \left( \int_0^\infty \int_0^u \psi(u-x)\psi_1(x)dxdu + \int_0^\infty \int_u^\infty \psi_1(x)dxdu - \int_0^\infty \psi(u) \int_0^\infty \psi_1(x)dxdu \right).$$

Az alábbiakban ezt a kifejezést számítjuk ki tagonként (1.20) felhasználásával:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^u \psi(u-x)\psi_1(x)dxdu &= \int_0^\infty \psi_1(x) \int_x^\infty \psi(u-x)dudx = \frac{E(L)E(L^2)}{2\lambda\theta E(Y)}, \\ \int_0^\infty \int_u^\infty \psi_1(x)dxdu &= \int_0^\infty \int_0^x du\psi_1(x)dx = \int_0^\infty x\psi_1(x)dx = \\ &= \frac{1}{\lambda\theta E(Y)} \left( \int_0^\infty \int_y^\infty x\psi(x-y)dx\psi(y)dy + \int_0^\infty \int_0^y xdx\psi(y)dy - \int_0^\infty E(L)x\psi(x)dx \right) = \\ &= \frac{1}{\lambda\theta E(Y)} \left( \int_0^\infty \int_y^\infty (x-y)\psi(x-y)dx\psi(y)dy + \int_0^\infty \int_y^\infty y\psi(x-y)dx\psi(y)dy + \int_0^\infty \frac{y^2}{2}\psi(y)dy - \frac{1}{2}E(L)E(L^2) \right) = \\ &= \frac{1}{\lambda\theta E(Y)} \left( \frac{1}{2}E(L)E(L^2) + \frac{1}{6}E(L^3) \right), \\ \int_0^\infty \int_0^\infty \psi(u)\psi_1(x)dxdu &= \int_0^\infty \psi(u) \frac{E(L^2)}{2\lambda\theta E(Y)} du = \frac{E(L)E(L^2)}{2\lambda\theta E(Y)}. \end{aligned}$$

Összerakva az egyes tagokat  $\psi_3(u)$ -ra a következő képletet kapjuk:

$$\psi_3(u) = \frac{3\bar{\psi}(u)E(L)E(L^2)}{\{\lambda\theta E(Y)\}^3} + \frac{\bar{\psi}(u)E(L^3)}{\{\lambda\theta E(Y)\}^3} - \frac{3}{\lambda\theta E(Y)} \int_0^u \bar{\psi}(u-x)\psi_2(x)dx. \quad (5.3)$$

Megjegyezzük, hogy a fenti számítások kiterjeszthetők a magasabb momentumokra is. Ezen a csőd idejének momentumaira nyert általános formulák segítségével a későbbiekben numerikus számításokat fogunk végezni.

## 5.2. Approximáció a momentumokra

Ebben a részben megemlítünk egy olyan eljárást, melynek révén közelíthető a csőd idejének eloszlása azon feltétel mellett, hogy a tönkremenés biztosan bekövetkezik. Az  $\{U(t), t \geq 0\}$  rizikófolyamatot approximálhatjuk diffúziós folyamattal. Legyen  $\tilde{U}(t) = u + W(t)$ , ahol  $W(t) \sim N(\lambda\theta E(Y)t, \lambda E(Y^2)t)$  teljesül minden  $t > 0$  esetén. Egy jól ismert eredmény, hogy ha  $u > 0$  teljesül, az  $\{\tilde{U}(t), t \geq 0\}$  folyamatra

a csőd idejének eloszlása feltéve, hogy a csőd bekövetkezik Inverz Gauss-eloszlású az alábbi sűrűségfüggvénnyel:

$$f(t) = \frac{u}{\sqrt{2\pi\lambda E(Y^2)}} t^{-\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{(u - \lambda\theta E(Y)t)^2}{2\lambda E(Y^2)t} \right\}$$

(ld. például Klugman, Panjer és Willmot (1998) eredményei). Ezen paraméterválasztás mellett a közelítő eloszlás momentumai alkalmasak az  $\{U(t), t \geq 0\}$  folyamatra vonatkozó csőd idejének momentumainak,  $f(t)$  pedig a sűrűségfüggvényének approximálására. Így a várható értékre és a szórásra  $u > 0$  esetén a következő adódik:

$$E(T|T < \infty) \approx \frac{u}{\lambda\theta E(Y)}, \quad D^2(T|T < \infty) \approx \frac{uE(Y^2)}{\lambda^2\theta^3 E(Y)^3}. \quad (5.4)$$

