Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Retek Dávid

Módszerek a metsző halmazrendszerek maximális méretének meghatározására

MSc szakdolgozat

Témavezető: Katona O. H. Gyula

egyetemi tanár

Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2012

Tartalomjegyzék

1. Bevezető

A metsző halmazrendszerek tulajdonságait a ’60-as években kezdték vizsgálni, és mai napig nem veszítették el aktualitásukat. Mivel ezek a halmazrendszerek több módosítással bírnak az eredeti halmazrendszerekhez képest, széles területen nyílt lehetőség az alkalmazásukra.

Különböző megkötések esetén különböző korlátok teljesülnek az elérhető legnagyobb halmazrendszer méretére, ezek a korlátok tematika szerint jól csoportosíthatók.

Szakdolgozatom első részében három széles körben alkalmazható módszert mutatok be: a shiftelést, a kör-módszert és a csillag-módszert. Az ebben a részben bemutatott egyes tételek közismertek, azonban a szakdolgozat későbbi részében tárgyalt problémákban való érintettségük miatt szükséges az áttekintésük.

A második részben egy új általánosítási irányt vizsgálok meg, ahol az eddigiektől eltérően nem extra szabályokat vezetek be, hanem maga a metsző tulajdonság kerül általánosításra. Itt ismertetem az új típusú halmazrendszerrel végzett vizsgálatom eredményeit: kezdve az előállításának különböző módjaitól az alsó és felső méretkorlátok ismertetéséig.

2. Elméleti háttér

A metsző halmazrendszerek vizsgálatát kezdjük a legelemibb problémával. Adott az n elemű alaphalmaz összes részhalmaza. A kérdés, hogy hány olyan részhalmazt tudunk kiválasztani, hogy bármely kettőnek legyen közös eleme. A válasz közismert: a halmazok felét.

Jelölés $[n]$-nel jelöljük az n elemű alaphalmazt. Ennek elemei legyenek a természetes számok 0-tól (n-1)-ig.

Jelölés $2^{[n]}$-nel jelöljük az $[n]$ alaphalmaz összes lehetséges részhalmazának halmazát.

1. Definíció. *$\mathcal{S} \subset 2^{[n]}$ halmazrendszer metsző, ha bármely $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ halmazra $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.*

Ezen jelöléseket használva, a fenti példa átírható az alábbi alakba:

$$\max\{|\mathcal{S}| : \mathcal{S} \subset 2^{[n]} \text{metsző}\} = 2^{n-1} \tag{1}$$

Bár a fenti állítás nyilvánvaló, a később bemutatott konstrukciók miatt mégis tekintsük meg a bizonyítását.

Bizonyítás: Egyrészt a maximum nem lehet nagyobb mint 2^{n-1} hiszen egy részhalmaz és komplementere közül csak egyiket választhatjuk be.
Másrészt ez az érték el is érhető. Jelöljük ki az alaphalmaz egy elemét, és vegyünk be $\mathcal{S}$-be minden olyan részhalmazt, ami tartalmazza a kijelölt elemet. Ilyen halmazból 2^{n-1} db van, továbbá az így választott $\mathcal{S}$ nyílván metsző halmazrendszer lesz.

2. Definíció. *Az alaphalmaz egy a elemét a halmazrendszer* ***generáló elem****ének nevezzük, ha a halmazrendszer tartalmaz minden olyan halmazt, amely tartalmazza a-t.*

3. Definíció. *Az alaphalmaz egy A részhalmazát a halmazrendszer* ***generáló halmaz****ának nevezzük, ha a halmazrendszer tartalmaz minden olyan halmazt, amely tartalmazza A-t.*

A maximális halmazrendszer generáló elem használata nélkül is elérhető. Ha n páratlan, válaszuk ki az összes legalább $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ méretű halmazt. Ezek méretükből adódóan metsző halmazrendszert alkotnak és számuk 2^{n-1}. Ha n páros, válaszuk ki az összes legalább $\frac{n}{2} + 1$ méretű halmazt és az $\frac{n}{2}$ méretűek felét figyelve, hogy ezek metszők legyenek, például minden 0-ás elemet tartalmazó halmazt válasszunk. Ekkor szintén maximális metsző halmazrendszert kapunk.

2.1. Shifting módszer

Vizsgálatainkat folytassuk az alapvető eredmények számító Erdős-Ko-Rado[1] 1961-es tételével. Ezúttal is maximális metsző halmazrendszert keresünk $[n]$ alaphalmazon, azonban ezúttal előre fixáljuk a felhasználható halmaz méretét. Ez legyen k. A probléma triviális, ha $k > \frac{n}{2}$, ekkor minden ilyen méretű halmazt beválaszthatunk. Így elegendő csupán a $k \leq \frac{n}{2}$ eseteket vizsgálni.

4. Definíció. $\binom{[n]}{k}$ *-val jelöljük az $[n]$ alaphalmaz azon részhalmazait, amelyek mérete pontosan k. Ezt a halmazrendszer k -adik* ***szint****jének hívjuk.*

2.1. Tétel (Erdős-Ko-Rado). *Ha $k \leq \frac{n}{2}$ és $\mathcal{S} \subseteq \binom{[n]}{k}$ metsző halmazrendszer, akkor*

$$|\mathcal{S}| \leq \binom{n-1}{k-1}. \tag{2}$$

A bizonyítás előtt, vegyük észre, hogy a becslés éles. Jelöljük ki az alaphalmaz egy elemét generáló elemnek. Ezen generáló elemet tartalmazó k elemű halmazok száma pont $\binom{n-1}{k-1}$ és nyilvánvalóan metsző halmazrendszert kaptunk.

Bizonyítás: Az $\mathcal{S}$ méretét jelöljük m-mel, elemeit pedig $\mathcal{S} = \{S_1, ...S_m\}$-mel. A bizonyítás n szerinti indukcióval történik. Ha $n = 2$, akkor $k = 1$ lehet csak. Ekkor $m = 1 \leq \binom{n-1}{k-1}$.

Legyen $n \geq 3$. Először vizsgáljuk meg a tétel egy speciális esetét, ha $k = \frac{n}{2}$. Ekkor S_i és komplementere $[n] - S_i$ is k elemű, viszont a kettő közül csak az egyik szerepelhet $\mathcal{S}$-ben. Tehát,

$$|\mathcal{S}| \leq \frac{1}{2}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Föltehető, hogy $k < \frac{n}{2}$. Rögzített n, m, k paraméterekre a feltételeket teljesítő $\mathcal{S}$ halmazrendszerek közül vegyük azt, melyre az elemek együttes mérete $f(\mathcal{S}) = \sum |S_i|$ minimális.

Tegyük fel, hogy ha $(n-1) \in S \in \mathcal{S}$ és $\lambda \in ([n]-S)$, akkor $S - \{n-1\} + \{\lambda\} \in \mathcal{S}$.

Valamint azt is feltehetjük, hogy $\mathcal{S}$ elemei az $n-1$-es elem tartalmazására nézve rendezettek, azaz $\exists \quad m_0 < m$ hogy $n - 1 \in S_i$ ha $i < m_0$ és $n - 1 \notin S_i$ ha $m > i \geq m_0$. Ekkor $Z_i := S_i - \{n-1\} \quad i = 1, \ldots m_0$.
Továbbá legyen $\mu < \nu < m_0$. Ekkor $|S_\mu + S_\nu| < 2k < n$, ezért $\exists \lambda \in [n] - S_\mu - S_\nu$. Tehát érvényes rá a kezdeti feltevésünk, azaz $Z_\mu + \{\lambda\} \in \mathcal{S}$. Ez azt jelenti, hogy $Z_\mu + \{\lambda\} \cap S_\nu \neq \emptyset$. Viszont $n - 1 \notin Z_\mu$, így a közös elem nem lehet az $n - 1$-es. Tehát

$$(Z_\mu + \{\lambda\}) \cap (S_\nu - \{n-1\}) = (Z_\mu + \{\lambda\}) \cap Z_\nu \neq \emptyset.$$

Továbbá $\lambda \notin Z_\mu \subset S_\mu$, így λ sem lehet a közös elem, azaz

$$(Z_\mu + \{\lambda\}) \cap Z_\nu = Z_\mu \cap Z_\nu \neq \emptyset.$$

Mivel ez tetszőleges $\mu < \nu < m_0$ párra igaz és $k-1 \geq 1$, beláttuk, hogy $\{Z_1, \ldots, Z_{m_0}\}$ uniform metsző halmazrendszert alkot, az $[n-1]$ alaphalmazon $k-1$-es halmazmérettel. Alkalmazva az indukciós feltevést kapjuk, hogy $n_0 \leq \binom{n-2}{k-1}$. Kihasználva, hogy $\mathcal{S} - \{S_1, \ldots, S_{n_0}\}$ továbbra is metsző halmazrendszer, amely nem tartalmazza az $n-1$-es elemet adódik, hogy $n - n_0 \leq \binom{n-2}{k-1}$. A két részt összeadva igazoltuk az állítást.

