

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

HIBABECSLÉSEK NEMFOLYTONOS  
VÉGESELEM MÓDSZEREKRE

Diplomamunka

Írta: Csörgő Gábor

alkalmazott matematikus MSc  
alkalmazott analízis szakirány

Témavezető:

Dr. Izsák Ferenc, adjunktus

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék  
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar



Budapest, 2011

# Tartalomjegyzék

<b>1. Előszó</b>	<b>1</b>
1.1. Bevezető . . . . .	1
1.2. A dolgozat célja . . . . .	1
1.3. Tartalmi áttekintés . . . . .	2
1.4. Irodalmi áttekintés . . . . .	2
<b>2. A klasszikus végeelem módszer</b>	<b>3</b>
2.1. Az egy dimenziós eset . . . . .	3
2.1.1. Megvalósítás . . . . .	4
2.2. A két dimenziós eset . . . . .	7
<b>3. A nemfolytonos végeelem módszer</b>	<b>9</b>
3.1. Nemfolytonos végeelemek egy dimenzióban . . . . .	9
3.1.1. Az interior penalty sémák . . . . .	9
3.1.2. A numerikus megoldás . . . . .	13
3.2. Nemfolytonos végeelemek két dimenzióban . . . . .	15
3.2.1. Interior penalty sémák elemi megközelítésből . . . . .	16
3.2.2. Nemfolytonos végeelem sémák fluxus bevezetésével . . . . .	18
3.2.3. Nemfolytonos végeelem sémák lifting operátorral . . . . .	24
3.2.4. Numerikus megoldás, konvergencia, hibabecslés . . . . .	27
3.2.5. Összefoglaló eredmények a különböző nemfolytonos módszerekről	33
<b>4. A nemfolytonos végeelem módszer egy teljesen új megközelítésből</b>	<b>34</b>
4.1. A módszer általános bemutatása . . . . .	35
4.2. A bilineáris forma egy konkrét esetben . . . . .	37
4.3. A bilineáris formához tartozó tömegmátrix . . . . .	40
4.4. DG típusú módszerek vizsgálata egy tesztfeladaton . . . . .	41

---

<b>5. Zárszó</b>	<b>46</b>
5.1. Összegzés . . . . .	46
5.2. További lehetőségek . . . . .	46
<b>Köszönetnyilvánítás</b>	<b>47</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>48</b>

# 1. fejezet

## Előszó

### 1.1. Bevezető

A XXI. század elején egy technológiai alapú társadalomban a tudományos kutatások nagy támogatást élveznek. A legtöbb tudományterület számára elengedhetetlen a matematikai módszerek használata a különböző modellezéseknél. Az időjárás előrejelzéstől kezdve, az autók és repülők tervezésén keresztül a megújuló energiaforrások fejlesztéséig szinte mindenhol előfordulnak a parciális differenciálegyenletek (rendszerek), így az egyenletek különböző megoldási módszereivel érdemes foglalkozni. Ezekre az egyenletekre általában nem adható képlettel leírható megoldás, így mindig valamilyen közelítő, numerikus megoldást kell készítenünk. Attól függően, hogy milyen típusú egyenlettel állunk szemben, más és más numerikus módszerre van szükségünk.

### 1.2. A dolgozat célja

A parciális differenciálegyenletek alapvetően három nagy típusra bonthatóak. Az időfüggő hiperbolikus és parabolikus egyenletek mellett nagy népszerűségnek örvendenek az elliptikus egyenletek is. Az elliptikus egyenletekre vonatkozó numerikus módszerek szintén három nagy csoportba sorolhatók. Mi a véges differencia, a véges térfogat, és a végeselem módszerek közül a legutóbbival foglalkozunk. A klasszikus végeselem módszerek kutatása már többé-kevésbé kiaknázottnak tekinthető, emiatt a 2000-es évek elején egyre nagyobb hangsúly került a nemfolytonos végeselem módszerekkel kapcsolatos kutatásokra. Dolgozatunk célja a klasszikus végeselem módszeren át bemutatni a nemfolytonos végeselem módszert, annak tulajdonságait, előnyeit, és használatát. Emellett szeretnénk rávilágítani a nemfolytonos végeselem

módszerek fejlesztésében rejlő sokoldalúságra. Ezek mellett célunk még bemutatni egy új, nagy lehetőségeket rejtő szemléletet.

### 1.3. Tartalmi áttekintés

A dolgozat alapvetően három nagy részből áll, melyek külön fejezetben kapnak helyet. Az első blokkban bemutatjuk a klasszikus végelem módszer alapjait, és használatának lényegét. A fejezet rövidege annak tudható be, hogy csak egy kis ízelítőt szeretnénk adni a módszerről, és hogy összehasonlítási alapunk legyen a nemfolytonos módszerek bevezetésénél. Azon Olvasónak, aki részletesebben érdeklődik eziránt, a szerző egy korábbi [4] dolgozatán kívül ajánljuk még a [2] és [8] köteteket. A dolgozat második, és egyben legnagyobb részében először egy, majd két dimenzióban bemutatjuk a nemfolytonos végelem módszerek legismertebb eljárásait, azok elméleti hátterét. A harmadik, viszonylag rövid, de annál érdekesebb részben egy teljesen új nézőpontot ismertetünk meg az Olvasóval. Az új szemlélet alapján levezetünk egy módszert, melyet egy tesztfeladaton ki is próbálunk, és összevetünk néhány variánsával, illetve egy ismert módszerrel is.

### 1.4. Irodalmi áttekintés

A nemfolytonos végelem módszerek manapság nagyon népszerűek, így a nemzetközi irodalom rendkívül gazdag. Dolgozatunk alapjául az [1] alapcikk, és a szerzők későbbi munkái mellett a [6] alapkönyv, és Süli Endre munkái [3] szolgálnak. A magyar irodalom erről a témakörrel nem meglepő módon szinte nem is létezik. Ennek oka, hogy ezen kutatási ág még nagyon friss, sok kiaknázatlan lehetőséget rejt magában.

## 2. fejezet

# A klasszikus végeelem módszer

Ebben a fejezetben betekintést nyújtunk a végeelem módszerek alapjaiba, röviden bemutatjuk az eljárás lényegét, hogy aztán bizonyos párhuzamokat húzhassunk, a klasszikus és a nemfolytonos módszer között. A módszerek bemutatását egy egyszerű modellfeladaton illusztráljuk is.

A végeelem módszerek lényege, hogy az ismeretlen  $u \in V$  függvény egy  $u_h \in V_h$  közelítését a következő alakban keressük:

$$u_h = \sum_i c_i v_i,$$

ahol  $\langle v_i \rangle_i = V_h$ , vagyis rögzítünk egy  $V_h$  véges dimenziós függvényteret, és az  $u_h$  közelítő megoldást  $V_h$ -beli függvények lineáris kombinációjaként keressük. Ha teljesül, hogy  $V_h \subset V$ , akkor beszélünk konform végeelem módszerről.

### 2.1. Az egy dimenziós eset

Az alábbiakban a

$$\begin{cases} -u'' = f \\ -u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

modellfeladaton mutatjuk be a végeelem módszert egy dimenzióban, ahol  $x \in \Omega = (0, 1)$ . Legyen  $f \in L^2(0, 1)$  adott és keressük azt az  $u \in C^2(0, 1)$  függvényt, melyre teljesül az egyenlet, és a homogén Dirichelt-peremfeltételek.

Tekintsük a (2.1)-t, majd szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát egy tetszőleges  $v \in H_0^1(0, 1)$  függvénnyel, majd integráljunk 0-tól 1-ig. Ekkor a bal oldalt

parciális integrálással a következő alakra írhatjuk:

$$\int_0^1 -u''v = [u'v]_0^1 - \int_0^1 -u'v' = \int_0^1 u'v' \quad \forall v \in H_0^1(0,1),$$

ugyanis  $v(0) = v(1) = 0$ . Ekkor a következő formula adódik:

$$\int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv \quad \forall v \in H_0^1(0,1). \quad (2.2)$$

Vegyük észre, hogy (2.2) értelmes  $u \in H^1(0,1)$  esetén is, sőt a peremfeltételek miatt  $u \in H_0^1(0,1)$  esetén is.

Az olyan  $u \in H_0^1(0,1)$  függvényt, melyre teljesül (2.2), az eredeti peremérték feladat gyenge megoldásának nevezzük. Nyilvánvaló, hogy ha  $u \in C^2(0,1)$  klasszikus megoldás, akkor gyenge megoldás is.

A végeelem módszer valójában nem a klasszikus megoldás, hanem a gyenge megoldás egy approximációját állítja elő. Az

$$a(u, v) = \int_0^1 u'v'$$

$$F(v) = \int_0^1 fv$$

jelölésekkel élve megmutatható, hogy az  $a : H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$  egy folytonos, koercív, bilineáris forma, míg  $F : H_0^1(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos lineáris funkcionál, így a Lax-Milgram tétel segítségével belátható, hogy a gyenge megoldás létezik és egyértelmű. Erről részletesebben a [2] kötetben olvashatunk.

Amennyiben nem ezt a speciális modellfeladatot választjuk, hanem

$$-(pu')' + ku = f$$

általános alakú elliptikus egyenlet megoldását keressük valamilyen peremfeltételek mellett, akkor a  $p$ -re és  $k$ -ra vonatkozó megfelelő feltételek esetén szintén egy  $a(.,.)$  folytonos, koercív, bilineáris formát, és egy  $F$  folytonos lineáris operátort kapunk, így ezen feladat is hasonlóan kezelhető, mint a modellfeladatunk.

### 2.1.1. Megvalósítás

Adott tehát az

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H \quad (2.3)$$

variációs egyenletünk, ahol a  $H$  Hilbert tér,  $a(.,.)$  bilineáris forma, és  $F$  lineáris operátor.  $H$  végtelen dimenziós, így válasszunk helyette egy  $V_h \subset H$  véges dimenziós

alteret, és keressük az  $u$  gyenge megoldásnak azt az  $u_h \in V_h$  közelítését, melyre teljesül, hogy

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.4)$$

Megmutatható, hogy a diszkrét feladatnak létezik  $u_h$  egyértelmű megoldása, amely ráadásul kvázioptimális közelítése  $u$ -nak, azaz

$$\| u - u_h \| \leq \inf_{v_h \in V_h} \| u - v_h \|$$

ahol  $\| \cdot \|$  a  $H$ -beli norma.

A klasszikus végeelem módszerek esetén  $V_h$  megválasztása a következőképpen történik. Tekintjük a modellfeladat esetén a  $[0, 1]$  intervallum egy felosztását:  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1$ . Jelölje az egyes részintervallumok hosszát  $h_i = x_i - x_{i-1}$ . Ha  $h_i \equiv h$ , akkor ekvidisztáns felosztásról beszélünk. Jelölje még a részintervallumok halmazát  $\mathcal{T}_h$ . Egy rögzített felosztás esetén elkészíthetjük a felosztáshoz tartozó függvényeket, melyek a  $V_h$  bázisa lesznek.

Általában a következőket várjuk el a  $v_i$  bázisfüggvényeinktől. Egyrészt legyenek kompakt tartójúak (ahol a tartó az  $\Omega$  egy kompakt részhalmaza), másrészt legyenek folytonosak az egész  $\Omega$ -n, harmadrészt pedig  $v_i$  legyenek szakaszonként polinomiálisak, vagyis  $v_i|_K$  polinom, ahol  $K \in \mathcal{T}_h$ .

Amennyiben elsőfokú polinomokkal szeretnénk approximálni, legyenek a  $v_i$ -k a következők, ahol  $0 < i < N$ :

$$v_i(x) := \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ezzel a megadással lényegében minden belső ponthoz készítettünk egy bázisfüggvényt (melyeket kalapfüggvényeknek is hívunk). Az így megkonstruált  $v_i$ -k a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

- tartójuk az  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  intervallum,
- $v_i(x_j) = \delta_{ij}$ , vagyis minden osztópontban nulla, kivéve amelyikhez tartozik, mert abban 1 az értéke,
- az  $[x_{i-1}, x_i]$  és  $[x_i, x_{i+1}]$  intervallumokon elsőfokú polinom, egyébként azonosan nulla,
- folytonos az egész  $\Omega = (0, 1)$ -en.



Ha nem homogén Dirichlet, vagy nem Dirichlet-peremfeltételünk van, akkor néha szükséges még bevenni az  $x_0$ -hoz és  $x_N$ -hez tartozó fél kalapfüggvényeket, melyek hasonló módon definiálhatóak.

Maradva a homogén Dirichlet-peremfeltételnél, legyen  $V_h = \langle v_1, v_2, \dots, v_{N-1} \rangle$ . A fenti tulajdonságok miatt  $v_i \in H_0^1(0, 1)$ , vagyis  $V_h \subset H_0^1(0, 1)$  altér.

Amennyiben nem elsőfokú polinomokkal szeretnénk approximálni, a következőt tehetjük. Például másodfokú polinombázis legyártása esetén minden  $[x_{i-1}, x_i]$  intervallumba beveszünk egy új, végpontoktól különböző  $y_i$  osztópontot. Ekkor alapvetően kétféle bázisfüggvényt készítünk el.

Az egyik típusúak az eredeti osztópontokhoz tartozó bázisfüggvények lesznek, melyek teljesen hasonlóan készülnek mint az elsőfokú esetben, csak az egyes  $[x_{i-1}, x_i]$  intervallumokon nem első, hanem másodfokú polinomokat használunk. Hogy a bázisfüggvények egyértelműek legyenek megköveteljük, hogy a két végpontbeli értéken kívül még az újonnan bevett belső pontban is nulla legyen a polinom. Három pontra pedig egyértelműen illeszthető egy másodfokú függvény.

A másik típusú függvények az új  $y_i$  pontokhoz fognak tartozni. Hasonlóan, mint a többi polinomoktól, ettől is megköveteljük, hogy minden osztópontban nulla értéket vegyen fel, kivéve, amelyikhez tartozik (mert abban 1-et). Ekkor  $[x_{i-1}, x_i]$  intervallumon egyértelműen előállíthatóak ezek a bázisfüggvények is. Alapvetően csak abban különböznek az első típusúaktól, hogy tartójuk csak egyetlen intervallum.

Magasabb fokú bázisok legyártása teljesen hasonlóan megy,  $p$ -edfokú bázis esetén minden részintervallumba beveszünk  $p - 1$  új osztópontot, és az adott pontokra és függvényértékekre illesztünk polinomokat. Ezt könnyen megtehetjük ha *Lagrange*-polinomokat használunk.

Itt megjegyezzük, hogy az  $[x_{i-1}, x_i]$  intervallumokban bevezetett új  $y_i$  osztópontok megválasztása tetszőleges, de a számítások megkönnyítése érdekében érdemes például *Gauss* vagy *Csebisev* alappontokat használni. Ennek előnyét a továbbiakban kifejtsük.

Amennyiben megvan a felosztásunk, és elkészítettük a báziselemeinket, már csak  $u_h$  meghatározása van hátra. Legyen  $M$  darab bázisfüggvényünk, függően attól, hogy milyen peremfeltételünk, és hanyadfokú bázisunk van. Ekkor keressük azokat a  $c_i$  együtthatókat, melyekre

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^M c_i v_i(x)$$

és  $a(u_h, v_h) = F(v_h) \forall v_h \in V_h$ . Ez az egyenlőség pontosan akkor teljesül minden  $v_h \in V_h$ -ra, ha a báziselemekre teljesül, ugyanis az egyenlet  $v_h$ -ban lineáris. Vizsgáljuk meg

a bal oldalt:

$$a(u_h, v_j) = a\left(\sum_{i=1}^M c_i v_i, v_j\right) = \sum_{i=1}^M c_i a(v_i, v_j) = F(v_j) \quad \forall v_j \in V_h.$$

Legyen  $c = (c_1, c_2, \dots, c_M)^T$ ,  $G = (F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_M))^T$ , és  $A$  az az  $M \times M$ -es mátrix, melyre  $A(i, j) = a(v_j, v_i)$ . Ekkor a fenti feladat az  $Ac = G$  egyenletrendszer alakban írható. Mivel  $v_i$ -ket lineárisan függetlennek választottuk, így az egyenletrendszer megoldható.

