

SZAKDOLGOZAT

Variancia derivatívák

Solymosi Ernő

Biztosítási és Pénzügyi Matematika MSc

Témavezető:

Dr. Molnár-Sáska Gábor

Morgan Stanley
Executive Director



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2016

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
Modellek	4
1. Variancia swap	6
1.1. Variancia swap replikálása	7
1.1.1. A kifizetési függvény dekompozíciója	7
1.1.2. A log-kontraktus vegája	8
1.2. Replikáció diszkrét kötési árfolyamok mellett	10
1.3. Numerikus eredmények	13
2. Volatilitás swap	15
2.1. Approximáció sorfejtéssel	15
2.1.1. Lineáris közelítés	15
2.1.2. Konvexitási hiba a Heston modellben	16
2.2. Árazás differenciálegyenlettel	18
2.3. A volatilitás swap replikálása	19
2.3.1. Korreláció-immunitás	19
2.3.2. Exponenciális kifizetések	21
2.3.3. A replikáló portfólió	22
2.4. Szimulációk a replikációra	24
3. Variancia opció	25
3.1. Árazás differenciálegyenlettel	25
3.2. Replikáció variancia opciókkal	26
Paraméterillesztés	29
Összefoglalás	30
Irodalomjegyzék	33

Bevezetés

A részvények áralakulásában lévő bizonytalanság alapvető mérőszáma a volatilitás. Egy részvényre szóló derivatíva kiírójának természetes célja, hogy az ügyletből származó kockázatot egyéb kereskedésekkel fedezze. Az alaptermék ármozgásából származó kockázat kiküszöbölhető, ha a derivatíva mellett megfelelő számú részvényt is tartunk, ami így ellensúlyozza a derivatíva értékének változását. Ezt a kockázatkezelési módszert nevezik delta-hedgenek. Ezzel az eljárással azonban nem eliminálható az összes kockázat, ugyanis a derivatívák értéke jellemzően a volatilitástól is függ, így annak – a részvényárfolyamtól független alakulása – további fedezetlen kitétséget jelent. A volatilitásból származó kockázatnak a kezelése nehezen megvalósítható, ugyanis a delta-hedge esetével szemben a volatilitás önmagában nem kereskedett termék. Ha a befektető a kezében tudna tartani egy olyan terméket, aminek az értéke a volatilitást követi, azzal erős eszköze lenne a volatilitás-kockázat kezelésére. Az opciókat gyakran használják ilyen céllal, azonban ennek két hátulütője is van. Egyrészt ezen termékek végája függ a részvény spot árfolyamától, így nem biztosítanak tiszta kitétséget a volatilitásra, másrészt az opciók tartásával nem kívánatos delta-kitétség is jár, amit szintén fedezni kell. A volatilitással való kereskedésre tehát van igény. A variancia derivatívák ehhez nyújtanak megfelelő eszközt, rajtuk keresztül a befektetők tiszta kitétséget szerezhetnek a volatilitásra. Ezen termékekkel való kereskedés az 1990-es években kezdődött el és piaca azóta folyamatos növekedést mutat. A téma napjainkban is aktívan kutatott.

A dolgozat célja, hogy bemutasson néhány alapvető variancia derivatívát. Három terméket fogunk vizsgálni. Az első fejezetben a variancia swapok, a másodikban pedig a volatilitás swapok árazását és replikálását tekintjük át. A harmadik fejezetben a variancia opciók árazására alkalmas differenciálegyenlet mutatunk be, a dolgozat végén pedig a szimulációkhoz használt Heston-modell kalibrációját ismertetjük.

Modellek

Jelen fejezetben rögzítjük a dolgozat alatt használt modelleket és tisztázzuk, mit tekintünk a variancia derivatívák alaptermékeknek. A derivatívák árazása a kockázatmentes mérték alatt történik, a következőkben megadott dinamikák és a dolgozat során minden várható érték is a kockázatmentes mérték szerint értendő. Feltesszük, hogy a kockázatmentes termék minden esetben egy konstans r kamatláb mellett fejlődő betét.

A Heston-modell széles körben használt sztochasztikus volatilitás modell. A Black-Scholes világgal ellentétben a variancia nem konstans, fejlődése egy CIR folyamatot követ. Népszerűségét annak is köszönheti, hogy a modellen belül az opcióárak expliciten, paraméteresen megadhatók.

$$\begin{aligned}dS_t &= rS_t dt + \sqrt{v_t}S_t dW_t^{(1)} & \text{(HM)} \\dv_t &= \alpha(\beta - v_t)dt + \eta\sqrt{v_t}dW_t^{(2)} \\ \text{Cov}(dW_t^{(1)}, dW_t^{(2)}) &= \rho dt\end{aligned}$$

Itt v_t a pillanatnyi varianciát jelöli, a volatilitás pedig $\sqrt{v_t}$. A dolgozat során be fogjuk mutatni, hogyan lehet a vizsgált termékeket opciókkal replikálni. Ekkor a részvény volatilitásának dinamikáját nem kell ismerni, az árazás és a replikálás is a piacon megfigyelt részvényopciókkal történik. Az Általános-modellben (ÁM) a volatilitást a σ_t folyamat írja le, melyről feltesszük, hogy adaptált egy $W_t^{(2)}$ Wiener-folyamat természetes filtrációjához, továbbá négyzetes integrálja korlátos, vagyis $\int_0^T \sigma_t^2 dt < \infty$.

$$\begin{aligned}dS_t &= rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{(1)} & \text{(ÁM)} \\ \text{Cov}(dW_t^{(1)}, dW_t^{(2)}) &= \rho dt\end{aligned}$$

A variancia, mint alaptermék

A variancia derivatívák olyan pénzügyi termékek, melyek az ügylet lejártakor az esedékes időszak alatti variancia valamilyen függvényét fizetik ki. Az S_t folyamat $[0, T]$ időszak alatti integrált varianciája

$$VAR_{0,T} = \int_0^T \sigma_t^2 dt \quad (1)$$

A σ_t folyamat nyilván nem figyelhető meg a valóságban, így felvetődik a kérdés, hogy a gyakorlatban hogyan állapítják meg egy részvény vagy részvényindex adott időszak alatti varianciáját. Legyen

a $\{0 = t_0, \dots, t_n = T\}$ a $[0, T]$ intervallum egy felosztása. Az ehhez tartozó tapasztalati variancia a loghozamok négyzeteiből számolható. A T -vel való leosztással a varianciát annualizáljuk.

$$VAR'_{0,T} = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{n-1} \log^2 \left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} \right) \quad (2)$$

Piaci gyakorlat, hogy a tapasztalati varianciát a napi loghozamokból számolják és ezt tekintik a variancia derivatívák alaptermékének. Egy volatilitás swap szerződési feltételeinek mintája – a kifizetés definiálásával – megtekinthető [12]-ben. A tapasztalati varianciával való számolás körülményes, jelen dolgozatban a variancia derivatívák alaptermékének (1)-et fogjuk tekinteni. Az integrál alak mellett a variancia karakterizálására S_t log-folyamatának kvadratikus variációját is fogjuk használni. Alkalmazzuk az $X_t = \log(S_t/S_0)$ folyamaton az Itó-lemmát:

$$dX_t = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} S_t^2 \sigma_t^2 dt = \left(r - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \right) dt + \sigma_t dW_t$$

Innen X_t kvadratikus variációja T -ben

$$\langle X \rangle_T = \int_0^T \sigma_t^2 dt = VAR_{0,T},$$

vagyis S_t (1) szerinti varianciája felírható, mint a log-folyamat kvadratikus variációja. A dolgozat során X_t végig a log-folyamatot fogja jelölni, a varianciára az integrális alak mellett, mint $\langle X \rangle_T$ -re is fogunk hivatkozni.

1. fejezet

Variancia swap

A legalapvetőbb varianciára szóló derivatíva a variancia swap. A variancia swap tulajdonképp egy forward ügylet, amiben egy rögzített T időpontban egy a szerződés-kötéskor meghatározott K_{var} strike értéket cserélünk el a $0-T$ időszak alatti $\langle X \rangle_T$ varianciára. A kifizetési függvény tehát

$$\langle X \rangle_T - K_{var}$$

A fair kötési ár a forward árhoz hasonlóan az a K , melyre a variancia swap szerződés-kötés kori értéke nulla, vagyis $e^{-rT} \mathbf{E}_0(\langle X \rangle_T - K) = 0$. Ebből következik, hogy

$$K_{var} = \mathbf{E}_0 \langle X \rangle_T$$

HM-ben σ_t^2 CIR folyamatot követ, melynek várható értéke ismert. Az integrál és a várható érték felcserélésével a fair kötési ár megadható zárt alakban.

$$\begin{aligned} K_{var} &= \mathbf{E}_0 \int_0^T \sigma_t^2 dt = \int_0^T \mathbf{E}_0 \sigma_t^2 dt \\ &= \int_0^T \sigma_0^2 e^{-\alpha t} + \beta(1 - e^{-\alpha t}) dt = \frac{e^{-\alpha T}(\beta - \sigma_0^2)}{\alpha} + \beta T \end{aligned}$$

A kötési árfolyamban tehát – várakozásainknak megfelelően – az egyre távolabbi lejáratok esetén a variancia átlaga fog dominálni, a kezdeti értékének hatása csak rövidebb lejáratok esetén érzékelhető. A variancia swap t időpontbeli értékének meghatározásához a kifizetés \mathcal{F}_t -szerinti várható értékét kell venni. Ehhez az integrált t -nél elvágvva két részre bontjuk. A t -ig felkumulálódott variancia, valamint a K_{var} konstans kifizetés mérhető \mathcal{F}_t -re, így azok kiemelhetőek a várható értékből, így

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-r\tau} \mathbf{E}_t \left[\int_0^T \sigma_s^2 ds - K_{var} \right] = e^{-r\tau} \mathbf{E}_t \left[\int_0^t \sigma_s^2 ds + \int_t^T \sigma_s^2 ds - K_{var} \right] \\ &= e^{-r\tau} \langle X \rangle_t + e^{-r\tau} T \int_t^T \mathbf{E}_t \sigma_s^2 ds - e^{-r\tau} K_{var} \\ &= e^{-r\tau} \left(\langle X \rangle_t + \frac{e^{-\alpha\tau}(\beta - \sigma_t^2)}{\alpha} + T\beta - K_{var} \right) \end{aligned}$$

1.1. Variancia swap replikálása

Az előbb meghatározott kötési árfolyamok csak speciálisan, a HM-ben érvényesek. A következőkben döntő részben Emanuel Derman [1] és Fabrice Douglas Rouah [7] munkásságaira támaszkodva bemutatjuk, hogyan replikálható a varianci swap ÁM-ben részvényopciók segítségével. Idézzük fel $X_t = \log(S_T/S_0)$ dinamikáját:

$$dX_t = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 dt$$

Az egyenlőség mindkét oldalát integrálva kapjuk, hogy

$$\log \frac{S_T}{S_0} = \int_0^T \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_t^2 dt \quad (1.1)$$

A varianciára rendezve kapjuk, hogy

$$\langle X \rangle_T = \int_0^T \frac{2}{S_t} dS_t - 2 \log \frac{S_T}{S_0} \quad (1.2)$$

Ez azt sugallja, hogy a variancia replikálható egy dinamikus portfólióval, valamint egy log-kontraktussal, ami definíció szerint egy lejáratkor $\log(S_T/S_0)$ pénzt fizető derivatíva. A dinamikus replikálás költségeit a delta-hedgehez hasonlóan kölcsönből fizetjük, a hozamait betétbe tesszük, melyek r kamatláb mellett kamatoznak. Peter Carr és Roger Lee [2] cikke alapján a replikáló portfólió felállításához a t időpontban az alábbi termékeket kell tartanunk:

$$\begin{array}{ll} -2 & \text{log - kontraktus} \\ 2e^{-r\tau} \frac{1}{S_t} & \text{részvény} \\ e^{-r\tau} \left(\langle X \rangle_t + 2 \log \frac{S_t}{S_0 e^{rT}} \right) & \text{betét} \end{array} \quad (1.3)$$

A gyakorlatban ilyen formában a replikáció nem valósítható meg, ugyanis a log-kontraktus nem kereskedett termék. A következőkben Emanuel Derman [10] alapján megmutatjuk, hogy hogyan lehet a log-kontraktus statikusan, opciókkal, részvénnyel és betéttel előállítani.

