

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

Bósz Péter

**A HESTON ÉS BATES-MODELLEK
DISZKRETIZÁLÁSA**

MSc Szakdolgozat

Témavezető:

Márkus László
egyetemi docens

Valószínűségelméleti és Statisztika tanszék



Budapest, 2016

Tartalomjegyzék

Bevezetés	5
1. Euler-Maruyama és Milstein féle diszkretizáció	7
1.1. Euler-Maruyama módszer	8
1.1.1. Euler-Maruyama módszer Black-Sholes modellre	8
1.1.2. Euler-Maruyama módszer Heston-modellre	9
1.2. Milstein módszer	11
1.2.1. Milstein módszer Black-Sholes modellre	13
1.2.2. Milstein módszer Heston-modellre	14
1.3. Konvergencia	15
2. Bates-modell	18
3. Európai opció árazás Heston-modellel és Bates-modellel	20
3.1. Heston-modell	21
3.1.1. Karakterisztikus függvény	21
3.1.2. Momentum módszer	22
3.1.3. Maximum Likelihood becslés	24
3.2. Bates-modell	25
3.2.1. Karakterisztikus függvény	26
3.2.2. Becslési módszer	26
4. Opció árazás valós piaci adatok alapján	28
4.1. Heston-modell eredményei	28
4.2. Bates-modell eredményei	34
4.3. Átlagos négyzetes eltérés	38

5. Összegzés	39
Irodalomjegyzék	40
A. Heston-modell Matlab kód	41
B. Bates-modell Matlab kód	47
C. Diszkretizálás szimulálása	55

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Márkus Lászlónak, hogy elvállalta a témavezetés teendőit. Köszönöm, hogy mindig rendelkezésemre állt és szakmai tanácsaival hozzájárult a szakdolgozatom elkészüléséhez.

Valamint hálával tartozom családomnak és barátaimnak akik mellettem álltak minden percben az egyetemi évek alatt és segítették a munkámat.

Bevezetés

Pénzügyi matematikában számos eszközár modell létezik, amelyek nagyon fontosak a piaci szereplők szempontjából, ugyanis legtöbbször ezek alapján árazzák a pénzügyi termékeket. Egy lényeges gyakorlati probléma merül fel annak kapcsán, hogy ezeket a modelleket folytonos idejű modellekként alkották meg, de a piaci kereskedést csak diszkrét időpontokban tudjuk megfigyelni. A szakdolgozatomban két nagyon alapvető és klasszikusnak mondható diszkretizálási módszert vizsgálunk, hogy a folytonos modellek kezelhetővé váljanak. Ezekben az elméleti modellekben levő sztochasztikus differenciálegyenletek numerikus megoldása nagyon fontos a tényleges alkalmazások számára. Általában ezek az egyenletek nem lineárisak, tehát eleve nehezebben kezelhetőek, és sok esetben nincs is explicit megoldásuk. A dolgozatban numerikus megoldásra törekszünk, melynek során a hatékony algoritmusok azért nagy jelentőségűek, mert korunkban a számítógépes tőzsdei kereskedés igen gyors és szükség van a lehető leggyorsabb árszámítási módszerekre.

Szakdolgozatban - ahogy a címben is szerepel - két eszközár modellel foglalkozunk részletesebben, a Heston és Bates-modellekkel. A Heston modell esetén a sztochasztikus differenciálegyenlet megoldásának létezése sem magától értetődő, például a szokásosan megkövetelt Lipschitz folytonosság nem teljesül, míg a Bates-modellekben szereplő ugró folyamatok miatt még folytonosságról sem beszélhetünk, ezért mindenképp érdekesnek találom e két eset bemutatását. Az első fejezetben ismertetjük az Euler-Maruyama és Milstein féle diszkretizációs eljárásokat. A 2. fejezetben definiáljuk Bates-modellt és megvizsgáljuk néhány tulajdonságát. Ezek után megmutatjuk, hogy diszkretizálás után hogyan lehet becsülni a modelljeinket. Mindkét modellben a karakterisztikus függvény segítségével szeretnénk az európai típusú opciót árazni, ez az árazási formula található a 3. fejezetben. Ahhoz, hogy ezekkel a karakterisztikus függvényekkel számolni tudjunk, szükségünk van paraméterek becslésére. Heston modell esetén momentum módszert és maximum likelihood becslést használunk, eze-

ket valószínűségszámítási eszközökkel számolhatjuk. Viszont a Bates-modell esetén nehezebb a dolgunk, hiszen az ebben szereplő ugró mértékkel bonyolult a számolás. Így ebben az esetben egy numerikus iterációs eljárással végezzük a becslést. Az utolsó fejezetben felhasználjuk a korábbi fejezetekben felépített elméleti és gyakorlati eszközöket, valamint valós piaci adatokat egy spanyol áruházlánc részvényeiről. Európai típusú opciót tekintünk, eladási és vételi jogot megtestesítőt egyaránt. Kétféleképpen illesztjük a modelljeinket, egyik esetben a valós piaci árakat, másik esetben pedig implicit volatilitásból számított piaci árakat tekintjük. Ezekre adatokra végzünk becslést, majd nézzük az illeszkedés erősségét a becslt és a valós adatok között.

1. fejezet

Euler-Maruyama és Milstein féle diszkretizáció

Ebben a fejezetben diszkretizációs technikákat mutatunk be, erre mindenképp szükség van, hisz a piaci adatok mindig diszkrét időben állnak rendelkezésre. Ha becsülni vagy közelíteni szeretnénk, akkor ilyen formában kell felírni az elméleti folytonos modelljeinket. Ezt a diszkretizációt anélkül szeretnénk megtenni, hogy explicite megoldanánk az egyenleteket.

Most két fajta diszkretizációs sémát vizsgálunk, az Euler-Maruyama és a Milstein féléit, ezeket szemléltetjük Black-Sholes és Heston modelleken az [1] alapján. A részvényár vagy a kamatláb is ilyen típusú folytonos idejű sztochasztikus folyamattal leírható.

Feltételezzük, hogy a részvényár folyamat S_t a következő sztochasztikus differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t, \quad (1.1)$$

ahol W_t Wiener folyamat. Szimuláljunk S_t részvényárakat $[0, T]$ intervallumon. Osszuk fel az intervallumot $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$ módon, úgy, hogy két pont közötti eltérés egyenlő legyen, erre azért van szükség, hogy bizonyos tulajdonságokat, eloszlásokat kezelni tudjunk a számításaink során. Írjunk $t_i - t_{i-1}$ helyett dt -t, annak ellenére, hogy ez függ i -től, tehát az időpont megválasztásától, viszont az egyszerűség kedvéért megtehetjük ezt. Integrálformában is megadhatjuk az S_{t+dt} -t, ha felhasz-

náljuk az 1.1 egyenletet és a $dS_t = S_{t+dt} - S_t$ összefüggést.

$$S_{t+dt} = S_t + \int_t^{t+dt} \mu(S_u, u) du + \int_t^{t+dt} \sigma(S_u, u) dW_u \quad (1.2)$$

Ez az egyenlet a kiinduló pontja a diszkretizációs módszereknek, ezzel szeretnénk az egyenlet megoldását előállítani.

1.1. Euler-Maruyama módszer

Euler-Maruyama módszer bemutatásához az 1.2 egyenletben szereplő folyamatra szeretnénk használni a diszkretizációt. Az egyenletet úgy közelítjük, hogy az integrálásnál a bal oldali végpontokat vesszük figyelembe. Így az első integrál az alábbi módon becsülhető.

$$\int_t^{t+dt} \mu(S_u, u) du \approx \mu(S_t, t) \int_t^{t+dt} du = \mu(S_t, t) dt$$

Ezt használjuk, mert t -ben $\mu(S_t, t)$ ismert. A jobb oldali értéket $\mu(S_{t+dt}, t + dt)$ -t szeretnénk meghatározni t -ben. Második integrált hasonlóképpen tudjuk becsülni.

$$\int_t^{t+dt} \sigma(S_u, u) dW_u \approx \sigma(S_t, t) \int_t^{t+dt} dW_u = \sigma(S_t, t)(W_{t+dt} - W_t) = \sigma(S_t, t)\sqrt{dt}Z,$$

itt a $W_{t+dt} - W_t$ és $\sqrt{dt}Z$ eloszlásban megegyeznek és Z egy standard normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor az 1.2 egyenlet Euler-Maruyama módszer szerinti diszkretizáltja a következő:

$$S_{t+dt} = S_t + \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)\sqrt{dt}Z. \quad (1.3)$$

Elegendő ezt az egyenletet nézni, ugyanis ha tovább néznénk S_{t+2dt} , S_{t+3dt} folyamatokat, akkor ugyanilyen tulajdonságú folyamatokat kapnánk, hiszen Z_{2dt} , Z_{3dt} függetlenek Z_{dt} -től,

1.1.1. Euler-Maruyama módszer Black-Sholes modellre

Mielőtt felírnánk a Black-Sholes modell diszkretizációját, említsük meg ezen modell alapfeltevéseit. Egy részvényár folyamat leírására is alkalmas modell, amely Geometriai Brown mozgást feltételez az árak alakulásáról, konstans volatilitással

és kamatlábbal. Egyenlete a kockázatsemleges mérték szerint, r konstans kamatláb mellett

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (1.4)$$

ahol dW_t egy Wiener folyamat.

Alkalmazzuk az 1.3 egyenletet Black-Sholes modellre, így

$$S_{t+dt} = S_t + rS_t dt + \sigma S_t \sqrt{dt} Z \quad (1.5)$$

egyenlethez jutunk.

Generálhatjuk az árfolyam logaritmusát az Itó-lemma segítségével,

$$d \ln S_t = \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t. \quad (1.6)$$

Ekkor az Euler-Maruyama diszkretizáció erre az 1.3 egyenletet használva:

$$\begin{aligned} \ln S_{t+dt} &= \ln S_t + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma \sqrt{dt} Z \\ S_{t+dt} &= S_t \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma \sqrt{dt} Z \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

ahol $dt = t_i - t_{i-1}$

1.1.2. Euler-Maruyama módszer Heston-modellre

Heston modell egy olyan sztochasztikus differenciálegyenlettel írja le a részvényárat, ahol a volatilitás is valamilyen egyfaktoros sztochasztikus differenciálegyenletnek tesz eleget. Feltehető, hogy a két véletlen változó között valamilyen korreláció adott. Kétváltozós sztochasztikus folyamat S_t részvényárral és v_t volatilitással:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t} \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t) + \sigma \sqrt{v_t} dW_{2,t}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

ahol $E[dW_{1,t} dW_{2,t}] = \rho dt$

Először v_t -t kell diszkretizálnunk, ehhez felírjuk az integrálformáját.

$$v_{t+dt} = v_t + \int_t^{t+dt} \kappa(\theta - v_u) du + \int_t^{t+dt} \sigma \sqrt{v_u} dW_{2,u}$$

A két integrált hasonlóképpen közelítjük, mint a fejezet elején.

$$\int_t^{t+dt} \kappa(\theta - v_u) du \approx \kappa(\theta - v_t) dt$$

$$\int_t^{t+dt} \sigma \sqrt{v_u} dW_{2,u} \approx \sigma \sqrt{v_t} (W_{2,t+dt} - W_{2,t}) = \sigma \sqrt{v_t} dt Z_v.$$

Z_v standard normális eloszlású, valamint v_t -t ismerjük t -ben, de v_{t+dt} -t nem. Ezt felírhatjuk az előző közelítések segítségével.

$$v_{t+dt} = v_t + \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dt Z_v$$

A negatív volatilitás elkerülése végett v_t helyett írhatunk $v_t^+ = \max(0, v_t)$ összefüggést, (ez az ún. „teljes csonkolás" módszer) vagy abszolút értéket, azaz legyen $v_t^+ = |v(t)|$ (ez a „tükörkép" módszer). Ezekről a módszerekről és generálás lépéseiről bővebben olvashatunk a [10] cikkben.

Hasonló módon folytassuk az S_t folyamat diszkretizálásával. Felírjuk integrálformában S_{t+dt} -t az 1.8 egyenletek felhasználásával.

$$S_{t+dt} = S_t + r \int_t^{t+dt} S_u du + \int_t^{t+dt} \sqrt{v_t} S_u dW_{1,u}$$

Euler-Maruyama diszkretizációs közelítésekkel az S_{t+dt} előzőekhez hasonló módon felírható.

$$S_{t+dt} = S_t + r S_t dt + \sqrt{v_t} dt S_t Z_s,$$

ahol Z_s standard normális eloszlású valószínűségi változó, aminek korrelációja Z_v -vel ρ .