Ráadásul, ha báziselemeket abban a sorrendben számozzuk meg, ahogy a hozzájuk tartozó osztópontok következnek, akkor az egyenletrendszer mátrixa sávós mátrix, így a megoldás könnyebb lehet.

Az  $A$  mátrixban és az  $G$  vektorban az elemek kiszámítása viszont igazából egy-egy integrál kiszámítására vezet. Az  $A$  elemei még esetleg számíthatóak is szimbolikusan, viszont a legtöbb  $f$  baloldal esetén az  $G$  elemeinek számítása valamilyen numerikus kvadratúrával lehetséges. És itt jön elő annak a jelentősége, hogy magasabb fokú bázis esetén milyen új osztópontokat választunk. Ugyanis, ha például Gauss kvadratúrákkal szeretnénk integrálni, akkor ha az alappontok Gauss alappontok voltak, akkor sok függvénykiértékelést meg tudunk spórolni, növelve ezzel a számítások hatékonyságát.

## 2.2. A két dimenziós eset

Ebben a részben bemutatjuk, hogyan lehet többváltozós konform végelem módszert készíteni. Ehhez itt is a legegyszerűbb modellt használjuk:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Szorozva az egyenletet egy tesztfüggvénnyel, majd integrálva az  $\Omega$ -n, és alkalmazva a Green-tételt, kapjuk a feladat gyenge alakját. Keressük azt az  $u \in H_0^1(\Omega)$  függvényt, amelyre

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^2} = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Jelölje

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^2} \\ F(v) &= \int_{\Omega} f v. \end{aligned}$$

Ekkor ez eredeti feladat átírható a következő variációs alakra:  $a(u, v) = F(v) \forall v \in H_0^1(\Omega)$ . Az egy dimenziós esethez hasonlóan itt is megmutatható, hogy  $a(., .)$  egy folytonos, bilineáris, koercív forma, míg  $F$  egy folytonos lineáris funkcionál, amiből következik, hogy a variációs feladatnak van egyértelmű megoldása, amit az eredeti feladat gyenge megoldásának hívunk.

Más differenciáloperátor és peremfeltétel esetén  $a(., .)$  és  $F$  változhat, bővíthet tagokkal, de tulajdonságaik megmaradnak.

Mivel az eredeti feladat  $u$  megoldása létezik és egyértelmű, kereshető az  $u$  egy  $u_h$  közelítése. Itt is szükségünk van egy  $V_h \subset H_0^1(\Omega)$  véges dimenziós altérre. Készítsük el az  $\Omega$  alaphalmaz egy felbontását. Itt megjegyezzük, hogy míg egy dimenzióban a felosztás milyensége nem túl érdekes, ebben az esetben rendkívül fontos. Alapvetően a tartomány tetszőleges poligonokkal felbontható lenne, azonban megmutatható, hogy ebben az esetben esetlegesen el tudjuk veszíteni ügyetlen finomítás esetén a konvergenciát, sőt akár a módszer megvalósíthatósága is nehézkes lehet.

Megjegyezzük még, hogy amennyiben a tartomány pereme nem töröttvonal, akkor azt függően a tartomány felosztásának tervezett finomságától töröttvonallal közelítjük a peremet.

Leggyakrabban csupa háromszög vagy négyszögfelbontást alkalmaznak. Az egyszerűség kedvéért most is tekintsünk háromszögfelbontást. Ha megvan a felbontás, akkor mint egy dimenzióban, itt is készítsük el a bázisfüggvényeket.

Lineáris bázis esetén itt is minden belső ponthoz fog tartozni egy bázisfüggvény, melynek tartója a pontban összefutó háromszögek uniója. A bázisfüggvény pedig ezeken a háromszögeken értelmezett lineáris síkok összege, melyek a közös pontban 1, a másik két csúcspontban 0 értéket vesznek fel. Ezek a síkok háromszögenként készíthetők el, ahol három pont egyértelműen meghatároz egy síkot. A bázisfüggvény a tartón kívül azonosan 0. Könnyen meggondolható, hogy az így kapott bázisok folytonosak.

A fenti módon elkészített bázisfüggvények által generált alteret választjuk  $V_h$ -nak, majd a szintén teljesen hasonlóan (mint egy dimenzióban) adódó egyenletrendszer megoldva kapjuk az  $u_h$  közelítő megoldást. Érdekes megjegyezni, hogy az egy dimenziós esettel ellentétben az egyenletrendszer mátrixa ugyan nem sávós, de ritka mátrix lesz.

Ha magasabb rendű polinomokból szeretnénk bázist készíteni, akkor itt is szükségünk van további alappontokra, melyeket az éleken, illetve, harmad és magasabb fokú esetben a háromszögek belsejében helyezünk el.

## 3. fejezet

# A nemfolytonos végeelem módszer

Célunk ebben a fejezetben, hogy a klasszikus végeelem módszer felületes bemutatásával szemben, itt egy részletesebb ismertetést adjunk a módszerről, és annak sajátosságairól.

A nemfolytonos végeelem módszer alapvetően abban különbözik a klasszikustól, hogy ott mindig fő szempont volt, hogy az elkészített  $V_h$  véges dimenziós alteret generáló bázisfüggvények folytonosak legyenek az egész  $\Omega$  alaptartományon.

### 3.1. Nemfolytonos végeelemek egy dimenzióban

Az egyszerű és szemléletes bemutatás kedvéért először egy modellfeladaton ismerkedünk meg a módszerrel. Legyen az alaptartomány  $\Omega = (0, 1)$ , és tekintsük a legegyszerűbb elliptikus modellfeladatot

$$\begin{cases} -u'' = f \\ -u(0) = A \\ u(1) = B, \end{cases}$$

ahol  $f \in L^2(\Omega)$  adott, és keressük az  $u \in C^2(\Omega)$  megoldásfüggvényt.

#### 3.1.1. Az interior penalty sémák

Ellentétben a klasszikus módszerrel, ahol a séma, amivel a megoldását kerestük független volt a felosztástól, itt legelőször rögzítünk egy felosztást, és ahhoz készítünk egy sémát.

Legyen  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$  a  $[0, 1]$  intervallum egy felosztása valamely rögzített  $N \in \mathbb{N}$  esetén. Jelölje a keletkezett részintervallumok halmazát

$$\mathcal{T}_h = \{K = (x_{i-1}, x_i) : 0 < i \leq N\}.$$

Definiáljuk a következő diszkrét Szoboljev teret:

$$H^s(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in H^s(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Szorozzuk meg az eredeti egyenletünket egy tetszőleges  $v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  függvénnyel, majd integráljuk az egyenletet az  $(x_{i-1}, x_i)$  intervallumon és alkalmazzuk a parciális integrálás szabályát.

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) & \forall x \in \Omega \\ -u''(x)v(x) &= f(x)v(x) & \forall v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h), \forall x \in \Omega \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} -u''(x)v(x)dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)v(x)dx & \forall v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h) \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)v'(x)dx - [u'(x)v(x)]_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)v(x)dx & \forall v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h) \end{aligned}$$

A kapott egyenletet összegezve minden intervallumra adódik, hogy minden  $v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ -re teljesül a

$$\sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)v'(x)dx - \sum_{i=1}^N [u'(x)v(x)]_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)v(x)dx \quad (3.1)$$

formula, ahol  $x_i^+$  az  $x_i$  pontban vett jobb oldali, míg  $x_i^-$  a bal oldali határérték. A kiintegrált tagot alakítsuk át a következőképpen.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N [u'(x)v(x)]_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} &= u'(x_1^-)v(x_1^-) - u'(x_0^+)v(x_0^+) \\ &+ u'(x_2^-)v(x_2^-) - u'(x_1^+)v(x_1^+) \\ &+ \dots \\ &+ u'(x_{N-1}^-)v(x_{N-1}^-) - u'(x_{N-2}^+)v(x_{N-2}^+) \\ &+ u'(x_N^-)v(x_N^-) - u'(x_{N-1}^+)v(x_{N-1}^+) \end{aligned}$$

Mivel feltettük, hogy  $u \in C^2(\Omega)$  így  $u'(x_i^-) = u'(x_i^+) = u'(x_i)$ , vagyis a fenti formula így írható tovább

$$\sum_{i=1}^N [u'(x)v(x)]_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} = u'(x_1)v(x_1^-) - u'(x_0)v(x_0^+) + \dots + u'(x_N)v(x_N^-) - u'(x_{N-1})v(x_{N-1}^+)$$

és ha csoportosítjuk a tagokat, akkor a következő összefüggésre jutunk

$$\sum_{i=1}^N [u'(x)v(x)]_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} = -u'(x_0)v(x_0^+) + u'(x_N)v(x_N^-) + \sum_{i=1}^{N-1} u'(x_i)(v(x_i^-) - v(x_i^+)).$$

Vezessük be az ugrás és az átlag fogalmát. Egy nemfolytonos függvény egy pontbeli ugrásán a kétoldali határértékek különbségét, míg átlagán a határértékek átlagát értjük. Jelölje a  $v$  függvény  $x_i$  pontbeli ugrását  $\llbracket v(x_i) \rrbracket$ , átlagát  $\{\{v(x_i)\}\}$ . Ekkor definiáljuk az ugrásokat a belső pontokban, illetve a határokon a következő képpen.

$$\llbracket v(x_i) \rrbracket = v(x_i^-) - v(x_i^+), \quad \llbracket v(x_0) \rrbracket = -v(x_0^+), \quad \llbracket v(x_N) \rrbracket = v(x_N^-)$$

Hasonlóan definiáljuk az átlagokat is.

$$\{\{v(x_i)\}\} = \frac{v(x_i^-) + v(x_i^+)}{2}, \quad \{\{v(x_0)\}\} = v(x_0^+), \quad \{\{v(x_N)\}\} = v(x_N^-)$$

Vegyük észre, hogy ha  $v$  folytonos egy  $x_i$  belső pontban, akkor  $\llbracket v(x_i) \rrbracket = 0$ , és  $\{\{v(x_i)\}\} = v(x_i)$ . Új jelöléseinkkel az előbbieken kapott formula tovább alakítható

$$\sum_{i=1}^N [u'(x)v(x)]_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} = \sum_{i=0}^N \{\{u'(x_i)\}\} \llbracket v(x_i) \rrbracket,$$

így (3.1) a következőképpen írható át

$$\sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)v'(x) dx - \sum_{i=0}^N \{\{u'(x_i)\}\} \llbracket v(x_i) \rrbracket = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)v(x) dx \quad (3.2)$$

ahol a kifejezés igaz minden  $v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ -re.

Tudjuk, hogy  $u \in C^2(\Omega)$  így  $\llbracket u(x_i) \rrbracket = 0$  minden belső pontban. Ekkor nyilvánvalóan igaz az alábbi összefüggés.

$$\sum_{i=0}^N \llbracket u(x_i) \rrbracket \{\{v'(x_i)\}\} = \llbracket u(x_0) \rrbracket \{\{v'(x_0)\}\} + \llbracket u(x_N) \rrbracket \{\{v'(x_N)\}\}$$

Ekkor, ha adottak a Dirichlet-peremfeltételek ( $-u(0) = A, u(1) = B$ ), akkor a képlet a következő lesz.

$$\sum_{i=0}^N \llbracket u(x_i) \rrbracket \{\{v'(x_i)\}\} = B\{\{v'(x_N)\}\} + A\{\{v'(x_0)\}\}$$

Legyen  $s \in \{-1, 0, +1\}$ . Szorozzuk meg a fenti egyenletünket  $s$ -sel és vonjuk ki (3.2)-ből. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)v'(x) dx - \sum_{i=0}^N \{\{u'(x_i)\}\} \llbracket v(x_i) \rrbracket - s \sum_{i=0}^N \llbracket u(x_i) \rrbracket \{\{v'(x_i)\}\} \\ & = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)v(x) dx - s(B\{\{v'(x_N)\}\} + A\{\{v'(x_0)\}\}). \end{aligned}$$

Az előbbi formulához teljesen hasonlóan látható, hogy

$$\sum_{i=0}^N \sigma_k \llbracket u(x_i) \rrbracket \llbracket v(x_i) \rrbracket = \sigma_N Bv(x_N^-) + \sigma_0 Av(x_0^+)$$

is teljesül. Hozzáadva ezt az egyenletet is az előző összefüggéshez, adódik

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)v'(x) dx - \sum_{i=0}^N \{\{u'(x_i)\}\} \llbracket v(x_i) \rrbracket - s \sum_{i=0}^N \llbracket u(x_i) \rrbracket \{\{v'(x_i)\}\} \\ & + \sum_{i=0}^N \sigma_k \llbracket u(x_i) \rrbracket \llbracket v(x_i) \rrbracket = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)v(x) dx - s(B\{\{v'(x_N)\}\} + A\{\{v'(x_0)\}\}) \\ & \quad + (\sigma_N Bv(x_N^-) + \sigma_0 Av(x_0^+)), \end{aligned}$$

ahol a formula teljesül minden  $v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ -re. Vegyük észre, hogy ez a kifejezés értelmes minden  $u \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  esetén is. Az ilyen  $u$ -t hívjuk az eredeti egyenlet nemfolytonos gyenge megoldásának.

Tegyük fel, hogy  $\sigma_i \geq 0$  minden  $0 \leq i \leq N$ -re. Ezeket a paramétereket hívjuk büntető, vagy penalty paramétereknek.

Vezessük be a következő bilineáris formát és funkcionált:

$$\begin{aligned} a_s(u, v) &= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)v'(x) dx - \sum_{i=0}^N \{\{u'(x_i)\}\} \llbracket v(x_i) \rrbracket - s \sum_{i=0}^N \llbracket u(x_i) \rrbracket \{\{v'(x_i)\}\} \\ & \quad + \sum_{i=0}^N \sigma_k \llbracket u(x_i) \rrbracket \llbracket v(x_i) \rrbracket \\ F(v) &= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)v(x) dx - s(B\{\{v'(x_N)\}\} + A\{\{v'(x_0)\}\}) \\ & \quad + (\sigma_N Bv(x_N^-) + \sigma_0 Av(x_0^+)). \end{aligned}$$

Ekkor keressük azt  $u \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ -t, amelyre  $a_s(u, v) = F(v)$ , minden  $v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ -re.

Ha  $s = 1$  választást alkalmazzuk, akkor a sémánk  $u$ -ban és  $v$ -ben egy szimmetrikus kifejezés, így a továbbiakban szimmetrikus interior penalty (SIPG vagy IP) néven hivatkozunk majd rá. Ha emellett még  $\sigma_k \equiv 0$ , akkor a módszert global element módszernek hívjuk.

Amennyiben  $s = -1$  választással élünk, akkor a fenti séma nem lesz szimmetrikus, de részben ferdén szimmetrikusnak tekinthető, így nonszimmetrikus interior penalty módszernek (NIPG - nonsymmetric interior penalty Galerkin method) hívjuk.

Esetlegesen  $s = 0$  választást is használhatjuk, az ekkor kapott sémánk szintén nem lesz szimmetrikus. Ezt a továbbiakban incomplete interior penalty (IIP) módszernek nevezzük. Megmutatható, hogy ha  $\sigma_k \equiv 0$  választással élünk, akkor a módszer nem lesz sem konvergens, sem stabil.

### 3.1.2. A numerikus megoldás

Adott tehát a  $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  függvénytér, amelyen keressük a megoldást. Mint a klasszikus végelem módszernél, itt is keressünk valamilyen véges dimenziós alteret. A  $H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  függvények szakaszonként  $H^2(\Omega)$ -beliek. Ez alapján teljesen kézenfekvő, hogy tekintsük azt az alteret, amikor a függvények szakaszonként legfeljebb  $p$ -edfokú polinomok, vagyis legyen

$$V_{DG} = V^p(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in \mathcal{P}^p(\overline{K}), \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

#### Bilineáris formák, létezés, egyértelműség, konvergencia

Keressük az  $u \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  gyenge megoldás egy  $u_h$  approximációját a fenti  $V_{DG} \subset H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  altérben. Vagyis

$$u_h = \sum_{i=1}^{(p+1)N} c_i v_i$$

alakba írható. Az  $u_h$ -ról azt követeljük meg, hogy

$$a_s(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_{DG},$$

azaz az altéren teljesül a variációs formula. Vegyük észre, hogy az  $u$  valódi megoldásra is teljesül a variációs alak ezen az altéren, vagyis  $a_s(u, v_h) = F(v_h)$  minden  $v_h \in V_{DG}$ -re. Kivonva a két egyenletet egymásból és felhasználva, hogy  $a_s(\cdot, \cdot)$  bilineáris adódik, hogy

$$a_s(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_{DG},$$

vagyis amennyiben például  $a_s(\cdot, \cdot)$  egy skalárszorzat, akkor az általa indukált normában az approximáció hibája merőleges az altérre. Ezt hívják Galjorkin ortogonalitásnak.