Megjegyezzük, hogy ezen approximációk nem függenek az egyes kárnagyságok eloszlásának a másodiknál magasabb momentumaitól. Ez azért van, mert a rizikófolyamat diffúziós folyamattal történő approximációja az első két momentum egyezésén alapszik. A fenti formulák előnye, hogy világosak és egyszerűek. Emellett azonban, ahogy azt a későbbiekben látni fogjuk, sokkal pontatlanabb eredményeket szolgáltatnak az általános formulákkal nyerhető közelítésekénél.

A következő alfejezetben az eddig megismert képletek felhasználásával végzünk numerikus számításokat, majd összehasonlítjuk az így nyert közelítéseket az explicit képletekkel számolt pontos értékekkel.

### 5.3. Numerikus számítások

Az előző fejezetben a csőd momentumainak meghatározásához végeztünk számításokat exponenciális kárnagyságeloszlás esetén. Az első esetben rekurzív módon számoltunk, a második részben sikerült zárt képletre szert tennünk. Az első két momentumra felírtuk a pontos képletet, és megállapítottuk, hogy a két számítási mód ugyanazon eredményre vezetett. Ebben a fejezetben általános esetre végeztük el a momentumokra nyert képletek átalakítását úgy, hogy az integrálások már véges intervallumon történjenek, így ezekre használhatunk numerikus közelítéseket. A következőkben megvizsgáljuk, hogy exponenciális eloszlásnál az így nyert formulákkal és az előző fejezetben megalkotott explicit képletekkel számolt értékek mennyire egyeznek, avagy milyen pontos a közelítés. Illetve a szintén ebben a fejezetben megemlített durvább becsléseket is megadjuk.

A továbbiakban a csőd bekövetkezési idejének várható értékét és szórását szeretnénk közelíteni a momentumokra felírt (5.1) és (5.2) általános formulák segítségével exponenciális eloszlás esetén. Mivel az általános formulákat átalakítottuk úgy,

hogy csak véges intervallumon kelljen integrálnunk, előállíthatjuk az integrálokat véges közelítő összegek segítségével egy kellően finom felosztás alkalmazásával. Továbbá szükségünk lesz az  $L$  maximált aggregált veszteség momentumaira, melyek könnyen számíthatók az (1.18), (1.19) és (1.20) képletek alapján a kárnagyságeloszlás momentumaiból. Ezek után már csak a  $\psi(u)$  csődvalószínűség értékeket kell előállítanunk, approximálnunk, hogy alkalmazhassuk az általános formulákat.

A Panjer-rekurziót felhasználhatjuk az aggregált kárt megadó összetett eloszlás és a megfelelő eloszlásfüggvény kiszámítására, amennyiben az egyes kárnagyságok csak nemnegatív egész értékeket vehetnek fel.  $\bar{\psi}(u)$  eloszlásfüggvénye az

$$L = \sum_{i=1}^N L_i$$

összetett geometriai eloszlású valószínűségi változónak, így diszkrétizálás után a Panjer-rekurzió segítségével approximálható. Pontosabban ezt úgy fogjuk megvalósítani, hogy a  $\bar{\psi}(u)$  függvényre ily módon adunk egy alsó és felső becslést, melyek átlagaként adódik majd a végső közelítés.

Jelölje  $K(x) = P(L_i \leq x)$  az  $L_i$  folytonos eloszlásához tartozó eloszlásfüggvényt. Szükségünk lesz az

$$L_\alpha = \sum_{i=1}^N L_{\alpha,i}$$

összetett eloszlásra, ahol  $L_{\alpha,1}, L_{\alpha,2}, \dots$  független, azonos eloszlású valószínűségi változók  $K_\alpha(x)$  eloszlásfüggvénnyel és  $k_{\alpha,x}$  sűrűségfüggvénnyel, melyre

$$k_{\alpha,x} = K(x+1) - K(x) \quad x = 0, 1, 2, \dots,$$

valamint az

$$L_\beta = \sum_{i=1}^N L_{\beta,i}$$

összetett eloszlásra, ahol  $L_{\beta,1}, L_{\beta,2}, \dots$  független, azonos eloszlású valószínűségi változók  $K_\beta(x)$  eloszlásfüggvénnyel és  $k_{\beta,x}$  sűrűségfüggvénnyel, melyre

$$k_{\beta,x} = K(x) - K(x-1) \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