Ebben az esetben is fel tudunk írni egy sztochasztikus differenciálegyenletet az árfolyamat logaritmusára az Itó-lemma segítségével, ezt egyből integrálformában adjuk meg.

$$\ln S_{t+dt} = \ln S_t + \int_0^t \left(r - \frac{1}{2} v_u \right) du + \int_0^t \sqrt{v_u} dW_{1,u}.$$

Ha Euler-Maruyama diszkretizációs módszert használunk az $\ln S_t$ folyamatra, megkapjuk a következő összefüggést:

$$\begin{aligned} \ln S_{t+dt} &= \ln S_t + \left(r - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_u} (W_{1,t+dt} - W_{1,t}) \\ &= \ln S_t + \left(r - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t} dt Z_s. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ezután, ha az exponenciálisát vesszük mindkét oldalnak megkapjuk az alábbi egyenlőséget.

$$S_{t+dt} = S_t \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t dt} Z_s \right)$$

Negatív volatilitás elkerülése érdekében ugyanúgy használhatjuk a „teljes csonkolás” és „tükrökép” módszereket.

Végül tekintsük az (S_t, v_t) vagy $(\ln S_t, v_t)$ folyamat párokra ezt a diszkretizációs módszert. Ehhez adjuk meg a kezdeti értékeket, a részvényár S_0 és a volatilitás v_0 . Ismerjük t -ben a v_t és S_t értékét, ezekből szeretnénk megkapni a v_{t+dt} -t és S_{t+dt} -t az alábbi módon. (S_t, v_t) folyamat:

$$\begin{aligned} v_{t+dt} &= v_t + \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma \sqrt{v_t dt} Z_v \\ S_{t+dt} &= S_t + r S_t dt + \sqrt{v_t dt} Z_s. \end{aligned}$$

$(\ln S_t, v_t)$ folyamat:

$$\begin{aligned} v_{t+dt} &= v_t + \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma \sqrt{v_t dt} Z_v \\ S_{t+dt} &= S_t \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t dt} Z_s \right). \end{aligned}$$

Generálnunk kell Z_v és Z_s valószínűségi változókat ρ korrelációval, ehhez először Z_1 és Z_2 független standard normális eloszlású valószínűségi változókra van szükség. Ahhoz hogy a fent írt korreláció igaz legyen a két változónk között, definiáljuk őket a következők szerint, $Z_v = Z_1$ és $Z_s = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2$.

1.2. Milstein módszer

Ennél a módszernél olyan sztochasztikus differenciálegyenleteket vizsgálunk, ahol az együtthatók $\mu(S_t)$ és $\sigma(S_t)$, tehát csak S_t -től függ a folyamat, majd egyszerűsítve az írásmódot a következő sztochasztikus differenciálegyenlethez jutunk:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t \\ &= \mu_t dt + \sigma_t dW_t \end{aligned}$$

Megadjuk az integrálformát is.

$$S_{t+dt} = S_t + \int_t^{t+dt} \mu_s ds + \int_t^{t+dt} \sigma_s dW_s \quad (1.10)$$

A Milstein módszer pontosabb eredményre törekszik azáltal, hogy a $\mu_t = \mu(S_t)$ és $\sigma_t = \sigma(S_t)$ folyamatokra Itó-lemmát alkalmazva meghatározza a μ_t és σ_t változását.

$$\begin{aligned} d\mu_t &= \left(\mu'_t \mu_t + \frac{1}{2} \mu''_t \sigma_t^2 \right) dt + (\mu'_t \sigma_t) dW_t \\ d\sigma_t &= \left(\sigma'_t \mu_t + \frac{1}{2} \sigma''_t \sigma_t^2 \right) dt + (\sigma'_t \sigma_t) dW_t, \end{aligned}$$

ahol $\mu(s)$ és $\sigma(s)$ függvények s szerinti deriváltjait vesszük. Feltételeztük, hogy μ_t és σ_t nem függ közvetlenül t -től, ezért a t szerinti derivált nulla. A két együtthatót fel tudjuk írni integrálformában ($t < s < t + dt$).

$$\begin{aligned} \mu_s &= \mu_t + \int_t^s \left(\mu'_u \mu_u + \frac{1}{2} \mu''_u \sigma_u^2 \right) du + \int_t^s (\mu'_u \sigma_u) dW_u \\ \sigma_s &= \sigma_t + \int_t^s \left(\sigma'_u \mu_u + \frac{1}{2} \sigma''_u \sigma_u^2 \right) du + \int_t^s (\sigma'_u \sigma_u) dW_u \end{aligned}$$

Ha behelyettesítjük az 1.10 egyenletbe az előző integrálformákat, kapunk egy összefüggést S_{t+dt} -re

$$\begin{aligned} S_{t+dt} &= S_t + \int_t^{t+dt} \left(\mu_t + \int_t^s \left(\mu'_u \mu_u + \frac{1}{2} \mu''_u \sigma_u^2 \right) du + \int_t^s (\mu'_u \sigma_u) dW_u \right) ds + \\ &+ \int_t^{t+dt} \left(\sigma_t + \int_t^s \left(\sigma'_u \mu_u + \frac{1}{2} \sigma''_u \sigma_u^2 \right) du + \int_t^s (\sigma'_u \sigma_u) dW_u \right) dW_u. \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy ez az integrál értelmezhető legyen az utolsó tagnak jól definiálnak kell lennie. Mivel a szórások végesek, ezért a négyzet integrál is véges lesz.

Ha elhagyjuk $dsdu$ -s és $dsdW_u$ -s tagokat, mivel csak $o(dt)$ -sek, de $dW_u dW_s = \mathcal{O}(dt)$, így ezeket megtartjuk.

$$S_{t+dt} = S_t + \int_t^{t+dt} ds + \int_t^{t+dt} dW_s + \int_t^{t+dt} \int_t^s (\sigma'_u \sigma_u) dW_u dW_s \quad (1.11)$$

Az előző fejezetben látott módszer szerint becsüljük az utolsó integrált.

$$\begin{aligned} \int_t^{t+dt} \int_t^s (\sigma'_u \sigma_u) dW_u dW_s &\approx \sigma'_t \sigma_t \int_t^{t+dt} \int_t^s dW_u dW_s \\ &= \sigma'_t \sigma_t \int_t^{t+dt} (W_s - W_t) dW_s \\ &= \sigma'_t \sigma_t \left(\int_t^{t+dt} W_s dW_s - W_t W_{t+dt} + W_t^2 \right) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Ahhoz, hogy ezt az integrált meg tudjuk határozni, legyen $dY_t = W_t dW_t$. Ha Itó-lemmát alkalmazunk, könnyen megmutatható, hogy $Y_t = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$, tehát

$$\int_t^{t+dt} W_s dW_s = Y_{t+dt} - Y_t = \frac{1}{2}W_{t+dt}^2 - \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}dt. \quad (1.13)$$

Visszatérve az 1.12-es egyenlethez és behelyettesítve az előbb kiszámoltat megkapjuk az 1.11-ban szereplő utolsó integrál becslését.

$$\begin{aligned} \int_t^{t+dt} \int_t^s (\sigma'_u \sigma_u) dW_u dW_s &\approx \frac{1}{2} \sigma'_t \sigma_t [(W_{t+dt} - W_t)^2 - dt] \\ &= \frac{1}{2} \sigma'_t \sigma_t [(\Delta W_t)^2 - dt], \end{aligned}$$

ahol $\Delta W_t = W_{t+dt} - W_t$, amely eloszlásban megegyezik $\sqrt{dt}Z$ -vel és Z egy standard normális eloszlású valószínűségi változó. Kombinálva az 1.11 és 1.13 egyenleteket, megkapjuk a Milstein módszert.

$$S_{t+dt} = S_t + \mu_t dt + \sigma_t \sqrt{dt} Z + \frac{1}{2} \sigma'_t \sigma_t dt (Z^2 - 1) \quad (1.14)$$

1.2.1. Milstein módszer Black-Sholes modellre

A Black-Sholes modell 1.4 egyenletéből a $\mu(S_t) = rS_t$, $\sigma(S_t) = \sigma S_t$ és $\sigma'(S_t) = \sigma$. Ezt kihasználva fel tudjuk írni a Milstein féle diszkretizációt erre a modellre az 1.14 alapján.

$$S_{t+dt} = S_t + rS_t dt + \sigma S_t \sqrt{dt} Z + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t dt (Z^2 - 1),$$

ahol tulajdonképpen az Euler-Maruyama módszerhez képest (1.5) egy korrekciós taggal bővül az egyenlet.

A részvényár folyamat logaritmusára is alkalmazható ez a módszer, az 1.6 egyenletből $\mu(S_t) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)$ és $\sigma(S_t) = \sigma$, azaz $\mu'_t = \sigma'_t = 0$, ezek alapján a Milstein diszkretizáció a következő:

$$\ln S_{t+dt} = \ln S_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma \sqrt{dt} Z,$$

ami megegyezik a 1.7 összefüggéssel, tehát mondhatjuk, hogy a Black-Sholes modell esetén S_t diszkretizációja javul, míg $\ln S_t$ esetében a két módszer ugyanazt az összefüggést eredményezi.

1.2.2. Milstein módszer Heston-modellre

Kezdjük a Heston-modell Milstein módszer szerinti diszkretizációt azzal, hogy v_t -re vonatkozó összefüggést írjuk fel. Ehhez az együtthatókat a következőképpen adjuk meg, $\mu(v_t) = \kappa(\theta - v_t)$, $\sigma(v_t) = \sigma\sqrt{v_t}$ és $\sigma'(v_t) = 1/2\sqrt{v_t}$. Ezek után, ha felhasználjuk az 1.14 egyenletet, akkor felírhatjuk a kívánt összefüggést.

$$v_{t+dt} = v_t + \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dtZ_v + \frac{\sigma^2}{4\sqrt{v_t}}dt(Z_v^2 - 1) \quad (1.15)$$

Itt is ugyanolyan módszerekkel küszöbölhető ki a negatív volatilitás, mint az Euler-Maruyama diszkretizációnál. (Teljes csonkolás és tükörkép módszer)

Következőkben nézzük az S_t és $\ln S_t$ folyamatok diszkretizáltjait. Itt is megadjuk az együtthatókat, $\mu(S_t) = rS_t$, $\sigma(S_t) = \sqrt{v_t}S_t$ és $\sigma'(S_t) = \sqrt{v_t}S_t$, majd az 1.14 egyenletből kapjuk az

$$S_{t+dt} = S_t + rS_tdt + \sqrt{v_t}dtS_tZ_s + \frac{1}{2}S_tv_tdt(Z_s^2 - 1).$$

Részvényár logaritmusát tekintve, ahol az Itó-lemmát használjuk (1.9), ennek a folyamatnak is fel tudjuk írni a diszkretizációját. Az együtthatók itt $\mu(S_t) = (r - \frac{1}{2}v_t)$ és $\sigma(S_t) = \sqrt{v_t}$, tehát a μ és σ t szerinti deriváltja nulla. Mivel v_t -t ismerjük t -ben, ez konstansként kezelendő, így felhasználva az 1.14 egyenletet, megkapjuk az alábbi egyenletet.

$$\ln S_{t+dt} = \ln S_t + \left(r - \frac{1}{2}v_t\right)dt + \sqrt{v_t}dtZ_s.$$

Azt látjuk, hogy ugyanaz az eset áll fenn, mint a Black-Sholes modell esetén, hogy $\ln S_t$ diszkretizálásánál a Milstein módszer megegyezik az Euler-Maruyama módszerrel, míg S_t esetében megjelenik egy plusz tag. A részvényár folyamatra vonatkozó egyenletet az alábbi módon írhatjuk fel.

$$S_{t+dt} = S_t \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}v_t\right)dt + \sqrt{v_t}dtZ_s\right).$$

Végül tekintsük (S_t, v_t) és $(\ln S_t, v_t)$ folyamatpárokat, adjuk meg ezeket is diszkretizációs formában. Először v_t -ből kiindulva írjuk fel v_{t+dt} -t az 1.15 egyenlet alapján, majd S_{t+dt} -t. (S_t, v_t) folyamat:

$$\begin{aligned} v_{t+dt} &= v_t + \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dtZ_v + \frac{1}{4}\sigma^2dt(Z_v^2 - 1) \\ S_{t+dt} &= S_t + rS_tdt + \sqrt{v_t}dtS_tZ_s + \frac{1}{4}S_t^2dt(Z_s^2 - 1). \end{aligned}$$

$(\ln S_t, v_t)$ folyamat:

$$v_{t+dt} = v_t + \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dZ_v + \frac{1}{4}\sigma^2 dt(Z_v^2 - 1)$$

$$S_{t+dt} = S_t \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}v_t\right)dt + \sqrt{v_t}dZ_s\right).$$

Z_v és Z_s generálása megegyezik az előző módszerben leírtakkal., Z_1 és Z_2 standard normális eloszlású valószínűségi változók, $Z_s = Z_1$, valamint $Z_v = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2$.