Általában egy  $a(\cdot, \cdot)$  bilineáris formáról a következőket kell megmutatni:

- folytonosság (korlátosság):  $a(u, v) \leq c_f \|u\| \|v\|$  minden  $u, v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ ,
- koercivitás (stabilitás):  $a(u, u) \geq c_k \|u\|^2$  minden  $u \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ ,



- konzisztencia:  $a(u, v) = F(v)$ , minden  $u \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ .

Ha a fentiek teljesülnek, akkor a Lax-Milgram tételből következik a megoldás létezése és egyértelműsége. Ha teljesül még az

$$\|u - u_I\| \leq c_i h^k |u|_{k+1, \Omega}$$

approximációs tulajdonság is akkor bizonyíthatók konvergencia eredmények, melyekkel részletesen a többdimenziós esetben foglalkozunk. Itt érdemes megjegyezni, hogy ezek a feltételek gyengíthetők a *Babuška-Brezzi* féle inf-sup feltétellel.

### Elsőfokú bázis egy dimenziós esetben

Az egyszerűség kedvéért készítsük el először  $p = 1$  esetén a  $V_{DG}$  egy bázisát. A  $\mathcal{T}_h$  minden eleméhez két bázisfüggvény fog tartozni, hasonlóan ahogy a 2. Fejezetben láttuk, itt is olyan bázisfüggvényeket fogunk használni, melyek a felosztás egy pontjában 1, a többiben 0 értéket vesznek fel.

Jelölje  $v_{2i-1}$  és  $v_{2i}$  az  $(x_{i-1}, x_i)$  intervallumhoz tartozó bázisfüggvényeket, melyek a következőképp adhatók meg:

$$v_{2i-1}(x) := \begin{cases} \frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$v_{2i}(x) := \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Ekkor legyen  $V_{DG} = \langle v_1, v_2, \dots, v_{2N} \rangle$ . Nyilvánvaló, hogy  $V_{DG} \subset H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ .

Teljesülni kell tehát, hogy  $a_s(u_h, v_h) = F(v_h)$  minden  $v_h \in V_{DG}$  esetén. Könnyen meggondolható, hogy mivel  $a_s(\cdot, \cdot)$  bilineáris, és  $F$  is lineáris, így elég, ha az egyenlőség csak a  $v_j$ -kre teljesül, mivel a  $v_j$ -k bázist alkotnak  $V_{DG}$ -ben. Vagyis kell, hogy

$$a_s(u_h, v_j) = a_s\left(\sum_{i=1}^{2N} c_i v_i, v_j\right) = \sum_{i=1}^{2N} c_i a_s(v_i, v_j) = F(v_j) \text{ minden } j = 1, 2, \dots, 2N.$$

Látható, hogy ekkor a  $c_i$ -re adódik egy  $2N$  méterű  $Ac = G$  lineáris egyenletrendszer, ahol  $A = \{a_s(v_i, v_j)\}_{j,i=1}^{2N}$ ,  $c = (c_1, c_2, \dots, c_{2N})^T$  és  $G = (F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_{2N}))^T$ . Mivel a báziselemek lineárisan függetlenek, így a mátrix nem szinguláris.

Könnyen meggondolható, hogy az  $A$  sok eleme 0 lesz, vagyis  $A$  egy ritka mátrix, ugyanis az  $a_s(v_k, v_{2j-1}) \neq 0$ , ha  $k = 2j - 3, 2j - 2, 2j - 1, 2j, 2j + 1, 2j + 2$ , míg  $a_s(v_k, v_{2j}) \neq 0$ , ha  $k = 2j - 3, 2j - 2, 2j - 1, 2j, 2j + 1, 2j + 2$ . Vagyis az  $A$  mátrix  $4N^2$  eleméből kevesebb, mint  $12N$  elem nem nulla. Az is könnyen látható, hogy az  $A$  mátrix így egy 7 átlós mátrix, ami bizonyos lineáris egyenletrendszer megoldó algoritmusok esetén gyorsítást jelenthet.

### Magasabb fokú bázis egy dimenziós esetben

Magasabb fokú bázisok teljesen hasonlóan készülnek az elsőfokú alapján, mint a klasszikus végeelem módszereknél. Minden  $(x_{i-1}, x_i)$  szakaszon felveszünk még  $p - 1$  új osztópontot, és így minden intervallumon kapunk  $p + 1$  bázisfüggvényt, amelyek hasonlóan a korábbiakhoz, egy osztópontban vesznek fel 1 értéket, a másik  $p$ -ben 0-t, így kapunk  $p + 1$  pontot, amelyre tudunk egy-egy  $p$ -edfokú polinomot illeszteni. Jelölje az  $(x_{i-1}, x_i)$  intervallumhoz tartozó függvényeket  $v_{(p+1)i-k}$ , ahol a  $k$  értéke  $p, p - 1, \dots, 1, 0$  lehet. Ekkor legyen  $V_{DG} = \langle v_1, v_2, \dots, v_{(p+1)N} \rangle$ . Teljesen hasonlóan a lineáris esethez adódik az egyenletrendszer, amit megoldva megkapjuk a bázisfüggvények együthatóit a lineáris kombinációban. A rendszer mátrix itt is egy sokátlós, de nem telt mátrix lesz, a nem nulla elemek száma itt is  $cN$  valamely  $c$  konstanssal.

### A numerikus integrálásról

Az  $A$  mátrix elemeinek kiszámítása rögzített polinombázis mellett akár analitikusan is elvégezhető. Ha mégsem számítjuk analitikusan, akkor érdemes valamilyen Gauss-kvadraturát használni, ugyanis egy  $n$  alappontú Gauss kvadratura a legfeljebb  $(2n - 1)$ -edfokú polinomokra pontos. Vagyis ha  $p$ -edfokú bázisunk van, akkor az integrálandó függvény két  $(p - 1)$ -ed fokú polinom szorzata, vagyis egy  $(2p - 2)$ -edfokú polinom, tehát  $p$  alappont esetén az  $A$  mátrix elemei pontosan számíthatóak. A  $G$  vektor elemeivel viszont körültekintőbben kell eljárunk, ugyanis ha az  $f$  nem polinom (és általában nem az), akkor sem analitikusan, sem numerikusan nem tudjuk pontosan integrálni, hiba fog keletkezni, ezért (főleg nemfolytonos végeelem módszernél) célszerű magas rendű kvadratura formulákat használni.

## 3.2. Nemfolytonos végeelemek két dimenzióban

A kétdimenziós esetben is az egyszerűség kedvéért egy konkrét elliptikus feladaton mutatjuk be, hogyan kaphatók meg a különböző sémák. Legyen az alaphalmazonk az  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  korlátos tartomány. A modellfeladatunk a

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

ahol  $f \in L^2(\Omega)$  adott függvény (Poisson egyenlet).

Hasonlóan az egy dimenziós esethez, először készítsük el az  $\Omega$  alaptartomány háromszögfelbontását, és jelölje  $\mathcal{T}_h$  a résztartományok halmazát, illetve  $\mathcal{E}_h$  a rész-

tartományok éleinek halmazát (a háromszögek oldalai). Jelölje még a nem peremen levő oldalakat  $\mathcal{E}_h^0 = \{e \in \mathcal{E}_h : e \not\subset \partial\Omega\}$ .

Itt megjegyezzük, hogy ellentétben a klasszikus végeelem módszerrel, itt a tartomány felbontása lényegében tetszőleges, készíthetünk akár négyszög, vagy egyes felbontást is, ami éppen a legcélszerűbb az adott feladatnál, sőt megengedünk úgynevezett *hanging node*-okat is, vagyis olyan csúcsokat, amelyek egy másik elem határának belsejében helyezkednek el.

Fontos megjegyezni még, hogy ha a tartomány pereme nem töröttvonal, akkor célszerű azt valamilyen töröttvonallal helyettesíteni, illetve a peremfeltételeket is átültetni a közelített új peremre.

### 3.2.1. Interior penalty sémák elemi megközelítésből

Vezessük be az egy dimenziós esethez hasonlóan a következő diszkrét Szoboljev teret:

$$H^s(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in H^s(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

Szorozzuk a kiindulási egyenletünket egy tetszőlegesen választott  $v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  függvénnyel, végül integráljuk az egyenletet  $\Omega$ -n, majd használjuk a Green-tételt:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \Omega\text{-n} \\ -\Delta uv &= fv & \forall v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h) \\ \int_{\Omega} -\Delta uv &= \int_{\Omega} fv & \forall v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h) \\ \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla_h v \rangle_{\mathbb{R}^2} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \langle \nabla u, \nu_K \rangle_{\mathbb{R}^2} v &= \int_{\Omega} fv & \forall v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h) \end{aligned}$$

Vezessük be többváltozós függvények esetén is az ugrás és az átlag fogalmát egy  $e \in \mathcal{E}_h^0$  élen. Jelölje  $K^+$  és  $K^-$  azt a két  $\mathcal{T}_h$ -beli elemet, melyekre  $K^+ \cap K^- = e$ . Ekkor egy függvény ugrása

$$[[v(x)]] = v(x^-)\nu^- + v(x^+)\nu^+ \quad \forall x \in e \in \mathcal{E}_h^0,$$

ahol  $\nu^+$  a  $K^+$ , míg  $\nu^-$  a  $K^-$  kifelé mutató egységvektora. Egy  $e \subset \partial\Omega$  élen pedig egy függvény ugrása

$$[[v(x)]] = v(x)\nu, \quad \forall x \in e \subset \partial\Omega,$$

ahol  $\nu$  annak a  $K \in \mathcal{T}_h$  résztartománynak a kifelé mutató egységvektora, amelyre  $K \cap \partial\Omega = e$ . A szorzások valós értékű függvény esetén a hagyományos, vektorértékű

függvény esetén skaláris szorzás értelemben értendők. Egy függvény átlagát egy  $e \in \mathcal{E}_h^0$  élen a kétoldali érték átlagaként definiáljuk

$$\{\{v(x)\}\} = \frac{v(x^-) + v(x^+)}{2}, \quad \forall x \in e \in \mathcal{E}_h^0,$$

míg egy  $e \subset \partial\Omega$  élen

$$\{\{v(x)\}\} = v(x), \quad \forall x \in e \subset \partial\Omega.$$

Az új jelölések alkalmazásával alakítsuk át a peremintegrálokat tartalmazó tagot.

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \langle \nabla u, \nu_K \rangle v = \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \int_e \langle \nabla u, \nu \rangle v + \sum_{e \subset \partial\Omega} \int_e \langle \nabla u, \nu \rangle v$$

Vegyük észre, hogy egy  $e \in \mathcal{E}_h^0$  élen az

$$\begin{aligned} \langle [v], \{\{\nabla u\}\} \rangle + \{\{v\}\} \llbracket \nabla u \rrbracket &= \frac{1}{2} \langle v(x^-) \nu^- + v(x^+) \nu^+, \nabla u(x^-) + \nabla u(x^+) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} (v(x^-) + v(x^+)) (\langle \nabla u(x^-), \nu^- \rangle + \langle \nabla u(x^+), \nu^+ \rangle) \\ &= \frac{1}{2} \langle (v(x^+) - v(x^-)) \nu^+, \nabla u(x^-) + \nabla u(x^+) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} (v(x^-) + v(x^+)) \langle \nabla u(x^+) - \nabla u(x^-), \nu^+ \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle (v(x^+) - v(x^-)) (\nabla u(x^-) + \nabla u(x^+)) + (v(x^-) + v(x^+)) (\nabla u(x^+) - \nabla u(x^-)), \nu^+ \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle (2v(x^+) \nabla u(x^+) - 2v(x^-) \nabla u(x^-)), \nu^+ \rangle \\ &= v(x^+) \langle \nabla u(x^+), \nu^+ \rangle + v(x^-) \langle \nabla u(x^-), \nu^- \rangle \end{aligned}$$

Mivel

$$\sum_{e \subset \partial\Omega} \int_e \langle \nabla u, \nu \rangle v = \sum_{e \subset \partial\Omega} \int_e \langle \nabla u, \nu \rangle v = \sum_{e \subset \partial\Omega} \int_e \langle \{\{\nabla u\}\}, [v] \rangle,$$

így azt kapjuk, hogy

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \langle \nabla u, \nu_K \rangle v = \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \int_e \langle [v], \{\{\nabla u\}\} \rangle + \{\{v\}\} \llbracket \nabla u \rrbracket + \sum_{e \subset \partial\Omega} \int_e \langle \nabla u, \nu \rangle v,$$

amiből

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \langle \nabla u, \nu_K \rangle v = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle [v], \{\{\nabla u\}\} \rangle + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \int_e \{\{v\}\} \llbracket \nabla u \rrbracket. \quad (3.3)$$

Mivel  $u \in C^2(\Omega)$  függvényt keresünk, így  $\llbracket \nabla u \rrbracket = 0$ , amiből azt kapjuk, hogy

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \langle \nabla u, \nu_K \rangle v = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle [v], \{\{\nabla u\}\} \rangle$$

Ezt az azonosságot használva az eredeti feladatunk variációs alakja így írható tovább.

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla_h v \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle [v], \{\{\nabla u\}\} \rangle = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$$

Mivel  $u \in C^2(\Omega)$ , így  $[u] = 0$ , így a fenti formulához hozzáadva az

$$s \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle [u], \{\{\nabla_h v\}\} \rangle = 0$$

és

$$c \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \int_e [u][v] = 0$$

egyenleteket, hogy

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla_h v \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle [v], \{\{\nabla u\}\} \rangle - s \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle [u], \{\{\nabla_h v\}\} \rangle \\ + c \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \int_e [u][v] = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h), \end{aligned}$$

ahol  $0 < c \in \mathbb{R}$ , és  $s = \{-1, 0, 1\}$ .

Ezekből a sémából kaphatóak meg a klasszikus interior penalty sémák. A kifejezés utolsó tagját hívjuk a séma büntetőtagjának. Erre azért van szükség, mert a sémánk csak elég nagy  $c$  konstans esetén lesz stabil.

Ha az  $s = 1$  választással élünk, akkor a kifejezésünk  $u$ -ban és  $v$ -ben egy szimmetrikus kifejezés, így kapjuk a szimmetrikus interior penalty sémát (IP vagy SIPG).

Az  $s = -1$  választás esetén a sémánkat nonszimmetrikus interior penalty módszernek nevezzük (NIPG).

Ha  $s = 0$  választás mellett döntünk, akkor a sémát incomplete interior penalty (IIP) sémaként emlegetjük a továbbiakban.

Megvannak a sémáink, amelyek alapján a numerikus megoldás már kereshető. Bevezetve a

$$V_{DG} = V^p(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in \mathcal{P}^p(\overline{K}), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

véges dimenziós alteret, kereshetjük azt az  $u_h \in V_{DG}$  közelítő megoldást, amelyre a fenti séma teljesül minden  $v_h \in V_{DG}$  esetén.

### 3.2.2. Nemfolytonos végeselem sémák fluxus bevezetésével

Az eredeti elliptikus egyenletet az ismeretlen függvény fizikai jelentése alapján felbontjuk, és készítünk a másodrendű egyenletből egy elsőrendű rendszert. Itt érdemes megemlíteni, ez a klasszikus felépítése a nemfolytonos végeselem módszereknek,

és a dolgozat alapjául szolgáló [1] cikk és [6] könyv is ezt a technikát részesíti előnyben.