1.1.1. A kifizetési függvény dekompozíciója

A log-kontraktust Anthony Neuberger vezette be [4] cikkében, ahol bemutatta, hogyan lehet volatilitás-kitettséget fedezni. A mi célunk ebben a részben az, hogy a log-kontraktust kereskedett termékekből replikáljuk. Breeden-Litzenberger formula alapján [14] ha a T lejáratra minden K kötési árfolyamon elérhetők a call opciók árai, akkor ezekből kiolvasható az alaptermék kockázatszemleges mérték szerinti áralakulása, azaz annak a valószínűsége, hogy a részvény értéke a T időpontban K lesz, feltéve, hogy t -ben S .

$$p(S, t, K, T) = e^{r(T-t)} \frac{\partial^2}{\partial K^2} C(S, t, K, T) \quad (1.4)$$

C a call opció árát jelöli. 1.4 igaz marad akkor is, ha call opciók helyett putokkal írjuk fel. A formula segítségével az f kifizetési függvényű európai derivatíva értéke t -ben kockázatszemleges mérték szerinti várható érték jelenérték szerint

$$V(S, t) = e^{-r(T-t)} \int_0^\infty f(K) p(S, t, K, T) dK =$$

Az integrált egy tetszőleges S^* vágási pontnál kettéválasztjuk és alkalmazzuk 1.4-et, az első integrálban call opciókkal, a másodikban putokkal.

$$= \int_0^{S^*} f(K) \frac{\partial^2}{\partial K^2} C(S, t, K, T) dK + \int_{S^*}^{\infty} f(K) \frac{\partial^2}{\partial K^2} P(S, t, K, T) dK =$$

Innen az S, t és T értékeket rögzítettnek vesszük és nem írjuk ki őket. Kétszer parciálisan integrálva kapjuk, hogy

$$= \left[f(K) \frac{\partial}{\partial K} C(K) - f'(K) C(K) \right]_{K=0}^{K=S^*} + \left[f(K) \frac{\partial}{\partial K} P(K) - f'(K) P(K) \right]_{K=S^*}^{K=\infty} \\ + \int_0^{S^*} f''(K) C(K) dK + \int_{S^*}^{\infty} f''(K) P(K) dK$$

Az első két tagban a peremértékek a következők

$$0 = C(0) = P(\infty) = \frac{\partial C}{\partial K}(K) \Big|_{K=0} = \frac{\partial P}{\partial K}(K) \Big|_{K=\infty} \\ P(S^*) - C(S^*) = S - e^{-r(T-t)} S^* \\ \frac{\partial}{\partial K} [P(K) - C(K)] \Big|_{K=S^*} = e^{-r(T-t)}$$

Ezt kihasználva megkaptuk a derivátiva t időpontbeli árát

$$V_t = e^{-r(T-t)} f(S^*) + f'(S^*) (S - e^{-r(T-t)} S^*) + \int_0^{S^*} f''(K) C(K) dK + \int_{S^*}^{\infty} f''(K) P(K) dK$$

Az első tag egy kötvény, a második egy forward ügylet t időpontbeli ára, az integrálok pedig egy putokból és callokból álló opciós csomag értéke. Ezek szerint az f kifizetésű derivátiva statikusan replikálható ezen termékek felhasználásával. A kifizetési függvény felbontása így

$$f(S_T) = f(S^*) + f'(S^*) (S_T - S^*) + \int_0^{S^*} f''(K) (S_T - K)^+ dK + \int_{S^*}^{\infty} f''(K) (K - S_T)^+ dK \quad (1.5)$$

Tekintsük a log-kontraktus $f(S_T) = \log(S_T)$ kifizetési függvényét. Alkalmazva rá 1.5-öt a kifizetési függvény felbontása kötvényre, forwardra és opciókra

$$\log S_T = \log S^* + \frac{1}{S^*} (S - S^*) - \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} (S_T - K)^+ dK - \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} (K - S_T)^+ dK \quad (1.6)$$

A Breeden-Litzenberger formulát fogjuk még használni a volatilitás swap replikálásánál is. Széleskörű használhatóságát mutatja, hogy a 30 napos implicit volatilitást jelző VIX-index [6] számítása is opciókból, a Breeden-Litzenberger formula alapján történik.

1.1.2. A log-kontraktus vegája

Ebben a részben bemutatjuk a log-kontraktus egy érdekes és a volatilitás replikálás szempontjából nélkülözhetetlen tulajdonságát, mégpedig azt, hogy a variancia-vegája független a spot árfolyamtól. Az előzőek alapján tehát a log-kontraktus replikálható egy olyan portfólióval, mely kötvényt, forwardot és opciókat tartalmaz. Mivel a kötvény és a forward vegája zérus, a log-kontraktus vegája

megegyezik a repilkáló portfólió opciós csomagjának vegájával. A call és put opciók variancia-vegája a Black-Scholes modellben

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} C = \frac{\partial}{\partial \sigma^2} P = \frac{S\sqrt{\tau}}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-d_1^2/2) = \nu_o$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

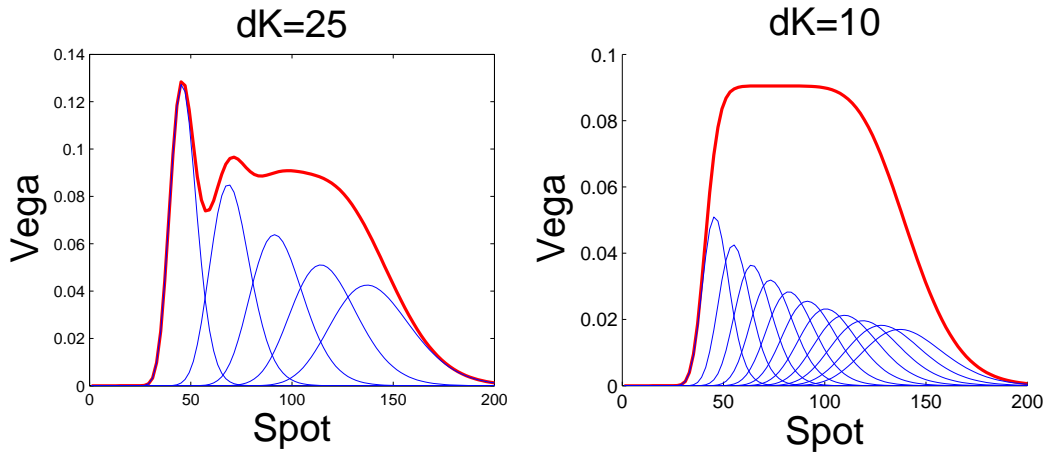
Mivel a call és a put opciók vegája azonos, a deriválást követően a két integrál egy közös integrállá alakul.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left[\int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} C(K) dK + \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} P(K) dK \right] &= \int_0^{\infty} \frac{1}{K^2} \nu_o(K) dK \\ &= \int_0^{\infty} \frac{S}{K^2} \frac{\sqrt{\tau}}{2\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(S/K) + (r + \sigma/2)\tau}{\sigma^2\tau} \right)^2 \right\} dK = \end{aligned}$$

$x = S/K$ helyettesítéssel integrálunk, $dx = -S/K^2 dK$, az integrálhatárok pedig megcserélődnek. Némi átalakítást követően az integrálban egy $\mu' = (-r - \sigma^2/2)\tau$ és $\sigma' = \sigma\sqrt{\tau}$ paraméterű log-normális eloszlás várható értékét ismerhetjük fel.

$$= -\frac{\tau}{2} \int_{\infty}^0 \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\ln x - (-r - \sigma/2)\tau)^2}{2\sigma^2\tau} \right\} dx = \frac{\tau}{2} \exp(\mu' + \sigma'^2/2) = \frac{e^{-r\tau}\tau}{2}$$

Szembeűnő, hogy a vega nem függ a spot ártól. Ez azt jelenti, hogy a log-kontraktus a spot értékétől függetlenül ugyanolyan érzékeny a varianciára. A 1.1 ábra jól szemlélteti hogy simul ki az opciós csomag vegája egyre több opció használata mellett. A kötési árfolyamok 50 és 150 között mozogtak, a baloldali ábra a 25-ös lépésköz, a jobboldali a sűrűbb, 10-es lépésköz mellett mutatja a vegát.



1.1. ábra. Az opciós portfólió vegája

Visszatérve 1.3-hoz, a log-kontraktus tetszőleges S^* szeparátor mentén történő felbontásával a replikáló portfólió a következőképp néz ki:

$$\begin{aligned}
& \frac{2dK}{K^2} && \text{put, ha } K < S^*, \text{ call, ha } K > S^* \\
& e^{-r\tau} \frac{2}{S_t} - \frac{2}{S^*} && \text{részvény} \\
& e^{-r\tau} \left(\langle X \rangle_t + 2 \log \frac{S_t}{S^*} + 2r\tau \right) && \text{betét}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

A replikáló portfólió nulla időpontbeli értéke megadja a variancia swap árát. Ez alapján a kötési árfolyam a következőképp számolható

$$K_{var} = 2 \left[rT - \log S^* - \frac{e^{rT} S_0 - S^*}{S^*} + e^{rT} \int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} C(K) dK + e^{rT} \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} P(K) dK + \log S_0 \right]$$

Itt S^* tetszőlegesen megválasztható. Ha a vágási helynek az $F = e^{rT} S_0$ forward árat választjuk az előző képlet tovább egyszerűsödik.

$$K_{var} = 2e^{rT} \left[\int_0^F \frac{1}{K^2} C(K) dK + \int_F^{\infty} \frac{1}{K^2} P(K) dK \right]$$

1.2. Replikáció diszkrét kötési árfolyamok mellett

A 1.7-ben megadott replikáció megvalósítása során két problémával kell szembenéznünk. Az egyik, hogy a hedge dinamikus, a részvényekből tartandó mennyiség folyamatos kiigazítást igényel. A másik, hogy a log-kontraktus felbontása az opciók minden kötési árfolyamon való kereskedhetőségét feltételezi. Ezek mind hibát okoznak a tökéletes hedge-hez képest. Az első problémát a portfólió gyakori újraszűzőzésével kezelhetjük. Jelen fejezetben a log-kontraktus véges sok kötési árfolyamú opciókra bontásából fakadó hibát fogjuk vizsgálni. (1.6)-ot tekintve ($S^* = F$ választás mellett) ha az opciókat egy oldalra rendezzük, akkor az opciós csomag lejáratkori értéke a következő kifizetéssel lesz egyenlő

$$f(S_T) = \frac{S_T - F}{F} - \log \frac{S_T}{F} \tag{1.8}$$

$$f(S_T) = \int_0^F \frac{1}{K^2} (K - S_T)^+ dK + \int_F^{\infty} \frac{1}{K^2} (S_T - K)^+ dK \tag{1.9}$$

Praktikus a log-kifizetés helyett f replikálásával foglalkozni, mivel f felbontása során a kötvény és forward tagok eltűnnek és így előállítható tisztán opciók kifizetéséből. Tegyük fel, hogy a piacon a call opciók $K_0 < K_{1c} < K_{2c} < \dots$ kötési árfolyamon kereskedettek, a putok pedig $K_0 > K_{1p} > K_{2p} > \dots$ strike-ok mellett érhetők el. Legyen $\mathbb{K}_{put} = \{K_0, K_{1p}, \dots\}$, $\mathbb{K}_{call} = \{K_0, K_{1c}, \dots\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{K}_{put} \cup \mathbb{K}_{call}$. Jelölje ω_K a K kötési árfolyamú opcióból tartandó mennyiséget. Adott ω_K súlyok mellett a replikáló portfólió \hat{f} kifizetési függvénye a következőképp néz ki:

$$\hat{f}(S_T) = \sum_{K \in \mathbb{K}_{put}} \omega_K (K - S_T)^+ + \sum_{K \in \mathbb{K}_{call}} \omega_K (S_T - K)^+ \tag{1.10}$$