1.3. Konvergencia

Ebben a részben az [2] alapján megvizsgáljuk az elméleti modell és a diszkrétizált modellek közötti konvergenciát. Ehhez először definiáljuk az erős illetve gyenge konvergenciát. Vezessük be a következő jelölést:

$$S_{\bar{t}}^{dt} = S_t + \frac{\bar{t} - t}{dt}(S_{t+dt} - S_t), \text{ ha } \bar{t} \in [t, t + dt).$$

Az itt szereplő S_t továbbra is az 1.1 egyenletben megadott differenciálegyenletnek eleget tevő folyamat.

Tekintsük az általános sztochasztikus differenciálegyenletekre vonatkozó definíciókat.

1.3.1. Definíció. *Egy numerikus módszer erősen konvergens, ha*

$$\lim_{dt \rightarrow 0} E \left(\sup_{t \in [0, T]} |S_t - S_{\bar{t}}^{dt}| \right) = 0.$$

1.3.2. Definíció. *Egy numerikus módszer gyengén konvergens, ha*

$$\lim_{dt \rightarrow 0} |Eg(S_T) - Eg(S_T^{dt})| = 0,$$

minden g polinomra.

Ahhoz, hogy el tudjuk dönteni, hogy az általunk vizsgált diszkrétizációs módszerek mennyire adnak jó közelítést, bevezetjük a konvergencia rendeket.

1.3.3. Definíció. *Egy numerikus módszer erősen konvergens γ rendben, ha*

$$E \left(\sup_{t \in [0, T]} |S_t - S_{\bar{t}}^{dt}| \right) < K_T(dt)^\gamma,$$

ahol K_T konstans függ T -től és a megadott differenciálegyenlettől.

1.3.4. Definíció. *Egy numerikus módszer gyengén konvergens, ha*

$$\lim_{dt \rightarrow 0} |Eg(S_T) - Eg(S_T^{dt})| < K_T(dt)^\gamma,$$

minden g polinomra. A K_T konstans függ T -től, g -től és a megadott differenciálegyenlettől.

A gyenge konvergencia európai opciók esetén hasznos, mert csak T időponttól függ, ebből kifolyólag az erős konvergencia útvonal függő opciók esetén érdekes.

A rendbeli konvergencia úgy értelmezhető, hogy a γ rendű numerikus módszer esetén k -szor kisebb lépéseket kell tennünk ahhoz, hogy k^γ -val csökkenjen a becslési hiba. Például $\gamma = 1$ -nél 100-zal kisebb lépés esetén 100-zal csökken a becslési hiba. Ennél érdekesebb a $\gamma = \frac{1}{2}$ rendű eset, ha 100-zal szeretnénk csökkenteni a becslési hibát, akkor $100^2 = 10000$ -rel kisebb lépéseket kell tennünk.

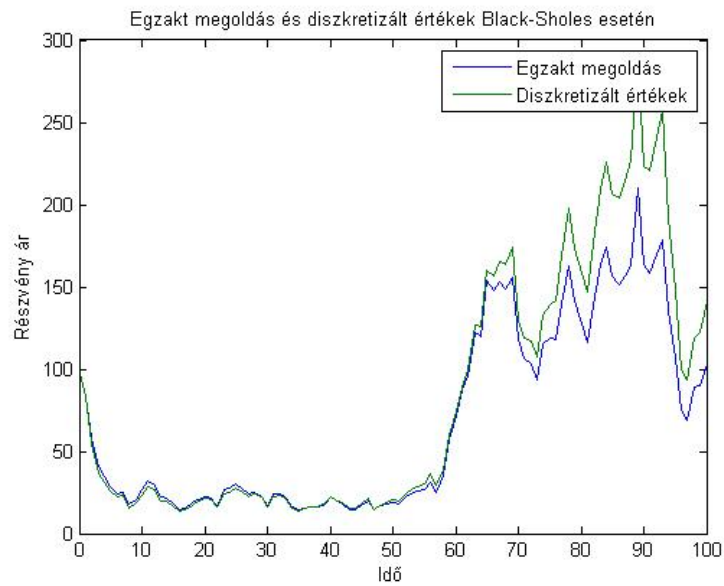
Euler-Maruyama és Milstein módszerek esetén ismert tételre hivatkozva [9] cikk alapján, az alábbi konvergenciákra vonatkozó tételeket tekintsük bizonyítás nélkül.

1.3.5. Tétel. *Euler-Maruyama módszer erősen konvergens $\gamma = 0,5$ rendben és gyengén konvergens $\gamma = 1$ rendben.*

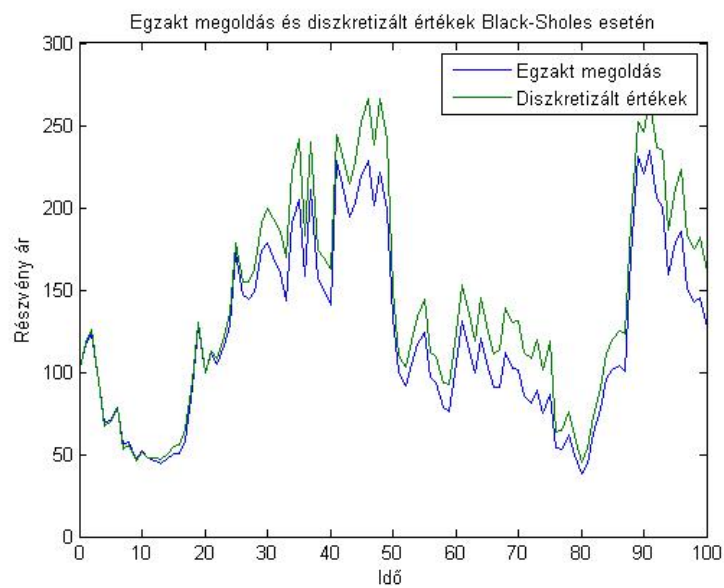
1.3.6. Tétel. *Milstein módszer erősen és gyengén is konvergens $\gamma = 1$ rendben.*

Nézzük meg Black-Sholes modell esetén, hogy bizonyos realizációkra mennyire különbözik az explicit megoldás a diszkretizált értékektől. Ehhez írtunk egy Matlab kódot, amely a C függelékben szerepel. Két realizációra következő ábrák jöttek ki.

1.1. ábra. Első realizáció



1.2. ábra. Második realizáció



Látható a két ábrán, hogy kicsi eltérés van a diszkrétizált értékek és az egzakt megoldás között.

2. fejezet

Bates-modell

Ebben a fejezetben a Bates-modellt mutatjuk be a [3] és [4] cikkek alapján. Ez a modell tulajdonképpen ugyanúgy egy sztochasztikus volatilitásmodell. A Heston-modelltől annyiban különbözik, hogy a részvényárfolyamathoz hozzáadunk egy ugró tagot. A Bates-modell segítségével az alábbi összefüggéssel meg tudjuk adni a részvényár fejlődését.

$$S_t = S_0 e^{X_t},$$

ahol X a loghozam és v a volatilitás, amelyek a következő sztochasztikus differenciálegyenletnek tesznek eleget:

$$\begin{aligned} dX_t &= \left(r - \frac{1}{2} dv_t \right) dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t} + dZ_t, \quad X_0 = 0 \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t) + \sigma \sqrt{v_t} dW_{2,t}, \quad v_0 = y > 0. \end{aligned}$$

ahol $W_{1,t}$ és $W_{2,t}$ a korábbiakhoz hasonló módon két Wiener-folyamat ρ korrelációval, Z_t pedig egy összetett Poisson típusú Lévy-folyamat. Itt nem specifikáljuk a Bates-modell, általánosságban írjuk fel az ugró tagot.

A paraméterekre a következő feltételezések adottak:

$$r \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \rho \leq 1, \quad \kappa, \theta, \sigma > 0, \quad \sigma^2 \geq 2\kappa\theta.$$

Az utolsó egyenlőtlenségre azért van szükség, hogy a volatilitás folyamat(v_t) ne legyen nulla. Feltesszük azt is, hogy $E(Z_t^2 < \infty)$, ezek alapján használhatjuk a Lévy-Khincsinere reprezentációs formulát a Z folyamatra

$$\xi(z) = \eta z + \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} - 1 - zxU(dx),$$

ahol $\eta = E(Z_1)$ és U Lévy-mértéke Z -nek. Jelöljük $\mu(dx, dt)$ -vel az ugrás mértéket és $\nu(dx, dt)$ a megjósolható kompenzátor, ekkor $\nu(dx, dt) = U(dx)dt$, amivel ki tudjuk fejezni Z_t folyamatot.

$$Z_t = \eta t + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} x(\mu - \nu)(dx, ds).$$

Ezek alapján fel tudjuk írni a sztochasztikus differenciálegyenletet az S_t részvényár folyamatra.

$$dS_t = (r + \xi(1))S_{t-}dt + S_{t-}\sqrt{v_t}dW_{1,t} + \int_{-\infty}^{\infty} S_{t-}(e^x - 1)(\mu - \nu)(dx, ds). \quad (2.1)$$

2.0.1. Megjegyzés. Ha $Z = 0$, akkor pont a Heston-modellt kapjuk meg, tehát a Bates-modell egy kiterjesztése a Heston sztochasztikus volatilitás modellnek ugrásokkal.

2.0.2. Lemma. *Ha feltesszük, hogy $r + \xi(1) = 0$, akkor a részvényár felírható 2.1 alapján, és az S_t folyamat egy lokális martingál lesz.*

Bizonyítás. Ez az Itó-formulából következik, kinulláztuk a driftes tagot. \square

3. fejezet

Európai opció árazás

Heston-modellel és Bates-modellel

Ebben a fejezetben [5], [6], [7] és [8] cikkek alapján megnézzük, hogy tudjuk a két általunk vizsgált modellel az opciós árat megbecsülni. Tekintsük azt az árazási formulát, ami megadja az európai típusú opció árát.

$$C_0 = rS_0\Pi_1 - e^{-r(T-t)}K\Pi_2, \quad (3.1)$$

ahol C_0 a *call* ára ma (0. időpont), S_0 az alaptermék jelenlegi ára, K a kötési árfolyam, valamint r a kockázatmentes kamatláb. Ahhoz, hogy ezzel számolni tudjunk, adjuk meg a Π_j -t az alábbi módon.

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\omega \log(K)} \phi(\omega - i)}{i\omega \phi(-i)} \right) d\omega,$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\omega \log(K)} \phi(\omega)}{i\omega \phi(i\omega)} \right) d\omega,$$

ahol ϕ jelöli a karakterisztikus függvényt, $\operatorname{Re}()$ pedig a zárójelben szereplő kifejezés valós részét.

Ahhoz, hogy ezzel a képlettel számoljunk, szükségünk lesz a két modell karakterisztikus függvényeinek a paraméterbecslésére. Mivel a piacról vett adatokat használjuk a modelljeinket diszkretizálni kell. Továbbá, amikor a 3.1 képletével számolunk, a bonyolult integrálok közelítéséhez szükségünk van egy numerikus eljárásra, a dolgozatban Gauss-Laquerre kvadraturát fogjuk alkalmazni.

3.1. Heston-modell

3.1.1. Karakterisztikus függvény

Az ilyen sztochasztikus volatilitásmodellek egyedi karakterisztikus függvénnyel rendelkeznek, amely leírja a sűrűségfüggvényét a modellnek. Ahhoz, hogy az 3.1 egyenletbe be tudjunk helyettesíteni, szükségünk lesz egy explicit képlettel megadott karakterisztikus függvényre, ehhez Itó-lemmát fogunk alkalmazni.