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

A következő  $\sigma = -\nabla u$  jelöléssel a fenti feladat így írható fel.

$$\begin{aligned} \sigma + \nabla u &= 0 \\ \operatorname{div} \sigma &= f \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

Legyen  $K \in \mathcal{T}_h$ , és alkalmazzuk a Green-tételt az alábbi két kifejezésben

$$\int_K \langle \sigma, \tau \rangle = - \int_K \langle \nabla u, \tau \rangle = \int_K u \operatorname{div} \tau - \int_{\partial K} u \langle \tau, \nu \rangle,$$

ahol ez teljesül minden olyan  $\tau$  vektorértékű függvényre, amire teljesülnek a Green-tétel feltételei. Tekintsük az

$$- \int_K \langle \sigma, \nabla v \rangle = \int_K \operatorname{div} \sigma v - \int_{\partial K} v \langle \sigma, \nu \rangle = \int_K f v - \int_{\partial K} v \langle \sigma, \nu \rangle$$

és ez is teljesül tetszőleges  $v$  függvényre. A  $\nu$  mindkét kifejezésben a megfelelő tartomány kifelé mutató normális egységvektora.

Ez a két egyenlet lesz a kiindulási egyenletünk. Vezessük be az alábbi véges dimenziós tereket, amelyben a fenti egyenleteket szeretnénk megoldani.

$$V_{DG} = V^p(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in \mathcal{P}^p(\overline{K}), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

$$\Sigma_{DG} = \{\tau \in [L^2(\Omega)]^2 : \tau|_K \in [\mathcal{P}^p(\overline{K})]^2, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

Ekkor a fenti feladat közelítő megoldását az alábbiak szerint kapjuk. Keressük azokat az  $u_h \in V_{DG}$  és  $\sigma_h \in \Sigma_{DG}$  függvényeket, amelyekre

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \sigma_h, \tau \rangle &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K u_h \operatorname{div} \tau - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \hat{u} \langle \tau, \nu \rangle \quad \forall \tau \in \Sigma_{DG} \\ - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \langle \sigma_h, \nabla v \rangle &= \int_{\Omega} f v - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} v \langle \hat{\sigma}, \nu \rangle \quad \forall v \in V_{DG}, \end{aligned}$$

ahol  $\hat{u} = \hat{u}(u_h)$  és  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(u_h, \sigma_h)$  *numerikus fluxusok*, melyek az  $u|_{\partial K}$  és a  $-\nabla u|_{\partial K}$  függvényeket közelítik. Jelölje továbbra is  $\mathcal{E}_h = \{e \subset \partial K : K \in \mathcal{T}_h\}$  a résztartományok éleit, és  $\mathcal{E}_h^0 = \{e \in \mathcal{E}_h : e \not\subset \partial\Omega\}$  azon éleket, melyek nincsenek a peremen, vagyis belső élek.

A módszert *konzisztensnek* nevezzük, ha  $\hat{u}(v) = v|_e$  és  $\hat{\sigma}(v, \nabla v) = -\nabla v|_e$  minden  $e \in \mathcal{E}_h$  élen és minden  $v$  reguláris függvényre.

A módszer *konzervatív*, ha  $\hat{u}$  és  $\hat{\sigma}$  függvényekre, mint numerikus fluxusokra teljesül, hogy minden élen egyik irányból a másikba, illetve fordítva a fluxusok egyenlők. A módszer külön kezeli az egyes résztartományok határait, hiába hogy egybeesnek, ezért van szükség erre a megszorításra, hogy ezt gyakran megköveteljük majd.

Alkalmazzuk a Green-tétel alábbi alakját, és használjuk a már korábban belátott (3.3) összefüggvést, átalakítva ezzel a fenti rendszer egy-egy tagját. Egyrészt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_h \operatorname{div}_h \tau &= - \int_{\Omega} \langle \nabla_h u_h, \tau \rangle + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} u_h \langle \tau, \nu \rangle = \\ &= - \int_{\Omega} \langle \nabla_h u_h, \tau \rangle + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket u_h \rrbracket, \{\{\tau\}\} \rangle + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \int_e \{\{u_h\}\} \llbracket \tau \rrbracket, \end{aligned}$$

másrészt

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \hat{u} \langle \tau, \nu \rangle = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket \hat{u} \rrbracket, \{\{\tau\}\} \rangle + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \int_e \{\{\hat{u}\}\} \llbracket \tau \rrbracket,$$

harmadrészt pedig

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} v \langle \hat{\sigma}, \nu \rangle = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket v \rrbracket, \{\{\hat{\sigma}\}\} \rangle + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \int_e \{\{v\}\} \llbracket \hat{\sigma} \rrbracket.$$

Ezek után az eredeti egyenlet a következőképp írható át. Keressük az  $u_h \in V_{DG}$  és  $\sigma_h \in \Sigma_{DG}$  függvényeket, amelyekre

$$\int_{\Omega} \langle \sigma_h, \tau \rangle = - \int_{\Omega} \langle \nabla_h u_h, \tau \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket \hat{u} - u_h \rrbracket, \{\{\tau\}\} \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \int_e \{\{\hat{u} - u_h\}\} \llbracket \tau \rrbracket \quad \forall \tau \in \Sigma_{DG},$$

$$- \int_{\Omega} \langle \sigma_h, \nabla_h v \rangle = \int_{\Omega} f v - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket v \rrbracket, \{\{\hat{\sigma}\}\} \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \int_e \{\{v\}\} \llbracket \hat{\sigma} \rrbracket \quad \forall v \in V_{DG}.$$

Vegyük észre, hogy  $\nabla(V_{DG}) \subset \Sigma_{DG}$ . Mivel az első egyenlet tetszőleges  $\tau \in \Sigma_{DG}$  esetén kell, hogy teljesüljön, így speciálisan a  $\tau = -\nabla_h v$  esetén is igaz. Ezzel a helyettesítéssel a két egyenlet bal oldala azonos, vagyis a jobb oldalak is egyenlők. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla_h u_h, \nabla_h v \rangle + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket \hat{u} - u_h \rrbracket, \{\{\nabla_h v\}\} \rangle + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \int_e \{\{\hat{u} - u_h\}\} \llbracket \nabla_h v \rrbracket = \\ \int_{\Omega} f v - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket v \rrbracket, \{\{\hat{\sigma}\}\} \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \int_e \{\{v\}\} \llbracket \hat{\sigma} \rrbracket \end{aligned}$$

és ez igaz  $\forall v \in V_{DG}$  esetén.

Kaptunk tehát egy általános formulát, amelyben  $\hat{u}$  és  $\hat{\sigma}$  függvények alkalmas megválasztásával különböző ismert, és kevésbé ismert sémát kaphatunk. Nézzük őket.

### Nem stabil interior penalty módszer

Ha

- $\hat{u} = \{\{u_h\}\}$  minden  $e \in \mathcal{E}_h^0$  élen és  $\hat{u} = 0$  minden  $e \subset \partial\Omega$  élen, amiből  $\llbracket \hat{u} - u_h \rrbracket = -\llbracket u_h \rrbracket$ , és  $\{\{\hat{u} - u_h\}\} = 0$ ,
- $\hat{\sigma} = -\{\{\nabla_h u_h\}\}$  minden  $e \in \mathcal{E}_h$  élen, amiből  $\llbracket \hat{\sigma} \rrbracket = 0$ , és  $\{\{\hat{\sigma}\}\} = -\{\{\nabla_h u_h\}\}$ .

Ekkor az adódó séma a következő:

$$\int_{\Omega} \langle \nabla_h u_h, \nabla_h v \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket u_h \rrbracket, \{\{\nabla_h v\}\} \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket v \rrbracket, \{\{\nabla_h u_h\}\} \rangle = \int_{\Omega} f v$$

Ezt a módszert nem stabil interior penalty módszernek nevezzük (Douglas-Dupont, Wheeler, Arnold).

### Stabil interior penalty módszer

Ha

- $\hat{u} = \{\{u_h\}\}$  minden  $e \in \mathcal{E}_h^0$  élen és  $\hat{u} = 0$  minden  $e \subset \partial\Omega$  élen, amiből  $\llbracket \hat{u} - u_h \rrbracket = -\llbracket u_h \rrbracket$ , és  $\{\{\hat{u} - u_h\}\} = 0$ ,
- $\hat{\sigma} = -\{\{\nabla_h u_h\}\} + c \frac{1}{|e|} \llbracket u_h \rrbracket$  minden  $e \in \mathcal{E}_h$  élen, amiből  $\llbracket \hat{\sigma} \rrbracket = 0$ , és  $\{\{\hat{\sigma}\}\} = -\{\{\nabla_h u_h\}\} + c \frac{1}{|e|} \llbracket u_h \rrbracket$ .

Ekkor az adódó séma a következő:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla_h u_h, \nabla_h v \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket u_h \rrbracket, \{\{\nabla_h v\}\} \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket v \rrbracket, \{\{\nabla_h u_h\}\} \rangle \\ + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} c \frac{1}{|e|} \int_e \langle \llbracket u_h \rrbracket, \llbracket v \rrbracket \rangle = \int_{\Omega} f v \end{aligned}$$

Ez a módszer elég nagy  $c$  konstans esetén stabil, ezért stabil interior penalty (IP vagy SIPG) módszernek nevezzük (Douglas-Dupont, Wheeler, Arnold).



### Heinrich módszer

Definiáljuk egy függvény pontbeli súlyozott (nem szimmetrikus) átlagát egy belső élen következőképpen

$$\{\{v(x)\}\}_\beta = (1 - \beta)v(x^-) + \beta v(x^+), \quad \forall x \in e \in \mathcal{E}_h^0,$$

míg egy peremélen

$$\{\{v(x)\}\}_\beta = \beta v(x), \quad \forall x \in e \subset \partial\Omega,$$

ahol  $\beta \in [0, 1]$  rögzített konstans.

Ekkor ha

- $\hat{u} = \{\{u_h\}\}_{(1-\beta)}$  minden  $e \in \mathcal{E}_h^0$  élen és  $\hat{u} = 0$  minden  $e \subset \partial\Omega$  élen, amiből  $[\![\hat{u} - u_h]\!] = -[\![u_h]\!]$ , és  $\{\{\hat{u} - u_h\}\} = \{\{u_h\}\}_{(1-\beta)} - \{\{u_h\}\}$ ,
- $\hat{\sigma} = -\{\{\nabla_h u_h\}\}_\beta + c \frac{1}{|e|} [\![u_h]\!]$  minden  $e \in \mathcal{E}_h$  élen, amiből  $[\![\hat{\sigma}]\!] = 0$ , és  $\{\{\hat{\sigma}\}\} = -\{\{\nabla_h u_h\}\}_\beta + c \frac{1}{|e|} [\![u_h]\!]$ .

Az adódó séma a következő:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla_h u_h, \nabla_h v \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle [\![u_h]\!], \{\{\nabla_h v\}\}_\beta \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle [\![v]\!], \{\{\nabla_h u_h\}\}_\beta \rangle \\ + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} c \frac{1}{|e|} \int_e \langle [\![u_h]\!], [\![v]\!] \rangle = \int_{\Omega} f v \end{aligned}$$

Természetesen a  $\beta = \frac{1}{2}$  választás esetén visszkapjuk az előző, stabil interior penalty sémát. Ezt a módszert Heinrich (H) módszernek hívjuk.

### Baumann-Oden módszer

Ha

- $\hat{u} = \{\{u_h\}\} + \langle \nu, [\![u_h]\!] \rangle$  minden  $e \in \mathcal{E}_h^0$  élen és  $\hat{u} = 0$  minden  $e \subset \partial\Omega$  élen, amiből  $[\![\hat{u} - u_h]\!] = 2[\![u_h]\!] - [\![u_h]\!] = [\![u_h]\!]$ , és  $\{\{\hat{u} - u_h\}\} = 0$ ,
- $\hat{\sigma} = -\{\{\nabla_h u_h\}\}$  minden  $e \in \mathcal{E}_h$  élen, amiből  $[\![\hat{\sigma}]\!] = 0$ , és  $\{\{\hat{\sigma}\}\} = -\{\{\nabla_h u_h\}\}$ .

Ekkor az adódó séma a következő:

$$\int_{\Omega} \langle \nabla_h u_h, \nabla_h v \rangle + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle [\![u_h]\!], \{\{\nabla_h v\}\} \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle [\![v]\!], \{\{\nabla_h u_h\}\} \rangle = \int_{\Omega} f v$$

Ezt a módszert (nem stabil) Baumann-Oden (BO) módszernek nevezzük.

**Stabil Baumann-Oden módszer**

Ha

- $\hat{u} = \{\{u_h\}\} + \langle \nu, \llbracket u_h \rrbracket \rangle$  minden  $e \in \mathcal{E}_h^0$  élen és  $\hat{u} = 0$  minden  $e \subset \partial\Omega$  élen, amiből  $\llbracket \hat{u} - u_h \rrbracket = 2\llbracket u_h \rrbracket - \llbracket u_h \rrbracket = \llbracket u_h \rrbracket$ , és  $\{\{\hat{u} - u_h\}\} = 0$ ,
- $\hat{\sigma} = -\{\{\nabla_h u_h\}\} + c \frac{1}{|e|} \llbracket u_h \rrbracket$  minden  $e \in \mathcal{E}_h$  élen, amiből  $\llbracket \hat{\sigma} \rrbracket = 0$ , és  $\{\{\hat{\sigma}\}\} = -\{\{\nabla_h u_h\}\} + c \frac{1}{|e|} \llbracket u_h \rrbracket$ .

Ekkor az adódó séma a következő:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla_h u_h, \nabla_h v \rangle + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket u_h \rrbracket, \{\{\nabla_h v\}\} \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket v \rrbracket, \{\{\nabla_h u_h\}\} \rangle \\ + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} c \frac{1}{|e|} \int_e \langle \llbracket u_h \rrbracket, \llbracket v \rrbracket \rangle = \int_{\Omega} f v \end{aligned}$$

Ez a módszer megfelelően nagy  $c$  konstans esetén stabil, ezért stabil (stabilizált) Baumann-Oden módszernek nevezzük, vagy más elnevezéssel nonszimmetrikus interior penalty (NIPG) módszer (Wheeler, Rivière, Girault).

**Incomplete interior penalty módszer**

Ha

- $\hat{u} = \{\{u_h\}\} + \frac{1}{2} \langle \nu, \llbracket u_h \rrbracket \rangle$  minden  $e \in \mathcal{E}_h^0$  élen és  $\hat{u} = 0$  minden  $e \subset \partial\Omega$  élen, amiből  $\llbracket \hat{u} - u_h \rrbracket = \llbracket u_h \rrbracket - \llbracket u_h \rrbracket = 0$ , és  $\{\{\hat{u} - u_h\}\} = 0$ ,
- $\hat{\sigma} = -\{\{\nabla_h u_h\}\} + c \frac{1}{|e|} \llbracket u_h \rrbracket$  minden  $e \in \mathcal{E}_h$  élen, amiből  $\llbracket \hat{\sigma} \rrbracket = 0$ , és  $\{\{\hat{\sigma}\}\} = -\{\{\nabla_h u_h\}\} + c \frac{1}{|e|} \llbracket u_h \rrbracket$ .

Ekkor az adódó séma a következő:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla_h u_h, \nabla_h v \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket v \rrbracket, \{\{\nabla_h u_h\}\} \rangle \\ + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} c \frac{1}{|e|} \int_e \langle \llbracket u_h \rrbracket, \llbracket v \rrbracket \rangle = \int_{\Omega} f v \end{aligned}$$

Ezt a módszert nem teljes (incomplete) interior penalty (IIPG) módszernek nevezzük (Sun, Wheeler).