Most már csak azt kell belátni, hogy a kezdeti feltevés $S - \{n-1\} + \{\lambda\} \in \mathcal{S}$ jogos. Indirekt tegyük fel, hogy néhány elemre nem teljesül. Feltehető, hogy az elemek az alábbi, rendezett sorrendben vannak. $1 \leq m_0 \leq m_1 \leq m_2 \leq m$ esetén,

$$\begin{cases} (n-1) \in S_i, \lambda \notin S_i, B_i = S_i - \{n-1\} + \{\lambda\} \notin \mathcal{S}, & \text{ha } \ i < m_0 \,; \\ (n-1) \in S_i, \lambda \notin S_i, S_i - \{n-1\} + \{\lambda\} \in \mathcal{S}, & \text{ha } \ m_0 \leq i < m_1 \,; \\ (n-1) \in S_i, \lambda \in S_i, & \text{ha } \ m_1 \leq i < m_2 \,; \\ (n-1) \notin S_i, & \text{ha } \ m_2 \leq i < m \,; \end{cases} \tag{3}$$

Definiáljunk további B_i halmazokat: $B_i = S_i$, ha $m_0 \leq i < m$. Vegyük észre, hogy $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$ szintén maximális méretű k uniform metsző halmazrendszer $[n]$ alaphalmazon, mivel a fenti esetszétválasztást használva könnyen látható, hogy tetszőleges $i \neq j$ párra $B_i \neq B_j$ és $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ $0 \leq i, j \leq m$.

Ekkor azonban, ha összehasonlítjuk a két halmazrendszert, akkor

$$f(\mathcal{B}) - f(\mathcal{S}) = m_0(\lambda - (n-1)) < 0,$$

ami ellentmond $\mathcal{S}$ f szerinti minimalitásának. Tehát jogos volt a feltevés és így beláttuk a tételt.□

Az előbbi bizonyításban látott speciális tulajdonságú metsző halmazrendszert nevezzük shifted rendszernek.

5. Definíció. *$S \in \mathcal{S} \subseteq \binom{[n]}{k}$ halmazrendszer esetén, ha $x, y \in [n]$ és $x > y$*

$$\tau_{x,y}(S) := \begin{cases} S - x + y, & \text{ha } \ x \in S, y \notin S, S - x + y \notin \mathcal{S}\,; \\ S, & \text{különben.} \end{cases} \tag{4}$$

$$\tau_{x,y}(\mathcal{S}) := \{\tau_{x,y}(S) : S \in \mathcal{S}\}$$

Az előbbi definíciót használva:

6. Definíció. *$[n]$ alaphalmazon vett $\mathcal{S}$ halmazrendszer shifted, ha $\tau_{x,y}(\mathcal{S}) = \mathcal{S} \quad \forall x, y \in [n]$.*

2.1. Következmény. *Ha $\mathcal{S}$ metsző halmazrendszer volt, akkor $\tau_{x,y}$ azonos méterű metsző halmazrendszer lesz.*

Ennek használata az alapja a shifting módszernek. A shiftelés számos esetben jól használható módszer. Erejét jól mutatja Hilton-Milner tétele is.

2.1. Lemma (Frankl). *Legyen $[n]$ alaphalmazon $\mathcal{S}$ shifted halmazrendszer. Ekkor*

$$S_1 \cap S_2 \cap [2k] \neq \emptyset \quad \forall S_1, S_2 \in \mathcal{S}$$

Bizonyítás: A lemmában szereplő állításnál kicsivel erősebb tulajdonságot fogunk bizonyítani. Legyen $T = \{0, 1, \dots, 2k-2\}$, ekkor $[2k]$ helyett már T-re is teljesül az állítás. Indirekt tegyük fel, hogy S_1, S_2 halmazpár, melyre $S_1 \cap S_2 = R$ minimális méretű, sértő, azaz $|R \cap T| = 0$. Mivel $\mathcal{S}$ metsző $|R| = r \geq 1$. Ebből adódóan $R - T \neq \emptyset$. Legyen $x \in R - T$.
Továbbá $|S_1 \cap T| \leq k-1$, illetve $|S_2 \cap T| \leq k-1$, így

$$|(S_1 \cap T) \cup (S_2 \cap T)| \leq 2(k-1) < |T| \quad \Rightarrow \quad \exists \quad y \in T - S_1 - S_2.$$

$\mathcal{S}$ shifted tulajdonságát fölhasználva adódik, hogy $\tau_{x,y}(S_1) = S - x + y \in \mathcal{S}$. Ekkor $y \notin \tau_{x,y}(S_1) \cap S_2$ y választása miatt. Így $\tau_{x,y}(S_1), S_2$ szintén sértő halmazpár. Viszont mivel $x \notin \tau_{x,y}(S_1) \cap S_2$, igy $|\tau_{x,y}(S_1) \cap S_2| < r$, ami ellentmond a minimalitási feltételnek.□

2.2. Tétel (Hilton-Milner). *$\mathcal{S} \subset \binom{[n]}{k}$ metsző halmazrendszer, $2 \leq k \leq \frac{n}{2}$ és ne legyen $\mathcal{S}$-ben közös elem, azaz $\bigcap_{S \in \mathcal{S}} S = \emptyset$, akkor*

$$\max |\mathcal{S}| = \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1} + 1 \qquad (5)$$

Bizonyítás: Elsőként nézzünk egy konstrukciót, hogy ilyen méretű halmazrendszer előállítható. Vegyünk egy fix $i \in [n]$ elemet és egy $K \subset [n]$ részhalmazt, hogy $|K| = k$ és $i \notin K$. Ekkor $\mathcal{S}$-ben legyen K, továbbá minden olyan S halmaz, amely tartalmazza x-et és amire $K \cap S \neq \emptyset$. Ekkor $\mathcal{S}$ metsző halmazrendszer lesz, és K beválasztása miatt $\bigcap_{S \in \mathcal{S}} S = \emptyset$ feltétel is teljesül. Továbbá egyszerű leszámlálással adódik, hogy mérete pont a tételben leírt érték.
Így a tétel belátásához elegendő

$$\max |\mathcal{S}| \leq \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1} + 1 \tag{6}$$

egyenlőtlenséget igazolni.
$k = 2$ esetén könnyen meggondolható, hogy három halmaznál többet nem lehet bevenni. Ezzel $k = 2$ esetre igazoltuk is az állítást.
Legyen $k > 2$. Indukcióval tegyük fel, hogy kisebb k-ra teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy $\mathcal{S}$ egy maximális ilyen halmazrendszer, $[n]$ alaphalmazon. Alkalmazzuk $\tau_{x,y}$ transzformációt $\mathcal{S}$-en, amíg lehetséges, tehát amíg nem keletkezik közös elem. Ekkor két lehetőség van:
1. eset:
$\tau_{x,y}$ ismételt alkalmazása ellenére nem keletkezik közös elem. Ekkor néhány lépés után eljutunk egy shifted $\mathcal{H} \subseteq \binom{[n]}{k}$ rendszerig, melyre $|\mathcal{H}| = |\mathcal{S}|$ és nincs benne közös elem.
2. eset:
$\tau_{x,y}$ ismételt alkalmazása során, létrejön egy $\mathcal{G}$ közös elem nélküli rendszer, melyre $\tau_{x_1,y_1}(\mathcal{G})$ $(x_1 > y_1)$ rendszerben már lenne közös elem. Az elemek átindexelésével feltehető, hogy $x_1 = 2$ és $y_1 = 1$, továbbá az átindexelést utáni rendszert jelöljük $\mathcal{G}'$-vel. Ekkor $\forall \quad G \in \mathcal{G}' \quad G \cap \{1,2\} \neq \emptyset$. Továbbá bármilyen k elemű részhalmaza az $[n]$-nek, amely tartalmazza az $\{1,2\}$ elemeket bevehető $\mathcal{G}'$-be. A maximalitás miatt ez a következővel ekvivalens:

$$\forall \{1,2\} \subset G \in \binom{[n]}{k} \quad G \in \mathcal{G}'. \tag{7}$$