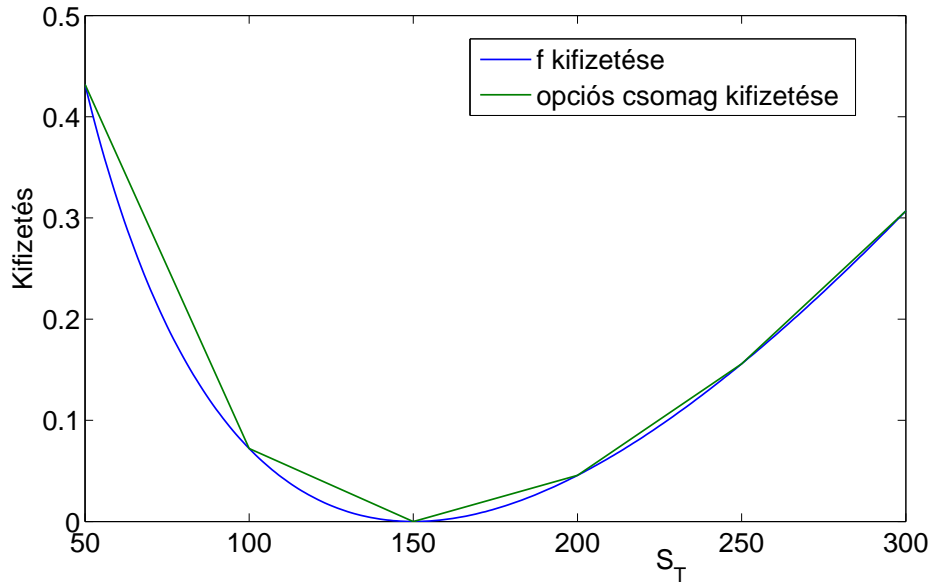
A fenti függvény szakaszonként konstans, a töréspontok az $S \in \mathbb{K}$ helyeken vannak. \hat{f} meghatározása oly módon történik, hogy a közelítő függvény az $S \in \mathbb{K}_{put} \cup \mathbb{K}_{call}$ pontokban egyezzen

meg f -fel. Ekkor [1] alapján az ω súlyok a következők

$$\omega_{K_{nc}} = \frac{f(K_{n+1,c}) - f(K_{n,c})}{K_{n+1,c} - K_{n,c}} - \sum_{i=0}^{n-1} \omega_{K_{ic}} \quad (1.11)$$

$$\omega_{K_{np}} = \frac{f(K_{n+1,p}) - f(K_{n,p})}{K_{n,p} - K_{n+1,p}} - \sum_{i=0}^{n-1} \omega_{K_{ip}} \quad (1.12)$$

Az így súlyozott opciós csomag kifizetését az 1.2 ábra mutatja. A súlyok megválasztása szemléletes. A tört például callok esetén $K_{n+1,c} > S > K_{n,c}$ mellett $\hat{f}(S)$ meredekségét adja meg, amihez az összes $K_{i,c}, i < n$ súly hozzájárul – gondoljunk a callok kifizetési függvényére –, így $\omega_{n,c}$ -vel csak a fennmaradó részt kell biztosítani.



1.2. ábra. Az f kifizetés és opciókkal történő közelítése

Most bemutatunk egy másik módszert is az opciós súlyok meghatározására. \hat{f} -től azt követeljük meg, hogy a kifizetési függvénye minél közelebb legyen f -éhez, továbbá az eltéréseket aszerint büntetjük, hogy milyen valószínűséggel realizálódik az adott helyen S_T . Az ω súlyokat tehát úgy keressük, hogy a

$$\int_0^{\infty} [(f(S) - \hat{f}_{\Omega}(S))P(S)]^2 dS \quad (1.13)$$

integrál minimális legyen, ahol a P függvény S_T sűrűségfüggvénye. Speciálisan S_T -ről feltesszük, hogy a BS-világnak megfelelően lognormális eloszlást követ. Ω arra utal, hogy \hat{f} kifizetése függ az ω súlyoktól. A meghatározásuk szimulációk segítségével fog történni. Ehhez generálni fogunk több T időpontbeli részvényárat (szcenáriót), majd ezekhez úgy választjuk meg az ω_i súlyokat, hogy a replikáció és a replikálandó kifizetés szcenáriónkénti négyzetes eltérése minimális legyen. A részvényárok generálása a P sűrűségfüggvénynek megfelelően fog történni, így ahol $P(S)$ értéke nagy és ezáltal 1.13-ban a hiba erősen büntetett, ott a szimuláció során gyakoribbak lesznek a realizálódások. Az egyes részvényárfolyamokat az $\mathbb{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ halmaz jelöli (tehát most S_i esetén az alsó indexben lévő i nem időpontot jelöl). A részvényárfolyamokat P -nek megfelelően

BS-modellben szimuláljuk. Jelölje $C_{i,j}$ az i . scenárió esetében a K_j kötési árfolyamú, $K_j \leq K_0$ esetén put, $K_j \geq K_0$ esetén pedig call opció kifizetését. A $K = K_0$ esetben call és put opciót is tartunk, különböző súlyokkal. Tehát

$$C_{i,j} = \begin{cases} (K_j - S_i)^+, & \text{ha } K_j \leq K_0 \\ (S_i - K_j)^+, & \text{ha } K_j \geq K_0 \end{cases}$$

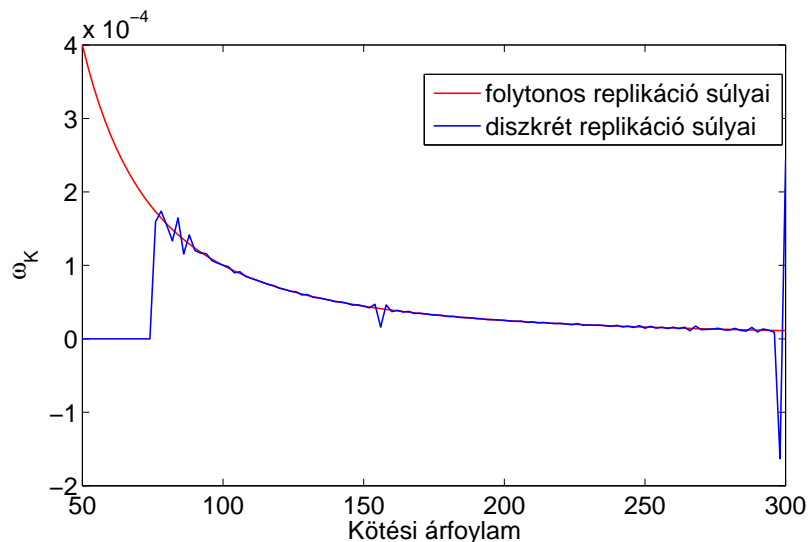
Az egyes scenáriók alatt realizálódott opciókifizetéseket az A mátrixba rendezzük:

$$A = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,n} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \dots & C_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m,1} & C_{m,2} & \dots & C_{m,n} \end{pmatrix}$$

A K_i kötési árfolyamú opcióból ω_i darabot kell tartani, ezen súlyokat az ω oszlopvektorban gyűjtjük össze, $\omega = [\omega_1, \dots, \omega_n]^T$, a replikálendő kifizetéseket pedig a $v = [f(S_1), \dots, f(S_m)]^T$ vektor tartalmazza. Az i . scenárióban az opciós csomag értéke $\sum_{j=1}^n \omega_j C_{i,j}$, ennek kell az $f(S_i)$ kifizetést előállítania. A replikáció megadásához tehát az alábbi optimalizációs feladatot kell megoldani:

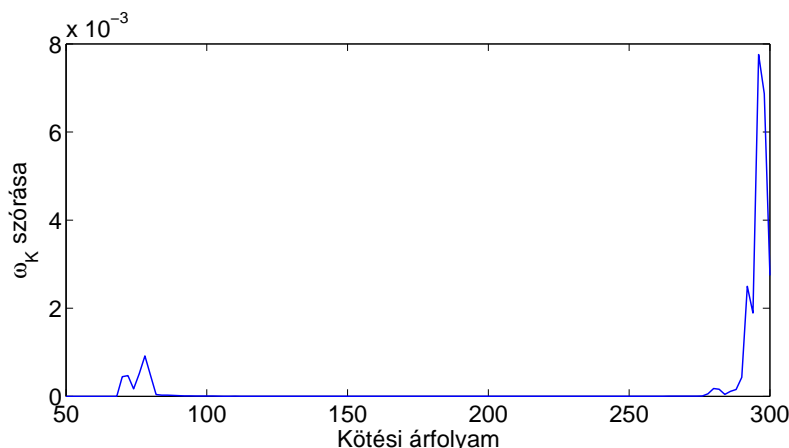
$$\min_{\omega} \|A * \omega - v\|_2$$

Először megvizsgáljuk, hogy a diszkrét modell eredményei konzisztensek-e a folytonossal. Ha \mathbb{K} sűrűn tartalmazza a kötési árfolyamokat, azt várjuk, hogy a modell visszaadja az (1.9) szerinti $1/K^2$ -es eloszlást.



1.3. ábra. Opció súlyok a diszkrét modellben

A legtöbb kötési árfolyam esetében jól illeszkednek a folytonos modell jóslta görbére a szimulációból származó eredmények, azonban két helyen, a forward árfolyam körül valamint a széleken is eltérést tapasztalunk. Kérdés, hogy a modell eredményei mennyire megbízhatóak. A szimulációt újravégzelve az egyes ω_K értékere több realizációt is kapunk. A kötési árfolyam függvényében



1.4. ábra. Opciós súlyok szórása

ábrázolva az ω_K súlyok empirikus szórását (lásd 1.4) megfigyelhető, hogy a szimuláció eredményei a széleken elég instabilak, azonban a forward árfolyam körüli eltérést a szimuláció stabilan produkálja. A forwardtól távoli kötési árfolyamoknál tapasztalt bizonytalan eredmény annak köszönhető, hogy ebben a tartományban már viszonylag ritkák a realizálódott S_T értékek. Ha például egy nagy $K_i > F$ esetén a (K_i, K_{i+1}) intervallumba egyetlen $S \in \mathbb{S}$ részvényárfolyam esik, akkor ω_{K_i} úgy lesz megválasztva, hogy az opciós csomag ezen S melletti értéke pontosan megegyezzen a replikálendő kifizetéssel. Ez anélkül tehető meg, hogy az $S' < S$ scenáriók kifizetését befolyásolná, mivel a K_i kötési árfolyamú call opció kifizetése $S' < K_i$ esetén zérus. Ugyanez a helyzet a forward árnál jóval alacsonyabb kötési árfolyamok eseténél is, ugyanis ezen strike-okra a portfólióban put opciókat tartunk, melyek kifizetése a strike fölötti részvényárfolyam esetén tűnik el, vagyis az ω_K súlyok $K \ll F$ esetén a minta döntő részére szintén nem lesznek hatással. A jelenség a mintaelemszám növelésével nem tüntethető el, hatására az csak a forward ártól távolabb tolódik.

1.3. Numerikus eredmények

f imént bemutatott replikációjának megfelelő ω_K -kat különböző sűrűségű kötési árfolyamok mellett is meghatároztam. A legkisebb strike-ot, ami mellett kereskedhető az opció 100-nak vettem, a legnagyobbat 400-nak. A forward árfolyam 200 volt. A kötési árfolyamok lépésközét $dK = \{10, 25, 50, 100\}$ -nak választottam. Példaként a $dK = 50$ eset mellett kapott súlyokat az 1.1 táblázat mutatja. A $K = 200$ kötési árfolyam kétszer szerepel, mert a vágási pontnál megengedjük, hogy putot és callt is tartsunk.