Ekkor az  $u \geq 0$  egészekre

$$K_\beta(u) \leq K(u) \leq K_\alpha(u)$$

teljesül, mely konvolúció hatványokra is fennáll:

$$K_\beta^{*n}(u) \leq K^{*n}(u) \leq K_\alpha^{*n}(u).$$

Mivel a  $\psi(0) = 1/(1 + \theta)$ , az (1.4) és (1.16) összefüggések alapján

$$\bar{\psi}(u) = \bar{\psi}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\psi}(0)\psi(0)^n K^{*n}(u)$$

adódik, azt kapjuk, hogy

$$P(L_{\beta} \leq u) \leq P(L \leq u) \leq P(L_{\alpha} \leq u).$$

Legyen  $\bar{\psi}_{\alpha}(u) = P(L_{\alpha} \leq u)$  és  $\bar{\psi}_{\beta}(u) = P(L_{\beta} \leq u)$ , miszerint az előző formula a következő alakra módosul:

$$\bar{\psi}_{\beta}(u) \leq \bar{\psi}(u) \leq \bar{\psi}_{\alpha}(u).$$

Mivel  $L_{\alpha,i}$  és  $L_{\beta,i}$  nemnegatív egészeken értelmezett diszkrét valószínűségi változók, ezen alsó és felső becslés már előállítható Panjer-rekurzióval.

Legyenek  $N$   $(a,b)$ -eloszlású számláló valószínűségi változó és  $Y_1, Y_2, \dots$  nemnegatív, egészértékű valószínűségi változók függetlenek, és  $X = Y_1 + \dots + Y_N$ . Jelölje  $N$  eloszlását  $p_n$ ,  $Y_i$  sűrűségfüggvényét  $\{f_j\}_{j=0}^{\infty}$ , és  $X$  eloszlásfüggvényét  $G(u) = P(X \leq u)$ , sűrűségfüggvényét  $\{g_x\}_{x=0}^{\infty}$ . Ekkor a Panjer-rekurzió szerint:

$$g_0 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_0^n,$$

$$g_x = \frac{1}{1 - af_0} \sum_{j=1}^x \left( a + b \frac{j}{x} \right) f_j g_{x-j}$$

teljesül, ahol  $x = 1, 2, 3, \dots$ . Amennyiben  $N$  geometriai eloszlású, azaz  $p_n = (1-q)q^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  esetén, akkor  $a = q$  és  $b = 0$  teljesül. Így a Panjer-rekurzió a következőképpen írható fel:

$$g_0 = (1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} (qf_0)^n = \frac{1 - q}{1 - qf_0},$$

$$g_x = \frac{q}{1 - qf_0} \sum_{j=1}^x f_j g_{x-j}.$$

Továbbá egyszerű átalakításokkal a  $G(u)$  eloszlásfüggvényre is nyerhetünk egy rekurzív formulát:

$$G(u) = \sum_{x=0}^u g_x = g_0 + \frac{q}{1 - qf_0} \sum_{x=1}^u \sum_{j=1}^x f_j g_{x-j} =$$

$$= g_0 + \frac{q}{1 - qf_0} \sum_{j=1}^u f_j \sum_{x=j}^u g_{x-j} = g_0 + \frac{q}{1 - qf_0} \sum_{j=1}^u f_j G(u - j).$$

Alkalmazva a Panjer-rekurziót  $\bar{\psi}_\alpha$  és  $\bar{\psi}_\beta$  eloszlásfüggvényekre, mivel  $q = 1/(1 + \theta) = \psi(0)$  azt kapjuk, hogy

$$\bar{\psi}_\alpha(0) = \frac{\bar{\psi}(0)}{1 - \psi(0)k_{\alpha,0}},$$

és  $u = 1, 2, 3, \dots$  esetén

$$\bar{\psi}_\alpha(u) = \frac{1}{1 - \psi(0)k_{\alpha,0}} \left( \bar{\psi}(0) + \psi(0) \sum_{j=1}^u k_{\alpha,j} \bar{\psi}_\alpha(u-j) \right),$$