Alkalmazzuk $\tau_{x,y}$ $(3 \leq y \leq x)$ függvényt $\mathcal{G}'$-re, ameddig csak változik a halmazrendszer. Vegyük észre, hogy ez alatt nem keletkezhet közös elem, mivel

(7)-ből adódóan minden $y \geq 3$ elem legalább egy $\mathcal{G}'$-beli halmazból hiányzik. Az így kapott halmazrendszer legyen $\mathcal{H}$. Ekkor $\mathcal{H} \subset \binom{[n]}{k}$, $|\mathcal{H}| = |\mathcal{S}|$ és $\mathcal{H}$ metsző halmazrendszer közös pont nélkül. Továbbá

$$\{1,2\} \cap H \neq \emptyset \quad \forall H \in \mathcal{H} \quad \text{és} \tag{8}$$

$$\tau_{x,y}(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \quad \forall (3 \leq y \leq x). \tag{9}$$

Ekkor az 1. esetben alkalmazható a 2.1-es lemma. Viszont 2. esetben $\mathcal{H}$ nem shifted rendszer, ezrét meg kell gondolni, hogy igaz-e az állítás ebben az esetben is. Indirekt tegyük fel, hogy nem. Legyen H_1, H_2 a sértő párok közül olyan, amelyre $|H_1 \cup H_2|$ minimális. A (8) összefüggés értelmében H_1 és H_2 is tartalmaz elemet $\{1,2\}$ halmazból. Ez választásuk miatt csak úgy lehet, hogy egy-egy különböző elemet tartalmaznak. Tehát $H_1 - \{1,2\}$ és $H_2 - \{1,2\}$ egyformán $(k-1)$ elemű halmazok. Továbbá nem diszjunktak, ezért van olyan x és y elem, hogy $x \in H_1 \cap H_2 \cap \{2k+1, \ldots, n\}$ és $y \in \{3, \ldots, 2k\} - H_1 - H_2$. Ekkor (9) miatt $H_3 = H_1 + \{x\} - \{y\} \in \mathcal{H}$, valamint $H_2 \cap H_3 \cap \{1, \ldots, 2k\} \neq \emptyset$ és $|H_1 \cup H_2| > |H_2 \cup H_3|$, ami ellentmond $|H_1 \cup H_2|$ minimalitásának. Tehát a lemma érvényes a 2. esetre is.

2.2. Lemma. *Legyen $\mathcal{A} := \{H \cap \{1, \ldots, 2k\} : H \in \mathcal{H}\}$ és $\mathcal{A}^i$ azon része, amely halmazok mérete pontosan i, $i \in \{1, \ldots, 2k\}$. Ekkor $\mathcal{A}^i$ méretére teljesük, hogy*

$$|\mathcal{A}^i| \leq \binom{2k-1}{i-1} - \binom{k-1}{i-1} \tag{10}$$

Bizonyítás: Legyen $2 \leq i \leq k-1$ és indirekt tegyük fel, hogy (10) téves, azaz $|\mathcal{A}^i| > \binom{2k-1}{i-1} - \binom{k-1}{i-1} \geq \binom{2k-1}{i-1} - \binom{2k-i-1}{i-1} + 1$. A 2.1-es lemma alapján $\mathcal{A}^i$ metsző. Így az indukciós feltevés miatt $\mathcal{A}^i$-nek van közös eleme, ez legyen $x \in \cap_{A \in \mathcal{A}} A$, úgy, hogy x nem közös elem $\mathcal{H}$-ban. Tehát létezik egy $H \in \mathcal{H}$, melyre $x \notin \mathcal{H}$.

Azon i elemű halmazok száma az $\{1, \ldots, 2k\}$ alaphalmazon, melyek tartalmazzák x-et $\binom{2k-1}{i-1}$. Viszont $\mathcal{A}^i$ nem tartalmazhatja azokat a halmazokat, amelyek diszjunktak H-tól, $\mathcal{A}$ választása miatt. Ilyen halmazok száma:

$$\binom{|\{1, \ldots, 2k\} - H| - 1}{i-1} \geq \binom{k-1}{i-1}. \tag{11}$$

Ezzel beláttuk a lemmát $2 \leq i \leq k-1$ esetben. Legyen k=1. Ekkor $|\mathcal{A}^1|$=0, mivel ha pozitív lenne, az azt jelentené, hogy $\mathcal{A}$-ban van egy egyelemű $\{x\}$ halmaz. Viszont ekkor a metsző tulajdonság miatt, minden halmaznak tartalmaznia kéne x-et, tehát x közös elem lenne.
Legyen $i = k$. Ekkor

$$|\mathcal{A}^k| \leq \binom{2k-1}{k-1} = \frac{1}{2}\binom{2k}{k}. \tag{12}$$

Ami abból az egyszerű következményből adódik, hogy A és $\{1, \ldots, 2k\} - A$ halmazok nem lehetnek benne egyszerre $\mathcal{A}^k \subset \mathcal{H}$-ban, mivel $\mathcal{H}$ metsző halmazrendszer.$\square$

A 2.2-es lemma segítségével már befejezhetjük a tétel bizonyítását. (10) és (12) használatával becsüljük meg $\mathcal{H}$ elemeinek a számát. Egy fix $A \in \mathcal{A}^i$ halmazt legfeljebb $\binom{n-2k}{k-i}$-féleképpen egészíthetünk ki. Ezek alapján $\mathcal{H}$ mérete az alábbi módon becsülhető:

$$|\mathcal{H}| \leq \sum_{i=1}^{k} |\mathcal{A}^k| \binom{n-2k}{k-i} \leq \sum_{i=1}^{k-1} \left(\binom{2k-1}{i-1} - \binom{k-1}{i-1} \right) \binom{n-2k}{k-i} + \binom{2k-1}{k-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(\binom{2k-1}{i-1} - \binom{k-1}{i-1} \right) \binom{n-2k}{k-i} + 1 =$$

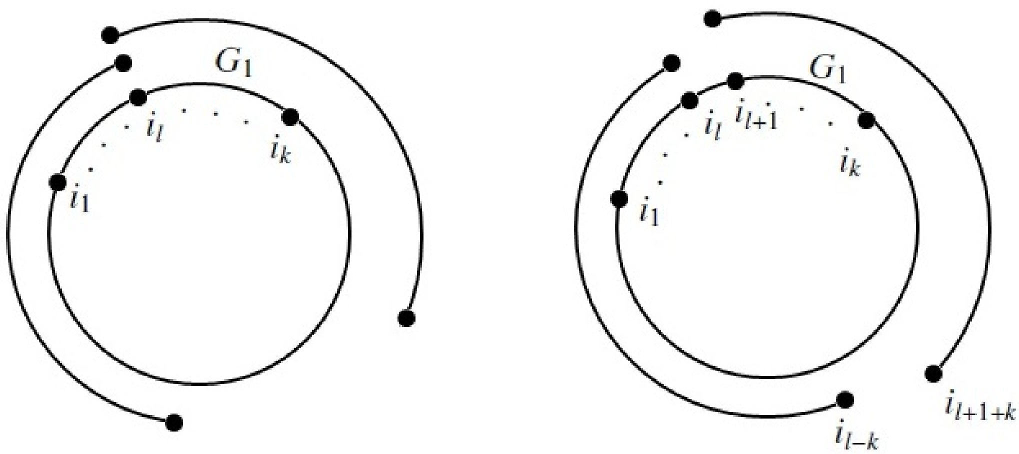
$$= \sum_{i=1}^{k} \binom{2k-1}{i-1} \binom{n-2k}{k-i} - \binom{k-1}{i-1} \binom{n-2k}{k-i} + 1 = \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1} + 1.\square$$

2.2. Kör-módszer

Erdős-Ko-Rado tételét egyszerűbben is beláthatjuk, ha a kör-módszert [2] alkalmazzuk.

2.3. Lemma (Katona). *Egy ciklikus permutációval vigyük az alaphalmaz elemeit egy körre. Legyen G_i intervallum a kör egymást követő k darab eleme, ahol $k \leq \frac{n}{2}$ és $i = 1, \ldots, m$, úgy, hogy $\{G_i : i = 1, \ldots, m\}$ metsző halmazrendszert alkosson. Ekkor ha $i \neq j$ párra $G_i \neq G_j$, akkor $m < k$.*

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy G_i-k választásából adódóan az, hogy két halmaz metszi egymást, ekvivalenst azzal, hogy az intervallum valamelyik végpontja benne van a másik intervallumban. A permutáció során keletkezett sorrend legyen $i_0, \ldots, i_{n-1}$. Tekintsük a G_1 intervallumot. Feltehetjük, hogy ennek elemei rendre $i_1, \ldots, i_k$. Ekkor a többi G_i intervallum csak olyan lehet, amelynek valamely végpontja $i_1, \ldots, i_k$. Nyilván tetszőleges i_l végpontú intervallumból kettő lehet, $i_{l-k}, \ldots, i_l$ és $i_l, \ldots, i_{l+k}$, ahol az indexek mod n értendők.