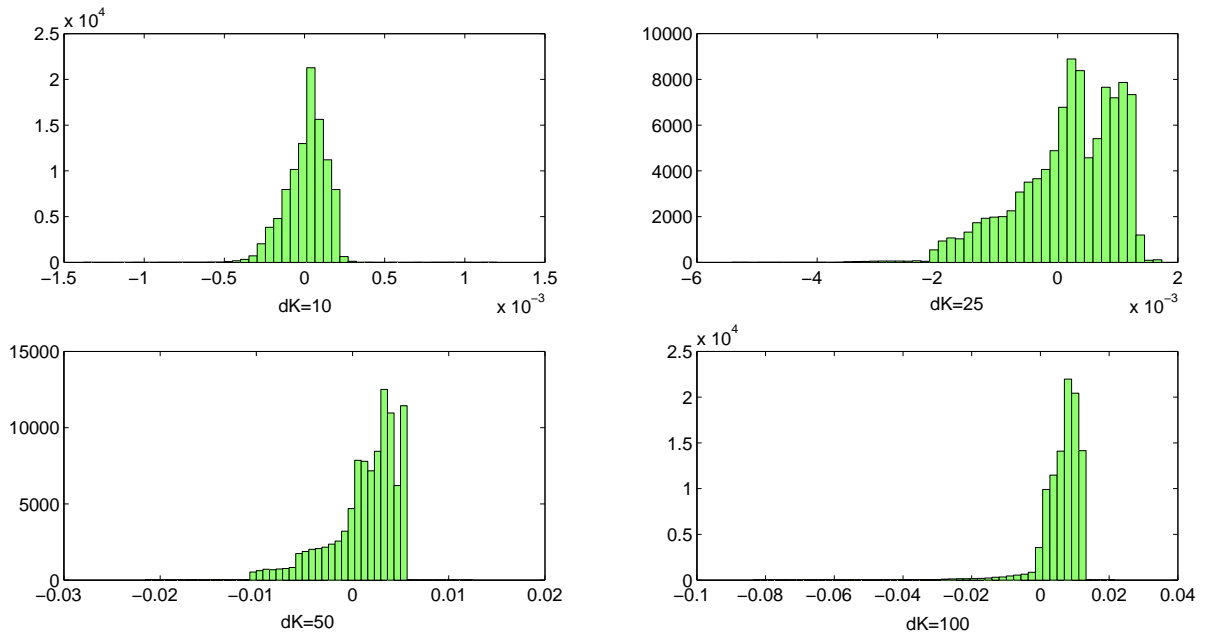
K	100	150	200	200	250	300	350	400
ω_K	0.0051	0.0023	0.0005	0.0004	0.001	0.0004	0.0005	0.0002

1.1. táblázat. Opciós súlyok $dK = 50$ esetben

A várakozásunk az, hogy a felosztás sűrűsödésével javul a replikáció pontossága. Ennek ellenőrzéséhez a meghatározott ω súlyokat az illesztés során használt \mathbb{S} -től független, újra generált adathalmazon teszteltem. Mind a négy dK mellett kiszámoltam az $f(S) - \hat{f}(S)$ eltérések szórását. Az eredményeket a 1.2 táblázat összegzi. Az egyes scenáriók alatt tapasztalt eltérésekről készült hisztogramok a 1.5 képen láthatók. Viszonyításként kiszámoltuk a replikálandó f kifizetések abszolút átlagát is, melyre $m = 0,0198$ érték adódott. Az arányosított eltérések vizsgálata instabil eredményhez vezet, mert a nullához közeli kifizetések esetén a százalékos hibák nagyon magasak.

dK	10	25	50	100
opciók száma	32	14	8	5
szórás	0,00015	0,00084	0,0035	0,0101

1.2. táblázat. opciók száma és a replikálás szórása különböző dK -k esetén



1.5. ábra. Replikációs hibák hisztogramjai különböző dK -k esetén

A variancia swap különböző módszerekkel számolt kötési árfolyamát az 1.3 tábla mutatja. Az árazás Heston modellben történt, a kalibrációt a "modellilllesztés" fejezetben foglaltam össze.

HM-ben	MC-szimuláció	opciós árakból
1.5191%	1.5915%	1.5232%

1.3. táblázat. K_{var} meghatározása HM-beli analitikus képlettel, Monte-Carlo szimulációval és opciós árakból

2. fejezet

Volatilitás swap

Ebben a fejezetben a volatilitás swapokat fogjuk vizsgálni. Az árazási módszerek áttekintése mellett bemutatjuk Peter Carr és Roger Lee [3] cikkük alapján a volatilitás swapok részvényopciókkal történő replikálását is. Látni fogjuk, hogy a variancia swapokkal ellentétben az árazás és a replikálás is sokkal bonyolultabb feladat. A volatilitás swap lejáratkori kifizetése az esedékes időszak alatt megfigyelt volatilitás mínusz egy, az ügyletkötéskor meghatározott összeg, vagyis:

$$\sqrt{\langle X \rangle_T} - K_{vol}$$

A fair kötési árfolyam a variancia swap esetéhez hasonlóan az a K kötési árfolyam, melyre a volatilitás swap kezdeti értéke nulla, tehát $K_{vol} = \mathbf{E}_0 \sqrt{\langle X \rangle_T}$. Általában egy kifizetés gyökét nem triviális árazni, replikálni, ráadásul jelen esetben maga az alaptermék is összetett. Mielőtt rátérnénk a variancia swap replikálására és a kötési árfolyam pontos meghatározására, [7] alapján bemutatunk egy, a gyökfüggvény sorfejtésén alapuló közelítő módszert.

2.1. Approximáció sorfejtéssel

Ha az árazás során a várható érték felcserélhető lenne a gyökvonással, akkor a kötési árfolyam meghatározása egyszerűen vissza lenne vezetve a variancia swap árazásának problémájára, amit már az előző fejezetben megoldottunk. Ez azonban nem teljesül,

$$K_{vol} = \mathbf{E}_0 \sqrt{\langle X \rangle_T} \leq \sqrt{\mathbf{E}_0 \langle X \rangle_T} = \sqrt{K_{var}} \quad (2.1)$$

A kötési árfolyamok közötti egyenlőtlenség a Jensen-egyenlőtlenségből következik, a gyökfüggvény konkavítása révén. Az iménti becslés javítható, ha tekintjük a \sqrt{x} függvény Taylor-sorát, és abból további tagokat is figyelembe veszünk.

$$\sqrt{x} = \sqrt{a} + \frac{x-a}{2\sqrt{a}} - \frac{(x-a)^2}{8a^{3/2}} + O(x^3) \quad (2.2)$$

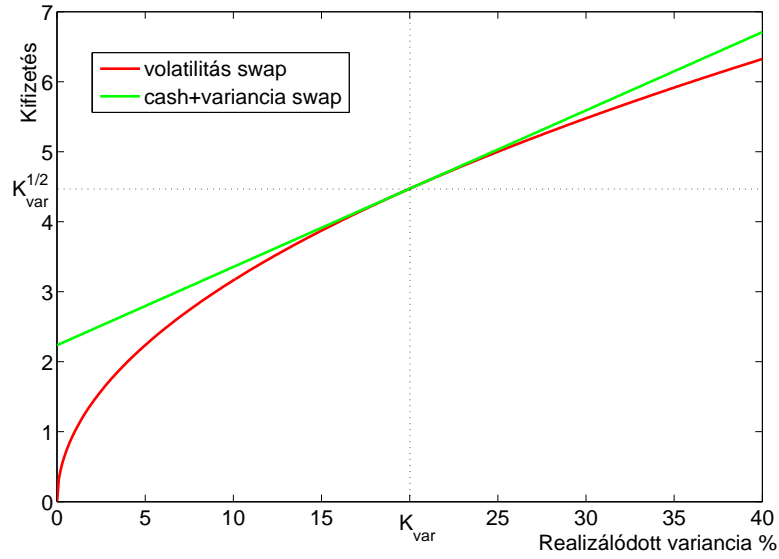
2.1.1. Lineáris közelítés

Ha 2.2-ben a $x = \langle X \rangle_T$ és $a = K_{var}$ helyettesítésekkel élünk, az első két tag a volatilitás swap kifizetésének egy lineáris közelítését adják. A második tag kifizetése megfelelő mennyiségű variancia

swap kifizetésével egyenlő, így a módszer nem csak árazásra használható, egy nem túl pontos, de egyszerű replikációt is biztosít.

$$\sqrt{\langle X \rangle_T} \approx \sqrt{K_{var}} + \frac{1}{2\sqrt{K_{var}}}(\langle X \rangle_T - K_{var}) \quad (2.3)$$

Várható értéket véve az $\mathbf{E}_0(\langle X \rangle_T - K_{var})$ tag eltűnik – mivel K_{var} -t pont úgy határoztuk meg, hogy a variancia swap nulla időpontbeli értéke zérus legyen – és K_{vol} értékének egyszerűen a $\sqrt{K_{var}}$ közelítés adódik. Ez megegyezik azzal, mintha 2.1-ben egyenlőtlenség helyett egyenlőség állna, összhangban azzal, hogy a várható érték átmegy a lineáris függvényeken. Ahogy $\langle X \rangle_T$ realizálódott értéke eltávolodik K_{var} -tól, a közelítés egyre pontatlanabb lesz, lásd 2.1.



2.1. ábra. A volatilitás swap kifizetése és variancia swappal való közelítése

2.1.2. Konvexitási hiba a Heston modellben

Az előbb a másodrendű tagot elhagyva a volatilitás swap egy közelítő replikációját kaptuk. A négyzetes tag elhanyagolására azért volt szükség, mert a $(\langle X \rangle_T - K_{var})^2$ kifizetés előállítása bonyolult, de ha csak a kötési árfolyam meghatározása a cél, akkor HM-ben a $K_{vol} \approx \sqrt{K_{var}}$ becslés tovább javítható. Itt megjegyezzük, hogy Carr-Lee [3] cikkükben megadják a $\langle X \rangle_T^n$ alakú kifizetések opciókkal történő replikálását. Vélhetőleg járható út lenne a sorba fejtett gyökfüggvény kellően sok tagját replikálni a [3]-ban bemutatott módszer alapján, ezzel állítva elő a volatilitás swapot. Visszatérve 2.2-hez, várható értéket véve az $\mathbf{E}_0(\langle X \rangle_T - K_{var})^2$ tag éppen $\langle X \rangle_T$ szórásnégyzete, így

$$K_{vol} \approx \sqrt{K_{var}} - \frac{\mathbf{D}_0^2 \langle X \rangle_T}{8K_{var}^{3/2}} \quad (2.4)$$

Cseréljük meg a szórásnégyzetet az integrállal.

$$\mathbf{D}_0^2 \langle X \rangle_T = \mathbf{D}_0^2 \int_0^T v_t dt = \int_0^T \int_0^T \text{Cov}_0(v_s, v_t) ds dt \quad (2.5)$$

A hibatag meghatározásához tehát a variancia kovarianciastruktúráját kell kiszámolnunk. HM-ben v_t CIR folyamatot követ, melyet az őt leíró dv_t dinamikával definiáltunk. [15] alapján 2.6 megoldása a 2.7-ben közölt v_t folyamat.

$$dv_t = \alpha(\beta - v_t)dt + \eta\sqrt{v_t}dW_t \quad (2.6)$$

$$v_t = \beta + (v_0 - \beta)e^{-\alpha t} + \eta e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha u} \sqrt{v_u} dW_u \quad (2.7)$$

$$\mathbf{E}_0 v_t = \beta + (v_0 - \beta)e^{-\alpha t} \quad (2.8)$$

A hivatkozott könyvben v_t hibásan volt megadva, a β tag nem szerepelt a jobb oldalon. Könnyen ellenőrizhető, hogy a fenti 2.7 folyamat valóban kielégíti a CIR folyamatot definiáló sztochasztikus differenciálegyenletet. A következőkben legyen $s < t$. A kovarianciát definíció szerint felírva,

$$\text{Cov}_0(v_s, v_t) = \mathbf{E}_0(v_s - \mathbf{E}_0 v_s)(v_t - \mathbf{E}_0 v_t) \quad (2.9)$$

$$= \mathbf{E}_0 \left(\eta e^{-\alpha s} \int_0^s e^{\alpha u} \sqrt{v_u} dW_u \right) \left(\eta e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha u} \sqrt{v_u} dW_u \right) \quad (2.10)$$

$$= \eta^2 e^{-\alpha(s+t)} \left[\mathbf{E}_0 \left(\int_0^s e^{\alpha u} \sqrt{v_u} dW_u \right)^2 + \mathbf{E}_0 \left(\int_0^s e^{\alpha u} \sqrt{v_u} dW_u \right) \left(\int_s^t e^{\alpha u} \sqrt{v_u} dW_u \right) \right] \quad (2.11)$$

(2.11)-ben a t -ig tartó integrált s -nel kettéválasztottuk. A második tagban a két sztochasztikus integrált jelölje Y_s és Y_t . Y_s mérhető \mathcal{F}_s -re, így a toronyszabály értelmében, valamint kihasználva, hogy a Wiener-folyamat szerinti integrál várható értéke 0:

$$\mathbf{E}_0(Y_s Y_t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{E}_s(Y_s Y_t)) = \mathbf{E}_0(Y_s \mathbf{E}_s Y_t) = 0$$

Tehát (2.11)-ben a második tag eltűnik. Az első tagra alkalmazva az Itó-izometriát, majd a várható értéket az integrál mögé véve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \text{Cov}_0(v_s, v_t) &= \eta^2 e^{-\alpha(s+t)} \mathbf{E}_0 \left(\int_0^s e^{\alpha u} \sqrt{v_u} dW_u \right)^2 \\ &= \eta^2 e^{-\alpha(s+t)} \mathbf{E}_0 \int_0^s e^{2\alpha u} v_u du \\ &= \eta^2 e^{-\alpha(s+t)} \int_0^s e^{2\alpha u} \mathbf{E}_0 v_u du \\ &= \eta^2 e^{-\alpha(s+t)} \int_0^s e^{2\alpha u} (\beta + (v_0 - \beta)e^{-\alpha u}) du \\ &= \frac{v_0 \eta^2}{\alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\alpha(s+t)}) + \frac{\eta^2 \beta}{2\alpha} (e^{-\alpha(t-s)} + e^{-\alpha(t+s)} - 2e^{-\alpha t}) \end{aligned}$$

Ellenőrzésképp kiszámoltuk a kovarianciát $s = 0$ és $s = t$ értékekre, mely speciális esetekben rendre nullát és v_t szórásnégyzetét kell kapnunk. Az eredmények ezzel konzisztensek. Visszatérve (2.5)-re a kovariancia szimmetriáját és az imént levezetett alakját kihasználva:

$$\mathbf{D}_0^2 \langle X \rangle_T = 2 \int_0^T \int_0^t \text{Cov}_0(v_s, v_t) ds dt \quad (2.12)$$

$$= \eta^2 \frac{-5\beta + 2\alpha\beta T + e^{-2\alpha T}(\beta - 2v_0) + 2v_0 + 4e^{-\alpha T}(\beta + \alpha\beta T - \alpha T v_0)}{2\alpha^3} \quad (2.13)$$

Az integrált a Wolfram Mathematica program segítségével számoltam ki.