és hasonlóan  $\bar{\psi}_\beta(0) = \bar{\psi}(0)$  teljesül, mivel  $k_{\beta,0} = 0$  és  $u = 1, 2, 3, \dots$  esetén

$$\bar{\psi}_\beta(u) = \bar{\psi}(0) + \psi(0) \sum_{j=1}^u k_{\beta,j} \bar{\psi}_\beta(u-j).$$

Végezetül ezen alsó és felső becslések átlagaként adódik a végső közelítés a  $\bar{\psi}(u)$  függvényre.

A diszkrétizálást úgy végeztük el, hogy a valószínűségi változók egész értékeket vehettek fel. Ennél azonban finomabb felosztásra is alkalmazhatjuk a diszkrétizációs technikát, mellyel pontosabb közelítésekre tehetünk szert. A Matlab programmal elkészített számítások során a felosztásnál a pontok távolságát 0.001-nek vettem, azaz  $\psi(u)$  a 0, 0.001, 0.002, ... pontokban számítható ki. Lehetne ennél finomabb felosztást is választani, mellyel a futás idő növekedése mellett pontosabb eredményekre tehetünk szert. A továbbiakban áttekintjük a számítások eredményeit.

$\theta = 10\%$	$E(T T < \infty)$				
u	Pontos	Közelítés	Hiba	Becslés	Hiba
0	10,00	10,00	0,00%	-	-
10	100,91	100,89	0,02%	100,00	0,90%
15	146,36	146,33	0,02%	150,00	2,49%
20	191,82	191,77	0,03%	200,00	4,26%
25	237,27	237,19	0,03%	250,00	5,37%
30	282,73	282,59	0,05%	300,00	6,11%
35	328,18	327,96	0,07%	350,00	6,65%
40	373,64	373,28	0,10%	400,00	7,05%
45	419,09	418,52	0,14%	450,00	7,38%
50	464,55	463,63	0,20%	500,00	7,63%

5.1. ábra. A csőd várható idejének becslése exponenciális eloszlás esetén,  $\theta = 10\%$

Az 5.1 és 5.2 táblázatokban a csőd idejének várható értékére és szórására kapott eredményeket foglaltuk össze exponenciális kárnagyságeloszlás esetén a különböző

paraméterválasztások függvényében. Az  $u$  kezdeti tőke értékét 10-től 50-ig változtattuk ötösével, míg a  $\theta$  paraméter tekintetében a 10%-os esetet vizsgáltuk meg, továbbá a  $\lambda = 1$  és  $\mu = 1$  választással éltünk. A táblázatok második oszlopaiban a (4.24) és (4.25) explicit képletekkel számolt pontos értékeket találjuk. Az (5.1) és (5.2) általános formulák speciálisan exponenciális eloszlásra történő alkalmazásával meghatározott mennyiségeket a táblázatok harmadik oszlopai szemléltetik. Az ötödik oszlopok tartalmazzák az (5.4) képlettel számolt durva becsléseket. A táblázatokban feltüntettük még a megfelelő becslésekhez tartozó relatív hibákat is, melyek a pontos és a közelített értékek abszolút eltérésének és a pontos érték abszolút értékének hányadosaiként adódnak.

$\theta = 10\%$	$D(T T < \infty)$				
$u$	Pontos	Közelítés	Hiba	Becslés	Hiba
0	45,83	45,83	0,00%	-	-
10	148,66	148,67	0,01%	141,42	4,87%
15	179,16	179,19	0,02%	173,21	3,32%
20	205,18	205,24	0,03%	200,00	2,52%
25	228,25	228,37	0,05%	223,61	2,03%
30	249,20	249,41	0,08%	244,95	1,71%
35	268,51	268,91	0,15%	264,58	1,46%
40	286,53	287,23	0,24%	282,84	1,29%
45	303,48	304,70	0,40%	300,00	1,15%
50	319,53	321,63	0,66%	316,23	1,03%