1. ábra. intervallum-fedés

Vegyük észre, hogy $i_{l-k}, \ldots, i_l$ és $i_{l+1}, \ldots, i_{l+1+k}$ intervallum párok k választása miatt nem metszik egymást. Ezen észrevételt alkalmazva $l = 1, \ldots, k$-ra kapjuk, hogy a G_1 intervallumot metsző $k-1$ ilyen pár közül, páronként legfeljebb egyet tartalmazhat a halmazrendszer. Tehát a halmazrendszer mérete legfeljebb $k - 1 + 1 = k$.$\square$

Bizonyítás(Tétel): Tekintsük a következő elempárt $(C; S)$, ahol C egy ciklikus permutáció, $S \in \mathcal{S}$ metsző intervallum C szerint. A 2.3-as lemmát használva, számoljuk meg kétféleképpen az előbbi elempárokat. Egyrészt, C-t $(n-1)!$-féleképpen rögzíthetjük. Rögzített C-re, a lemma alapján k db ilyen intervallum lehet.
Másrészt, S-t is rögzíthetjük előre, melyet $|\mathcal{S}|$-féleképpen tehetünk meg. Ekkor a rögzített S elemeit $k!$-féleképpen rakhatjuk sorba, a fent maradó elemeket pedig ettől függetlenül $(n-k)!$-féleképpen. Ezek alapján adódik, hogy

$$(n-1)!k \leq |\mathcal{S}|k!(n-k)!.$$

Az egyenlőtlenséget átrendezve megkapjuk a kívánt állítást.$\square$

A kör-módszer használatával több tételre is egyszerűbb bizonyítást lehet adni. Erre jó példa Milner [4] tétele, melyet a módszer súlyozott változatával könnyen bizonyíthatunk.

7. Definíció. *Az olyan $\mathcal{S}$ metsző halmazrendszert, melyre tetszőleges $A, B \in \mathcal{S}$ esetén $A \not\subseteq B$ metsző **Sperner-rendszer**nek nevezzük.*

2.3. Tétel (Milner). *$[n]$ alaphalmazon vett metsző Sperner-rendszer méretére teljesük, hogy*

$$|\mathcal{S}| \leq \binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}. \tag{13}$$

A tétel bizonyításához először nézzük meg a kör-módszer súlyozott változatát. Legyen $\mathfrak{C}$ egy az alaphalmazon értelmezett ciklikus permutáció.

2.4. Lemma (Katona). *Legyen $\mathcal{B} = \{B_1, \dots B_r\}$ halmazok melyek metsző Sperner-rendszert alkotnak és $\mathfrak{C}$ szerint intervallumok. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{r} \binom{n}{|B_i|} \leq n \binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}. \tag{14}$$

Bizonyítás: Az intervallumokat jellemezzük a kezdő elemük szerint. Ekkor kihasználva, hogy $\mathcal{B}$ Sperner-rendszer, adott kezdetőpontból csak egy B_i intervallum indulhat ki, különben a két halmaz közül valamelyik tartalmazná a másikat. Ebből azonnal adódik, hogy $r \leq n$. Ezt és a binomiális együtthatók mérete közötti összefüggést kihasználva a lemma adódik, ha n páratlan. Tehát tegyük fel, hogy n páros.
Elöször speciális esetként vegyük az $r = n$ esetet. Ekkor átindexeléssel feltehető, hogy a B_i halmaz az i-edik elemmel kezdődik. Továbbá a Sperner-tulajdonságból adódik, hogy tetszőleges B-re, $|B_i| \leq |B_{i+1}|$. Ezt alkalmazva kapjuk, hogy

$$|B_1| \leq |B_2| \leq \cdots \leq |B_n| \leq |B_1|.$$

Tehát minden B elem mérete azonos, jelöljük ezt k-val. Ekkor mivel $\mathcal{B}$ metsző halmazrendszer, $k > \frac{n}{2}$. Így ismét a binomiális együtthatók mérete közötti összefüggést használva, adódik, hogy tetszőleges B halmazra

$$\binom{n}{|B_i|} \leq \binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil},$$

ezzel igazoltuk a lemmát a $n = r$ esetben.

Ha $r < n$, kihasználva, hogy a halmazrendszer metsző, egy intervallum és a komplementere közül csak az egyik lehet $\mathcal{B}$-ben. Ebből adódóan legfeljebb $\frac{n}{2}$ darab $\frac{n}{2}$ méretű halmaz lehet. Azaz a többi halmazra teljesül, hogy $\binom{n}{|B_i|} \leq \binom{n}{\frac{n}{2}+1}$. Ezen észrevételeket fölhasználva adódik, hogy

$$\sum_{i=1}^{r} \binom{n}{|B_i|} \leq \frac{n}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}} + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\binom{n}{\frac{n}{2} + 1} = n\binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}. \square$$

Bizonyítás(Tétel): Legyen $\{S_1, \ldots, S_m\}$ metsző Sperner-rendszer $[n]$ alaphalmazon. Tekintsük az alábbi összeget:

$$\sum_{\mathfrak{C}, S_i} \binom{n}{|S_i|} \tag{15}$$

olyan párokra, ahol S_i intervallum $\mathfrak{C}$ szerint.
Először rögzítsük S_i-t. Ekkor S_i intervallum lesz

$$|S_i|!\,(n - |S_i|)! \text{ ciklikus permutációban.}$$

Ekkor az (15) összeg tovább írható,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{\{\mathfrak{C}: A_i \text{ intervallum}\}} \binom{n}{|S_i|} = \sum_{i=1}^{m} |S_i|!\,(n - |S_i|)! \binom{n}{|S_i|} = mn!. \tag{16}$$

Másik irányból tekintve, most rögzítsük a $\mathfrak{C}$ permutációt. Ekkor felhasználva a 2.4-es lemma által adott becslést kapjuk, hogy

$$\sum_{\mathfrak{C}, S_i} \binom{n}{|S_i|} \leq (n-1)!\,n \binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}.$$

Az eredményünket összevetve a (16) egyenlőséggel,

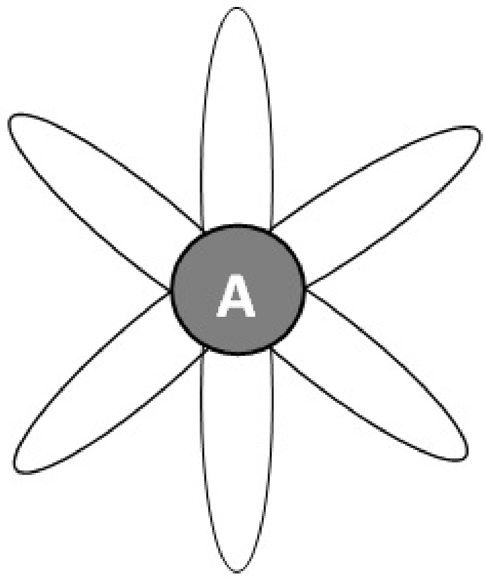
$$mn! \leq (n-1)!\,n \binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}.$$

Ezzel beláttuk az állítást.□

2.3. Csillag-módszer

Harmadikként vizsgáljuk meg a kevésbé ismert csillag-módszert. Ennek alapja, hogy ha egy fix méretű halmazokból álló halmazrendszer kellően nagy, akkor szükségképpen van benne egy rendkívül speciális ún. csillag struktúra [6].

8. Definíció. *$\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_k\}$ k-**csillag**, ha valamilyen A halmazra $S_i \cap S_j = A$ minden $1 \leq i < j \leq k$ esetén. Ekkor az A halmazt a csillag **centrum**ának nevezzük, illetve a páronkén diszjunkt $S_1 - A, \ldots, S_k - A$ halmazokat a csillag **ágai**nak nevezzük.*



2. ábra. k-csillag

2.4. Tétel. *[Erdős-Rado] Legyen $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ r méretű halmazokból álló halmazrendszer és legyen $k \geq 3$ rögzített egész szám. Ekkor ha $\mathcal{S}$ nem tartalmaz k-csillagot, akkor méretére teljesül, hogy*

$$m \leq r!(k-1)^r. \tag{17}$$

Bizonyítás: r szerinti indukcióval.
Ha $r = 1$, akkor a halmazrendszer egy elemű halmazokból áll, ekkor ha $(k-1)$-nél több halmazunk van, akkor tetszőleges k halmaz egy k-csillagot alkot $A = \emptyset$ centrummal.