2.2. Árazás differenciálegyenlettel

Az előző részben áttekintett eljárások csak közelítő eredményeket biztosítottak, a most következő módszerrel azonban lehetőség nyílik a volatilitás swapok pontos árazására is. Mark Broadie és Ashis Jain [5]-ben leírt eredményeit követve HM-ben le fogunk vezetni egy differenciálegyenletet, melynek megoldásával – a varianciát leíró CIR folyamat rögzített paramétereit mellett – tetszőleges kezdeti volatilitás mellett megkapható a volatilitás swap fair ára. A differenciálegyenlet megoldása nem része a dolgozatnak, mint lehetséges árazási módszer mutatjuk be. Emlékeztetőül a CIR-folyamatot leíró SDE:

$$dv_t = \alpha(\beta - v_t)dt + \eta\sqrt{v_t}dW_t$$

Legyen Y_t a volatilitás swap forward árfolyamata, vagyis

$$Y_t = \mathbf{E}_t\sqrt{\langle X_T \rangle}$$

A T időpontig felkumulálódott varianciát a t pontban két részre vágjuk.

$$I_t = \int_0^t v_s ds$$

Ez alapján a volatilitás swap forward árfolyamata

$$Y_t = \mathbf{E}_t\sqrt{I_t + \int_t^T v_s ds} = F(t, v_t, I_t)$$

Y_t valóban leírható a fenti három mennyiség függvényeként, t és I_t mellett a lejáratig hátralévő variancia becsléséhez v_t minden információt tartalmaz – a folyamat Markov-tulajdonságából kifolyólag. Alkalmazzuk az Itó-formulát F -re. Mivel $dI_t = v_t dt$, I_t kvadratikus variációja zérus, így a másodrendű deriváltakból csak a v szerinti nem tűnik el.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial v} dv + \frac{\partial F}{\partial I} dI + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} d\langle v \rangle$$

Kihasználva, hogy v_t és I_t dinamikája ismert, azokat visszahelyettesítve a fenti differenciálegyenlet az alábbi format ölti

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v} \alpha(\beta - v_t) + \frac{\partial F}{\partial I} v_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \eta v_t \right] dt + \frac{\partial F}{\partial v} \eta \sigma_t dW_t \quad (2.14)$$

F a volatilitás forward árfolyamatát írja le, melynek a kockázatmentes mérték szerinti driftje zérus, mi szerint F -nek ki kell elégítenie az alábbi parciális differenciálegyenletet

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v} \alpha(\beta - v_t) + \frac{\partial F}{\partial I} v_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \eta v_t = 0$$

A volatilitás swap kifizetési függvénye alapján F T -beli értékei ismertek,

$$F(T, v_T, I_T) = \sqrt{I_T}$$

Ahhoz, hogy a PDE-t meg tudjuk oldani, az I és v változók mentén is meg kell adni a peremértékeket. Ezeken a helyeken F pontos értékeinek megadása helyett azzal a feltevéssel élünk, hogy a másodrendű deriváltak eltűnnek, vagyis

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I^2} \Big|_{I=I_{min}, I_{max}} = 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \Big|_{v=v_{min}, v_{max}} = 0 \quad (2.15)$$

2.3. A volatilitás swap replikálása

A következőkben [3] alapján bemutatjuk Carr és Lee módszerét a volatilitás replikálására. ÁM-ben fogunk dolgozni, feltesszük, hogy $r = 0$. Mielőtt nekilátnánk a levezetésnek röviden vázoljuk annak fontosabb lépéseit. Mint ahogy [9]-ban Klaus Schürger is használja, az \sqrt{q} kifizetés átírható a következő alakra:

$$\sqrt{q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-zq}}{z^{3/2}} dz \quad (2.16)$$

Ekkor várható értéket véve és azt az integrállal felcserélve az $\mathbf{E}_t e^{zq}$ exponenciális kifizetés replikálását kell megadnunk, és ezekből már fel lehet építeni a \sqrt{q} kifizetést. Látni fogjuk, hogy az exponenciálisok replikálása csak a variancia és a részvényárfolyam függetlensége mellett lesz tökéletes, a $\rho \neq 0$ eset hibát fog eredményezni. Ennek kezelésére Carr és Lee bevezetik a korreláció-immunitás fogalmát, amivel a $\rho \neq 0$ esetben csak $O(\rho^2)$ nagyságrendű hibával kell számolnunk. Az exponenciálisok korreláció-immunitás előállítását kihasználva végül megadjuk a volatilitás swap replikációját. A következőkben tehát három ponton keresztül vesszük át a volatilitás swap replikálását:

- A korreláció-immunitás fogalmának bevezetése
- Az exponenciális kifizetések replikálása
- Az exponenciálisok használatával a volatilitás swap replikálása

2.3.1. Korreláció-immunitás

A variancia swap replikálása során az S_t és σ_t folyamatok korrelációja nem befolyásolta az eredményt, az (1.7)-ben megadott replikálás a korreláció minden értéke mellett tökéletes volt. A volatilitás swapok esetében ez nincs így, de Carr és Lee módszere eszközt ad arra, hogy az árazás korrelációra való érzékenységét bizonyos értelemben csökkentjük. ÁM-ben a variancia swapokhoz hasonlóan opcióárból fogjuk meghatározni a volatilitás swap kötési árfolyamát. Legyen G a kiindulási opciós portfólió kifizetési függvénye. Ekkor az árazás a következőképp néz ki:

$$\mathbf{E}_0 \sqrt{\langle X \rangle_T} = \mathbf{E}_0 G(S_T) \quad (2.17)$$

Látni fogjuk, hogy végtelen sok alkalmas G függvény létezik, ha S és σ függetlenek. Az árazás $\rho \neq 0$ feltétel melletti pontatlanságát a következőképp érzékeltethetjük: a szokásos módon írjuk át S dinamikáját ÁM-ben – ρ -hoz megfelelő súlyozással – úgy, hogy a részvény és a volatilitás fejlődését hajtó két Wiener-folyamat független legyen.

$$dS_t = \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_t S_t d\widehat{W}_t^{(1)} + \rho \sigma_t S_t dW_t^{(2)} \quad (2.18)$$

ahol $\widehat{W}_t^{(1)}$ és $dW_t^{(2)}$ független Wiener-folyamatok és σ_t független $\widehat{W}_t^{(1)}$ -től. Ha ρ -t 0-nak választjuk, akkor a két folyamat független és 2.17-ben az egyenlőség fennáll. ρ értékének változtatására a σ folyamat érzéketlen, így 2.17 bal oldala minden ρ esetén azonos, azonban S dinamikája – és ezzel együtt $\mathbf{E}_0 G(S_T)$ is – ρ -val együtt változik. Olyan G függvényt szeretnénk választani, mely minél

kevésbé érzékeny ρ értékére. A következőkben definiálni fogjuk mit értünk egy kifizetés korreláció-immunitása alatt. Ehhez bevezetjük a kifizetések Black-Scholes árát.

Egy $F(S_T)$ kifizetés σ szórás melletti Black-Scholes ára alatt az

$$F^{BS}(S_t, \sigma) = \int_0^\infty F(yS_t) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma y}} e^{-\frac{(y+\sigma^2/2)^2}{2\sigma^2}} dy \quad (2.19)$$

értéket értjük, ahol y egy $\mu = 0$ várható értékű és σ szórású lognormális eloszlás értéke. BS-ben a kockázatsemleges mértéke szerint $S_T = yS_t$, vagyis a fenti képlet tulajdonképpen az F kifizetés BS modellbeli kockázatsemleges mérték szerinti várhatóértéke. $r = 0$ miatt nem kell diszkontálni. $W^{(1)}$ és $W^{(2)}$ \mathcal{F}_t -BM, σ és $W^{(2)}$ adaptáltak egy $\mathcal{H}_t \subset \mathcal{F}_t$ filtrációhoz ami független $\mathcal{F}_t^{W^{(1)}}$ -től. Ekkor S dinamikája a következőképp alakul:

$$dS_t = \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_t S_t dW_t^{(1)} + \rho \sigma_t S_t dW_t^{(2)} \quad (2.20)$$

Itt a σ és S folyamatok $W^{(2)}$ -n keresztül összefügghet. Ezen modellben egy $f(S_T)$ kifizetés t -beli értéke a következőképp adható meg Black-Scholes árral:

$$\mathbf{E}_t F(S_T) = \mathbf{E}_t F^{BS}(S_t M_{t,T}(\rho), \sigma_{t,T} \sqrt{1 - \rho^2}), \quad (2.21)$$

ahol

$$M_{t,T}(\rho) = \exp\left(-\frac{\rho^2}{2} \int_t^T \sigma_u^2 du + \rho \int_t^T \sigma_u dW_u^{(2)}\right)$$

$$\sigma_{t,T} = \left(\int \sigma_u^2 du\right)^{1/2}$$

Ahhoz, hogy ezt belássuk, tekintsük az 2.20-ben felírt részvényárfolyamnak megfelelő $X_t = \log S_t$ folyamatot. Az Itó-formula alapján

$$dX_t = \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_t dW_t^{(1)} + \rho \sigma_t dW_t^{(2)} - \frac{1}{2} \sigma_t^2 dt$$

$$= -\frac{\rho^2}{2} \sigma_t^2 dt + \rho \sigma_t dW_t^{(2)} - \frac{1 - \rho^2}{2} \sigma_t^2 dt + \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_t dW_t^{(1)},$$

tehát

$$X_T - X_t = \int_t^T dX_s = \log(M_{t,T}(\rho)) - \sigma_{t,T}^2 \frac{1 - \rho^2}{2} + \sqrt{1 - \rho^2} \int_t^T \sigma_s dW_s^{(1)}$$

Ekkor $\mathcal{H}_T \vee \mathcal{F}_t$ -re feltételezve

$$X_T - X_t \sim \mathcal{N}\left(\log(M_{t,T}(\rho)) - \sigma_{t,T}^2 \frac{1 - \rho^2}{2}, \sigma_{t,T} \sqrt{1 - \rho^2}\right)$$

Mivel $S_T = S_t e^{X_T - X_t}$ és a lognormális eloszlás várható értéke alapján $\mathbf{E}(e^{X_T - X_t} | \mathcal{H}_T \vee \mathcal{F}_t) = M_{t,T}(\rho)$, a toronyszabályt alkalmazva megkapjuk 2.21-et

$$\mathbf{E}_t f(S_T) = \mathbf{E}_t \left[\mathbf{E} \left(f(S_t e^{X_T - X_t} | \mathcal{H}_T \vee \mathcal{F}_t) \right) \right] = \mathbf{E}_t f^{BS}(S_t M_{t,T}(\rho), \sigma_{t,T} \sqrt{1 - \rho^2}),$$

A Black-Scholes árak segítségével definiálhatjuk, hogy mit értünk korreláció-immúnis kifizetésnek. Tekintsük az F kifizetés BS-árának ρ szerinti Taylor sorát a $\rho = 0$ pont körül.

$$\mathbf{E}_t F(S_T) = \mathbf{E}_t F^{BS}(S_t M_{t,T}(\rho), \sigma_{t,T} \sqrt{1 - \rho^2})$$

$$\approx \mathbf{E}_t F^{BS}(S_t, \sigma_{t,T}) + \rho S_t \mathbf{E}_t \left[\frac{\partial F^{BS}}{\partial s}(S_t, \sigma_{t,T}) \int_t^T \sigma_u dW_u^{(2)} \right] + O(\rho^2)$$