5.2. ábra. A csőd idejének szórásának becslése exponenciális eloszlás esetén,  $\theta = 10\%$

A eredményekből azonnal levonhatjuk azt következtetést, miszerint a kezdeti tőke értékek növelésével a csőd várható bekövetkezése későbbi időpontra tolódik, valamint a csőd idejének szórása is növekszik. A közelítések pontossága  $u$  növekedésével csökkenő tendenciát mutat, mivel az egyre több összeadandó miatt nő a hiba nagysága. Ha egy bizonyos mértékű pontosságot szeretnénk megtartani,  $u$  növekedésével egyre finomítanunk kell a felosztást, de ez a futás idő növekedését vonná maga után. Láthatóan azonban így is nagyon pontos közelítésekhez jutottunk, még a durva becslés is elfogadható eredményeket produkált. A számítások futásideje egyik esetben sem volt jelentősen hosszú.

Megjegyezzük, hogy mivel exponenciális eloszlás esetén van explicit függvényünk a csődvalószínűsége, az approximáció nem is szükséges, használhatjuk a pontos értékeket, melyek révén jobb becsléshez juthatunk. Azért hoztunk létre mégis



egy általánosabb eljárást, mert ez olyan eloszlások esetén is működik, amikor a csődvalószínűség nem adható meg explicit képlettel. Meg is vizsgáljuk azt az esetet, amikor a kárnagyság Pareto-eloszlású.

$\theta = 10\%$	$E(T T < \infty)$		$D(T T < \infty)$	
u	Közelítés	Becslés	Közelítés	Becslés
0	15,00	-	71,94	-
10	115,55	100,00	202,53	173,21
20	203,87	200,00	271,42	244,95
30	289,13	300,00	325,98	300,00
40	372,13	400,00	373,25	346,41
50	453,04	500,00	416,29	387,30
60	531,76	600,00	456,96	424,26
70	608,02	700,00	496,72	458,26

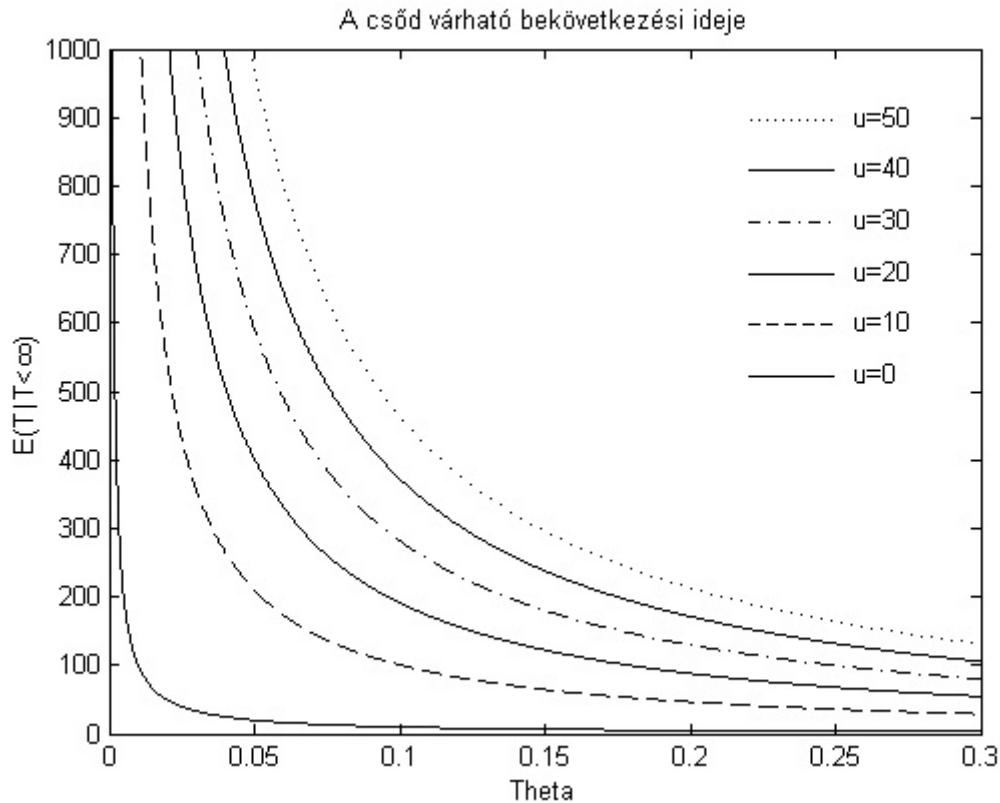
5.3. ábra. A csőd várható idejének és szórásának becslése, Pareto-eloszlás,  $\theta = 10\%$