Tegyük fel, hogy $1, 2, \ldots, r-1$ -re igaz az állítás. Legyen $T_1, \ldots, T_l$ maximális páronként diszjunkt halmazrendszer $\mathcal{S}$ -ből. Ha $l \geq k$, akkor készen is vagyunk, mivel tetszőleges k halmazt kiválasztva közülük, egy k-csillagot kapunk, $A = \emptyset$ centrummal.

Tegyük fel, hogy $l \leq k-1$. Ekkor $T = T_1 \cup \cdots \cup T_l$ méretére teljesül, hogy $|T| \leq r(k-1)$. Ha $x \in T$, akkor

$$\mathcal{S}(x) = \{S - \{x\} : x \in S \in \mathcal{S}\}.$$

Ekkor $\mathcal{S}(x)$ egy $(r-1)$ méretű halmazokból álló halmazrendszer, ami nem tartalmaz k-csillagot. Így használva az indukciós feltételt,

$$|\mathcal{S}(x)| \leq (r-1)!(k-1)^{r-1}. \tag{18}$$

Másrészt $T_1, \ldots, T_l$ maximalitása miatt minden $S \in \mathcal{S}$ halmaznak van közös eleme legalább egy T_i halmazzal. Azaz $\forall \quad S \in \mathcal{S}$-re $\quad S \cap T \neq \emptyset$. Ezek segítségével becsüljük meg $\mathcal{S}$ méretét:

$$|\mathcal{S}| \leq \sum_{x \in T} |\mathcal{S}(x)| \leq |T| \max_{x \in T} |\mathcal{S}(x)| \leq (k-1) \max_{x \in T} |\mathcal{S}(x)|. \tag{19}$$

Az előbbi (18) és (19) becslések összevonásával adódik, hogy

$$|\mathcal{S}| \leq (k-1)r(r-1)!(k-1)^{r-1} = r!(k-1)^r. \square$$

Az előbbi tétel mellett, Deza-tól származik egy, a metsző halmazrendszerek esetén jól használható tétel.

2.5. Tétel (Deza).

I. *Legyen* $\mathcal{S} = \{S_0, \ldots, S_k\}$ *egy* $(k+1)$*-csillag* A *centrummal. Továbbá legyen* F *egy* k *méretű halmaz. Ekkor létezik olyan* i *index, melyre*

$$F \cap S_i = F \cap A. \tag{20}$$

II. *Legyen* $\mathcal{S}^\nu = \{S_0^\nu, \ldots, S_k^\nu\}$ *egy* $(k+1)$*-csillag* k *méretű halmazokból,* A^ν *centrummal,* $\nu = 1, 2$*. Ekkor létezik olyan* $0 \le i, j \le k$ *indexpár, melyre*

$$S_i^1 \cap S_j^2 = A^1 \cap A^2. \tag{21}$$

Bizonyítás: Mivel $\mathcal{S}$ sugarai $(k+1)$ páronként diszjunk halmazokból álló halmazrendszert alkotnak, F -nek szükségképpen legalább egy ilyen halmaztól diszjunktnak kell lennie. Legyen ez az S_i-hez tartozó ág, így

$$(S_i - A) \cap F = \emptyset.$$

Ezt felhasználva azonban $F \cap S_i$ átírható a következő ekvivalens alakba:

$$F \cap S_i = (F \cap A) \cup (F \cap (S_i - A)) = F \cap A. \tag{22}$$

Ezzel beláttuk a tétel I. pontját.

A II. rész belátásához, először alkalmazzuk az I. pontot $\mathcal{S}^2$ halmazrendszeren, $F = S_0^1$ választás mellett. Tehát ekkor létezik egy j index, $0 \le j \le k$, melyre $S_0^1 \cap S_j^2 = S_0^1 \cap A^2$. Fölhasználva, hogy $A^1 \subset S_0^1$, a (22) egyenlőségből következik, hogy

$$A^1 \cap S_j^2 = A^1 \cap A^2.$$

Alkalmazzuk ismét a tétel I. pontját, ezúttal az $\mathcal{S}^1$ halmazrendszerre, $F = S_j^2$ halmaz választása mellett. Ekkor a tétel értelmében létezik egy olyan i index, $0 \le i \le k$ melyre $S_i^1 \cap S_j^2 = A^1 \cap S_j^2$. A (2.3) egyenletet továbbírva kapjuk, hogy

$$S_i^1 \cap S_j^2 = A^1 \cap S_j^2 = A^1 \cap A^2. \square$$

Az előbbi tételek alkalmazásával könnyen belátható a már bizonyított, Erdős-Ko-Rado tétele, pontosabban annak egy általánosított változata is.

9. Definíció. *Egy $\mathcal{S}$ halmazrendszer **t-metsző**, ha bármely $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ esetén $|S_1 \cap S_2| \geq t$.*

2.6. Tétel (Erdős-Ko-Rado). *Adott $[n]$ alaphalmazon vett $\mathcal{S}$ t-metsző halmazrendszer esetén, ha n elég nagy, akkor*

$$|\mathcal{S}| \leq \binom{n-t}{k-t}.$$

Az állítás az 2.4 és 2.5 tételek alapján belátható, azonban terjedelmére való tekintettel az újabb alternatív bizonyítás részletes ismertetésétől ezúttal tekintsünk el.

3. Problémafelvetés

Az eddigiekben rendre adott tulajdonságú maximális méretű metsző halmazrendszert kerestünk adott $[n]$ alaphalmazon. Ezen problémának nézhetjük egy gyengített verzióját. Míg az eddigiekben az alaphalmaz 0-tól $(n-1)$-ig vett természetes számokkal való reprezentálása csak a tárgyalást könnyítette meg, mostantól fontos szerepet kap, mivel kihasználjuk az alaphalmaz elemeinek rendezettségét. Ehhez vezessük be a közeliség fogalmát.

10. Definíció. *Adott $A, B \in 2^{[n]}$ halmazok* ***közeli****ek, ha van közös elemük, és/vagy van szomszédos elemük.*

Ezzel nyilván a metsző tulajdonság egy gyengítését kaptuk. A metsző halmazok közeliek is és van nem kevés közeli halmaz ami nem metsző, például, $A = \{1, 2\}$ és $B = \{3, 5\}$.
Ennek megfelelően a metsző halmazrendszer fogalmát is bővíthetjük.

11. Definíció. *Adott $\mathcal{S} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszer* ***közeli****, ha bármely $A, B \in \mathcal{S}$-re A és B közeli.*

A fenti definíciókat használva, az alapprobléma az adott alaphalmazon minél nagyobb közeli halmazrendszer konstruálása illetve méretének meghatározása.
A probléma tárgyalásához szükségünk lesz további két definícióra is.

12. Definíció. *Adott $A \subseteq [n]$ halmaz* ***szomszéd****jai azon A^* elemek, melyek nincsenek benne az A halmazban, de szomszédosak vele.*

13. Definíció. *Adott $A \subseteq [n]$ halmaz* ***fedése*** *a $\kappa(A) = \{a \in [n] : a \in A \vee a \in A^*\}$ halmaz.*

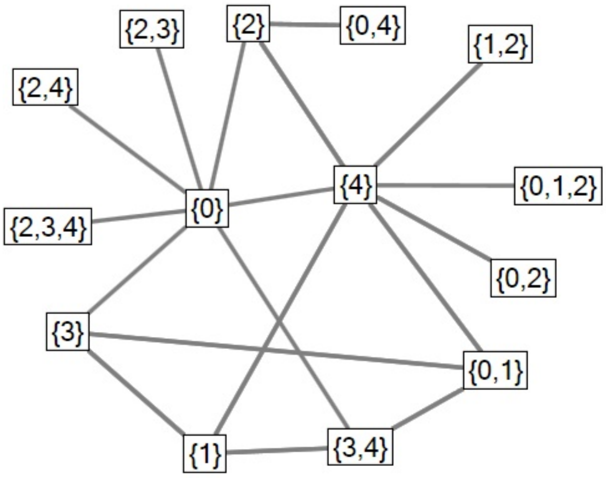
Érdemes már most kiemelni, a fedés fontosságát, hogy $\forall \quad i, j \quad \kappa(S_i) \cap S_j \neq \emptyset$. Ebből adódik, hogy az egész alaphalmazt fedő halmaz, nem állít extra követelményeket a halmazrendszer többi elemének. Így az ilyen halmazokkal tetszőleges közeli halmazrendszer bővíthető.