### 3.2.3. Nemfolytonos végeelem sémák lifting operátorral

Tekintsük újra a kiindulási két egyenletünket.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \sigma_h, \tau \rangle &= - \int_{\Omega} \langle \nabla_h u_h, \tau \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket \hat{u} - u_h \rrbracket, \{\{\tau\}\} \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \int_e \{\{\hat{u} - u_h\}\} \llbracket \tau \rrbracket \quad \forall \tau \in \Sigma_{DG} \\ - \int_{\Omega} \langle \sigma_h, \nabla_h v \rangle &= \int_{\Omega} f v - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket v \rrbracket, \{\{\hat{\sigma}\}\} \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \int_e \{\{v\}\} \llbracket \hat{\sigma} \rrbracket \quad \forall v \in V_{DG} \end{aligned}$$

Vezessük be a következő lifting operátorokat. Legyen  $\mathbf{R} : V_{DG} \rightarrow \Sigma_{DG}$  az az operátor, amelyet az alábbi egyenlőség definiál:

$$\int_{\Omega} \langle \mathbf{R}(\llbracket v \rrbracket), \tau \rangle = - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket v \rrbracket, \{\{\tau\}\} \rangle \quad \forall \tau \in \Sigma_{DG}.$$

Hasonlóan, legyen  $\ell : V_{DG} \rightarrow \Sigma_{DG}$  a következő egyenlettel definiált operátor:

$$\int_{\Omega} \langle \ell(\{\{v\}\}), \tau \rangle = - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \int_e \{\{v\}\} \llbracket \tau \rrbracket \quad \forall \tau \in \Sigma_{DG}.$$

Ekkor az első egyenletből

$$\sigma_h = -\nabla_h u_h + \mathbf{R}(\llbracket \hat{u} - u_h \rrbracket) + \ell(\{\{\hat{u} - u_h\}\})$$

adódik. Ezt a második egyenletbe helyettesítve, és átrendezve a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla_h u_h, \nabla_h v \rangle - \int_{\Omega} \langle \mathbf{R}(\llbracket \hat{u} - u_h \rrbracket), \nabla_h v \rangle - \int_{\Omega} \langle \ell(\{\{\hat{u} - u_h\}\}), \nabla_h v \rangle \\ + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket v \rrbracket, \{\{\hat{\sigma}\}\} \rangle + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \int_e \{\{v\}\} \llbracket \hat{\sigma} \rrbracket = \int_{\Omega} f v \end{aligned}$$

séma adódik, melyben  $\mathbf{R}$  és  $\ell$  definícióját alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla_h u_h, \nabla_h v \rangle + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket \hat{u} - u_h \rrbracket, \{\{\nabla_h v\}\} \rangle + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \int_e \{\{\hat{u} - u_h\}\} \llbracket \nabla_h v \rrbracket \\ + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket v \rrbracket, \{\{\hat{\sigma}\}\} \rangle + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \int_e \{\{v\}\} \llbracket \hat{\sigma} \rrbracket = \int_{\Omega} f v, \end{aligned}$$

ahol a formulák teljesülnek minden  $v \in V_{DG}$  esetén.

Kaptunk egy új alapsémát, amelyben az  $\hat{u}$  és  $\hat{\sigma}$  függvények alkalmas megválasztásával újabb sémákhoz juthatunk.

### Az első Bassi-Rebay módszer

Ha

- $\hat{u} = \{\{u_h\}\}$  minden  $e \in \mathcal{E}_h^0$  élen és  $\hat{u} = 0$  minden  $e \subset \partial\Omega$  élen,  
amiből  $\llbracket \hat{u} - u_h \rrbracket = -\llbracket u_h \rrbracket$ , és  $\{\{\hat{u} - u_h\}\} = 0$ ,
- $\hat{\sigma} = \{\{\sigma_h\}\}$  minden  $e \in \mathcal{E}_h$  élen,  
amiből  $\llbracket \hat{\sigma} \rrbracket = 0$ , és  $\{\{\hat{\sigma}\}\} = \{\{\sigma_h\}\}$ .

Ekkor  $\sigma_h = -\nabla_h u_h - \mathbf{R}(\llbracket u_h \rrbracket)$  (itt az  $\mathbf{R}(\llbracket u_h \rrbracket)$  tagot strain correction-nek, vagy főtag korrekciónak nevezzük). Ezt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket v \rrbracket, \{\{\hat{\sigma}\}\} \rangle &= - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \{\{\nabla_h u_h\}\}, \llbracket v \rrbracket \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \{\{\mathbf{R}(\llbracket u_h \rrbracket)\}\}, \llbracket v \rrbracket \rangle \\ &= \int_{\Omega} \langle \nabla_h u_h, \mathbf{R}(\llbracket v \rrbracket) \rangle + \int_{\Omega} \langle \mathbf{R}(\llbracket u_h \rrbracket), \mathbf{R}(\llbracket v \rrbracket) \rangle \end{aligned}$$

és mivel

$$- \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket u_h \rrbracket, \{\{\nabla_h v\}\} \rangle = \int_{\Omega} \langle \mathbf{R}(\llbracket u_h \rrbracket), \nabla_h v \rangle$$

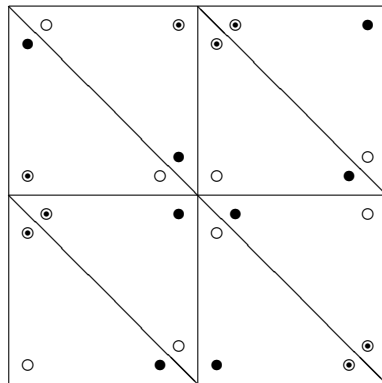
melyeket helyettesítve az új alapsémánkba, adódik az első Bassi-Rebay séma

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle \nabla_h u_h, \nabla_h v \rangle + \int_{\Omega} \langle \mathbf{R}(\llbracket u_h \rrbracket), \nabla_h v \rangle + \int_{\Omega} \langle \nabla_h u_h, \mathbf{R}(\llbracket v \rrbracket) \rangle \\ + \int_{\Omega} \langle \mathbf{R}(\llbracket u_h \rrbracket), \mathbf{R}(\llbracket v \rrbracket) \rangle = \int_{\Omega} f v \end{aligned}$$

amely rövidebb alakban

$$\int_{\Omega} \langle (\nabla_h u_h + \mathbf{R}(\llbracket u_h \rrbracket)), (\nabla_h v + \mathbf{R}(\llbracket v \rrbracket)) \rangle = \int_{\Omega} f v.$$

Ennek a sémának az egyik legnagyobb hátrányossága, hogy nem stabil. Tekintsük a következő  $u$  példafüggvényt, amely azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy  $\nabla u + \mathbf{R}(\llbracket u \rrbracket) = 0$  minden  $K$  háromszögön.



Legyen az  $u$  függvényünk olyan, amely a telt fekete (●) karikákban 1 értéket, az üres fehér (○) karikákban -1 értéket, míg a harmadik, félig telt karikákban 0 értéket vesz fel.

### Stabilizált második Bassi-Rebay módszer

Módosítsuk az első Bassi-Rebay sémánkat, hogy stabil módszert kapjunk. Ehhez vezessük be a strain correction-t az éleken is. Legyen  $r_e : V_{DG} \rightarrow \Sigma_{DG}$  az alábbi egyenlőséggel definiált operátor.

$$\int_{\Omega} \langle r_e(\llbracket v \rrbracket), \tau \rangle + \int_e \langle \llbracket v \rrbracket, \{\{\tau\}\} \rangle = 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{DG}$$

Az R operátor definíciójából kapjuk, hogy

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} r_e(\llbracket v \rrbracket) = \mathbf{R}(\llbracket v \rrbracket).$$

A második Bassi-Rebay séma úgy kapható az elsőből, hogy az

$$\int_{\Omega} \langle \mathbf{R}(\llbracket u_h \rrbracket) \rrbracket, \mathbf{R}(\llbracket v \rrbracket) \rangle$$

tagot lecseréljük a

$$c \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_{\Omega} \langle r_e(\llbracket u_h \rrbracket) \rrbracket, r_e(\llbracket v \rrbracket) \rangle$$

tagra.

Ha

- $\hat{u} = \{\{u_h\}\}$  minden  $e \in \mathcal{E}_h^0$  élen és  $\hat{u} = 0$  minden  $e \subset \partial\Omega$  élen, amiből  $\llbracket \hat{u} - u_h \rrbracket = -\llbracket u_h \rrbracket$ , és  $\{\{\hat{u} - u_h\}\} = 0$ ,
- $\hat{\sigma} = -\{\{\nabla_h u_h\}\} + cr_e(\llbracket u_h \rrbracket)$  minden  $e \in \mathcal{E}_h$  élen, amiből  $\llbracket \hat{\sigma} \rrbracket = 0$ , és  $\{\{\hat{\sigma}\}\} = -\{\{\nabla_h u_h\}\} + c\{r_e(\llbracket u_h \rrbracket)\}$ .

Ezekkel a választásokkal kapjuk éppen a fent említett változtatások után adódó második BR sémát:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \langle \nabla_h u_h, \nabla_h v \rangle + \int_{\Omega} \langle \mathbf{R}(\llbracket u_h \rrbracket), \nabla_h v \rangle + \int_{\Omega} \langle \nabla_h u_h, \mathbf{R}(\llbracket v \rrbracket) \rangle \\ & + c \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_{\Omega} \langle r_e(\llbracket u_h \rrbracket), r_e(\llbracket v \rrbracket) \rangle = \int_{\Omega} f v \end{aligned}$$

A  $c$  konstans megfelelő választásával a séma stabil lesz.

A fentiekén kívül ügyesen megválasztva  $\hat{u}$ -t és  $\hat{\sigma}$ -t újabb sémákat készíthetünk.

### 3.2.4. Numerikus megoldás, konvergencia, hibabecslés

Tekintsük a szimmetrikus interior penalty sémát modellfeladatként, amelyen megmutatjuk a konvergencia bizonyítására és a numerikus megoldás felírására vonatkozó módszereket, trükköket.

Jelölje

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \langle \nabla_h u, \nabla_h v \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket u \rrbracket, \{\{\nabla_h v\}\} \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket v \rrbracket, \{\{\nabla_h u\}\} \rangle + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} c \frac{1}{|e|} \int_e \langle \llbracket u \rrbracket, \llbracket v \rrbracket \rangle$$

és

$$F(v) = \int_{\Omega} f v.$$

Ekkor az IP módszer a következő módon írható fel. Keressük azt az  $u_h \in V_{DG}$  közelítő megoldást, amelyre

$$a(u_h, v_h) = F(v_h)$$

és ez teljesül minden  $v_h \in V_{DG}$  függvényre.

Általában minden sémának felírható ez a absztrakt variációs alakja.

#### A numerikus megoldás keresése

Az  $u_h$  közelítő megoldást egy  $V_{DG}$  altéren az altérbeli elemek lineáris kombinációjaként keressük. Először rögzítenünk kell, hogy hanyad fokú polinomokkal szeretnénk approximálni. Ezután a  $V_{DG}$  már egy rögzített, véges dimenziós altér, így elkészíthetjük egy bázisát. Jelölje  $v_i$  a báziselemeket, ahol  $i = 1, \dots, n$ . Ekkor a közelítő megoldás

$$u_h = \sum_{i=1}^n c_i v_i$$

alakba írható, ahol keressük a  $c_i$  együtthatókat. Teljesen hasonlóan, mint akár a klasszikus végeelem módszernél, akár az egydimenziós DG-nél, itt is adódik egy egyenletrendszer az együtthatókra, ha felírjuk, hogy mit kell  $u_h$ -nak teljesítenie, és felhasználjuk, hogy  $a(\cdot, \cdot)$  bilineáris.

Kell, hogy  $a(u_h, v_h) = F(v_h)$  minden  $v_h \in V_{DG}$  függvényre, de az egyenlet  $v_h$ -ban való linearitása miatt elég csak a báziselemekre megkövetelni ugyanezt az összefüggést,

$$a(u_h, v_j) = a\left(\sum_{i=1}^n c_i v_i, v_j\right) = \sum_{i=1}^n c_i a(v_i, v_j) = F(v_j)$$

ahol ez kell, hogy teljesüljön minden  $j = 1, 2, \dots, n$ -re.

Így a  $c_i$  együtthatókra adódik egy lineáris egyenletrendszer. Az egyenletrendszer mátrixa, illetve a jobb oldal formálisan teljesen hasonlóan írható fel, mint egy dimenzióban. A rendszer mátrixának és a jobb oldali vektor elemeinek számításához valamilyen többdimenziós numerikus kvadratúra formulát kell használni. Célszerű minél pontosabban integrálni, hogy a numerikus integrálások hibája ne befolyásolja a módszer hibáját.

### Konvergencia és hiba

Általánosságban egy ilyen variációs feladat esetén mindig a következőket kell megmutatni.

- folytonosság:  $a(u, v) \leq c_f \|u\| \|v\|$  minden  $u, v \in H$ ,
- koercivitas:  $a(u, u) \geq c_k \|u\|^2$  minden  $u \in H$ ,
- konzisztencia:  $a(u, v) = F(v)$ , minden  $v \in H$ ,
- approximáció:  $\|u - u_I\| \leq c_i h^k |u|_{k+1, \Omega}$ .

Amennyiben teljesül a koercivitas abban a térben, amelyben az  $u$  gyenge megoldást szeretnénk megtalálni, akkor az  $u$  létezését a Lax-Milgram tétel garantálja.

Vezessünk be egy új függvényteret, amelyben a konvergencia-analízist végezzük.

$$V(h) = V_{DG} + H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset H^2(\mathcal{T}_h)$$

Ehhez a térhez definiáljunk egy normát is. Legyen  $v \in V(h)$  esetén

$$\|v\|_*^2 = |v|_{1,h}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 |v|_{2,K}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|[[v]]\|_{0,e}^2,$$

ahol

$$|v|_{1,h}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{1,K}^2.$$

Ha ebben az új  $\|\cdot\|_*$  normában teljesül az  $a(\cdot, \cdot)$  bilineáris formára a folytonosság, a koercivitas, és az approximációs tulajdonság, akkor

$$\begin{aligned} c_k \|u_I - u_h\|_*^2 &\leq a(u_I - u_h, u_I - u_h) = a(u_I - u_h, u_I - u_h) + \overbrace{a(u_h - u, u_I - u_h)}^0 \\ &= a(u_I - u, u_I - u_h) \leq c_f \|u_I - u\| \|u_I - u_h\| \leq c_f c_i h^k |u|_{k+1, \Omega} \|u_I - u_h\| \end{aligned}$$

amiből

$$\|u_I - u_h\|_* \leq \frac{c_f c_i}{c_k} h^k |u|_{k+1, \Omega}.$$

Felhasználtuk a Galjorkin ortogonalitást, azaz  $a(u_h - u, u_I - u_h) = 0$ . Ha  $u$  megoldás, akkor  $a(u, v) = F(v)$  minden  $v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  esetén, speciálisan  $v = u_I - u_h$ -ra is. Továbbá ha  $u_h$  közelítő megoldás, akkor  $a(u_h, v_h) = F(v_h)$  minden  $v_h \in V_{DG}$  esetén, de mivel  $u_I \in V_{DG}$  (mert egy interpolációs polinom) így speciálisan  $v_h = u_I - u_h$  esetén is. Az  $a(u_h, u_I - u_h) = F(u_I - u_h)$  és  $a(u, u_I - u_h) = F(u_I - u_h)$  egyenleteket kivonva egymásból, kapjuk a Galjorkin ortogonalitást.

A háromszög egyenlőtlenséget felhasználva adódik

$$\|u - u_h\|_* \leq \|u_I - u_h\|_* + \|u - u_I\|_* \leq \left( \frac{c_f c_i}{c_k} + c_i \right) h^k |u|_{k+1, \Omega}. \quad (3.4)$$

Az  $L^2$ -beli konvergencia belátásához vezessük be a következő fogalmat.

**3.2.1. Definíció.** Egy  $a(.,.)$  bilineáris forma adjungáltan konzisztens, ha minden  $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  függvény esetén minden  $v \in V(h)$  függvényre

$$a(v, w) = - \int_{\Omega} \Delta w v.$$

**3.2.1. Állítás.** Ha az  $\hat{u}$  és  $\hat{\sigma}$  numerikus fluxusok konzervatívak, akkor  $a(.,.)$  adjungáltan konzisztens.

**3.2.1. Tétel ( $L^2$ -beli konvergencia).** Ha  $\hat{u}$  és  $\hat{\sigma}$  numerikus fluxusok konzervatívak, akkor létezik olyan  $C$  konstans, amelyre

$$\|u - u_h\|_{0, \Omega} \leq C h^{k+1} |u|_{k+1, \Omega}$$

*Bizonyítás:* Legyen  $\psi \in H_0^1(\Omega)$  olyan függvény, amelyre  $-\Delta \psi = u - u_h$ . Ekkor igaz, hogy

$$|\psi|_{2, \Omega} \leq c \|u - u_h\|_{0, \Omega}.$$

Az előző állításból következik, hogy mivel a numerikus fluxusok konzervatívak, ezért

$$\forall v \in V(h), a(v, \psi) = \int_{\Omega} (u - u_h) v.$$

Mivel  $u - u_h \in V(h)$  és a numerikus fluxusok konzisztensek, és teljesül (3.4), így

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{0, \Omega}^2 &= a(u - u_h, \psi) = a(u - u_h, \psi - \psi_I) \leq c_f \|u - u_h\|_* \|\psi - \psi_I\|_* \\ &\leq c_f \|u - u_h\|_* c_I h |\psi|_{2, \Omega} \leq c_f c_I c \left( \frac{c_f c_i}{c_k} + c_i \right) h^{k+1} |u|_{k+1, \Omega} \|u - u_h\|_{0, \Omega}, \end{aligned}$$



ahol  $\psi_I$  a  $\psi$  Scott-Zhang interpolációja, melynek részleteiről az [6] kötetben olvashatunk.