$\theta = 25\%$	$E(T T < \infty)$		$D(T T < \infty)$	
u	Közelítés	Becslés	Közelítés	Becslés
0	6,00	-	19,90	-
10	41,87	40,00	55,34	43,82
20	70,71	80,00	75,55	61,97
30	96,45	120,00	94,13	75,89
40	119,11	160,00	114,39	87,64
50	138,58	200,00	138,78	97,98
60	154,99	240,00	168,93	107,33
70	168,99	280,00	205,15	115,93

5.4. ábra. A csőd várható idejének és szórásának becslése, Pareto-eloszlás,  $\theta = 25\%$

A számításaink során Pareto(4, 3) kárnagyság-eloszlást feltételeztünk, melyre  $H(y) = 1 - (3/(3 + y))^4$  teljesül, valamint a  $\lambda = 1$  és  $u = 0, 10, 20, \dots, 70$  paraméterválasztásokkal éltünk. Az 5.3 és 5.4 táblázatok az előzőeknek megfelelően tartalmazzák a numerikus számítások eredményeit és a durva becsléseket a feltételes várható értékre és szórásra vonatkozóan. Itt már nem állt módunkban feltüntetni a pontos értékeket, mivel Pareto-eloszlás esetén nincs explicit képletünk. A két táblázat közti különbséget a  $\theta$  paraméter eltérő választása okozza, az első táblázatnál a biztonsági loading 10%-ra, a másodiknál 20%-ra lett beállítva. Megállapítható,

hogy magasabb biztonsági loading esetén a csőd várhatóan hamarabb következik be azon feltétel mellett, hogy ez az időpont véges, illetve a feltételes szórás is csökken. Az eddigiek során tapasztalt összefüggéseket az utolsó ábra foglalja össze.



5.5. ábra. A csőd várható idejének ábrázolása  $\theta$  függvényében különböző  $u$  kezdeti tőke értékek mellett exponenciális eloszlás esetén

Az 5.5 ábrán exponenciális kárnagyság-eloszlásra ábrázoltuk a csőd várható idejét a  $\theta$  biztonsági loading értékeinek függvényében 0, 10, 20, 30, 40 és 50 kezdeti tőke értékek esetén. Alacsonyabb kezdeti tőke mellett a tönkremenés várható időpontja közelebb van rögzített  $\theta$  paraméter mellett, míg a kezdeti tőke növelésével a csőd időpontja távolodik. A  $\theta$  paraméter, vagyis a biztonsági loading értékének emelésével a tönkremenés várhatóan korábbi időpontban következik be.

Ebben a fejezetben az volt a célunk, hogy bemutassunk egy olyan eljárást, mellyel a csőd idejének momentumai numerikusan kiszámíthatók. Összességében elmondható, hogy sikerült kellően pontos közelítő megoldásokat szolgáltatni a csőd idejének várható értékére és szórására különböző paraméterválasztások mellett mind exponenciális, és Pareto-kárnagyságeloszlás esetén.

# Összefoglalás

A szakdolgozat egyik központi fogalma az összetett geometriai farokeloszlás, mely láthattuk számos fontos mennyiség leírására alkalmas úgy, mint a csődvalószínűség vagy a csőd idejének Laplace-transzformáltja. Exponenciális kárnagyságeloszlás esetén sikerült explicit kifejezést nyernünk, de általában nem adható rá zárt képlet. Ezért megismerkedtünk az aszimptotikus érték korrigálásán alapuló Tijms-approximációval, mely torzítatlan becslést szolgáltat az összetett farokeloszlásra aszimptotikusan geometrikus kárszámeloszlás esetén.