3.1. Következmény. *Ha $\kappa(A) = [n]$ és $\mathcal{S}$ maximális közeli halmazrendszer $[n]$-en, akkor $A \in \mathcal{S}$.*

3.1. Példa

Mit is jelent a feladat egy konkrét esetben? Nézzük meg $n = 5$-re. Ekkor használva az előbbi következményt, a teljes alaphalmazt nyilván beválaszthatjuk. Bevehetünk minden 4 elemű halmazt is. Hiszen ezek is fedik a teljes alaphalmazt. Ugyan ez érvényes majdnem minden 3 elemű halmazra, kivéve a $\{0, 1, 2\}$ és $\{2, 3, 4\}$ halmazokat, amik kizárnák a $\{4\}$ illetve $\{0\}$ halmazokat. Végül pedig azok a kételemű halmazok, amelyek fedik az alaphalmazt, a $\{0, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$. Tehát a fent maradó halmazok esetében, ha beválasztjuk valamelyiket, másokat ezzel egy időben kizárunk. Ha a megmaradt halmazokat egy gráfban ábrázoljuk, ahol két halmazt összekötünk, ha azok kizárják egymást, az alábbi gráfot kapjuk (lásd 3. ábra).

Itt a maximális halmazrendszer megtalálásához egy maximális független csúcshalmazt kell találni. Jelen esetben jól látszik, hogy például a $\{0\}$, $\{1\}$, $\{4\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 4\}$ halmazokat - valamit az üres halmazt - kihagyva maximális halmazrendszert kapunk. Tehát a kiválasztható halmazok száma: $2^5 - 6 = 26$.



3. ábra. kapcsolati gráf

4. Konstrukciók

Mielőtt a tényleges konstrukcióra rátérnénk érdemes megjegyezni, hogy a definíciókból triviálisan adódik, hogy minden a metsző halmazrendszerekhez használt konstrukció használható közeli halmazrendszer konstruálására is, így érdemes ezek általánosításával kezdeni a vizsgálatokat. A következőkben tekintsünk két lehetséges előállítási módot.

4.1. 1. konstrukció

Első - szemléletesebb - előállítási módot kezdjük egy észrevétellel. Vagyis, hogy a metsző halmazrendszernél megismert generáló halmaz módszere átültethető a közeli halmazrendszerbe is. Ez abból az elemi tulajdonságból adódik, hogy ha adott két közeli halmaz, akkor ezek tetszőleges bővítettjei is közeliek lesznek.

Ennek megfelelően használjunk generáló halmazokat. Tehát egy generáló halmaz bevételével nem csak az adott halmazt, hanem minden lehetséges bővítettjét is bevesszük a halmazrendszerbe. Induljunk ki a metsző halmazrendszereknél már megismert, egy elemű generáló halmazból $\mathbf{A} = \{a_i\}$, azzal a megkötéssel, hogy ezúttal nem lehet tetszőleges helyen, csak az alaphalmaz középső részén. Pontosabban nem lehet a szélső két-két elem. Ezt a rendszert tovább bővíthetjük, ha veszünk a generáló elem melletti elemet, mint második - egy elemű - generáló halmazt $\mathbf{B} = \{a_{i+1}\}$. További bővítéshez újabb, az A halmazhoz közeli halmazokat kell találni. Ez csak a másik szomszéd használatával lehetséges. Viszont itt már nem használhatunk egy elemű generáló halmazt, mivel $\{a_{i-1}\}$ és $\{a_{i+1}\}$ nem lenne közeli. Ezt a problémát megoldandó, a harmadik generáló halmazunk legyen két elemű, $\mathbf{C} = \{a_{i-1}, a_{i+2}\}$.

4.1. Tétel. *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_+$ -ra, $\mathcal{S} = \{H \in 2^{[n]} : \mathbf{A} \subseteq H \vee \mathbf{B} \subseteq H \vee \mathbf{C} \subseteq H\}$ tovább nem bővíthető közeli halmazrendszer és*

$$|\mathcal{S}| = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-4} = 13 \cdot 2^{n-4}. \tag{23}$$

Bizonyítás: Az $\mathcal{S}$ halmazrendszer közelisége triviálisan adódik a generáló halmazokra vonatkozó előbbi észrevételből. Annak igazolásához, hogy nem bővíthető halmazrendszert kaptunk, elegendő megmutatni, hogy minden lehetséges $\{a_i\}$ -hez közeli halmazt tartalmaz $\mathcal{S}$. Mivel, ha lenne egy további $\{a_i\}$-hez közeli új halmaz, akkor annak szükségképpen tartalmaznia kéne $\{a_{i-1}\}$ -et. Viszont nem tartalmazhatja a_i, a_{i+1}, a_{i+2} elemeket. Tehát egy ilyen halmaz nem lenne közeli a $\{a_{i+1}\}$-hez, ami sértené a feltételt.
Az $\mathcal{S}$ mérete (23) megadható egyszerű leszámlálás alapján. **A** generáló halmaz 2^{n-1} halmazt ad a halmazrendszerbe, **B** 2^{n-2} új halmazt generál, **C** további 2^{n-4} új halmazt állít elő.□

Azonban az így kapott halmazrendszer a nagyon kicsi, $n < 8$ alaphalmazokat leszámítva nem abszolút maximum. Ezért érdemes megvizsgálni egy más szemléletű konstrukciót is.

4.2. 2. konstrukció

A második konstrukció előtt figyeljük meg a fedés néhány alaptulajdonságát egy rögzített $[n]$ alaphalmaz esetén.

1. Ha $|A| = k$, akkor $|\kappa(A)| \leq 3k$.

2. Ha $|A| = k$ és $A \neq [n], \emptyset$, akkor $|\kappa(A)| \geq k + 1$ valamint ha $0, (n-1) \notin A$, akkor $|\kappa(A)| \geq k + 2$.

3. Ha $|\kappa(A)| = l \geq 1$ akkor A szükségképpen miden legalább $n - l + 1$ méretű halmazzal közeli.

A második konstrukcióban pont fordítva, a fölső szintektől indulva haladunk lefele, az aktuális szinten bevéve minden garantáltan közeli halmazt.
A legfelső szint, vagyis a teljes halmaz nyilván bevehető. Ezt követően egy k-adik szinten beveszünk minden olyan A halmazt, amelyre $\kappa(A) \geq n - k + 1$.

Vegyük észre, hogy az konstrukció az $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$-edik szintig megy. Az $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$-edik szinttől pedig nem választ be egyetlen halmazt sem. Ez triviálisan adódik a fedés 1. alaptulajdonságából.

Erről az eljárásról a későbbiekben bebizonyítjuk, hogy nagy alaphalmazokra jobb mint az 1. konstrukció. Mindazok ellenére, hogy szigorú értelembe véve még csak bővíthetőség szerint nézve sem maximális. Azonban a további bővítése nem járna nagyságrendi javítással, így ettől egyelőre tekintsünk el.

4.2.1. Közeliség és alapvető struktúra

Vizsgáljuk meg, hogy az eljárás milyen halmazokat választott ki. A megszabott választási kritérium a fedés 2. és 3. tuladjonsága alapján $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ szintig semmitmondó, minden legalább ilyen méretű halmaz eleget tesz neki, ennek megfelelően minden legalább $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ méretű halmazt beválasztunk. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $4|n$. Ekkor az $\frac{n}{2} - 1$-edik szinten minden halmazt beveszünk, melynek legalább $n - \frac{n}{2} + 2 = \frac{n}{2} + 2$ a fedése. Ennek pedig csak két halmaz $\{1, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$ és $\{\frac{n}{2} + 1, \ldots, n\}$ nem felel meg. Ebből pedig már látszik a konstrukció ereje, hogy az igazán sok $\frac{n}{2}$ körüli méretű halmazokból csaknem az összeset beválasztjuk.

A konstrukció elfogadásához még szükséges a közeliség meggondolása. Ez az eljárás lépéseinek vizsgálatával könnyen belátható.