Az egyenlőtlenséget osztva  $\|u - u_h\|_{0,\Omega}$ -vel és a  $C = c_f c_I c \left( \frac{c_f c_i}{c_k} + c_i \right)$  jelöléssel kapjuk az állítást.  $\square$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a stabil interior penalty sémából kapott  $a(\cdot, \cdot)$  bilineáris formára a  $\|\cdot\|_*$  normában teljesül a folytonosság, a koercivitás, és a konzisztencia.

### A SIPG módszer folytonossága

Becsüljük meg egyenként a formula egyes tagjait.

$$\int_{\Omega} \langle \nabla_h u, \nabla_h v \rangle \leq |u|_{1,h} |v|_{1,h} \leq \|u\|_* \|v\|_* \quad \forall u, v \in V(h)$$

Alkalmazzuk a

$$\sum a_i b_i \leq \left( \sum a_i^2 \right)^{1/2} \left( \sum b_i^2 \right)^{1/2}$$

Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget a séma második tagjára egy kis átalakítás után.

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket u \rrbracket, \{\{\nabla_h v\}\} \rangle &= \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\langle \frac{1}{\sqrt{|e|}} \llbracket u \rrbracket, \sqrt{|e|} \{\{\nabla_h v\}\} \right\rangle \\ &\leq \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|\llbracket u \rrbracket\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e| \|\{\{\nabla_h v\}\}\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Hasonlóan alkalmazzuk a harmadik tagra is:

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket v \rrbracket, \{\{\nabla_h u\}\} \rangle &= \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\langle \frac{1}{\sqrt{|e|}} \llbracket v \rrbracket, \sqrt{|e|} \{\{\nabla_h u\}\} \right\rangle \\ &\leq \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|\llbracket v \rrbracket\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e| \|\{\{\nabla_h u\}\}\|_{0,e}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

valamint a negyedik tagra is hasonlóan:

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \int_e \langle \llbracket u \rrbracket, \llbracket v \rrbracket \rangle \leq \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|\llbracket u \rrbracket\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|\llbracket v \rrbracket\|_{0,e}^2 \right)^{1/2}.$$

Szükségünk van még a diszkrét gradienses tag becslésére. Ehhez tekintsük a következő összefüggést.

**3.2.2. Állítás (Nyom egyenlőtlenség).** *Adott  $D \subset \mathbb{R}^2$  poligon, melynek egy éle legyen  $e$ . Ekkor minden  $\varphi \in H^1(D)$  függvényhez létezik  $c_t > 0$ , hogy*

$$\|\varphi\|_{0,e} \leq c_t \left( \frac{1}{|e|} \|\varphi\|_{0,D}^2 + |e| \|\varphi\|_{1,D}^2 \right)^{1/2}$$

*teljesül.*

Alkalmazzuk a nyom egyenlőtlenséget a diszkrét gradiens átlagának normájára.

$$\|\{\{\nabla_h u\}\}\|_{0,e} \leq c_t \left( \frac{1}{|e|} |u|_{1,K^\pm}^2 + |e| |u|_{2,K^\pm}^2 \right)^{1/2}$$

Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket v \rrbracket, \{\{\nabla_h u\}\} \rangle \leq c_0 \|v\|_* \|u\|_*,$$

amiből adódik, hogy

$$a(u, v) \leq c_f \|u\|_* \|v\|_* \quad \forall u, v \in V(h),$$

vagyis a SIPG módszer valóban folytonos (korlátos).

### A SIPG módszer koercivitása

Azt kellene megmutatnunk, hogy

$$a(u, u) = |u|_{1,h}^2 - 2 \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket u \rrbracket, \{\{\nabla_h u\}\} \rangle + c \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|\llbracket u \rrbracket\|_{0,e}^2 \geq c_k \|u\|_*^2$$

teljesül minden  $u \in V_{DG}$  esetén. Tekintsük az alábbi állítást.

**3.2.3. Állítás (Inverz egyenlőtlenség).** *Adott  $D \subset \mathbb{R}^2$  poligon, melynek átmérőjét jelölje  $h_D$ , és legyen  $p$  polinom  $D$ -n. Ekkor létezik  $c_{inv} > 0$ , hogy minden  $D$  esetén*

$$|p|_{1,D} \leq c_{inv} \frac{1}{h_D} \|p\|_{0,D}$$

*teljesül.*

Érdeemes megemlíteni, hogy a  $hp$  végeselem módszerek esetén ez a becslés nem túl jó, ugyanis  $c_{inv}$  függ a polinomfoktól, így  $p$  növelésével a koercivításban szereplő konstans is egyre nagyobb.

Alkalmazzuk megint a diszkrét gradiens átlagára a nyom, majd az inverz egyenlőtlenséget.

$$\|\{\{\nabla_h u\}\}\|_{0,e} \leq c_t \left( \frac{1}{|e|} |u|_{1,K^\pm}^2 + |e| |u|_{2,K^\pm}^2 \right)^{1/2} \leq c_t c_{inv} |e|^{-1/2} |u|_{1,K^\pm}$$

Ezt, illetve a Cauchy-Schwarz és a számtani-mértani egyenlőtlenséget felhasználva

$$\begin{aligned} -2 \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket u \rrbracket, \{\{\nabla_h u\}\} \rangle &= -2 \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \left\langle \frac{1}{\sqrt{|e|}} \llbracket u \rrbracket, \sqrt{|e|} \{\{\nabla_h u\}\} \right\rangle \\ &\geq -2 \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|\llbracket u \rrbracket\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h} |e| \|\{\{\nabla_h u\}\}\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \geq -2c_* \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|\llbracket u \rrbracket\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} |u|_{1,h} \\ &\geq -c_* \varepsilon \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|\llbracket u \rrbracket\|_{0,e}^2 - \frac{c_*}{\varepsilon} |u|_{1,h}^2 \end{aligned}$$

adódik, amiből kapjuk, hogy

$$a(u, u) \geq \left(1 - \frac{c_*}{\varepsilon}\right) |u|_{1,h}^2 + (c - c_* \varepsilon) \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{|e|} \|\llbracket u \rrbracket\|_{0,e}^2$$

és ez teljesül minden  $u \in V(h)$ -ra. Az  $\varepsilon$  majd  $c$  alkalmas megválasztásával kapjuk a SIPG módszer koercivitását (stabilitását).

### A SIPG módszer konzisztenciája

Azt kellene belátni, hogy

$$a(u, v) = F(v)$$

teljesül minden  $v \in V_{DG}$ -re. Mivel  $u$  egzakt megoldás, így  $\llbracket u \rrbracket = 0$ , vagyis a bilineáris forma ekkor a következő.

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla_h v \rangle - \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket v \rrbracket, \{\{\nabla u\}\} \rangle$$

Integráljuk az első tagot parciálisan (Green-tétel), és használjuk ki, hogy mivel  $u$  a megoldás függvény, így  $\llbracket \nabla u \rrbracket = 0$ .

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla_h v \rangle = - \int_{\Omega} \Delta u v + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \langle \nabla u, \nu \rangle v = \int_{\Omega} f v + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \llbracket v \rrbracket, \{\{\nabla u\}\} \rangle$$

Ezt átrendezve kapjuk az állítást.

### 3.2.5. Összefoglaló eredmények a különböző nemfolytonos módszerekről

A kiindulási egyenletünkben a numerikus fluxusok alkalmas megválasztásával különböző sémákat kapunk. Az alábbi összefoglaló táblázatban látható az egyes módszerekhez tartozó numerikus fluxus definíciók.

Módszer	$\hat{u}$	$\hat{\sigma}$
SIPG	$\{\{u_h\}\}$	$-\{\{\nabla_h u_h\}\} + c \frac{1}{ e } \llbracket u_h \rrbracket$
H	$\{\{u_h\}\}_{(1-\beta)}$	$-\{\{\nabla_h u_h\}\}_\beta + c \frac{1}{ e } \llbracket u_h \rrbracket$
BO	$\{\{u_h\}\} + \langle \nu, \llbracket u_h \rrbracket \rangle$	$-\{\{\nabla_h u_h\}\}$
NIPG	$\{\{u_h\}\} + \langle \nu, \llbracket u_h \rrbracket \rangle$	$-\{\{\nabla_h u_h\}\} + c \frac{1}{ e } \llbracket u_h \rrbracket$
IIPG	$\{\{u_h\}\} + \frac{1}{2} \langle \nu, \llbracket u_h \rrbracket \rangle$	$-\{\{\nabla_h u_h\}\} + c \frac{1}{ e } \llbracket u_h \rrbracket$
BR1	$\{\{u_h\}\}$	$\{\{\sigma_h\}\}$
BR2	$\{\{u_h\}\}$	$-\{\{\nabla_h u_h\}\} + cr_e(\llbracket u_h \rrbracket)$

Mi csak a SIPG módszert vizsgáltuk meg részletesen, de a többi módszerről is hasonló vizsgálatok készíthetők. Az alábbi táblázatban megmutatjuk az egyes sémák milyen tulajdonságokkal rendelkeznek, és milyenekkel nem.

Módszer	kons.	a.k.	stab.	típus	felt.	$H^1$	$L^2$
SIPG	✓	✓	✓	I	$c > c^*$	$h^k$	$h^{k+1}$
H	✓	✓	✓	I	$c > c^*$	$h^k$	$h^{k+1}$
BO	✓	×	✓	-	-	$h^k$	$h^k$
NIPG	✓	×	✓	I	$c > 0$	$h^k$	$h^k$
IIPG	✓	×	✓	I	$c > c^*$	$h^k$	$h^k$
BR1	✓	✓	×	-	-	$(h^k)$	$(h^{k+1})$
BR2	✓	✓	✓	R	$c > 3$	$h^k$	$h^{k+1}$

A táblázat jelölései:

- Módszer: a numerikus módszer rövidítése
- kons.: konzisztens-e a módszer
- a.k.: a bilineáris forma adjungáltan konzisztens-e
- stab.: stabil-e a módszer
- típus: azt jelöli, hogy  $-\{\{\nabla_h u_h\}\}$  milyen taggal van korigálva, I esetén  $c \frac{1}{|e|} \llbracket u_h \rrbracket$ -el, R esetén  $cr_e(\llbracket u_h \rrbracket)$ -el
- felt.: milyen feltétel van a  $c$  megválasztására, hogy a séma stabil legyen
- $H^1$ : a konvergencia rendje  $H^1$  normában
- $L^2$ : a konvergencia rendje  $L^2$  normában

## 4. fejezet

# A nemfolytonos végeelem módszer egy teljesen új megközelítésből

Ebben a fejezetben egy minden eddigőtől teljesen eltérő gondolatmenetet követő technikát mutatunk be. Az eddigiekben látott sémák minden esetben úgy készültek, hogy ügyes átalakításokkal létrehoztunk egy általános kifejezést, melyben bizonyos tetszőlegesen megválasztható konstansok rögzítésével, illetve egyes általános tagok speciális megválasztásával adódtak a módszereink. Azonban minden módszerben a megvalósítás után az eredetileg  $u \in C^2(\Omega)$  függvényt egy olyan  $u_h$  függvénnyel közelítettünk, mely csak résztartományonként (egy dimenzióban szakaszonként) polinomiális, azonban a tartományok határán lehettek szakadásai, vagyis egy folytonosan differenciálható függvényt érdekes módon egy még nem is folytonos függvénnyel approximáltunk.

Az ötlet, hogy a nemfolytonos megoldást tegyük folytonossá. Persze alapvetően megtehetnénk, hogy egy tetszőleges DG sémával kapott nemfolytonos megoldást folytonossá teszünk valamilyen átlagolással, vagy más simító operátorral (melyről részletesebben a [3] cikkben olvashatunk), de bizonyos esetekben nemhogy közelebb, hanem távolabb kerülhetünk a valódi  $u$  megoldástól, például akkor, ha az  $u$  mondjuk "ugrásszerű" függvény, vagyis egy kis értékről hatalmas gradienssel egy nagy értékre "ugrik" folytonosan.

Egy alkalmasan választott  $\eta$  függvénnyel egy  $u_h$  nemfolytonos megoldás esetén az  $\eta * u_h$  kovolúció már egy folytonos függvény lesz. Az eljárásunk lényege, hogy ha van egy  $a(.,.)$  bilineáris formánk, és egy  $F$  lineáris funkcionálunk, akkor közelítő megoldásnak azt az  $\eta * u_h$  függvényt fogjuk nevezni, amelyre az teljesül, hogy az

$a(\eta * u_h, \eta * v_h) = F(\eta * v_h)$  minden  $v_h \in V_{DG}$  esetén, ahol  $u_h$  is  $V_{DG}$ -beli.

## 4.1. A módszer általános bemutatása

A módszerünket ahogy eddig is, most is egy egyszerű modellfeladaton mutatjuk be. Legyen  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  korlátos tartomány, és tekintsük  $\Omega$ -n a Poisson egyenletet homogén Dirichlet peremfeltétellel

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned}$$

ahol  $f \in L^2(\Omega)$  adott függvény. A szokásos technikával írjuk fel a feladat variációs alakját. Keressük azt az  $u \in H_0^1(\Omega)$  függvényt, amelyre

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle = \int_{\Omega} f v = F(v)$$

minden  $v \in H_0^1(\Omega)$  esetén.

Készítük el a tartomány egy (háromszög)felbontását, és jelölje  $\mathcal{T}_h$  a résztartományok halmazát. Vezessük be a szokásos véges dimenziós DG teret, amelyben a megoldást fogjuk keresni.

$$V_{DG} = V^p(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in \mathcal{P}^p(\overline{K}), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

A homogén Dirichlet peremfeltétel jelenléte miatt vezessük be a következő halmazt.

$$\Omega_{0,h} = \text{int} \left\{ \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \overline{K} : \overline{K} \cap \overline{\Omega} = \emptyset \right\}$$

Erre azért lesz szükségünk, hogy a módszerünk konform maradjon. Jelölje ekkor ezen a szűkebb "új alaptartományon" a DG terünket

$$V_{DG,0} = \{v \in V_{DG} : v|_{\Omega \setminus \Omega_{0,h}} = 0\}.$$

Fontos még feltennünk azt, hogy a  $\mathcal{T}_h$  felbontásra teljesül, hogy  $d(\partial\Omega, \Omega_{0,h}) > h^2$ , ahol  $h$  jelölje a felosztásbeli háromszögek közül a legkisebb méretűt, azaz

$$h = \min_{K \in \mathcal{T}_h} (\text{diam} K).$$

Legyen  $\eta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  simító alapfüggvény, mely

- szimmetrikus,

- kompakt tartójú, és  $\text{supp}(\eta) = B(0, 1)$ ,
- $\int \eta = 1$ .

A konvolúcióhoz ennek az  $\eta$ -nak egy transzformáltját fogjuk használni. Legyen

$$\eta_h(x) = h^{-2d} \eta\left(\frac{x}{h}\right)$$

a simító függvényünk, és vezessük be a következő véges dimenziós teret

$$V_{DG,0,\eta} = \{\eta_h * v : v \in V_{DG,0}\}.$$

A  $d(\partial\Omega, \Omega_{0,h}) > h^2$  feltételből következik, hogy

$$V_{DG,0,\eta} \subset H_0^1(\Omega),$$

de hogy ez a tartalmazás teljesüljön, igazából elég csak azt feltenni, hogy

$$\text{diam}(\text{supp}(\eta_h)) \leq \min\{h^2, d(\partial\Omega, \Omega_{0,h})\}.$$

Ekkor, keressük azt az  $u_{h,\eta} \in V_{DG,0,\eta}$  függvényt, amelyre

$$a(u_{h,\eta}, v_{h,\eta}) = F(v_{h,\eta})$$

minden  $v_{h,\eta} \in V_{DG,0,\eta}$  esetén.