A Heston sztochasztikus volatilitás modellt három változó adja meg (X_t , v_t és t), ezért háromváltozós Itó-lemmát kell alkalmaznunk. Most a Heston-modell sztochasztikus differenciálegyenleteit az alábbi módon írjuk fel.

$$\begin{aligned}dX_t &= \mu_t dt + \sigma_t dW_{1,t} \\ dv_t &= \mu_v dt + \sigma_v dW_{2,t},\end{aligned}$$

$f(X_t, v_t, t)$ folytonos kétszer deriválható függvény. Ebben az esetben is $W_{1,t}$ és $W_{2,t}$ között ρ korrelációt tételezzünk fel. Ahhoz, hogy meghatározzuk az $f(X_t, v_t, t)$ függvényt, adjuk meg $df(X_t, v_t, t)$ dinamikát Itó-kalkulus segítségével.

$$\begin{aligned}df(X_t, v_t, t) &= \left[\mu_x f_x + \mu_v f_v + f_t + f_{xv} \sigma_x \sigma_v \rho + \frac{1}{2} (f_{xx} \sigma_x^2 + f_{vv} \sigma_v^2) \right] dt \\ &\quad + (\sigma_x f_x) dW_{1,t} + (\sigma_v f_v) dW_{2,t}.\end{aligned}$$

Ez a levezetés hosszas számítást igényel, a [6] cikk „A” függelékében (13.-14. oldal) megtalálható a precíz lépésenkénti számolás. A dolgozatban ezt nem tüntetjük fel, mert a paraméterbecsléshez nincs rá szükség.

Mivel X_t , v_t és t deriváltjait ismerjük, ahol X_t és v_t egy-egy sztochasztikus differenciálegyenletből adódik, a Heston-modell karakterisztikus függvény pedig X_t , v_t és t függvénye, így Itó-lemma felhasználásával meghatározzuk a karakterisztikus függvény derivált formáját. Feltehető, hogy a karakterisztikus függvényt fel tudjuk írni az alábbi affin formulában.

$$f(X_t, v_t, t) = e^{A(T-t) + B(T-t)X_t + C(T-t)v_t + i\omega X_t}.$$

Legyen $T - t = \tau$, ezek alapján meghatározható a karakterisztikus függvény, ami hosszú számolás alapján jön ki, amely a [6] cikk „B” függelékében (15.-20. oldal)

található.

$$\begin{aligned}\phi_{Heston} &= e^{A(\tau)+B(\tau)X_t+C(\tau)v_t+i\omega X_t} \\ A(\tau) &= ri\omega\tau + \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left[-(\rho\sigma i\omega - \kappa - M)\tau - 2\ln\left(\frac{1 - Ne^{M\tau}}{1 - N}\right) \right] \\ B(\tau) &= 0 \\ C(\tau) &= \frac{(e^{M\tau} - 1)(\rho\sigma i\omega - \kappa - M)}{\sigma^2(1 - Ne^{M\tau})},\end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}M &= \sqrt{(\rho\sigma i\omega - \kappa)^2 + \sigma^2(i\omega + \omega^2)} \\ N &= \frac{\rho\sigma i\omega - \kappa - M}{\rho\sigma i\omega - \kappa + M}.\end{aligned}$$

Tehát a Heston-modell karakterisztikus függvényéhez 5 paraméterre (r , σ , κ , ρ és θ) van szükségünk, ahhoz hogy használjuk az opció árazási formulát (3.1).

Ha egy eszköz adatait ismerjük, akkor bizonyos paraméterbecslési technikákkal becsülhető ezen változók értéke.

3.1.2. Momentum módszer

Egy olyan paraméterbecslési eljárást mutatunk be, amelyben a momentum módszert használjuk, ehhez vezessük be a Q_{t+1} valószínűségi változót. Legyen $Q_{t+1} = \frac{S_{t+1}}{S_t}$, tehát egyenlettel felírva

$$Q_{t+1} = 1 + rdt + \sqrt{v_t}Z_s,$$

ahol Z_s sztenderd normális eloszlású valószínűségi változó. Generáláshoz pedig az első fejezetben leírtak szerint Z_v helyére Z_1 -et és Z_s helyére pedig $\rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2}Z_2$ -t írunk, Z_2 is standard normális eloszlású. Így megkapjuk a (minimálisan módosított) diszkretizált rendszert.

$$\begin{aligned}Q_{t+1} &= 1 + rdt + \sqrt{v_t}(\rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2}Z_2) \\ v_{t+1} &= v_t + \kappa(\theta - v_t) + \sigma\sqrt{v_t}Z_1.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Legyen Q_{t+1} j . momentuma az $E(Q_{t+1}^j)$, jelöljük ezt μ_j -vel. A paraméterbecsléshez a következő lépéseket kell megtennünk:

1. m momentumra van szükségünk, ha m paramétert szeretnénk becsülni.

2. Az adatsorból adjuk meg a minta momentumait. A mintából számolt j . momentum esetén legyen $\hat{\mu}_j$ a megfigyelések j . hatványának az átlaga.

$$\hat{\mu}_j = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Q_{t+1}^j$$

3. Legyen egyenlő a j . momentum a mintából számolt j . momentummal, így kapunk m egyenletet és m ismeretlent.
4. Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert, ennek eredményeként kapjuk meg a becsült paramétereket. Jelöljük úgy, hogy az α becsült paraméter legyen $\hat{\alpha}_{MOM}$.

Amikor ezt a módszert a részvényárazakon nézzük, akkor S_t értékei adottak, és ebből megadhatjuk a Q_{t+1} valószínűségi változót. Emlékezzünk, hogy Q_{t+1} -et $\frac{S_{t+1}}{S_t}$ -vel jeöltük. Szeretnénk Q_{t+1} -re öt momentumot felírni, hisz r , σ , κ , ρ és θ paraméterekre van szükségünk.

A paraméter becsléshez az első, második, negyedik és ötödik momentumokat írjuk fel, a harmadikat azért hagyjuk el, mert abban csak μ és θ szerepel, amelyeket már az első két momentumból megkaptunk.

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 + r \\ \mu_2 &= (r + 1)^2 + \theta \\ \mu_4 &= \frac{1}{\kappa(\kappa - 2)} (\kappa^2 r^4 + 4\kappa^2 r^3 + 6\kappa^2 r^2 \theta - 2\kappa r^4 + 6\kappa^2 r^2 + 12\kappa^2 r \theta \\ &\quad + 3\kappa^2 \theta^2 - 8\kappa r^3 - 12\kappa r^2 \theta + 4\kappa^2 r + 6\kappa^2 \theta - 12\kappa r^2 - 24\kappa r \theta \\ &\quad - 6\kappa \theta^2 - 3\sigma^2 \theta + \kappa^2 - 8\kappa r - 12\kappa \theta - 2\kappa) \\ \mu_5 &= \frac{1}{\kappa(\kappa - 2)} (\kappa^2 r^5 + 5\kappa^2 r^4 + 10\kappa^2 r^3 \theta - 2\kappa r^5 + 10\kappa^2 r^3 + 30\kappa^2 r^2 \theta \\ &\quad + 15\kappa^2 r \theta^2 - 10\kappa r^4 - 20\kappa r^3 \theta + 10\kappa^2 r^2 + 30\kappa^2 r \theta + 15\kappa^2 \theta^2 \\ &\quad - 20\kappa r^3 - 60\kappa r^2 \theta - 30\kappa r \theta^2 - 15r\sigma^2 \theta + 5\kappa^2 r + 10\kappa^2 \theta - 20\kappa r^2 \\ &\quad - 60\kappa r \theta - 30\kappa \theta^2 - 15\sigma^2 \theta + \kappa^2 - 10\kappa r - 20\kappa \theta - 2\kappa) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ezekhez a képletekhez szükségünk van a v_t és $\frac{S_{t+1}}{S_t}$ momentumok kiszámolására, a pontos levezetés [6] cikk „C” függelékében (21.-25. oldal) található. Tehát 4 egyenletünk van 4 ismeretlenre, ahol sajnos ρ nem jelenik meg a momentumok számolása során. Korábban megmutatták, hogy a ρ nem szerepel az első 70 momentumban,

ezért az a sejtés, hogy később sem szerepel. Így a momentum módszer nem tűnik jó választásnak, de az adatainkból lehet, hogy tudunk becslést adni majd a korrelációra.

Ezek alapján az r , σ , κ és θ paraméterek becslését megkapjuk a 3.3 képletek alapján. $(\hat{r}_{MOM}, \hat{\theta}_{MOM}, \hat{\kappa}_{MOM}$ és $\hat{\sigma}_{MOM})$

3.1.3. Maximum Likelihood becslés

A második paraméterbecslési eljárásunk a maximum likelihood becslés. A következő lépések segítségével tudjuk a paramétereket becsülni ezzel az eljárással:

1. Adjuk meg a likelihood függvényt az adatsorunk alapján. A likelihood függvényre úgy tekintünk, mint egy termék adott sűrűségfüggvénnyel, ami a megfigyelt véletlen változókból adódik. $L(r, \sigma, \kappa, \theta, \rho)$ a likelihood függvény és $f(Q_{t+1}, v_{t+1})$ együttes sűrűségfüggvénye Q_{t+1} -nek és v_{t+1} -nek,

$$L(r, \sigma, \kappa, \theta, \rho) = \prod_{t=1}^n f(Q_{t+1}, v_{t+1} | r, \sigma, \kappa, \theta, \rho).$$

2. Az egyszerűbb számolás érdekében vegyük a természetes alapú logaritmusát, ekkor kapjuk $l(r, \sigma, \kappa, \theta, \rho)$ loglikelihood függvényt.

$$l(r, \sigma, \kappa, \theta, \rho) = \sum_{t=1}^n \ln f(Q_{t+1}, v_{t+1} | r, \sigma, \kappa, \theta, \rho).$$

3. Ahhoz, hogy optimalizáljuk a paramétereket, vegyük az adott paraméterek szerinti parciális deriváltjait a loglikelihood függvénynek, ezeket tegyük egyenlővé nullával és oldjuk meg az így kapott egyenletrendszert. Így eljutunk a kívánt becsült paraméterekhez, legyen például α becslése $\hat{\alpha}_{MLB}$.

A maximum likelihood becsléshez meg kell határoznunk az együttes sűrűségfüggvényt ($f(Q_{t+1}, v_{t+1})$). Előző részben leírt diszkrétizált Q_{t+1} és v_{t+1} -et használjuk(3.2). Z_s és Z_v továbbra is standard normális eloszlású valószínűségi változó, tehát $Q_{t+1} \sim N(1 + r, v_t)$ és $v_{t+1} \sim N(v_t + \kappa(\theta - v_t), \sigma^2 v_t)$. Továbbá Z_s és Z_v korrelációja ρ , így

a Q_{t+1} és v_{t+1} korrelációja is ugyanez. Ezen tulajdonságok alapján

$$f(Q_{t+1}, v_{t+1}) = \frac{1}{2\pi\sigma v_t \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{(Q_{t+1} - 1 - r)^2}{2v_t(1-\rho^2)} + \frac{\rho(Q_{t+1} - 1 - r)(v_{t+1} - v_t - \theta\kappa + \kappa v_t)}{v_t\sigma(1-\rho^2)} - \frac{(v_{t+1} - v_t - \theta\kappa + \kappa v_t)^2}{2\sigma^2 v_t(1-\rho^2)}\right].$$

A likelihood függvény meghatározásához ennek az együttes sűrűségfüggvénynek a produktumát kellene kiszámolni, de mi a loglikelihood függvény alapján szeretnénk becsülni, így írjuk át az alábbiak szerint:

$$l(r, \sigma, \kappa, \theta, \rho) = \sum_{t=1}^n \left(-\ln(2\pi) - \ln(\sigma) - \ln(v_t) - \frac{1}{2}\ln(1-\rho^2) - \frac{(Q_{t+1} - 1 - r)^2}{2v_t(1-\rho^2)} + \frac{\rho(Q_{t+1} - 1 - r)(v_{t+1} - v_t - \theta\kappa + \kappa v_t)}{v_t\sigma(1-\rho^2)} - \frac{(v_{t+1} - v_t - \theta\kappa + \kappa v_t)^2}{2\sigma^2 v_t(1-\rho^2)} \right).$$

Következő lépésként meg kell határoznunk a részvényhozamot és az eszköz varianciájának értékét ahhoz, hogy optimalizáljuk a paramétereket. A probléma az, hogy a volatilitás látens változó (azaz nem megfigyelhető), de becsülhetjük a variancia vektor értékét az adatainkból. Emlékezzünk, hogy Q_{t+1} egy normális eloszlású valószínűségi változó v_t szórásnégyzettel. Annak érdekében, hogy becsüljük v_t -t t -ben, határozzuk meg Q_{t+1} varianciáját t időben, így megkapjuk v_t folyamatot és ezzel v_{t+1} -et is. Ezt behelyettesítjük a loglikelihood függvénybe, majd valamilyen programot használva megoldjuk a korábban felírt egyenletrendszert, amivel megkapjuk az öt becsült paramétert. (\hat{r}_{MLB} , $\hat{\theta}_{MLB}$, $\hat{\rho}_{MLB}$, $\hat{\kappa}_{MLB}$ és $\hat{\sigma}_{MLB}$)

3.2. Bates-modell

Ahhoz, hogy opciót árazzunk Bates-modell segítségével át kell írunk a második fejezetben definiált elméleti X_t folyamatot S_t részvényár folyamatra, hisz a piacon ez a megfigyelhető adat, és ezzel tudunk számolni vagy becsülni. Ez a felírás a [4] és [8] cikkben szerepel.

$$dS_t = (r - \lambda\mu_j)S_t dt + \sqrt{v_t}S_t dZ_s + J_t S_t dN_t$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}Z_t,$$

ahol N_t standard Poisson folyamat λ intenzitással és $(J_i)_{i \geq 1}$ független azonos eloszlású valószínűségi változó, eloszlása pedig normális γ várható értékkel és σ_j^2 szórással, ahol $\gamma = \ln(1 + \mu_j) - \frac{\sigma_j^2}{2}$. Ebből következik, hogy az ugrásnagyság logaritmus $\ln(1 + J_i) \sim N(\gamma, \frac{\sigma_j^2}{2})$. Ez az ugró tag lehetne más is, most így specifikáljuk és ezzel számolunk a későbbiekben.