4.2. Tétel. $\mathcal{S} = \{S : |\kappa(S)| \geq n - |S| + 1\}$ *közeli halmazrendszer.*

Bizonyítás: Az első, $[n]$ halmaz önmagával nyilván közeli. Tegyük fel, hogy a $k + 1 > \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$. szintig közeliek. Ekkor a $k \geq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$-edik szinten beválasztunk minden legalább $n - k + 1$ fedésű halmazt. A fedéseknél ismertetett 3. alaptulajdonság szerint, az így beválasztott k méretű halmazok közeliek minden legalább $n - (n - k + 1) + 1 = k$ méretű halmazzal. Tehát minden most beválasztott halmaz közeli a már $\mathcal{S}$-beli (legalább $k + 1$ méretű) halmazokkal és a többi, újonnan kiválasztott (k méretű) halmazzal is.□

4.2.2. Becslés a konstrukcióra

A következő részben vizsgáljuk meg, hogy az előbb ismertetett eljárással milyen méretű halmazrendszert kapunk. Itt a szokásostól eltérően nem a beválasztott halmazok számát, hanem a kihagyott halmazok számát fogjuk vizsgálni. Ennek megkönnyítését szolgálandó, vezessük be az $\overline{\mathcal{S}} = \{A : A \in 2^{[n]} - \mathcal{S}\}$ jelölést. Továbbá mostantól kezdve csak a halmazok nagyságrendjét vizsgáljuk és minden esetben feltesszük, hogy n nagy.

Ez alapján két részre bontjuk a halmazokat. Az $\overline{\mathcal{S}}_{\geq \frac{n}{4}} = \{A \in \overline{\mathcal{S}} : \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq |A| \geq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor\}$ halmazok, melyeknél választunk be halmazokat, csak nem az összeset, illetve az $\overline{\mathcal{S}}_{\leq \frac{n}{4}} = \{A \in \overline{\mathcal{S}} : |A| < \lfloor \frac{n}{4} \rfloor\}$ halmazok, melyekből egyet sem választunk.

Az első becslésnél, nagyvonalúan a konstrukciót csak $k = \lceil \frac{5n}{12} \rceil$-edik szintig engedjük.
Így becsüljük a kihagyott elemek számát. Ezek családja tehát két részből áll össze:

$\overline{\mathcal{S}}_{\leq \frac{5n}{12}}$: Az $\lceil \frac{5n}{12} \rceil$ alatti szintekkel, valamint

$\overline{\mathcal{S}}_{\geq \frac{5n}{12}}$: azon halmazokkal, amelyeket nem vettünk be az $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ és $\lceil \frac{5n}{12} \rceil$ szintek között.

Az $\overline{\mathcal{S}}_{\leq \frac{5n}{12}}$ részre használjuk az ismert tételt [3], vagyis hogy

4.3. Tétel. *Legyen* $0 < \alpha < 1/2$ *konstans. Ekkor*

$$\sum_{i=0}^{\alpha n} \binom{n}{i} = 2^{nH(\alpha)+\log(n)/2+O(1)}, \tag{24}$$

ahol $H(\alpha) = -\alpha \log(\alpha) - (1-\alpha)\log(1-\alpha)$*, az* α*-hoz tartozó entrópia.*

Ezt használva adódik, hogy

4.1. Lemma.

$$|\overline{\mathcal{S}}_{\leq \frac{5n}{12}}| = \sum_{i=0}^{\frac{5}{12}n} \binom{n}{i} = 2^{nH(\frac{5}{12})+\log(n)/2+O(1)}. \tag{25}$$

Térjünk rá a $\overline{\mathcal{S}}_{\geq \frac{5n}{12}}$ részre. Itt először nézzük meg, legfeljebb hány olyan halmaz lehet, amelynek l db szomszéd eleme van.

4.2. Lemma. $[n]$ *alaphalmazon* $\mathcal{A}_l^* = \{A \in 2^{[n]} : |A^*| = l\}$ *halmaz méretére*

$$|\mathcal{A}_l^*| \leq \binom{n}{l} 2^{l+1}. \tag{26}$$

14. Definíció. *Adott* $A \in 2^{[n]}$ *halmaz egy* ***blokk****ján az* $[n]$ *azon egymás utáni elemeit értjük, melyek mindegyike vagy* A*-beli vagy mindegyike* $[n] - A - A^*$*-beli.*

Bizonyítás: Itt csak azt használjuk, hogy adott A halmaz esetén 3 szomszéd elem nem lehet közvetlenül egymás mellett, valamint minden blokkot szomszéd elemek határolnak. Tehát két egymás utáni $a_1, a_2 \in A^*$ elempár esetén tudjuk, hogy a köztük lévő elemek vagy mindegyike A-beli, vagy mindegyike $[n] - A - A^*$-beli. Kihasználva, hogy l szomszéd elem legfeljebb $l+1$ blokkot határozhat meg, egyszerű felső becslést adhatunk az l db szomszéddal rendelkező halmazokról úgy, hogy először kiválasztunk l darab elemet, amiket szomszédnak tekintünk. Ezt $\binom{n}{l}$ féle képen tehetjük. Majd minden lehetséges módon kiosztjuk - halmazbeli illetve nem halmazbeli - a köztük lévő blokkokat. Ezt 2^{l+1}-féleképen tehetjük meg. Tehát az l db szomszéddal rendelkező halmazok száma felülről becsülhető $\binom{n}{l}2^{l+1}$-nel.□

A becslés rendkívül nagyvonalú, hiszen rengetegszer beszámolunk fals halmazokat is, azaz olyan halmazokat, melyeknél egy szomszéd elem mindkét oldalán lévő blokkot "nem halmazbeli"-nek vesszük, ami persze nem lehetséges.

4.3. Lemma. *$[n]$ alaphalmazon $|\mathcal{A}_l^*| \leq \binom{n}{l}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^l$ felső korlát is teljesül.*

Bizonyítás: A minden lehetséges kiosztás helyett vegyünk egy erősebb kiválasztási szabályt, történetesen, hogy minden szomszéd elemre legalább az egyik oldalán lévő blokkot "halmazbeli"-nek kell jelölni. Ezt a legegyszerűbben rekurzióval lehet megtenni. Legyen $F(l)$ az l szomszéd esetén az előbbi szabály szerinti lehetséges kiosztások száma, rögzített szomszéd elemek esetén.
Tehát az l db szomszéd kiválasztása után döntenünk kell, hogy az 1. blokkot bevesszük-e, vagy sem.

- Ha *bevettük*, a maradék l blokkal kezdhetjük elölről, nincs rájuk extra megkötés. Mivel az 1. szomszéd elemre már teljesül a - legalább egyik oldalán halmazbeli - kiválasztási szabály. Tehát ekkor a többi l blokkot legfeljebb $F(l-1)$-féleképpen oszthatjuk ki

- Ha *nem vettük be*, akkor a 2. blokkot mindenképp be kell venni, hogy ne sérüljön a kiválasztási szabály. A maradék $(l-1)$ blokkal kezdhetjük elölről, nincs rájuk extra megkötés, vagyis a többi blokkot legfeljebb $F(l-2)$-féleképpen oszthatjuk ki.

Így pont a Fibonacci-sorozatok kapjuk. Tehát az eredeti 2^{l+1}-es becslés helyett, egy kedvezőbb $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^l$ is teljesül. □

Vegyük észre, hogy a becslésben nem szerepel, hogy melyik szinten vagyunk, azaz mekkora a halmaz mérete. Tehát a becslés tartalmazza az $\frac{l}{3}$ méretű halmazoktól kezdve az $n-l$ méretű halmazokig az összes szintet.

Ezzel tehát van egy becslésünk arra, hogy adott számú szomszéddal rendelkező halmazokból legfeljebb mennyi lehet. Így már csak annyi a dolgunk, hogy megnézzük, hogy a konstrukció milyen szomszédszámmal rendelkező halmazokat zár ki. Például az $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$-edik szinten, azokat a halmazokat zárjuk ki, amelyeknek csak 1 vagy 2 szomszédjuk van. Az $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$-odik szinten, azokat melyeknek csak $1, 2, 3$ vagy 4 szomszédjuk van. Így tovább haladva, (az utolsó vizsgált) $\lceil \frac{5n}{12} \rceil$-edik szinten azokat, amelyeknek $1, 2, \ldots \frac{n}{6} = (n - 2\frac{5n}{12})$ szomszédjuk van.

4.4. Lemma. *$[n]$ alaphalmazon, ha $S \notin \overline{S}_{\geq \frac{5n}{12}}$ és $|S| = k$, ahol $\frac{n}{2} \geq k \geq \frac{5n}{12}$, akkor $|S^*| < n - 2k - 1$.*

Bizonyítás: Adódik a 2. konstrukció kiválasztási szabályából és a fedés definíciójából.