Rávilágítottunk az összetett geometriai farokeloszlás és a nem teljes felújítási egyenlet közti összefüggésekre. Ezáltal sikerült olyan általános formulákat szolgáltatni, melyek segítségével rekurzív módon lehet előállítani explicit képleteket a csőd idejének momentumaira, amennyiben létezik a csődvalószínűsége explicit kifejezés. Exponenciális kárnagyságeloszlás esetén meg is határoztuk ezen explicit képleteket.

Megmutattuk, hogy amennyiben nem létezik explicit kifejezés a csődvalószínűsége, az általános formulák akkor is felhasználhatók, méghozzá közelítő megoldások előállítására. A csődvalószínűség is egy összetett geometriai farokeloszlás, így a kárnagyság-eloszlásának diszkretizálása után alkalmazható rá a Panjer-rekurzió. Egy másik lehetséges megoldás is adható erre a problémára, eszerint a diszkrét idejű modellben rekurzívan meghatározott csődvalószínűség értékeket kell felhasználni a klasszikus modell csődvalószínűségeinek approximálásához.

A Matlab programmal elvégzett numerikus számítások eredményeként közelítő megoldásokat kaptunk a csőd idejének várható értékére és szórására különböző paraméterválasztás mellett, exponenciális és Pareto-kárnagyságeloszlás esetén. A korábban meghatározott explicit képletekkel ellenőriztük a numerikusan számolt értékek pontosságát. Összességében elmondható, hogy sikerült kellően pontos közelítéseket nyernünk a csőd idejének várható értékére és szórására.

# Irodalomjegyzék

- [1] Lin, X. S. and Willmot, G. E. (1999), *Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory*, Insurance: Mathematics and Economics, 25, 63-84
- [2] Lin, X. S. and Willmot, G. E. (2000), *Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications* (Lecture Notes in Statistics), Springer, 262 p.
- [3] Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W. (1998) *On the time value of ruin*, North American Actuarial Journal, 2, 48-78
- [4] Egídio dos Reis, A. D. (2000) *On the moments of ruin and recovery times*, Insurance: Mathematics and Economics, 27, 331-344
- [5] Picard, P. and Lefèvre, C. (1998) *The moments of ruin time in the classical risk model with discrete claim size distribution*, Insurance: Mathematics and Economics, 23, 157-172
- [6] Dickson, D. C. M. and Waters, H. R. (2002), *The distribution of the time to ruin in the classical risk model*, ASTIN Bulletin, 32, 299-313
- [7] Embrechts, P., Maejima, M. and Teugels, J. L. (1985) *Asimptotic behaviour of compound distributions*, ASTIN Bulletin, 15, 45-48
- [8] Ross, S. (1996) *Stochastic Processes*, 2nd edition, John Wiley, New York
- [9] Feller, W. (1971) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol 2, 2nd edition, John Wiley, New York
- [10] Brown, M. (1998) *Error bounds for exponential approximations of geometric convolutions*, Annals of Probability, 18, 1388-1402
- [11] Lin, X. S. and Willmot, G. E. (1998), *A solution of defective renewal equations with applications to ruin theory*, Actuarial Research Clearing House, 1, 365–374

- [12] Lin, X. S. and Willmot, G. E. (2000), *The moments of the time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin*, Insurance: Mathematics and Economics, 27, 19–44
- [13] Drekić, S. and Willmot, G. E. (2003), *On the density and moments of the time of ruin with exponential claims*, ASTIN Bulletin, 33, 11-21
- [14] Schiff, J. (1999) *The Laplace Transform: Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York
- [15] Gradshteyn, I. and Ryzhik, I. (1994) *Tables of Integrals, Series, and Products*, 5th edition, Academic Press, San Diego
- [16] Abramowitz, M. and Stegun, I. (1972) *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards, Washington
- [17] Delbaen, E. (1988) *A remark on the moments of ruin time in classic risk theory*, Insurance: Mathematics and Economics, 9, 121-126
- [18] Klugman, S. A., Panjer, H. H. and Willmot, G. E. (1998) *Loss Models - From Data to Decisions*, John Wiley and Sons, New York
- [19] Dickson, D. C. M. (2005), *Insurance Risk and Ruin* (International Series on Actuarial Science), Cambridge University Press, 229 p.