3.2.1. Karakterisztikus függvény

A Bates-modell karakterisztikus hasonlóan felírható, mint a Heston-modell esetén.

$$\phi_{Bates} = e^{A+B+C+D}$$

ahol

$$\begin{aligned} A &= i\omega s_0 + i\omega r\tau \\ B &= \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left((\kappa - \rho\sigma i\omega - \kappa - M)\tau - 2\ln \left(\frac{1 - Ne^{M\tau}}{1 - N} \right) \right) \\ C &= \frac{v_0(e^{M\tau} - 1)(\rho\sigma i\omega - \kappa - M)}{\sigma^2(1 - Ne^{M\tau})} \\ D &= -\lambda\mu_j i\omega\tau + \lambda\tau \left((1 + \mu_j)^{i\omega} e^{0,5\sigma_j^2 i\omega(i\omega-1)\tau} \right), \end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{(\rho\sigma i\omega - \kappa)^2 + \sigma^2(i\omega + \omega^2)} \\ N &= \frac{\rho\sigma i\omega - \kappa - M}{\rho\sigma i\omega - \kappa + M}. \end{aligned}$$

Mivel az ugrásokat egymástól függetlennek feltételeztük, a karakterisztikus függvény annyiban tér el a Heston-modell karakterisztikus függvényétől, hogy bővül egy ugrásos taggal. Tehát

$$\phi_{Bates} = \phi_{Heston} e^D.$$

3.2.2. Becslési módszer

Bates-modell esetén kicsit nehezebb dolgunk van a karakterisztikus függvény paramétereinek becslésénél, mint a Heston-modell esetén, hisz itt megjelennek ugró

tagok, amelyeknek a várható értékével, momentumaival vagy együttes sűrűségfüggvényével nehezen tudnánk számolni. Ezért a [7] cikkben található becslési módszert fogjuk alkalmazni.

Adjunk kezdeti értékeket θ -nak és v_t -nek, majd két lépéses iteráció alkalmazásával keressük meg az optimális paramétereket.

1. Adott paraméterek mellett (θ), oldjuk meg a következő optimalizációs problémát.

$$\hat{v}_t = \operatorname{argmin} \sum_{j=1}^{K_t} \frac{(C_{j,t} - C_j(\theta, v_t))^2}{Vega_{j,t}^2} \quad t = 1, 2, \dots, T$$

ahol $C_{j,t}$ a j . kötési árfolyam mellett t . napon a piaci ár, $C_j(\theta, v_t)$ pedig a megfelelő modelltől kiszámított ár. Továbbá K_t lehetséges kötési árfolyamok száma t . napon. $Vega_{j,t}$ pedig a Black-Sholes modelltől számított volatilitás érzékenység.

2. Az első lépésből becsültünk v_t -t, ezt alkalmazva becsüljük a paramétereket az alábbi módon.

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin} \sum_{j,t}^K \frac{(C_{j,t} - C_j(\theta, v_t))^2}{Vega_{j,t}^2}$$

ahol $K = \sum_{t=1}^T K_t$.

Ezt a két lépést iteráljuk, addig amíg a 2. lépésben jelentős javulást tapasztalunk. Természetesen alkalmazás során adhatunk meg maximális iterációs lépésszámot.

4. fejezet

Opció árazás valós piaci adatok alapján

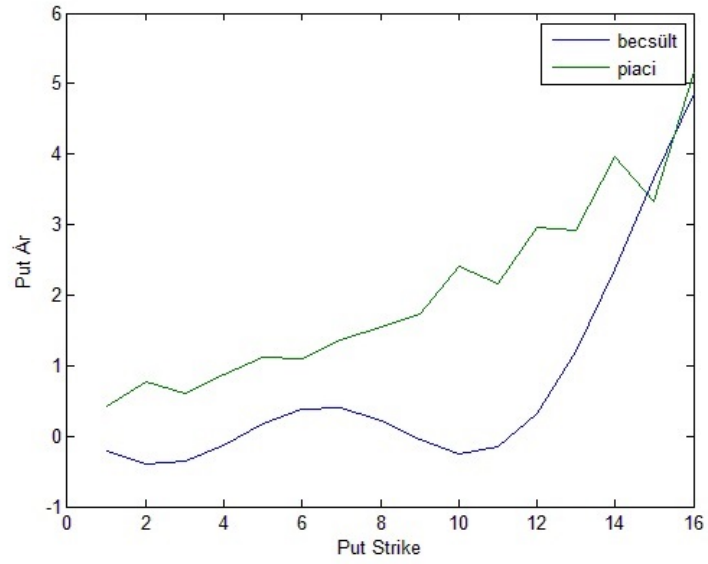
Ebben a fejezetben a Heston és a Bates modellek alapján készítünk becslést az opciós árra. Megtesszük ezt mind *call* mind *put* európai típusú opciók esetén. Két fajta árra látunk majd becslést, egyik amikor a valós piaci adatokra próbálunk illeszteni, másik pedig, amikor az implicit volatilitásból számoljuk a piaci árat Black-Sholes modell alapján, és ezekre az adatokra illesztjük az elméleti modelljeinket.

Szakedolgozatomban a DIA részvényével foglalkozunk, DIA egy spanyol supermarket áruház lánc, 6914 üzletet üzemeltet világszerte. Ez a vállalat 1979-ben alakult, és 2012 január 2.-án kerül a madridi részvény piacra. A becsléshez az adatokat a <https://beta.finance.yahoo.com/> oldalról gyűjtöttük.

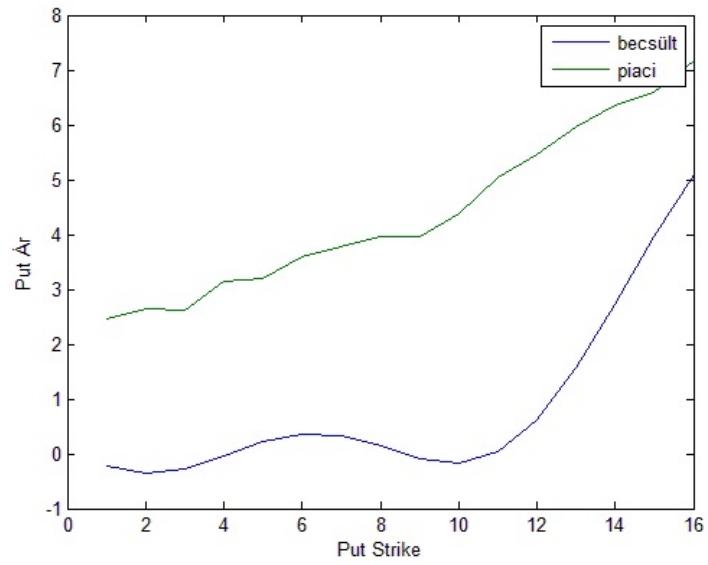
4.1. Heston-modell eredményei

A *put* és *call* árat a kötési árfolyam függvényében írjuk fel rögzített lejáratú idők mellett. A Strike árakat 165 és 180 között tekintettük egyesével, mivel Matlabban nem tudtuk átskálázni a tengelyt, így az ábrákon ez a 16 érték (1-től 16-ig) szerepel az y tengelyen. Először nézzük meg, hogy *put* opció esetben mennyire illeszkedik a piaci árra az általunk becsült függvény.

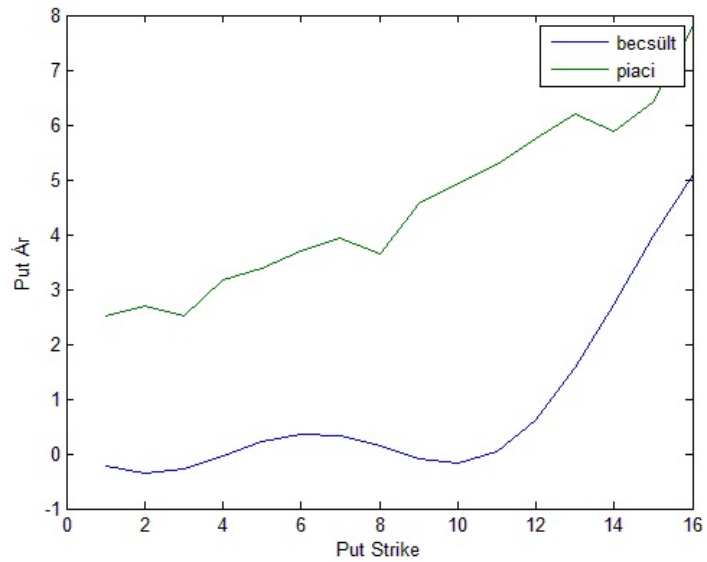
4.1. ábra. valós Heston t=25 nap



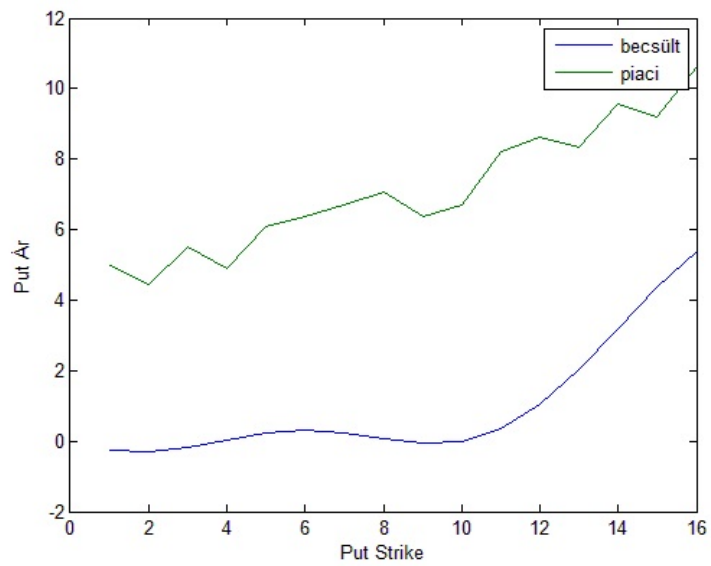
4.2. ábra. valós Heston t=80 nap



4.3. ábra. IV Heston t=80 nap



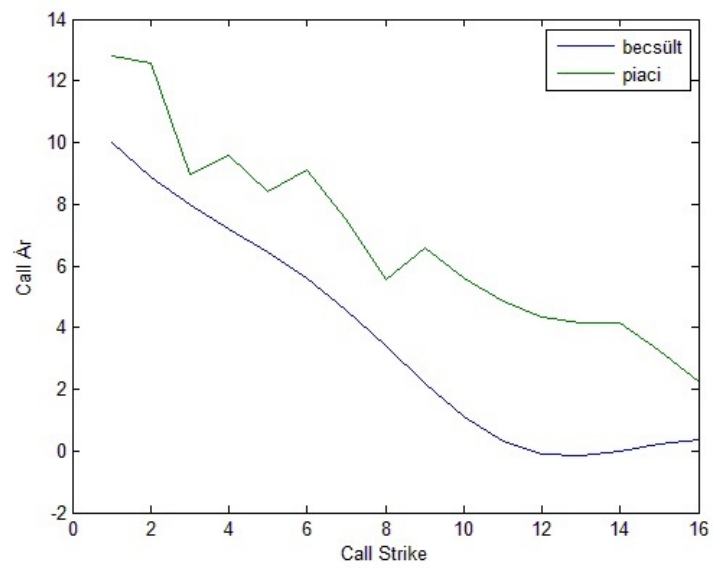
4.4. ábra. IV Heston t=158 nap



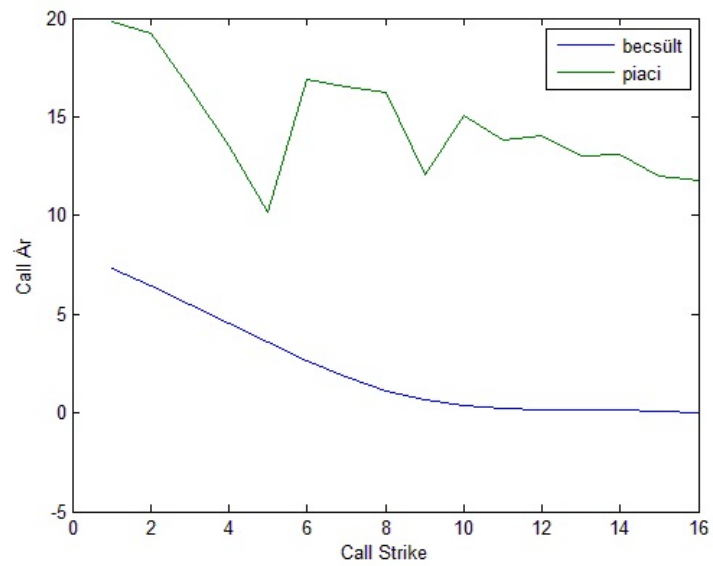
A 4.1 és 4.2 ábra valós piaci adatok alapján, míg 4.3 és 4.4 ábra implicit volatilitásból számolt adatok alapján becsül.