Mivel $\sigma_{t,T}$ nem mérhető \mathcal{F}_t -re nézve, $\partial F^{BS}/\partial s$ nem emelhető ki a várhatóértékből. Azonban ha $\partial F^{BS}/\partial s$ nem függ a második argumentumától, akkor a várható értékből kihozva a lineáris tag eltűnik, mivel az $\int_t^T \sigma_u dW_u$ sztochasztikus integrál várható értéke zérus. Ebben az esetben tehát az F kifizetés értéke

$$\mathbf{E}_t F(S_T) \approx \mathbf{E}_t F^{BS}(S_t, \sigma_{t,T}) + O(\rho^2)$$

Ha 2.17-ben a G kifizetés rendelkezik a fenti tulajdonsággal, akkor a korreláció csak egy négyzetes hibát eredményez az árazás során. Ezek alapján azt mondjuk, hogy egy $t < T$ időpontban az F kifizetés korreláció-immúnis, ha létezik egy \mathcal{F}_t -mérhető c , amire minden σ esetén

$$\frac{\partial F^{BS}}{\partial s}(S_t, \sigma) = c \quad (2.22)$$

2.3.2. Exponenciális kifizetések

A korreláció-immunitás tisztázását követően áttérünk az exponenciális kifizetések árazására. Ahogy 2.16-ben láttuk, a variancia swapot végtelen sok exponenciális kifizetésből fogjuk összerakni, így ezen fejezet kulcsfontosságú a swap árazása és replikálása szempontjából. $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén a $\mathbf{E}_t e^{\lambda \langle X \rangle_T}$ feltételes várható értéken belül, a t időpontból nézve a variancián keresztül van véletlenség. Célunk a várható érték átalakítás úgy, hogy a véletlen a variancia helyett az S_T részvényárfolyam értékéből származzon, és így a kifizetés a Breeden-Litzenberger formula alapján részvényopciók felhasználásával árazható – és replikálható legyen. Ehhez tekintsük az $X_T - X_t$ eloszlását az $\mathcal{F}_t \cup \mathcal{F}_T^\sigma$ feltétel mellett.

$$X_T - X_t = \int_t^T dX_s = \int_t^T \frac{1}{S_s} dS_s - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma_s^2 ds = \int_t^T \sigma_s dW_s - \frac{\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t}{2}$$

$\langle X \rangle_T$ mérhető \mathcal{F}_T^σ -re nézve, így az eloszlás szempontjából konstansként viselkedik, azonban az integrálban a részvényárfolyamot meghajtó Wiener-folyamat az integrátor, mely feltételezésünk szerint független \mathcal{F}_T^σ -től, és így ezen tagon keresztül marad $X_T - X_t$ -ben véletlen. Az integrál normális eloszlást követ, így

$$X_T - X_t \sim \mathcal{N} \left(-\frac{\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t}{2}, \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t \right) \quad (2.23)$$

Legyen $p \in \mathbb{C}$. A toronyszabályt alkalmazva

$$\mathbf{E}_t e^{p(X_T - X_t)} = \mathbf{E}_t \left[\mathbf{E} \left(e^{p(X_T - X_t)} | \mathcal{F}_t \cup \mathcal{F}_T^\sigma \right) \right]$$

A belső feltételes várható értékben $X_T - X_t$ 2.23 alapján normális eloszlást követ, így a várható érték egyenlő a megfelelő paraméterű normális eloszlás generátorfüggvényével, ami alapján

$$\mathbf{E}_t e^{p(X_T - X_t)} = \mathbf{E}_t \left[e^{(-p/2 + p^2/2)(\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t)} \right] = \mathbf{E}_t e^{\lambda(\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_t)},$$

ahol $\lambda = p^2/2 - p/2$ helyettesítéssel éltünk, ami alapján $p = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 2\lambda}$. A jobb oldalon $e^{-\lambda \langle X \rangle_t}$ kiemelhető a várható értékből, amivel átszorozva, valamint figyelembe véve, hogy $X_t = \log(S_T/S_t)$ az exponenciális árára a következőképp alakul:

$$\mathbf{E}_t e^{\lambda \langle X \rangle_T} = e^{\lambda \langle X \rangle_t} \mathbf{E}_t (S_T/S_t)^{1/2 \pm \sqrt{1/4 + \lambda}} \quad (2.24)$$

Az iménti eredmény csak $\rho = 0$ mellett pontos. A következőkben a fenti függvényt úgy módosítjuk, hogy – az exponenciális kifizetés helyes árazása mellett – korreláció-immúnis legyen. Ehhez fel fogjuk használni Carr és Lee [13]-ben közölt eredményét, mely szerint σ_t és S_t függetlensége mellett tetszőleges f kifizetési függvényre

$$\mathbf{E}_t f\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = \mathbf{E}_t \left[\frac{S_T}{S_t} f\left(\frac{S_t}{S_T}\right) \right] \quad (2.25)$$

Ezt felhasználva további, a variancia exponenciális kifizetését szintén helyesen replikáló függvényeket alkothatunk, melyek között találni fogunk olyat, ami teljesíti a korreláció-immunitás feltételét.

$$\mathbf{E}_t e^{\lambda \langle X \rangle_T} = e^{\lambda \langle X \rangle_t} \mathbf{E}_t \left[\left(\frac{S_T}{S_t}\right)^{1/2 \pm \sqrt{1/4 + \lambda}} + f\left(\frac{S_T}{S_t}\right) - \frac{S_T}{S_t} f\left(\frac{S_t}{S_T}\right) \right]$$

Az f függvény tetszőleges megválasztása mellett a fenti kifizetés helyesen árazza az exponenciális. Válasszuk meg f -et $f(S_T/S_t) = \theta(S_T/S_t)^{1/2 - \sqrt{1/4 + 2\lambda}}$ -nak, ahol θ tetszőleges \mathcal{F}_t mérhető. Így

$$\mathbf{E}_t e^{\lambda \langle X \rangle_T} = e^{\lambda \langle X \rangle_t} \mathbf{E}_t \left[(1 - \theta)(S_T/S_t)^{1/2 + \sqrt{1/4 + 2\lambda}} + \theta(S_T/S_t)^{1/2 - \sqrt{1/4 + 2\lambda}} \right],$$

ahol θ tetszőleges. Úgy szeretnénk megválasztani, hogy a kifizetés teljesítse a korreláció-immunitás feltételét. Ehhez legyen

$$\theta_{\pm}(\lambda) = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 8\lambda}} \quad p_{\pm}(\lambda) = 1/2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 8\lambda} \quad (2.26)$$

Az exponenciális értéke így

$$\mathbf{E}_t e^{\lambda \langle X \rangle_T} = e^{\lambda \langle X \rangle_t} [\theta_+(S_T/S_t)^{p_+} + \theta_-(S_T/S_t)^{p_-}] \quad (2.27)$$

Leellenőrizhető, hogy ez a kifizetés valóban korreláció-immúnis, de az exponenciálisokat önmagukban nem fogjuk használni, így a korreláció-immunitást csak a volatilitás-swap esetében fogjuk belátni.

2.3.3. A replikáló portfólió

Az exponenciálisok replikálásának ismeretében részvényopciókból és betétből elő tudjuk állítani a volatilitás swapot. Ehhez a $\sqrt{\langle X \rangle_T}$ kifizetést fel fogjuk írni exponenciálisok integráljaként. 2.16 alapján, = $\langle X \rangle_T$ helyettesítéssel élve

$$\mathbf{E}_t \sqrt{\langle X \rangle_T} = \frac{1}{2\pi} \mathbf{E}_t \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-z \langle X \rangle_T}}{z^{2/3}} dz \quad (2.28)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (\theta_+ + \theta_-) \frac{1 - \mathbf{E}_t e^{-z \langle X \rangle_T}}{z^{2/3}} dz \quad (2.29)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (\theta_+ + \theta_-) \frac{1 - e^{-z \langle X \rangle_t} \mathbf{E}_t (S_T/S_t)^{p_{\pm}}}{z^{2/3}} dz \quad (2.30)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \mathbf{E}_t \int_0^{\infty} \theta_+ \frac{1 - e^{-z \langle X \rangle_t} (S_T/S_t)^{p_+}}{z^{2/3}} + \theta_- \frac{1 - e^{-z \langle X \rangle_t} (S_T/S_t)^{p_-}}{z^{2/3}} dz \quad (2.31)$$

1.14-ben kihasználtuk, hogy $\theta_+ + \theta_- = 1$, valamint alkalmaztuk a Fubini-tételt. (2.24) szerint az exponenciális replikálása p_+ és p_- választás mellett is helyes. θ_{\pm} -szal beszorozva ennek megfelelően

választjuk meg p -t, végül (2.31)-ben a várható érték és az integrál felcserélésekor ismét használtuk a Fubini-tételt. Ezek alapján a volatilitás swap szintetikus volatilitás swappal (SVS) történő árazása a következőképp történik:

$$\mathbf{E}_t \sqrt{\langle X \rangle_T} = \mathbf{E}_t G_{\text{SVS}}(S_T, S_t, \langle X \rangle_t) \quad (2.32)$$

$$G_{\text{SVS}}(S_T, S_t, \langle X \rangle_t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \theta_+ \frac{1 - e^{-z\langle X \rangle_t} (S_T/S_t)^{p_+}}{z^{2/3}} + \theta_- \frac{1 - e^{-z\langle X \rangle_t} (S_T/S_t)^{p_-}}{z^{2/3}} dz, \quad (2.33)$$

ahol p és θ értékei (2.25)-nek megfelelőek. A két kifizetés között nagyon fontos különbség, hogy $\sqrt{\langle X \rangle_T}$ -ben a véletlen a variancián keresztül van jelen, míg a $G_{\text{SVS}}(S_T, S_t, \langle X \rangle_t)$ kifizetésben a részvényárfolyam a bizonytalanság forrása. $\langle X \rangle_t$ és S_t a t időpontban ismert, így azokra, mint a G_{SVS} kifizetés paramétereire tekintünk. SVS azon túl, hogy replikálja a volatilitás swapot, korreláció-immúnis is. Ehhez (2.22) definíció szerint tekintsük a G_{SVS} -nek megfelelő BS-kifizetést.

$$\left. \frac{\partial G_{\text{SVS}}^{BS}}{\partial S_T} \right|_{S_T=S_t} = \frac{\partial}{\partial S_T} \left(\int_0^\infty G_{\text{SVS}}(yS_T) \phi(y) dy \right) \Big|_{S_T=S_t} \quad (2.34)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial S_T} G_{\text{SVS}}(yS_T) \Big|_{S_T=S_t} \phi(y) dy \quad (2.35)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{-e^{-z\langle X \rangle_t} (\theta_+ p_+ y^{p_+} + \theta_- p_- y^{p_-})}{S_t z^{3/2}} \phi(y) dy dz \quad (2.36)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{-e^{-z\langle X \rangle_t} (\theta_+ p_+ \int_0^\infty y^{p_+} \phi(y) dy + \theta_- p_- \int_0^\infty y^{p_-} \phi(y) dy)}{S_t z^{3/2}} dz \quad (2.37)$$

A Wolfram Mathematica számításai alapján az $y^{p_+} \phi(y)$ és $y^{p_-} \phi(y)$ integráljuk megegyeznek, így kihasználva, hogy $\theta_+ p_+ + \theta_- p_- = 0$ a z szerinti integrandus eltűnik, így teljesül a korreláció-immunitás feltétele. G_{SVS} -en a Breeden-Litzenberger formulát használva megkapjuk a volatilitás swap részvényopciókkal, forwarddal és betéttel történő replikálását. A variancia swap esetében az opciós portfólió statikus volt, jelen esetben azonban (2.33)-ban G_{SVS} második és harmadik változóján keresztül az idő múlásával folyamatosan változik, így az opciós csomag folyamatos kiigazítást fog igényelni. Az $r = 0$ feltétel mellett a forward ár megegyezik a spot árral, így a vágási pont minden t -re S_t lesz. Ebből következik, hogy a replikációban a forward ügylet értéke mindig zérus. Betétből $G_{\text{SVS}}(S_t, S_t, \langle X \rangle_t)$ -t kell tartanunk, ami

$$G_{\text{SVS}}(S_t, S_t, \langle X \rangle_t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \theta_+ \frac{1 - e^{-z\langle X \rangle_t}}{z^{2/3}} + \theta_- \frac{1 - e^{-z\langle X \rangle_t}}{z^{2/3}} dz = \sqrt{\langle X \rangle_t},$$

mivel $\theta_+ + \theta_- = 1$. Az opciós súlyokat a kifizetési függvény második deriváltja határozza meg. G_{SVS} -t kétszer deriválva kapjuk, hogy

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial S_T^2} G_{\text{SVS}}(S_T, S_t, \langle X \rangle_t) \right|_{S_T=K} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-z\langle X \rangle_t}}{K^2 z^{1/2}} [\theta_+ (K/S_t)^{p_+} + \theta_- (K/S_t)^{p_-}] dz \quad (2.38)$$

A vágási pontnak megfelelően a t időpontban $K < S_t$ esetén put, $K > S_t$ esetén pedig call opciót tartunk. A replikáció tehát a t időpontban a következő termékekből áll:

$$\frac{dK}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-z\langle X \rangle_t}}{K^2 z^{1/2}} [\theta_+ (K/S_t)^{p_+} + \theta_- (K/S_t)^{p_-}] dz \quad \text{put, ha } K < S_t, \text{ call, ha } K > S_t$$

$$\sqrt{\langle X \rangle_t} \quad \text{betét}$$

A t időpontbeli opciós csomagnak nulla a kifizetése, ha lejáratkor a részvényárfolyam megegyezik a vágási ponttal, vagyis S_t -vel. A lejáratához közeledve S_T -nek egyre kevesebb ideje lesz elmozdulni S_t -től, így az opciós csomag kifizetése T -hez tartva eltűnik, és az együttes kifizetését csak a $\sqrt{\langle X \rangle_T}$ értékű betét fogja adni, vagyis a portfólió replikálja a volatilitás swapot. Carr és Lee [3] cikkükben a portfólió önfinanszírozóságát is belátják.