**4.1.1. Állítás.** *Az  $u_{h,\eta}$  közelítő megoldás kvázioptimális, vagyis létezik  $C > 0$ , hogy*

$$\|u_{h,\eta} - u\|_{1,\Omega} \leq C \inf_{v_h \in V_{DG,0}} \|\eta * v_h - u\|_{1,\Omega}.$$

*Bizonyítás:* Tudjuk, hogy  $a(u, v) = F(v)$  minden  $v \in H_0^1(\Omega)$  esetén, így speciálisan  $v_{h,\eta} \in H_0^1(\Omega)$  esetén is. Másrészt  $a(u_{h,\eta}, v_{h,\eta}) = F(v_{h,\eta})$ . A két egyenletet kivonva egymásból kapjuk a Galjorkin ortogonalitást, vagyis  $a(u_{h,\eta} - u, v_{h,\eta}) = 0$  minden  $v_{h,\eta} \in V_{DG,0,\eta}$ -ra. Ismert, hogy  $a(u, v) = \int \langle \nabla u, \nabla v \rangle$  bilineáris forma folytonos és koercív. Ekkor

$$\begin{aligned} c_k \|u_{h,\eta} - u\|_{1,\Omega}^2 &\leq a(u_{h,\eta} - u, u_{h,\eta} - u) = a(u_{h,\eta} - u, u_{h,\eta} - u) + \overbrace{a(u_{h,\eta} - u, v_{h,\eta} - u_{h,\eta})}^0 \\ &= a(u_{h,\eta} - u, v_{h,\eta} - u) \leq c_f \|u_{h,\eta} - u\|_{1,\Omega} \|v_{h,\eta} - u\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Átrendezve és egyszerűsítve az egyenlőtlenséget, majd a jobb oldalon infimumot véve kapjuk az állítást.  $\square$

## 4.2. A bilineáris forma egy konkrét esetben

Az alábbiakban a bemutatott alapötletet használva speciális  $\eta$  választásával levezetünk egy sémát egy dimenzióban. Legyen az alaptartományunk az  $\Omega = (a, b)$  intervallum. Készítsük el  $\Omega$  egy  $h$  finomságú ekvidisztáns felosztását. Jelölje az osztópontokat  $x_i = x_0 + ih$  ( $x_0 = a$ ,  $x_N = b$ ). Legyen  $p = 1$ , vagyis majd elsőfokú polinombázissal szeretnénk dolgozni. A szokásos módon legyenek

$$v_{2i-1}(x) := \begin{cases} \frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$v_{2i}(x) := \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (4.2)$$

az  $(x_{i-1}, x_i)$  intervallumhoz tartozó bázisfüggvények.

Legyen még  $\eta$  a  $[-1, 1]$  intervallum karakterisztikus függvénye, amiből

$$\eta_h = \frac{1}{2h^2} \chi_{(-h^2, h^2)}.$$

A továbbiakban a deriváltakat mindig disztribúciós értelemben fogjuk venni (melyek elméletéről részletesebben a [7] könyvben olvashatunk), illetve annak ellenére, hogy egy dimenziós függvények deriváltjai kerülnek elő az  $u'$  helyett  $\nabla u$ -t fogunk használni, hogy meg tudjuk különböztetni a teljes és a szakaszonkénti deriváltakat.

Egy  $w \in V_{DG}$  függvényre könnyen meggondolható, hogy teljesül

$$\nabla w = \nabla_h w - \sum_{i=1}^{N-1} \llbracket w(x_i) \rrbracket \delta_{x_i}.$$

Jelölje  $(\cdot, \cdot)$  az  $L^2(\Omega)$ -beli skalárszorzatot. Ekkor a variációs feladatunk bal oldalát kezdjük el alakítani. Legyen  $u, v \in V_{DG,0}$ .

$$\begin{aligned} & (\nabla(\eta_h * u), \nabla(\eta_h * v)) = (\eta_h * \nabla u, \eta_h * \nabla v) \\ & = \left( \eta_h * \left( \nabla_h u - \sum_{i=1}^{N-1} \llbracket u(x_i) \rrbracket \delta_{x_i} \right), \eta_h * \left( \nabla_h v - \sum_{i=1}^{N-1} \llbracket v(x_i) \rrbracket \delta_{x_i} \right) \right) \\ & = (\eta_h * \nabla_h u, \eta_h * \nabla_h v) - (\eta_h * \sum_{i=1}^{N-1} \llbracket u(x_i) \rrbracket \delta_{x_i}, \eta_h * \nabla_h v) \\ & \quad - (\eta_h * \nabla_h u, \eta_h * \sum_{i=1}^{N-1} \llbracket v(x_i) \rrbracket \delta_{x_i}) + (\eta_h * \sum_{i=1}^{N-1} \llbracket u(x_i) \rrbracket \delta_{x_i}, \eta_h * \sum_{i=1}^{N-1} \llbracket v(x_i) \rrbracket \delta_{x_i}) \end{aligned}$$



Mivel lineáris polinombázisunk van, így  $\nabla_h u(x)$  konstans, és belátható, hogy

$$\eta_h * \nabla_h u(x) = \begin{cases} \nabla_h u(x) & \text{ha } |x - x_i| > h^2 \quad \forall i \\ \{\{\nabla_h u(x_i)\}\} + \frac{y}{2h^2} \llbracket \nabla_h u(x_i) \rrbracket & \text{ha } x = x_i - y \text{ és } |y| \leq h^2 \end{cases}$$

ugyanis, ha  $x$  távolabb van egy osztóponttól, mint  $h^2$  akkor a konvolúció nincs rá hatással. Ugyanígy az  $(\eta_h * \nabla_h u)(\eta_h * \nabla_h v)(x)$  szorzat is konstans lesz,  $|x - x_i| > h^2$  minden  $i$  esetén. Az osztópontok  $h^2$  sugarú környezetében pedig egy másodfokú függvény (két elsőfokú szorzata).

$$(\eta_h * \nabla_h u)(\eta_h * \nabla_h v)(x) = \begin{cases} \nabla_h u(x_i^-) \nabla_h v(x_i^-) & \text{ha } x = x_i - h^2 \\ \{\{\nabla_h u(x_i)\}\} \{\{\nabla_h v(x_i)\}\} & \text{ha } x = x_i \\ \nabla_h u(x_i^+) \nabla_h v(x_i^+) & \text{ha } x = x_i + h^2 \end{cases}$$

Ebben a három pontban levő értékek egyértelműen meghatározzák a másodfokú polinomot az  $(x_i - h^2, x_i + h^2)$  intervallumon.

Tekintsük az alábbi összefüggést

$$\begin{aligned} \nabla_h u(x_i^-) \nabla_h v(x_i^-) + \nabla_h u(x_i^+) \nabla_h v(x_i^+) &= \frac{1}{2} (\nabla_h u(x_i^-) + \nabla_h u(x_i^+)) (\nabla_h v(x_i^-) + \nabla_h v(x_i^+)) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\nabla_h u(x_i^-) - \nabla_h u(x_i^+)) (\nabla_h v(x_i^-) - \nabla_h v(x_i^+)) \\ &= 2 \{\{\nabla_h u(x_i)\}\} \{\{\nabla_h v(x_i)\}\} + \frac{1}{2} \llbracket \nabla_h u(x_i) \rrbracket \llbracket \nabla_h v(x_i) \rrbracket, \end{aligned}$$

majd alkalmazzunk egy hárompontos kvadratúrát az alábbi integrál közelítésére

$$\begin{aligned} \int_{x_i-h^2}^{x_i+h^2} (\eta_h * \nabla_h u)(\eta_h * \nabla_h v) &= \frac{2h^2}{6} (\nabla_h u(x_i^-) \nabla_h v(x_i^-) + 4 \{\{\nabla_h u(x_i)\}\} \{\{\nabla_h v(x_i)\}\} \\ &\quad + \nabla_h u(x_i^+) \nabla_h v(x_i^+)) = \frac{2h^2}{6} (2 \{\{\nabla_h u(x_i)\}\} \{\{\nabla_h v(x_i)\}\} + \frac{1}{2} \llbracket \nabla_h u(x_i) \rrbracket \llbracket \nabla_h v(x_i) \rrbracket \\ &\quad + 4 \{\{\nabla_h u(x_i)\}\} \{\{\nabla_h v(x_i)\}\}) = \frac{h^2}{6} \llbracket \nabla_h u(x_i) \rrbracket \llbracket \nabla_h v(x_i) \rrbracket + 2h^2 \{\{\nabla_h u(x_i)\}\} \{\{\nabla_h v(x_i)\}\} \end{aligned}$$

és ez igaz minden  $i$ -re. Ha nem vagyunk az osztópontok  $h^2$  sugarú környezetében, akkor azokon a részekon a gradiensek szorzatintegrálja

$$\int_{x_{i-1}+h^2}^{x_i-h^2} (\eta_h * \nabla_h u)(\eta_h * \nabla_h v) = \int_{x_{i-1}+h^2}^{x_i-h^2} \nabla_h u \nabla_h v = (h - 2h^2) \nabla_h u|_{K_i} \nabla_h v|_{K_i},$$

ahol  $K_i = (x_{i-1}, x_i)$ , ugyanis ez a szorzat is konstans, és ez igaz minden  $i = 1, \dots, N$  esetén. Összegezve ezeket

$$\sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}+h^2}^{x_i-h^2} \nabla_h u \nabla_h v = (1 - 2h) (\nabla_h u, \nabla_h v)$$

formula adódik. A variációs feladat jobb oldalának átalakítása utáni összegében a második és harmadik tag kiszámításához tekintsük a következőt.

$$\eta_h * \delta_{x_i} = \eta_{h,x_i} \text{ ahol } \eta_{h,x_i}(x) = \eta_h(x - x_i)$$

Ekkor

$$\begin{aligned} (\eta_h * \sum_{i=1}^{N-1} \llbracket u(x_i) \rrbracket \delta_{x_i}, \eta_h * \nabla_h v) &= \sum_{i=1}^{N-1} \llbracket u(x_i) \rrbracket (\eta_{h,x_i}, \eta_h * \nabla_h v) \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \llbracket u(x_i) \rrbracket 2h^2 \frac{1}{2h^2} \{\{\nabla_h v(x_i)\}\} = \sum_{i=1}^{N-1} \llbracket u(x_i) \rrbracket \{\{\nabla_h v(x_i)\}\}, \end{aligned}$$

és teljesen hasonlóan

$$(\eta_h * \nabla_h u, \eta_h * \sum_{i=1}^{N-1} \llbracket v(x_i) \rrbracket \delta_{x_i}) = \sum_{i=1}^{N-1} \llbracket v(x_i) \rrbracket \{\{\nabla_h u(x_i)\}\},$$

a negyedik tag pedig

$$\begin{aligned} (\eta_h * \sum_{i=1}^{N-1} \llbracket u(x_i) \rrbracket \delta_{x_i}, \eta_h * \sum_{i=1}^{N-1} \llbracket v(x_i) \rrbracket \delta_{x_i}) &= \sum_{i=1}^{N-1} 2h^2 \frac{1}{(2h^2)^2} \llbracket u(x_i) \rrbracket \llbracket v(x_i) \rrbracket \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2h^2} \llbracket u(x_i) \rrbracket \llbracket v(x_i) \rrbracket. \end{aligned}$$

Ekkor a bilineáris formánk a következő lesz:

$$\begin{aligned} a_\eta(u, v) &= (1 - 2h)(\nabla_h u, \nabla_h v) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{h^2}{6} \llbracket \nabla_h u(x_i) \rrbracket \llbracket \nabla_h v(x_i) \rrbracket \\ &+ \sum_{i=1}^{N-1} 2h^2 \{\{\nabla_h u(x_i)\}\} \{\{\nabla_h v(x_i)\}\} - \sum_{i=1}^{N-1} \llbracket u(x_i) \rrbracket \{\{\nabla_h v(x_i)\}\} \\ &- \sum_{i=1}^{N-1} \llbracket v(x_i) \rrbracket \{\{\nabla_h u(x_i)\}\} + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2h^2} \llbracket u(x_i) \rrbracket \llbracket v(x_i) \rrbracket \end{aligned}$$

Vagyis ekkor a variációs feladat a következőképp írható fel. Keressük azt az  $u \in V_{DG,0}$  függvényt, amelyre

$$a_\eta(u, v) = F(\eta_h * v)$$

teljesül minden  $v \in V_{DG,0}$  függvényre.

Ekkor a közelítő megoldásunk  $u_h = \eta_h * u$  lesz.

A séma érdekessége, hogy nagyon hasonlít a hagyományos interior penalty sémára, csak az első tag más együtthatóval szerepel, a büntető paraméter rögzítve van, és szerepel még két plusz tag a kifejezésben, ami az IP esetén nincsen.

### 4.3. A bilineáris formához tartozó tömegmátrix

Adott tehát a bilineáris forma, készítsük el az egyenletrendszer mátrixát. A módszer konformsága miatt legyen  $V_{DG,0} = \langle v_4, v_5, \dots, v_{2N-3} \rangle$ , ahol  $v_i$  a (4.1) és (4.2) pontokban definiált függvények.

Ezen a ponton fontos megjegyezni, hogy amennyiben a  $V_{DG,0}$  helyett a  $V_{DG} = \langle v_2, v_5, \dots, v_{2N-1} \rangle$  alapteret választjuk, akkor is várhatunk valamilyen numerikus megoldást, csak ez esetben a módszerünk nem lesz konform, ugyanis a kapott megoldást az  $\eta_h$ -val lesimitva, az új folytonos megoldás már nem fogja teljesíteni a peremfeltételeket.

Számítsuk ki ezek után a tömegmátrix elemeit. Könnyen meggondolható, hogy  $a_\eta(v_i, v_j) \neq 0$  csak akkor, ha  $v_i$  és  $v_j$  tartójának metszete nem üreshalmaz. Vagyis minden  $v_i$  függvényhez (ami nem a legszélső intervallumhoz tartozik) hat olyan másik  $v_j$  függvény van, amelyekkel a bilineáris forma nem nulla értéket ad. Vagyis a tömegmátrix nem nulla elemeinek a száma csak  $O(6N)$ .

A bilineáris forma pontos kiszámításához szükséges mennyiséket az alábbi táblázat tartalmazza.