Tekintsünk néhány *call* opció árra vonatkozó eredményt.

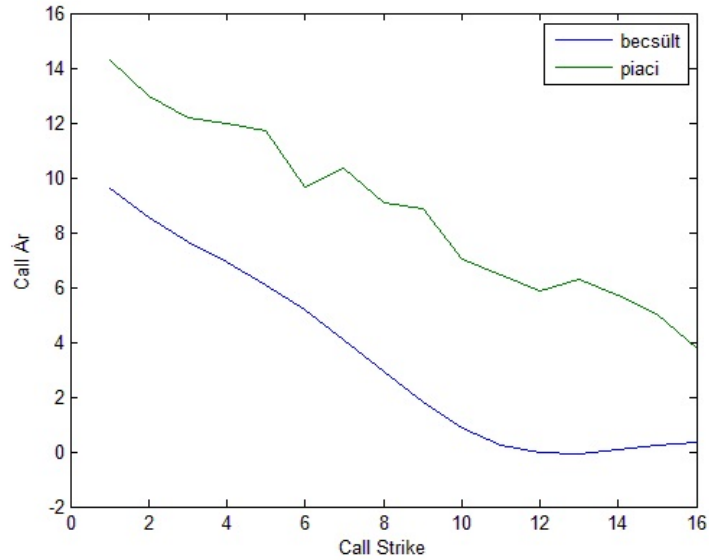
4.5. ábra. valós Heston $t=80$ nap



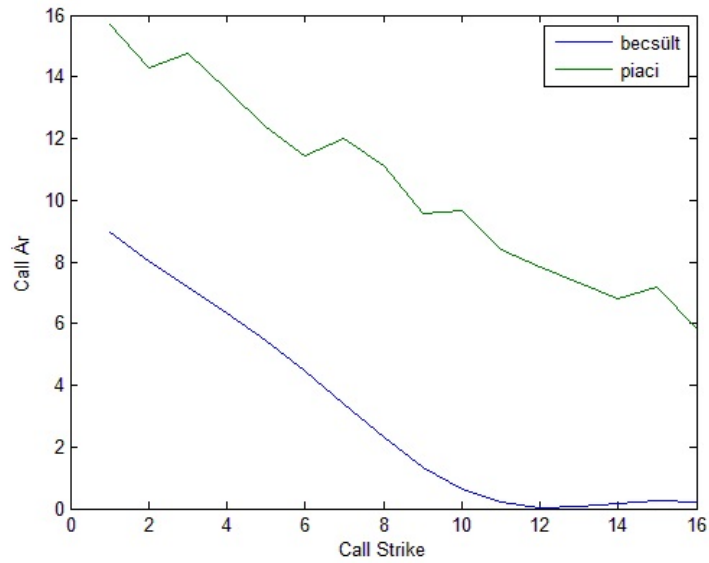
4.6. ábra. valós Heston $t=648$ nap



4.7. ábra. IV Heston $t=158$ nap



4.8. ábra. IV Heston $t=284$ nap



A 4.5 és 4.6 ábrák valós piaci adatokra, valamint 4.7 és 4.8 ábra implicit volatilitásból számolt adatokra tekintettük.

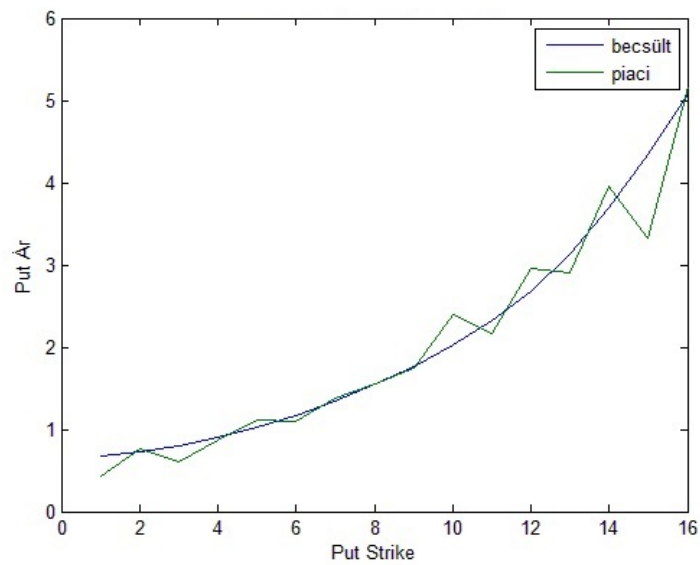
Call és *put* opció esetén is elmondható, hogy a becsült értékek alacsonyabbak, mint a valódi adatok. Minél későbbi a lejáratú idő, annál rosszabb a becslés, tehát ez a modell nem tekinthető jónak. Észrevehető hogy *put* opciónál nagyobb kötési

árfolyamhoz nagyobb ár tartozik, *call* opció esetén pedig nagyobb strikehoz kisebb opciós árat kapunk, ez a két termék tulajdonságából adódik.

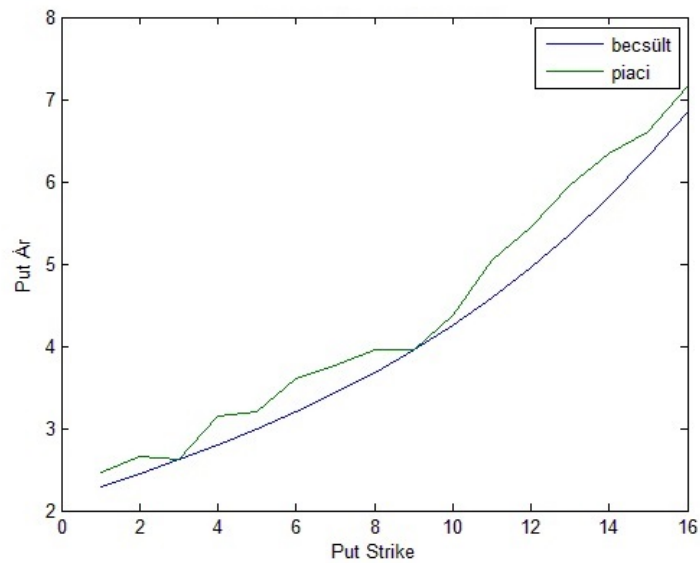
4.2. Bates-modell eredményei

Ebben a részben ugyanolyan feltételekre (kötési árfolyamok és lejáratidőket ugyanúgy választjuk meg) értékeljük ki a Bates-modell eredményeit is, mint a Heston-modell esetén. Tekintsük a következő ábrákat *put* opció esetén:

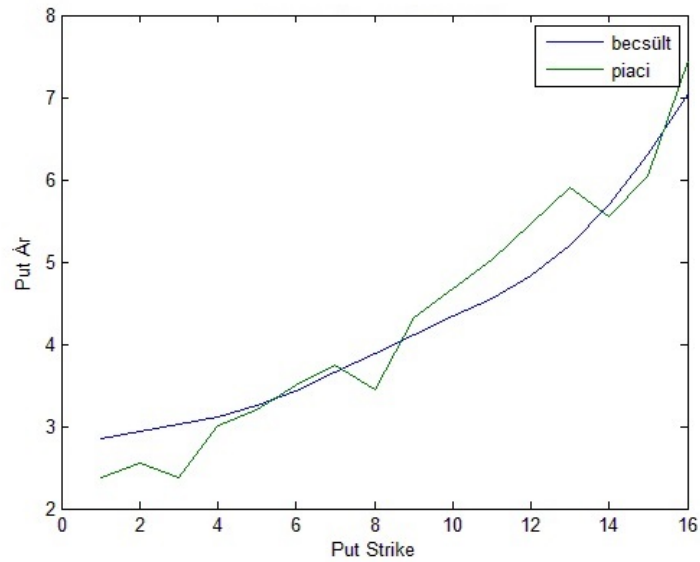
4.9. ábra. valós Bates $t=25$ nap



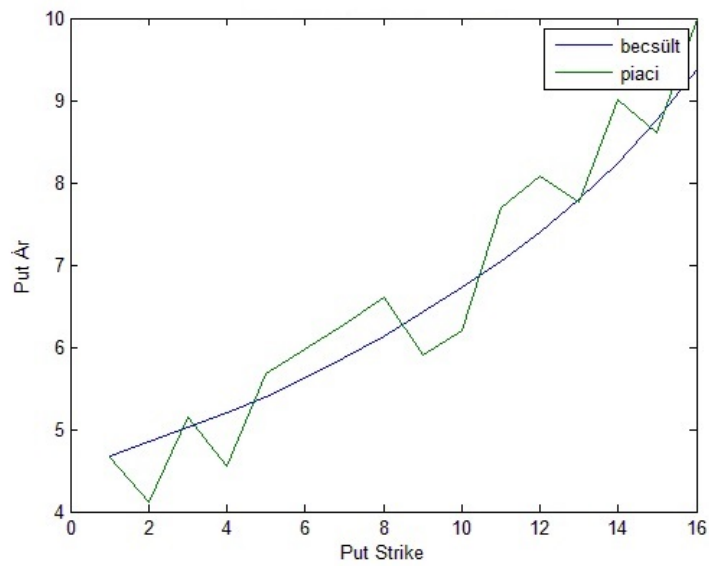
4.10. ábra. valós Bates $t=80$ nap



4.11. ábra. IV Bates t=80 nap



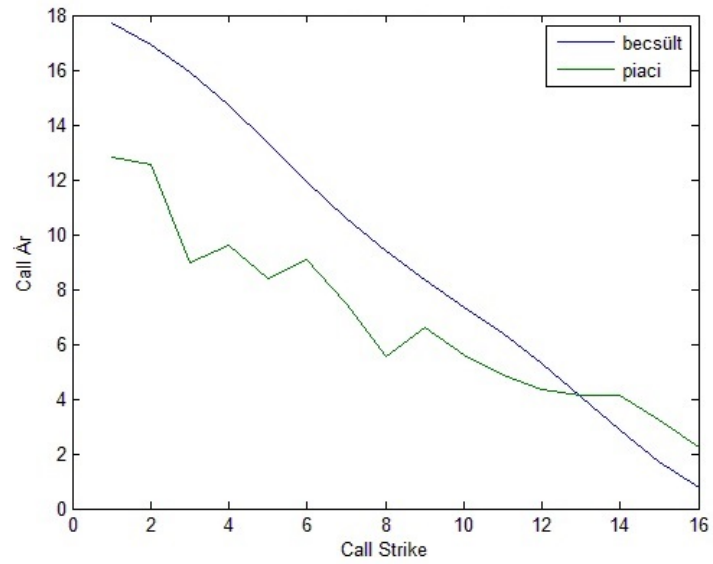
4.12. ábra. IV Bates t=158 nap



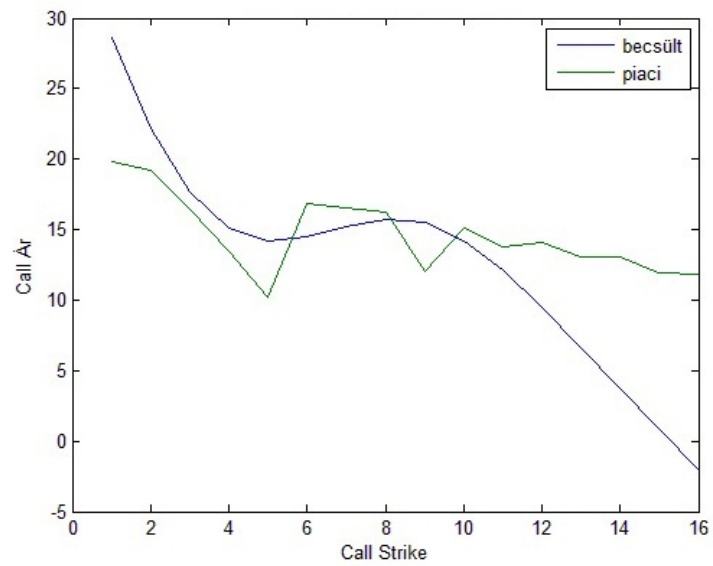
A 4.9, 4.10 ábrákat a valós piaci árakra, míg 4.11, 4.12 ábrákon implicit volatilitásból számított piaci árakra illesztettünk.