2.4. Szimulációk a replikációra

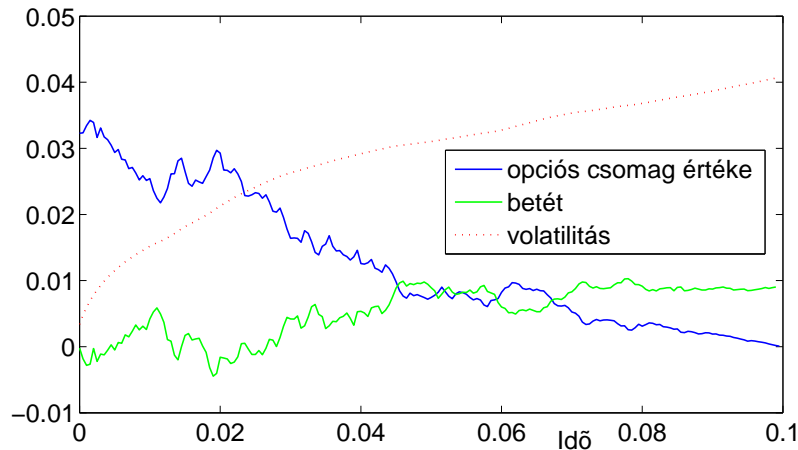
A replikációt a következőképp interpretáljuk: legyen $[0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t = T]$ a $[0, T]$ időintervallum felosztása. Ezeken az időpontokon fogjuk a portfóliót kiigazítani. Ismert, hogy az i . periódusban a K kötési árfolyamú opcióból $\omega_{i,K}$ darabot kell tartanunk. Jelölje $C_{i,K}$ az i . periódusból nézve a T -ben lejárató opció árát. Ekkor az opciós csomag értéke

$$\Pi_i = \sum_K \omega_{i,K} C_{i,K}$$

A következő időperiódusra lépve az opciók árának változásából Π értéke a következőképp módosul

$$\Delta\Pi_i = \sum_K \omega_{i,K} (C_{i+1,K} - C_{i,K})$$

Ebből a pénzből fedezzük az átsúlyozást, aminek a költsége $\sum_K (\omega_{i+1,K} - \omega_{i,K}) C_{i+1,K}$, a maradék pénzt pedig betétbe helyezzük. Az opciós csomag értéke T -hez közeledve nullához tart, a kereskedés eredménye a betétben kumulálódik fel, melynek T -beli értéke előállítja $\sqrt{\langle X \rangle_T}$ -t. A kereskedési stratégiát megpróbáltam Matlabban implementálni. Az eredményt a 2.2 ábra mutatja



2.2. ábra. Variancia swap replikálása

A megvalósítás egyenlőre nem tökéletes. Az opciós csomag értéke a várakozásnak megfelelően folyamatosan csökken, lejáratkor pedig eltűnik, a betét azonban nem követi $\sqrt{\langle X \rangle_t}$ -t.

3. fejezet

Variancia opció

Ebben a fejezetben a variancia opciókkal fogunk foglalkozni. K kötési árfolyam mellett a varianciára szóló call opció kifizetési függvénye:

$$f(\langle X \rangle_T) = (\langle X \rangle_T - K)^+$$

A variancia opciókat csak HM-ben fogjuk vizsgálni. Bemutatjuk a termék árazásához használható parciális differenciálegyenlet levezetését Mark Broadie és Ashish Jain [5] cikkét követve.

3.1. Árazás differenciálegyenlettel

A PDE levezetése a BS-egyenlet levezetéséhez hasonlóan fog történni. Felállítunk egy dinamikus portfóliót, melyben az opció mellett megfelelő számú variancia swapot is tartva elimináljuk belőle a kockázatot, és így a portfólió hozamának – kihasználva a piac arbitrázsmentességét – a kockázatmentes eszköz hozamával kell megegyezzen. Legyen a variancia call értékfolyamata

$$C_t = e^{r\tau} \mathbf{E}_t(X_T - K)^+$$

A portfólió álljon egy variancia opcióból és γ darab K_{var} kötési árfolyamú variancia swapból. Ekkor a portfólió t -beli értéke

$$\Pi_t = \gamma_t \mathbf{E}_t(X_T - K_{var}) + C_t$$

A volatilitás swap esetéhez hasonlóan, ha a lejáratig kumulálódó varianciát a t pontban két részre bontjuk, akkor az opció t -beli ára felírható t , az addig felkumulálódott variancia, I_t és a pillanatnyi variancia, v_t függvényeként. Legyen tehát

$$C_t = G(t, v_t, I_t)$$

Az Itó-formulát alkalmazva G dinamikája

$$dG = \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{\partial G}{\partial v} dv_t + \frac{\partial G}{\partial I} dI_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} d\langle v \rangle_t \quad (3.1)$$

$$= \left[\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial v} \alpha(\beta - v_t) + \frac{\partial G}{\partial I} v_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} \eta v_t \right] dt + \frac{\partial G}{\partial v} \eta v_t dW_t \quad (3.2)$$

Tekintsük a portfólió értékének megváltozását egy rövid Δt idő alatt. A variancia swap forward árának dinamikája 2.14 alapján ismert, így (3.2)-t is felhasználva, a folyamatok diszkretizálását követően kapjuk, hogy

$$\Delta\Pi = \alpha\Delta dF + \Delta dG \quad (3.3)$$

$$= \gamma_t \left(\frac{\partial F}{\partial v} \eta \sqrt{v_t} \Delta W_t \right) + \left[\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial v} \alpha(\beta - v_t) + \frac{\partial G}{\partial I} v_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} \eta v_t \right] \Delta t + \frac{\partial G}{\partial v} \eta v_t \Delta W_t \quad (3.4)$$

Ahhoz, hogy a véletlent elimináljuk a portfólióból, legyen $\gamma = -\frac{\partial G}{\partial v} / \frac{\partial F}{\partial v}$. Az így megválasztott γ -t visszahelyettesítve látható, hogy a portfólió kockázatát generáló Wiener-folyamatok kiesnek, és így Π megváltozása

$$\Delta\Pi_t = \left[\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial v} \alpha(\beta - v_t) + \frac{\partial G}{\partial I} v_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} \eta v_t \right] \Delta t$$

Az arbitrázsmentesség feltétele miatt a kockázat eliminálását követően a befektetés hozama meg kell egyezzen a kockázatmentes termék hozamával, így

$$\left[\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial v} \alpha(\beta - v_t) + \frac{\partial G}{\partial I} v_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} \eta v_t \right] \Delta t = rG\Delta t$$

Δt -vel való egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial v} \alpha(\beta - v_t) + \frac{\partial G}{\partial I} v_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} \eta v_t - rG = 0 \quad (3.5)$$

A variancia call kifizetési függvénye adja a lejáratkori peremfeltételt, vagyis

$$G(T, v_T, I_T) = (I_T - K)^+$$

A másik két változóhoz tartozó peremfeltételeket 2.15-vel megegyezően választjuk, tehát

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I^2} \Big|_{I=I_{min}, I_{max}} = 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \Big|_{v=v_{min}, v_{max}} = 0$$

3.2. Replikáció variancia opciókkal

Az eddigiek során a Breeden-Lizenberger formulát arra használtuk, hogy részvényopciókkal replikáljunk részvény alaptermékű európai típusú kifizetéseket. A dekompozíció azonban nem feltételez semmit az alaptermékéről, csupán a kifizetési függvényt írja fel kereskedett termékek – kötvény, forward és opció – kifizetési függvényeinek megfelelő kombinációjaként. Ez lehetőséget ad arra, hogy tetszőleges variancia derivatíva kifizetési függvényére alkalmazva a Breeden-Lizenberger formulát, azt betéttel, variancia swappal és variancia opciókkal replikáljuk. $\langle X \rangle_T$ alaptermékkel felírva, szeparátornak κ -t választva 1.5 szerint az f kifizetés dekompozíciója

$$f(\langle X \rangle_T) = f(\kappa) + f'(\kappa)(\langle X \rangle_T - \kappa) + \int_0^\kappa f''(K)(K - \langle X \rangle_T)^+ dK + \int_\kappa^\infty f''(K)(\langle X \rangle_T - K)^+ dK \quad (3.6)$$

A részvény alaptermékű származtatott termék dekompozíciójához hasonlóan az első tag itt is egy egyszerű betét. A második tagban egy variancia swap kifizetését ismerhetjük fel, az integrálok pedig egy variancia opciókból álló csomag kifizetésének felelnek meg. 3.6 ugyan tényleges replikálásra nem

használható, mivel a variancia opciók sokkal kevésbé kereskedett termékek, és az elérhető kötési árfolyamok is sokkal ritkábbak, mint például az SnP500 indexopciók esetében, árazásra azonban mégis használható 3.6, feltéve, hogy a variancia opciók ára hatékonyan számolható. A volatilitás swap 3.6 szerinti dekompozíciója $\kappa = K_{var}$ választás mellett a következőképp néz ki

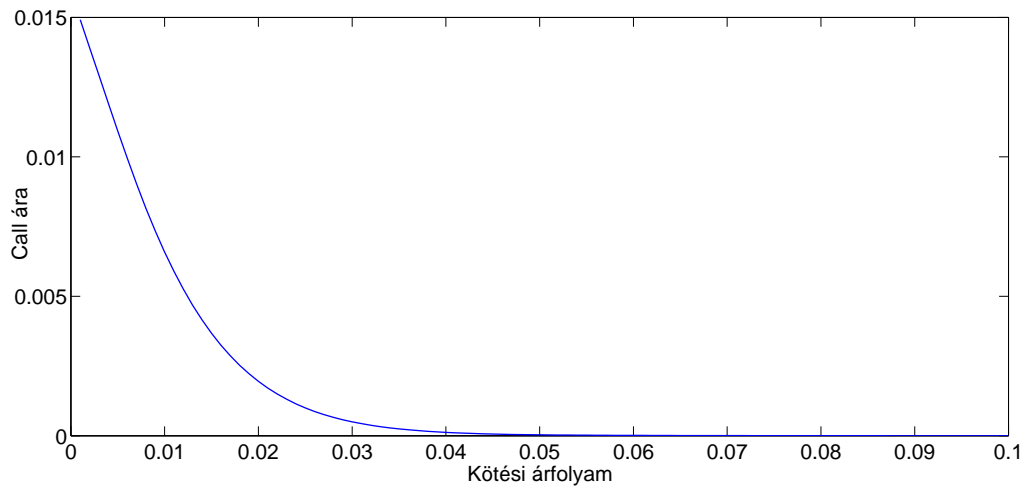
$$\begin{aligned} \sqrt{\langle X \rangle_T} &= \sqrt{K_{var}} + \frac{\langle X \rangle_T - K_{var}}{2\sqrt{K_{var}}} \\ &- \frac{1}{4} \left[\int_0^{K_{var}} \frac{1}{K^{3/2}} (K - \langle X \rangle_T)^+ dK + \int_{K_{var}}^{\infty} \frac{1}{K^{3/2}} (\langle X \rangle_T - K)^+ dK \right] \end{aligned}$$

Várható értéket véve a második tag eltűnik, mivel a K_{var} kötési árfolyam mellett a variancia swap szerződés-kötés-kori értéke zérus. A volatilitás swap fair kötési árfolyama – a variancia put és call árait $P_{var}(K)$ és $C_{var}(K)$ -val jelölve

$$K_{vol} = \sqrt{K_{var}} - \frac{1}{4} \left[\int_0^{K_{var}} \frac{1}{K^{3/2}} P_{var}(K) dK + \int_{K_{var}}^{\infty} \frac{1}{K^{3/2}} C_{var}(K) dK \right] \quad (3.7)$$

Az iménti eredményt érdemes összehasonlítani (2.4)-gyel. K_{vol} -t mindkét esetben $\sqrt{K_{var}}$ kiigazításával határozzuk meg, fontos azonban megjegyezni, hogy 3.7-ben az opciós csomag értékének levonásával pontos eredményt kapunk, míg (2.4) egyrészt a másodrendűnél magasabb tagok elhagyásából kifolyólag továbbra is csak közelítő értékkel szolgál, másrészt (2.4) meghatározásakor kihasználtuk, hogy a variancia CIR-folyamatot követ.