	$[\cdot]_{i-1}$	$[\cdot]_i$	$[\cdot]_{i+1}$	$\{\{\cdot\}\}_{i-1}$	$\{\{\cdot\}\}_i$	$\{\{\cdot\}\}_{i+1}$
$v_{2i-1}$	-1	0	0	1/2	0	0
$v_{2i}$	0	1	0	0	1/2	0
$v_{2i+1}$	0	-1	0	0	1/2	0
$v_{2i+2}$	0	0	1	0	0	1/2
	$[\nabla]_{i-1}$	$[\nabla]_i$	$[\nabla]_{i+1}$	$\{\{\nabla\}\}_{i-1}$	$\{\{\nabla\}\}_i$	$\{\{\nabla\}\}_{i+1}$
$v_{2i-1}$	1/h	-1/h	0	-1/2h	-1/2h	0
$v_{2i}$	-1/h	1/h	0	1/2h	1/2h	0
$v_{2i+1}$	0	1/h	-1/h	0	-1/2h	-1/2h
$v_{2i+2}$	0	-1/h	1/h	0	1/2h	1/2h

Ezek alapján a tömegmátrix elemei a következők. Azonos tartójú függvények esetén

$$a_\eta(v_{2j-1}, v_{2j}) = (1-2h) \cdot \left(-\frac{1}{h} + \frac{h^2}{6}\right) \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{h^2}\right) + 2h^2 \cdot \left(-\frac{2}{4h^2}\right) + \frac{1}{2h} + \frac{1}{2h} = -\frac{1}{h} + \frac{2}{3}.$$

A diagonális elemek

$$a_\eta(v_{2j}, v_{2j}) = a_\eta(v_{2j-1}, v_{2j-1}) = (1-2h) \cdot \frac{1}{h} + \frac{h^2}{6} \cdot \frac{2}{h^2} + 2h^2 \cdot \frac{2}{4h^2} - \frac{1}{2h} - \frac{1}{2h} + \frac{1}{2h^2} = \frac{1}{2h^2} - \frac{2}{3}$$

és a szomszédos résztartományokon levőkhöz tartozó elemek

$$a_\eta(v_{2j}, v_{2j+1}) = \frac{h^2}{6} \cdot \frac{1}{h^2} + 2h^2 \cdot \left(-\frac{1}{4h^2}\right) + \frac{1}{2h} + \frac{1}{2h} + \frac{1}{2h^2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2h^2} + \frac{1}{h} - \frac{1}{3},$$

$$a_\eta(v_{2j-1}, v_{2j+2}) = \frac{h^2}{6} \cdot \frac{1}{h^2} + 2h^2 \cdot \left(-\frac{1}{4h^2}\right) = -\frac{1}{3},$$

$$a_\eta(v_{2j}, v_{2j+2}) = \frac{h^2}{6} \cdot \left(-\frac{1}{h^2}\right) + 2h^2 \cdot \frac{1}{4h^2} - \frac{1}{2h} = -\frac{1}{2h} + \frac{1}{3}$$

és

$$a_\eta(v_{2j-1}, v_{2j+1}) = \frac{h^2}{6} \cdot \left(-\frac{1}{h^2}\right) + 2h^2 \cdot \frac{1}{4h^2} - \frac{1}{2h} = -\frac{1}{2h} + \frac{1}{3}.$$

## 4.4. DG típusú módszerek vizsgálata egy tesztfeladaton

Érdeemes a sémánkat valamilyen konkrét próbafeladaton letesztelni. Legyen a modellfeladatunk az az elliptikus egyenlet az  $\Omega = (0, 1)$  intervallumon, amelynek klasszikus megoldása

$$u(x) = \sin(\pi x).$$

Ekkor a megoldandó feladat a

$$\begin{cases} -u'' = \pi \sin(\pi x) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Összességében négy különböző séma hibáját fogjuk összehasonlítani. Elsőként a saját sémánk nem konform (NK) változatát fogjuk megnézni, ugyanis azt várjuk, hogy a konform esetet képest jobb közelítést fogunk kapni, mivel a tartomány szélein a konform változat biztosan generál némi hibát, ugyanis a széleken egyszerűen nem közelítjük a megoldást. Másodiknak természetesen érdemes megvizsgálni a módszerünket a konform (K) esetben is. Harmadikként egy olyan nem konform sémát fogunk megvizsgálni, amelyet úgy kapunk, hogy az eredeti sémánkból elhagyjuk (E) azt a bizonyos két tagot, amelyben a módszerünk alapvetően különbözik a klasszikus interior penalty sémától. Negyediknek célszerű még a hagyományos interior penalty (IP) sémával is összevetni eredményeinket, ahol a büntető paraméterek  $\sigma_i \equiv 10$ .

A hibák vizsgálatát azonban itt a "lesimítatlan" numerikus megoldások esetén vizsgáljuk meg, mely azért érdekes, mert így tényleg nemfolytonos megoldásaink vannak, és még relevánsabb összehasonlítást végezhetünk. Egyébként, amennyiben olyan függvényeket próbálunk közelíteni, amelyek viszonylag simák, akkor az adódó, még nem folytonos megoldások ugrásai nagyon kicsik lesznek, vagyis a nemfolytonos és a lesimított megoldás is közel lesznek.

Az egyes módszerek hibáinak  $H^1(\Omega)$  normái az alábbi 4.1. táblázat mutatja, ahol ez a norma igazából  $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$  norma, vagyis intervallumonkénti  $H^1$  normák összege. Az  $n$  jelöli, hogy hány részre osztottuk a  $(0,1)$  intervallumot. Szépen látható,

$H^1(\Omega)$ norma	NK	K	E	IP
$n = 4$	0.5272	2.1538	2.5694	0.5117
$n = 8$	0.2583	1.5912	0.9127	0.2528
$n = 16$	0.1278	1.1266	0.3758	0.1260
$n = 32$	0.0635	0.7925	0.1721	0.0630
$n = 64$	0.0316	0.5581	0.0826	0.0315
$n = 128$	0.0158	0.3937	0.0405	0.0157
$n = 256$	0.0079	0.2780	0.0200	0.0079
$n = 512$	0.0039	0.1965	0.0099	0.0039
$n = 1024$	0.0019	0.1388	0.0049	0.0020

4.1. táblázat. Az egyes numerikus megoldások hibáinak  $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$  normái különböző felosztások esetén.

ami egy ismert eredmény is, hogy az IP elsőrendű, de érdekesség, hogy emellett a mi saját nem konform módszerünk is szinte teljesen ugyanakkora hibákat ad, és szintén elsőrendű. A módszerünk konform változata teljesít a leggyengébben, ami nem meglepő, de szintén érdekesség, hogy a saját sémánkból elhagyott tagokkal kapott séma a kezdetben viszonylag nagy hibák ellenére szintén hasonlóan jó mint a nem konform és az IP módszer, és szintén elsőrendű. Érdekes még megjegyezni, hogy kis  $n$  esetén az IP módszer hibája kisebb, mint a mi nem konform módszerünké, de nagy  $n$ -re már a mi módszerünk jobbnak bizonyul.

Vizsgáljuk meg a módszerek hibáit egy másik szokásos normában, az  $L^2(\Omega)$  normában, melyek a 4.2. táblázatban láthatóak. A módszerek egymáshoz képest majdnem ugyanolyanok ebben a normában is. A leggyengébb a mi módszerünk konform változata, a legjobb pedig az IP és a mi nem konform verziónk. Itt is jól láthatóak a konvergencia rendek, a nem konform és az IP másodrendű, míg a másik két módszer elsőrendű. Érdekes lehet, hogy a hibák  $H^1(\Omega)$  normái esetén a mi nem konform sémánk egyszerűsítéséből kapott módszer inkább egyenrangú volt az IP-vel és a sima nem konform módszerrel, hiszen mindhárom módszer elsőrendű volt, ebben az esetben ez a séma inkább úgy viselkedik, mint a konform módszerünk, és csak elsőrendű, szemben az IP-vel és a nem konform módszerrel.

Esetlegesen érdekes lehet még a hibák maximum normája, ha csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy mennyi a legnagyobb eltérés a valódi és a numerikus megoldások között. Ezen eredményeket a 4.3. táblázat tartalmazza.

$L^2(\Omega)$ norma	NK	K	E	IP
$n = 4$	0.0209	0.5907	0.5374	0.0175
$n = 8$	0.0061	0.3496	0.2078	0.0041
$n = 16$	0.0019	0.1868	0.0941	0.0010
$n = 32$	0.000541	0.096005	0.045425	0.000254
$n = 64$	0.000144	0.048573	0.022381	0.000063
$n = 128$	0.000037	0.024419	0.011117	0.000015
$n = 256$	0.000009	0.012241	0.005541	0.000004
$n = 512$	0.0000024	0.0061283	0.0027663	0.0000009
$n = 1024$	0.0000006	0.0030661	0.0013821	0.0000002

4.2. táblázat. Az egyes numerikus megoldások hibáinak  $L^2(\Omega)$  normái különböző felosztások esetén.

Max. norma	NK	K	E	IP
$n = 4$	0.0642	0.7449	0.9128	0.0527
$n = 8$	0.0158	0.3903	0.3176	0.0129
$n = 16$	0.0042	0.1982	0.1380	0.0032
$n = 32$	0.001116	0.098978	0.065262	0.000808
$n = 64$	0.000286	0.049332	0.031896	0.000201
$n = 128$	0.000072	0.024611	0.015781	0.000050
$n = 256$	0.000018	0.012289	0.007851	0.000012
$n = 512$	0.0000045	0.0061404	0.0039158	0.0000031
$n = 1024$	0.0000011	0.0030691	0.0019555	0.0000007

4.3. táblázat. Az egyes numerikus megoldások abszolút maximális eltérései a valódi megoldástól különböző felosztások esetén.

A hibák itt teljesen hasonlóan viselkednek, mint az  $L^2(\Omega)$  norma esetén. Az IP és a nem konform másodrendű, míg a másik két módszer elsőrendű.

Itt fontos megjegyeznünk, hogy a hibák számítása az  $L^2$  és  $H^1$  normák esetén intervallumonként hárompontos Gauss kvadraturával történt, melynek hibája intervallumonként  $h^7$  nagyságrendű, így a teljes  $\Omega$ -n a numerikus integrálás hibája  $h^6$  nagyságrendű.

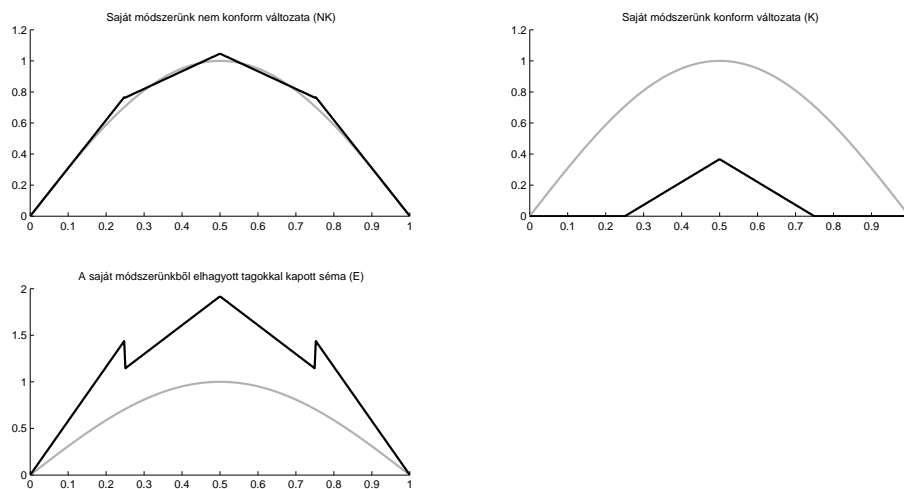
Az alábbi összefoglaló 4.4. táblázat mutatja a becsült konvergencia rendeket.

Összességében azt mondhatjuk, hogy a nem konform sémánk ugyanolyan jó, mint az IP módszer, azzal a lényeges különbséggel, hogy a mi sémánkból kapott numerikus megoldás már folytonos.

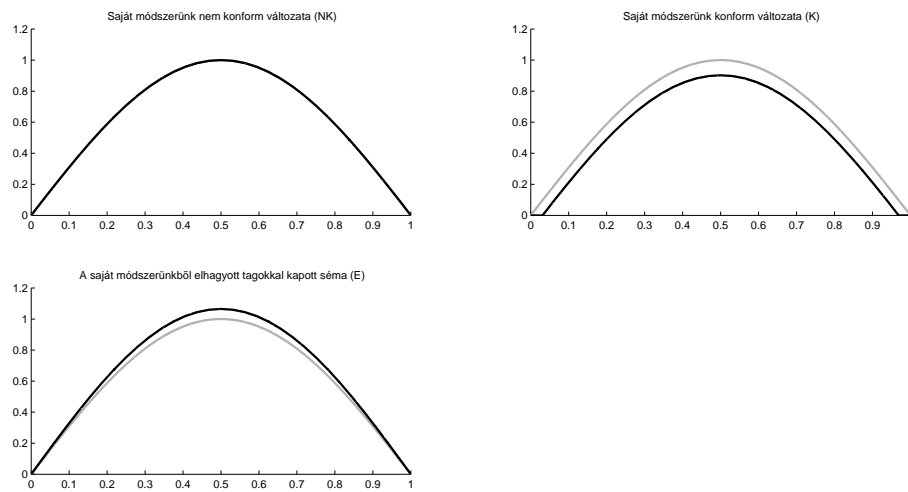
	Max	$L^2(\Omega)$	$H^1(\Omega)$
NK	2	2	1
K	1	1	1/2
E	1	1	1
IP	2	2	1

4.4. táblázat. Az egyes módszerek hibáiból megbecsült konvergencia rendek különböző normák esetén.

Összehasonlításképpen tekintsük az alábbi 4.1. és 4.2. ábrákat. A szürke vonal minden esetben a valódi, míg a fekete a numerikus megoldást jelöli. Mindkét ábrán jól látható, amit már a számszerű eredményekből is megtudtunk, hogy a saját módszerünk nem konform változata sokkal jobban közelít, mint akár a konform, akár az egyszerűsített séma. Viszont az is látható, hogy nagy  $n$ -ekre az egyszerűsített jobb, mint a konform módszer, ami a fenti adatokból csak a  $H^1(\Omega)$  norma esetén látszódott. De az mindenképpen egy szép eredmény, hogy a numerikus tapasztalatok alapján mindegyik módszer konvergens.



4.1. ábra. Numerikus megoldások grafikus összevetése a pontos megoldással különböző közelítő módszerek esetén,  $h = 1/4$  felbontás mellett.



4.2. ábra. Numerikus megoldások grafikus összevetése a pontos megoldással különböző közelítő módszerek esetén,  $h = 1/32$  felbontás mellett.



## 5. fejezet

### Zárszó

#### 5.1. Összegzés

A dolgozatban áttekintettük a nemfolytonos végeselem módszerek néhány ismert formuláját. Láthattuk, hogy ugyan vannak párhuzamok, de az egy és a magasabb dimenziós módszereket picit másképp kell kezelni. Ráadásul a többdimenziós esetben két alapvetően különböző stratégiát is bemutatunk, amellyel újabb numerikus módszerek készíthetők.

Emellett bemutatunk egy vadonatúj, harmadik típusú nézőpontot is, majd ezt felhasználva készítettünk egy módszert, melyet tesztelve azt láttuk, hogy hasonlóan jó módszer, mint ismert társai, azzal a különbséggel, hogy ez igazából nem egy DG módszer, ugyanis a kapott megoldásunk folytonos, de mindenképpen egy DG típusúnak nevezhető.

#### 5.2. További lehetőségek

A bemutatott új szemlélet lehetőségei nagyon biztatóak. Első lépésként a bemutatott séma analízisének elvégzése, és a konvergencia rendek bizonyítása lehet egy cél. Emellett nagyon szélesek a lehetőségek. A dolgozatban csak lineáris bázisfüggvények esetén hoztuk ki egy sémát, de ez megtehető magasabb fokú bázisfüggvények esetén is. Egy másik lehetőség, hogy a kapott sémánkat próbáljuk ki más bázisok esetén. Érdekes lehet még, hogy ha más jellegű, például valamilyen folytonos, kompakt tartójú  $\eta$  simítófüggvényt használunk, akkor milyen eredményekre jutunk. Illetve fő cél lehet még a továbbiakban az alapötlet magasabb dimenzióban való alkalmazása.

# Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Izsák Ferencnek, hogy felhívta a figyelmem erre az érdekes témakörre, emellett rengeteg segítséget nyújtott, mindig szakított rám időt, sok jó, praktikus és nagyszerű ötlettel és tanáccsal látott el.

Végezetül köszönöm elsősorban a családomnak, az ELTE TTK és IK oktatóinak, és mindenkinek, aki hozzájárult tanulmányaim sikerességéhez.

# Irodalomjegyzék

- [1] Douglas N. Arnold - Franco Brezzi - Bernardo Cockburn - L. Donatella Marini: Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.* **39(5)** 1749 - 1779, (2002)
- [2] Susanne C. Brenner - L. Ridgway Scott: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, New York, 2002
- [3] Bernardo Cockburn - Mitchell Luskin - Chi-Wang Shu - Endre Süli: Enhanced accuracy by post-processing for finite element methods for hyperbolic equations, *Mathematics of Computation* **72(242)** 577 - 606, (2002)
- [4] Csörgő Gábor: Különböző végelem módszerek összehasonlítása, *BSc Szakdolgozat*, (2009)
- [5] Csörgő Gábor - Izsák Ferenc: Energy norm error estimates for DG methods: a conforming framework, *készülőben*, (2011)
- [6] Alexandre Ern - Jean-Luc Guermond: *Theory and Practice of Finite Elements*, Springer, New York, 2004
- [7] Simon László - Baderko E. A.: *Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983
- [8] Pavel Šolín: *Partial Differential Equations and the Finite Element Method*, Wiley-Interscience, New Jersey, 2006
- [9] Stoyan Gisbert - Takó Galina: *Numerikus Módszerek 1-3.*, Typotex Kiadó, Budapest, 1993, 1995, 1997
- [10] Szókefalvi-Nagy Béla: *Valós függvények és függvénysorok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977