Nézzük az eredményeket *call* opcióra is:

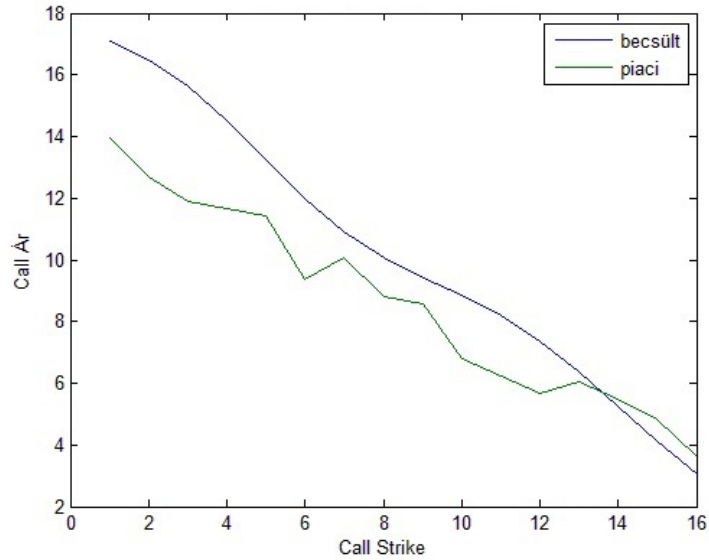
4.13. ábra. valós Bates t=80 nap



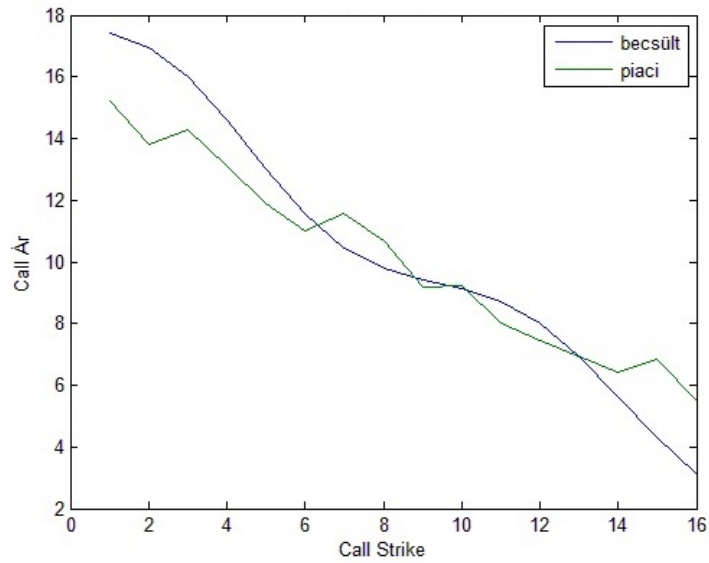
4.14. ábra. valós Bates t=648 nap



4.15. ábra. IV Bates $t=158$ nap



4.16. ábra. IV Bates $t=284$ nap



A 4.13, 4.14 ábrákat a valós piaci árakra, míg 4.15, 4.16 ábrákon implicit volatilitásból számított piaci árakra illesztettünk.

Mind a *Call* mind a *put* opció esetén látjuk, hogy sokkal pontosabb a becsült érték, jobban illeszkedik a valós adatokra, függetlenül attól, hogy implicit volatilitásból számolunk vagy valós adatokat nézünk, mint a Heston-modellnél. Ami még

érdekes ebben az esetben, hogy akár egy vagy két éves opciók esetén sem romlik el a becslés úgy, mint a Heston-modell esetében. Továbbá itt is elmondható, hogy *put* opció esetén monoton növekedő az ár, *call* opció esetében pedig monoton csökkenő az idő függvényében.

4.3. Átlagos négyzetes eltérés

Nézzük meg a becslt és a valós adatok közötti átlagos négyzetes eltérést, hogy számszerűsítve össze tudjuk hasonlítani az egyes módszerek becslésének erősségét. Először nézzük az eltéréseket Heston-modellre.

RMSE	T=25	T=80	T=158	T=284	T=648
Valós Put	0.0788	0.5198	1.1112	1.6275	3.3290
IV Put	0.0499	0.6754	1.3024	1.7974	3.6563
Valós Call	0.0510	0.4698	0.9731	1.5266	2.9486
IV Call	0.0364	0.4025	0.8640	1.3985	2.6260

Az értékeken látszik, hogy a lejárat függvényében egyre nagyobb az eltérés a becslt és a valódi értékek között.

Ezután nézzük Bates-modellre vonatkozó átlagos négyzetes eltéréseket.

RMSE	T=25	T=80	T=158	T=284	T=648
Valós Put	0.0217	0.0779	0.0337	0.4102	0.9395
IV Put	0.0944	0.0998	0.1556	0.1750	0.0455
Valós Call	0.2561	0.3652	1.0426	1.4093	3.4569
IV Call	0.5693	0.3389	0.1341	0.5943	0.3184

Észrevehető, hogy az illeszkedés lényegesen jobb, mint Heston-modell esetén, itt akár egy vagy két éves opció árakat is tudunk becsülni alacsony átlagos négyzetes eltérés értékkel. Érdekes, hogy amikor *call* opció árat becsülünk valós piaci adatokból, akkor elromlik az illeszkedés, de a többi módszer pontosabb illeszkedést mutat az átlagos négyzetes eltérés alapján.

5. fejezet

Összegzés

Az elméleti leírás során bevezettük a folytonos modelljeink diszkrétizáltjait, ezáltal lehetővé téve, hogy modellparamétereket tudjunk becsülni valós piaci adatokra, amelyeket csak diszkrét időben tudunk megfigyelni. Áttekintettünk néhány becslési eljárást, amellyel illeszthetővé váltak a modelljeink. Ezután implementáltuk az eljárásokat MATLAB környezetben. Az eredményeinken az látszik, hogy adott lejáratok mellett a Bates-moddellel a valós piaci árak pontosabb közelítését kapjuk a különböző kötési árú opciók esetén, mint a Heston-modell esetén. Belegondolva, nem meglepő ez az eredmény, hiszen a Bates-modell a Heston-modell lényeges általánosítása, mely ugyanúgy sztochasztikus volatilitást feltételez, de ugrások is szerepelhetnek az árban. Ez egy reális feltételezés lehet, hisz egy intézményi döntés, nagy vásárlás vagy egyéb események hirtelen, ugrásszerűen változtathatják meg az árakat. Ugyanakkor a Bates-modell esetén 8 paramétert becsültünk, míg Heston-modell esetén csupán 5 paramétert. Ezért itt fennáll annak a veszélye, hogy a több modellparaméterrel a bizonytalanság, hiba egy részét a paraméterbecslésbe transzformáljuk, így bizonyos kockázatok fel nem ismerhetővé válnak, "elvesznek". Azonban ez önmagában nem magyarázhatja az opciós árak sokkal pontosabb becslését, különösen, hogy számos lejáratra konzisztensen ez figyelhető meg. Ezért azt mondhatjuk, hogy a jól megválasztott modell a megfelelő numerikus eljárás gondos implementációjával hatékony eszközt adhat kezünkbe a piaci árak számítására.

Irodalomjegyzék

- [1] Fabrice Douglas Rouah, Euler and Milstein Discretization.
- [2] Jan Palczewski, Computations in Finance, University of Leeds, (2009-Lecture 6)
- [3] E. MIGlio, C. Sgarra, A Finite Element Framework for Option Pricing with the Bates Model, (2008)
- [4] David S. Bates, Jump and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options (1996)
- [5] Shin Ichi Aihara, Arunabha Bagchi, Saikat Saha, Estimating Volatility and model parameters of stochastic volatility models with jumps using particle filter (2008)
- [6] Robin Dunn, Paloma Hauser, Tom Seibold, Hugh Gong, Estimating Option Prices with Heston's Stochastic Volatility Model
- [7] Peter Christoffersen, Steven Heston, Kris Jacobs, The Shape and Term Structure of the Index Option Smirk: Why Multifactor Stochastic Volatility Models Work so Well (2009)
- [8] Manfred Gilli, Enrico Schumann, Calibrating Option Pricing Models with Heuristics (2010)
- [9] Timothy Sauer, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations in Finance
- [10] A. van Haastrecht, A.A.J. Pelsser Efficient, Almost Exact Simulation of the Heston Stochastic Volatility Model (2008)

A. függelék

Heston-modell Matlab kód

Matlab kódokat <http://www.volopta.com/Matlab.html> oldalon szereplő kódok segítségével készítettem el.

```
%Maximum likelihood becslés
%volatilitás és részvény árfolyam adatok
vt=[0.00017096 ... 0.00011321];
vt1=[0.00011271 ... 0.00011366];
Qt=[1.011604463 ... 0.987394958];

n=size(Qt);

syms sigma rho r theta kappa
for i=1:n
f(i)=-log(2*pi)-log(sigma)-log(vt(i))-0.5*(log(1-rho^2))
-((Qt(i)-1-r)^2)/(2*vt(i)*(1-rho^2))+(rho*(Qt(1)-1-r)*
*(vt1(i)-vt(i)-theta*kappa+kappa*vt(i)))/(vt(i)*sigma*(1-rho^2))
-((vt1(i)-vt(i)-theta*kappa+kappa*vt(i))^2)/(2*sigma^2*vt(i)*(1-rho^2));
end
g=sum(f);
eq1=diff(g,sigma);
eq2=diff(g,rho);
eq3=diff(g,r);
eq4=diff(g,theta);
```

```

eq5=diff(g,kappa);

S = solve(eq1,eq2,eq3,eq4,eq5);
S.r;
S.theta;
S.kappa;
S.sigma;
S.rho;
%%Opciós ár számítás
clc; clear;

% Black Scholes call és put
BSC = @(s,K,rf,q,v,T) (s*exp(-q*T)*normcdf((log(s/K) +
(rf-q+v^2/2)*T)/v/sqrt(T)) - K*exp(-rf*T)*normcdf((log(s/K)
+ (rf-q+v^2/2)*T)/v/sqrt(T)) - v*sqrt(T));
BSP = @(s,K,rf,q,v,T) (K*exp(-rf*T)*normcdf(-(log(s/K) +
(rf-q+v^2/2)*T)/v/sqrt(T)) + v*sqrt(T)) - s*exp(-q*T)*normcdf(-(log(s/K)
+ (rf-q+v^2/2)*T)/v/sqrt(T));

%% DIA adatok
MktIV = [
0.3331 ...
0.1143 0.1538 0.1686 0.1618 0.1973
];
K = (165:180);
T = [25 80 158 284 648] ./365;
S = 175.66;
rf = 0.011604463;
q = 0.0218;

[NK NT] = size(MktIV);
PutCall = repmat('P',NK,NT);

```

```

%% Piaci ár
MktPrice=[
0.43 ...
5.17 7.17 9.85 12.40 20.65];

%% Paraméterek

param = [0 0.00017096 0.00445501 0 0.000113667];

%% Numerikus integrálközelítéshez Gauss-Laguerre súlyok és abszcisszák
xw = [...
0.0445 0.1142;
...
111.7514 15.3900];
x = xw(:,1);
w = xw(:,2);

%% Heston ár kiszámítása
for k=1:NK
for t=1:NT

    BAr(k,t) = HestonAr(PutCall(k,t),param,T(t),K(k),S,rf,q,x,w);

end
end
x=(1:16);
y1=BAr(x,1);
y2=MktPrice(x,1);
plot(x,y1,x,y2)
title('Becsült és piaci ár (t=648 nap)')
xlabel('Put Strike')