A következőkben Monte-Carlo szimulációval beárazzuk a variancia opciót különböző kötési árfolyamok mellett. Az így kapott opcióárakkal 3.7 alapján megadjuk a variancia swap fair kötési árfolyamát. A szimulációt HM-ben végeztem, a 3.2-ben látható paraméterek mellett. A kapott opcióárak call esetén a 3.1 ábrán láthatók, a 3.7 alapján történő árazás eredményeit pedig a 3.1 táblázat mutatja.



3.1. ábra. Variancia call ára különböző kötési árfolyamok mellett

K_{vol}	K_{vol} variancia opciókkal
12.2047 %	12.2041 %

3.1. táblázat. Volatilitás swap kötési árfolyama variancia opciókkal

A két árazási módszer megegyező eredményre vezetett. Szimulációból számított opcióárakkal persze nincs értelme a variancia derivatívákat árazni, a szimulációs populációból egyenesen a derivatíva ára is számolható lenne. A 3.1 táblázat eredményei inkább csak az árazási módszerek konzisztenciáját igazolják.

Paraméterillesztés

Ebben a fejezetben bemutatjuk a szimulációkhoz használt Heston modell kalibrációját. A modellillesztés a [8]-ban írtak alapján történik, a Matlab implementációhoz használt kódok is onnan valók. Ismételten felírjuk a modell kockázatmentes mérték szerinti dinamikáját:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{v_t}S_t dW_t^{(1)} \\ dv_t &= \alpha(\beta - v_t)dt + \eta\sigma_t dW_t^{(2)} \\ \text{Cov}(dW_t^{(1)}, dW_t^{(2)}) &= \rho dt \end{aligned}$$

A modell felállításához az $\Omega = \{v_0, \alpha, \beta, \eta, \rho\}$ paramétereket kell meghatároznunk. A modellben az opciók árai függenek ezen paraméterek értékeitől. Úgy fogjuk megválasztani a szabad paramétereket, hogy az így adódott opcióárak minél kisebb hibával írják le a piacon megfigyelt, valós árakat. Az opciók árazása a kockázatmentes mérték szerint történik, így a megfigyelt árakból a kockázatmentes mérték alatti paraméterekre tudunk következtetni. Jelölje a K_i kötési árfolyamú és T_i lejáratú call opció Ω paraméterek melletti árát $C_i^\Omega(K_i, T_i)$, a piacon megfigyelt árat pedig $C_i^{Piaci}(K_i, T_i)$. Az Ω paraméterek illeszkedésének pontosságát a becsült és valós árak hibájának négyzetösszegével mérjük, célunk tehát a következő függvény értékének minimalizálása:

$$G(\Omega) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} [C_i^\Omega(K_i, T_i) - C_i^{Piaci}(K_i, T_i)]^2$$

Az optimalizáció gyors lefutásához elengedhetetlen az opcióárak hatékony számítása. A karakterisztikus függvények módszerével – amennyiben ismert $\log S_T$ karakterisztikus függvénye – a vanilla opciók árai gyorsan számíthatók. Legyen $\log S_T$ karakterisztikus függvénye $\Psi(w)$. Ekkor a K kötési árfolyamú call opció ára

$$C_0 = S_0\Pi_1 - e^{rT}K\Pi_2,$$

ahol

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[\frac{e^{-iw \log K} \Psi(w-i)}{iw\Psi(-i)} \right] dw \\ \Pi_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[\frac{e^{-iw \log K} \Psi(w)}{iw} \right] dw \end{aligned}$$

A Heston modellben $\log S_T$ karakterisztikus függvénye

$$\begin{aligned}\Psi(w) &= \exp\{\beta C(T, w) + \sigma_0 D(T, w) + iw \log(S_0 e^{rT})\} \\ C(t, w) &= \alpha \left[r_1 t - \frac{2}{\eta^2} \log\left(\frac{1 - g e^{-ht}}{1 - g}\right) \right] \\ D(t, w) &= r_1 \frac{1 - e^{-ht}}{1 - g e^{-ht}} \\ r_{1,2} &= \frac{b \pm h}{\eta^2} \quad h = \sqrt{b^2 - 4a\gamma} \quad g = \frac{r_2}{r_1} \\ a &= -\frac{w^2}{2} - \frac{iw}{2} \quad b = \alpha - \rho\eta iw \quad \gamma = \frac{\eta^2}{2}\end{aligned}$$

A modellillesztéshez használt SnP500 call opciók adatait a Bloomberg program segítségével nyertem. Az SnP500 opciók ideálisak a kalibrációhoz, mert egyrészt likvidek, így a bent lévő opcióárak jól reprezentálják a piaci várakozásokat, másrészt ezen opciók sűrű kötési árfolyamok mellett érhetőek el. A modellillesztéshez szükséges még tudni a spot árfolyamot valamint a kockázatmentes hozamot, mely feltételezésünk szerint minden lejáratra azonos. Az SnP500 spot árfolyama $S_0 = 1057,14$, diszkont kamatlábnak pedig az 1 éves USD LIBOR-t tekintetem, melynek értéke $r = 1,22\%$. A paraméterillesztés eredményeit a 3.2 táblázat mutatja, a kalibráció során használt opciók adatait és az illesztett modell szerinti árak hibáit a 3.3 és 3.4 táblázatok foglalják össze. A lejáratok évben értendők.

v_0	α	β	η	ρ
2.27%	4.79	3.01%	53.64%	-0.99

3.2. táblázat. A kalibráció eredményei

Az illesztési hibákat tartalmazó 3.4 táblázatban az átlagos négyzetes eltéréseket lejáratonként és kötési árfolyamonként is feltüntettük. Ebből látható, hogy az illeszkedés a közepes lejáratok esetén pontos, a közelebbi és távolabbi lejáratok mellett a hibák növekedést mutatnak. A kötési árfolyamok mentén hasonló jelenség nem figyelhető meg. Az eltérések az opciók áraihoz viszonyítva csupán néhány százalékosak, eltekintve a mélyen out of the money opcióktól, melyek esetében azok alacsony ára miatt a relatív hiba megnövekszik.

Az illesztett Heston modellből a Monte-Carlo szimulációhoz 1000 mintát tartalmazó populációt generáltam. A kalibrálás során [8]-ban írtak szerint az illesztett paraméterektől megköveteltük, hogy teljesítsék a variancia folyamat nem-negativitását biztosító $2\alpha\beta > \eta^2$ Feller-feltételt. A scenáriók generálása során ennek ellenére – a diszkretizációból adódóan – megjelentek negatív varianciák. Ezen scenáriókat kiszűrtük a populációból, és újakat generáltunk helyettük.

Strike\Lejárat	0.10	0.22	0.35	0.60	1.11
1800	260.20	266.95	272.60	286.40	309.60
1900	164.40	177.00	187.10	206.20	236.05
1950	119.05	135.10	147.50	168.95	201.90
2000	77.50	96.40	110.80	134.20	169.55
2025	58.55	78.70	93.85	117.90	154.30
2050	41.50	62.10	77.70	102.25	139.45
2075	26.95	47.10	62.75	87.75	125.35
2100	15.45	33.75	49.15	74.00	111.80
2150	3.05	13.85	26.95	50.00	86.95
2200	0.63	4.00	12.15	30.90	65.20
2300	0.13	0.38	1.82	8.80	32.55

3.3. táblázat. A kalibrációhoz használt opciók

Strike\Lejárat	0.10	0.22	0.35	0.60	1.11	err ²
1800	3.31	4.75	0.31	0.31	3.30	1.55
1900	3.23	3.43	0.06	0.60	0.00	1.21
1950	0.03	3.78	0.10	1.19	0.28	1.04
2000	0.02	0.34	0.19	1.07	0.26	0.61
2025	0.58	0.35	0.04	0.87	0.23	0.64
2050	4.49	0.31	0.04	0.46	0.04	1.03
2075	9.54	0.04	0.11	0.42	0.00	1.42
2100	7.51	0.34	0.11	0.11	0.17	1.28
2150	0.09	0.14	0.09	0.00	1.27	0.57
2200	0.15	2.44	0.30	0.00	3.27	1.11
2300	0.53	0.06	2.54	2.35	3.10	1.31
err ²	1.64	1.21	0.60	0.82	1.04	1.12

3.4. táblázat. A tényleges és a modellbeli árak abszolút eltérése

Összefoglalás

A dolgozatban több varianciára szóló derivatív termék árazását és replikálását is áttekintettem. Az első fejezetben a log-kifizetések előállítására bemutattam egy szimulált adathalmazon történő kalibrációs módszert. A folytonos modelltől való apróbb eltérés okának felderítése további vizsgálatokat igényel. A második fejezetben a közelítő módszerek bemutatása során Heston modellben meghatároztam a másodrendű hibát. Részletesen bemutattuk Peter Carr és Roger Lee módszerét a variancia swap replikálására. Eredményük számítógépes reprodukálása nem volt teljesen sikeres, a hiba kijavításán még dolgoznom kell. A dolgozat során láthattuk, hogy a Breeden-Litzenberger formula jól használható eszközt biztosít a derivatív termékek replikálásához.

Irodalomjegyzék

- [1] Demeteri K., Derman E., Kamal M., Zou J., *More Than You Ever Wanted to Know About Volatility Swaps*. Goldman Sachs quantitative research notes (1999)
- [2] Peter Carr, Roger Lee, *Realized Volatility and Variance: Options via Swaps*. Asia Risk June (2007), .64-71
- [3] Peter Carr, Roger Lee, *Robust Replication of Volatility Derivatives*. Mathematics in Finance Working Paper Series (2008).
- [4] Anthony Neuberger, *The log contract*. Journal of Portfolio Management; Winter 1994; 20, 2; ABI/INFORM Global pg. 74
- [5] Mark Broadie, Ashis Jain, *Pricing and Hedging Volatility Derivatives*. (2008) https://www0.gsb.columbia.edu/mygsb/faculty/research/pubfiles/3967/pricing_hedging.pdf
- [6] The CBOE Volatility Index - VIX, <https://www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf>
- [7] Fabrice Douglas Rouah, *Variance swaps*. Mathematical Finance Working paper, <http://www.frouah.com/finance%20notes/Variance%20Swap.pdf>
- [8] Ricardo Crisóstomo, *An Analysis of the Heston Stochastic Volatility Model: Implementation and Calibration using Matlab*. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1502/1502.02963.pdf>
- [9] Klaus Schürger, *Laplace transforms and suprema of stochastic processes*. University of Bonn (2002)
- [10] Emanuel Derman *Static Hedging and Implied Distribution*. Lecture note, <http://www.emanuelderman.com/media/smile-lecture5.pdf>
- [11] Peter Carr, Dilip Madan *Towards a Theory of Volatility Trading*. (2002) <http://www.math.nyu.edu/research/carrp/papers/pdf/twrdsfig.pdf>
- [12] Sebastien Bossu, Eva Strasser, Regis Guichard, *Just What You Need to Know About Variance Swaps*. JPMorgan, working paper (2005)
- [13] Peter Carr, Roger Lee, *Put-Call Symmetry: Extensions and Applications*.

- [14] Douglas T. Breeden, Robert H. Litzenberger, *prices of state contingent claims implicit in option prices*. The Journal of Business, Vol. 51, No.4 (1978), 621-651
- [15] Stefano M. Iacus *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations: With R Examples*, e-ISBN: 978-0-387-75839-8, 48