```

```

ylabel('Put Ár')
legend('becsült','piaci')

%RMSE
for j=1:5
    for i=1:16
        osszeg=sum((BAr(i,j)-MktPrice(i,j))^2);
    end
    RMSE(j)=sqrt(osszeg/numel(x));
end

function y = HestonAr(PutCall,param,T,K,S,r,q,x,w)

% Pi1 és Pi2 integrandusa;
for k=1:length(x);
    int1(k) = w(k) * HestonIntegrandus(x(k),param,S,K,r,q,T,1);
    int2(k) = w(k) * HestonIntegrandus(x(k),param,S,K,r,q,T,2);
end

% Az integrál
I1 = sum(int1);
I2 = sum(int2);

% Pi1 és Pi2
P1 = 1/2 + 1/pi*I1;
P2 = 1/2 + 1/pi*I2;

% Call ár
CallPrice = S*exp(-q*T)*P1 - K*exp(-r*T)*P2;

% Put ár a put-call paritásból
PutPrice = CallPrice - S*exp(-q*T) + K*exp(-r*T);

% Opció ár

```

```

if strcmp(PutCall, 'C')
y = CallPrice;
else
y = PutPrice;
end
function svi = HestonIntegrandus(phi,param,S,K,r,q,T,Pnum)
if Pnum==2
    f = HestonCF(phi,param,T,S,r,q);
    svi = real(exp(-i*phi*log(K))*f/i/phi);
elseif Pnum==1
    fnum = HestonCF(phi-i,param,T,S,r,q);
    fden = HestonCF(-i,param,T,S,r,q);
    svi = real(exp(-i*phi*log(K))*fnum/i/phi/fden);
end

% Karakterisztikus függvény
function f2 = HestonCF(phi,param,T,S,r,q)
theta = param(1);
kappa = param(2);
sigma = param(3);
rho = param(4);
v0 = param(5);

% Részvény ár logaritmusa
x = log(S);

a = kappa*theta;
u = -0.5;
b = kappa;

d = sqrt((rho*sigma*i*phi - b)^2 - sigma^2*(2*u*i*phi - phi^2));
g = (b - rho*sigma*i*phi + d) / (b - rho*sigma*i*phi - d);

```

```
c = 1/g;
D = (b - rho*sigma*i*phi - d)/sigma^2*((1-exp(-d*T))/(1-c*exp(-d*T)));
G = (1 - c*exp(-d*T))/(1-c);
C = (r-q)*i*phi*T + a/sigma^2*((b - rho*sigma*i*phi - d)*T - 2*log(G));

f2 = exp(C + D*v0 + i*phi*x);
```

B. függelék

Bates-modell Matlab kód

```
% Black Scholes call és put
BSC = @(s,K,rf,q,v,T) (s*exp(-q*T)*normcdf((log(s/K)
+ (rf-q+v^2/2)*T)/v/sqrt(T)) - K*exp(-rf*T)*normcdf((log(s/K)
+ (rf-q+v^2/2)*T)/v/sqrt(T) - v*sqrt(T)));
BSP = @(s,K,rf,q,v,T) (K*exp(-rf*T)*normcdf(-(log(s/K)
+ (rf-q+v^2/2)*T)/v/sqrt(T) + v*sqrt(T))- s*exp(-q*T)*normcdf(-(log(s/K)
+ (rf-q+v^2/2)*T)/v/sqrt(T)));

%% DIA adatok
MktIV = [
0.3331 0.2007 0.2045 0.1919 0.2181
...
];
K = (165:180);
T = [25 80 158 284 648] ./365;
S = 175.66;
rf = 0.0051;
q = 0.0218;

[NK NT] = size(MktIV);
PutCall = repmat('P',NK,NT);
```

```

%% Piaci árak implicit volatilitásból
for k=1:NK
    for t=1:NT
        if PutCall(k,t) == 'C';
            MktPrice(k,t) = BSC(S,K(k),rf,q,MktIV(k,t),T(t));
        else
            MktPrice(k,t) = BSP(S,K(k),rf,q,MktIV(k,t),T(t));
        end
    end
end

%% Paraméter Becslés
% Kezdeti értékek
% kappa,theta,sigma,v0,rho,lambdaJ,muJ,sigmaJ
start = [5, 0.05, 2, 0.04, -0.7, 0.1, 0.05, 0.10];

% Christoffersen, Heston, Jacobs módszer
ObjFun = 1;

a = .001;
b = 3;
Tol = 1e-7;
MaxIter = 10000;
e = 1e-2;
%   kappa theta sigma v0 rho lambdaJ muJ sigmaJ
lb = [e e e e -.999 -inf -inf e ]; % Alsó korlát
ub = [20 5 5 5 .999 inf inf 10]; % Felső korlát

% Gauss-Laguerre súlyok és abszcisszák
xw = [...
    0.0445 0.1142;
    ...];

```



```

x = xw(:,1);
w = xw(:,2);

%% Becsült paraméterek
tic
[param] = fmincon(@(p) Batesbecsles(p,S,rf,q,MktPrice,K,T,PutCall,MktIV,
x,w,ObjFun,a,b,Tol,MaxIter,start,[],[],[],[],lb,ub);
t1 = toc;

%% Opció ár és az ábra
for k=1:NK
for t=1:NT
    BAr(k,t) = BatesAr(PutCall(k,t),param,T(t),K(k),S,rf,q,x,w);
end
end
x=(1:16);
y1=BAr(x,2);
y2=MktPrice(x,2);
plot(x,y1,x,y2)
title('Becsült és piaci ár (t=25 nap)')
xlabel('Put Strike')
ylabel('Put Ár')
legend('becsült','piaci')
%RMSE
for j=1:5
    for i=1:16
        osszeg=sum((BAr(i,j)-MktPrice(i,j))^2);
    end
    RMSE(j)=sqrt(osszeg/numel(x));
end

function y = BatesAr(PutCall,param,T,K,S,r,q,x,w)

```

```

% Pi1 és Pi2 integrálásához;
for k=1:length(x);
    int1(k) = w(k) * BatesIntegrandus(x(k),param,S,K,r,q,T,1);
    int2(k) = w(k) * BatesIntegrandus(x(k),param,S,K,r,q,T,2);
end

% Integrál
I1 = sum(int1);
I2 = sum(int2);

% Pi1 és Pi2 értéke
P1 = 1/2 + 1/pi*I1;
P2 = 1/2 + 1/pi*I2;

% Call ár
CallPrice = S*exp(-q*T)*P1 - K*exp(-r*T)*P2;

% Put ár a put-call paritásból
PutPrice = CallPrice - S*exp(-q*T) + K*exp(-r*T);

% Opció ár
if strcmp(PutCall,'C')
    y = CallPrice;
else
    y = PutPrice;
end

function svi = BatesIntegrandus(phi,param,S,K,r,q,T,Pnum)
if Pnum==2
    f = HestonCF(phi,param,T,S,r,q) * JumpCF(phi,param,T);
    svi = real(exp(-i*phi*log(K))*f/i/phi);
elseif Pnum==1
    fnum = HestonCF(phi-i,param,T,S,r,q) * JumpCF(phi-i,param,T);

```

```

        fden = HestonCF( -i,param,T,S,r,q) * JumpCF( -i,param,T);
        svi = real(exp(-i*phi*log(K))*fnum/i/phi/fden);
end

```

```

% Karakterisztikus függvény ugró része

```

```

function jcf = JumpCF(phi,param,T)
lambdaJ = param(6);
muJ     = param(7);
sigmaJ  = param(8);
jcf = exp(-lambdaJ*muJ*i*phi*T + lambdaJ*T*((1+muJ)^(i*phi)*
*exp(0.5*sigmaJ^2*i*phi*(i*phi-1))-1));

```

```

% Heston karakterisztikus függvénye

```

```

function f2 = HestonCF(phi,param,T,S,r,q)
kappa = param(1);
theta = param(2);
sigma = param(3);
v0    = param(4);
rho   = param(5);
lambda = 0;

```

```

% Részvényár logaritmus

```

```

x = log(S);

```

```

a = kappa*theta;
u = -0.5;
b = kappa + lambda;

```

```

d = sqrt((rho*sigma*i*phi - b)^2 - sigma^2*(2*u*i*phi - phi^2));
g = (b - rho*sigma*i*phi + d) / (b - rho*sigma*i*phi - d);

```

```

c = 1/g;
D = (b - rho*sigma*i*phi - d)/sigma^2*((1-exp(-d*T))/(1-c*exp(-d*T)));
G = (1 - c*exp(-d*T))/(1-c);
C = (r-q)*i*phi*T + a/sigma^2*((b - rho*sigma*i*phi - d)*T - 2*log(G));

f2 = exp(C + D*v0 + i*phi*x);

function y = Batesbecsles(param,S,rf,q,MktPrice,K,T,PutCall,MktIV,
x,w,ObjFun,a,b,Tol,MaxIter)

% S = spot ár
% rf = kockázatmentes hozam
% q = osztalék hozam
% MktPrice = piaci ár.
% K = kötési árfolyam
% T = lejáratidő
% PutCall = put esetén P call esetén C
% MktIV = Implicit volatilitás
% x = Gauss-Laguerre abszcisszái
% w = Gauss-Laguerre súlyok
% ObjFun
% 1 = Christoffersen, Heston, Jacobs
% MaxIter = Maximális iteráció

[NK,NT] = size(MktPrice);

for t=1:NT
    for j=1:length(x);
        phi = x(j);
        f(j) = BatesCF(phi, param, T(t), S, rf, q);
        fnum(j) = BatesCF(phi-i, param, T(t), S, rf, q);
        fden(j) = BatesCF(-i, param, T(t), S, rf, q);
    end
end

```

```

for k=1:NK
    for j=1:length(x);
        phi = x(j);
        int2(j) = w(j) * real(exp(-i*phi*log(K(k)))*f(j)/i/phi);
        int1(j) = w(j) * real(exp(-i*phi*log(K(k)))*
            *fnum(j)/i/phi/fden(j));
    end
    % Pi1 és Pi2 értéke
    P1 = 1/2 + 1/pi*sum(int1);
    P2 = 1/2 + 1/pi*sum(int2);
    % Call ár
    CallPrice = S*exp(-q*T(t))*P1 - K(k)*exp(-rf*T(t))*P2;
    % Opció ár
    if strcmp(PutCall,'C')
        ModelPrice(k,t) = CallPrice;
    else
        ModelPrice(k,t) = CallPrice - S*exp(-q*T(t)) +
            + K(k)*exp(-rf*T(t));
    end
    if ObjFun == 1
        % IVRMSE Christoffersen, Heston, Jacobs módszer
        d = (log(S/K(k)) + (rf-q+MktIV(k,t)^2/2)*T(t))/
            /MktIV(k,t)/sqrt(T(t));
        Vega(k,t) = S*normpdf(d)*sqrt(T(t));
        error(k,t) = (ModelPrice(k,t) - MktPrice(k,t))^2/
            / Vega(k,t)^2;
    end
end
end
y = sum(sum(error));

% Bates karakterisztikus függvény
function y = BatesCF(phi,param,T,S,rf,q)

```

```
y = HestonCF(phi,param,T,S,rf,q) * JumpCF(phi,param,T);
```

C. függelék

Diszkretizálás szimulálása

```
function Explicit_Euler_1(m,T,s0,r,sigma)

h=T/m; % lépésméret
t=linspace(0,T,m+1);
%Wiener folyamat
w=[0;cumsum(randn(m,1))]
    %t=0:1/m:1;
    %plot(t,w);

y=zeros(1,m+1);
pontos=zeros(1,m+1);
hibavect=zeros(1,m+1);

% gzakt megoldás:
for j=1:(m+1)
    pontos(j)=s0*exp((r-(sigma^2)/2)*t(j)+sigma*w(j));
end

%Diszkretizált értékek:
y(1)=pontos(1);
for j=1:m
    y(j+1)=y(j)+r*y(j)*h+sigma*y(j)*(w(j+1)-w(j));
```

```
end

hibavect=pontos-y;

% plot:

plot(t,pontos,t,y)
title('Egzakt megoldás és diszkretizált értékek Black-Sholes esetén')
xlabel('Idő')
ylabel('Részvény ár')
legend('Egzakt megoldás','Diszkretizált értékek')
```