4.4. Tétel. *$[n]$ alaphalmazon,*

$$|\overline{S}_{\geq \frac{5n}{12}}| \leq \sum_{l=1}^{\frac{n}{6}} \binom{n}{l} 2^{l+1}. \tag{27}$$

Bizonyítás: Egy felső becslést kapunk a kihagyott halmazok számára, ha azt mondjuk, hogy szinttől függetlenül, megszámoljuk az összes olyan halmazt, amelynek $1, 2, \ldots \frac{n}{6}$ szomszédja van. A (4.2) lemma egyenlőtlenséget fölhasználva adódik a tételbeli becslés.$\square$

Ekkor a (24)-es és a (27)-es becslések alapján, mi mondható a bevett halmazok arányáról, tehát határozzuk meg

$$\frac{2^n - (|\overline{S}_{\leq \frac{5n}{12}}| + |\overline{S}_{\geq \frac{5n}{12}}|)}{2^n} = 1 - \frac{(|\overline{S}_{\leq \frac{5n}{12}}| + |\overline{S}_{\geq \frac{5n}{12}}|)}{2^n} \text{ nagyságrendjét.}$$

Az egyszerűbb számolás érdekében tegyük fel, hogy n osztható 6-tal. Ekkor $|\overline{\mathcal{S}}_{\geq\frac{5n}{12}}|$ tagot tovább becsülve kapjuk, hogy

$$|\overline{\mathcal{S}}_{\geq\frac{5n}{12}}| \leq \sum_{l=1}^{\frac{n}{6}} \binom{n}{l} 2^{l+1} \leq \sum_{l=1}^{\frac{n}{6}} \binom{n}{\frac{n}{6}} 2^{l+1} = \binom{n}{\frac{n}{6}} \sum_{l=1}^{\frac{n}{6}} 2^{l+1} \leq \binom{n}{\frac{n}{6}} 2^{\frac{n}{6}+2}.$$

Ezután a Stirling-formula felhasználásával adhatunk felső becslést $\binom{n}{\frac{n}{6}}$-ra. Azaz

$$\binom{n}{\frac{n}{6}} = \frac{n!}{\frac{n}{6}! \cdot \frac{5n}{6}!} \approx \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi \cdot n/6}\left(\frac{n/6}{e}\right)^{n/6} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 5n/6}\left(\frac{5n/6}{e}\right)^{5n/6}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi \cdot n/6}\sqrt{2\pi \cdot 5n/6}} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^{5n/6}\left(\frac{5}{6}\right)^{5n/6}\left(\frac{n}{e}\right)^{n/6}\left(\frac{1}{6}\right)^{n/6}} = o\left(n\,(6)^{n/6} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{5n/6}\right).$$

A fenti becslést felhasználva és élve azon egyszerűsítéssel, hogy csak az exponenciális tagot tartjuk meg,

$$|\overline{\mathcal{S}}_{\geq\frac{5n}{12}}| \leq \binom{n}{\frac{n}{6}} 2^{\frac{n}{6}+2} \leq (6)^{n/6} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{5n/6} \cdot 2^{\frac{n}{6}+1} \approx (1.77)^n \approx 2^{0.82n}.$$

4.5. Tétel. $[n]$ *alaphalmazon a 2. konstrukció által készített* $\mathcal{S}$ *közeli halmazrendszer méretére teljesül, hogy*

$$2^n - 2^{nH\left(\frac{1}{4}\right)} \geq |\mathcal{S}| \geq 2^n - 2^{0.97n} \quad n \to \infty \tag{28}$$

azaz

$$\frac{|\mathcal{S}|}{2^n} \to 1, ha \quad n \to \infty.$$

Bizonyítás: Kihasználva hogy $H(\frac{5}{12}) \approx 0.97 < 1 \Rightarrow |\overline{\mathcal{S}}_{\leq\frac{5n}{12}}| \approx 2^{0.97n}$, így kapjuk, hogy

$$|\mathcal{S}| = 2^n - (|\overline{\mathcal{S}}_{\leq\frac{5n}{12}}| + |\overline{\mathcal{S}}_{\geq\frac{5n}{12}}|) \geq 2^n - 2^{0.97n} \quad n \to \infty.$$

A felső korláthoz elegendő azon észrevételt használni, hogy a konstrukció $\lfloor\frac{n}{4}\rfloor$-edik szinttől nem választ be egyetlen halmazt sem. Így a (4.3) tétel alapján tudjuk, hogy $|\overline{\mathcal{S}}| > 2^{nH\left(\frac{1}{4}\right)}$ $\quad n \to \infty$, tartva n-nel a végtelenbe a felső korlátot is igazoltuk.

Az előbbi tétel egyben igazolja, hogy nagy n-re a második konstrukció jobb az elsőnél.

A ”nagy n-re” megfogalmazás félrevezető lehet. Már $n = 8$ -ra is jobb a második konstrukció.

4.3. Példa

Legyen $n = 8$. Ekkor az 1. konstrukciónál bizonyított 4.1 tétel alapján, a generáló halmazok használatával $13 \cdot 2^{8-4} = 208$ méretű közeli halmazrendszer állítható elő.
Ezzel szemben a 2. konstrukciónál egyrészt beveszünk minden legalább 4 elemű halmazt, ebből 163 van Továbbá 3 elemű halmazokból minden olyat, amelynek fedése legalább 6. Azaz minden olyan halmazt, amelynek nem 1 vagy 2 szomszéd eleme van. Ilyenből $56 - 2 - 7 = 47$ halmaz van.
Tehát a 2. konstrukcióval $163 + 50 = 210$ méretű közeli halmazrendszert kapunk.

5. Elméleti korlátok

Eddig láthattuk, hogy a gyengített halmazrendszer tulajdonság jelentősen több halmaz bevételét teszi lehetővé. Azonban ahhoz, hogy az így kapott halmazrendszer méretét jobban meg tudjuk ítélni, meg kell vizsgálni a problémát a másik irányból is: szükség lenne elméleti felső korlátra. Az nyilvánvaló, hogy nem vehetjük be mind a $2^{[n]}$ részhalmazt, így jogosan vetődik fel, hogy mekkora az a halmazméret, amit garantáltan nem érhetünk el. Másképp fogalmazva, legalább mekkora azon halmazok száma, amelyeket tetszőleges megengedett megoldás esetén ki kell hagyni.

5.1. Kezdeti becslés a korlátra

Elsőként nézzük meg, milyen becslést tudunk mondani, ha szintenként vizsgáljuk a halmazrendszert. Ehhez gyengítsük a megengedettségi megkötéseket és csak szintenként követeljük meg, hogy bármely kettő halmaz közeli legyen.

5.1. Tétel. $[n]$ *alaphalmazon vett maximális méretű $\mathcal{S}$ közeli halmazrendszerre*

$$|\overline{\mathcal{S}}| \geq 2^{0.46n}, \quad n \to \infty. \tag{29}$$

Bizonyítás: Vegyünk egy maximális közeli halmazrendszert. Az aktuálisan vizsgált szintet jelöljük k-val. Ha a k-adik szinten ki van választva egy $S \in \mathcal{S}$ halmaz, akkor a $\kappa(S)$ elemeit elkerülő $\binom{n-\kappa(S)}{k}$ halmaz nem lehet a rendszerben. Fölhasználva a fedés 1. alaptulajdonságát, $\kappa(S) \leq 3k$, így legalább $\binom{n-3k}{k}$ halmaz hiányzik a k-adik szinten. Természetesen ez akkor is igaz, ha a szinten nincs $\mathcal{S}$-beli halmaz.

Továbbá észrevéve, hogy a fenti becslés semmitmondó az $n/4$-edik szintek fölött, adódik, hogy

$$\text{legalább } \sum_{i=1}^{n/4} \binom{n-3i}{i} \text{ halmaz hiányzik } \mathcal{S}\text{-ből.} \tag{30}$$

Az előbbi szummára triviális alsó becslést adhatunk, ha csak az egyik tagját használjuk, a többitől eltekintünk. Persze nem mindegy, hogy melyik tagot használjuk. Ismert, hogy kicsi rögzített i-re a tagok n-ben polinomiális nagyságrendűek. Viszont a nagyobb, pl. $i = n/10$-re már exponenciális nagyságrendűek. Ennek megfelelően a cél a domináns tag megkeresése. Ehhez vizsgáljuk a tagok arányát, ha i-t eggyel növeljük, azaz

$$\frac{\binom{n-3i-3}{i+1}}{\binom{n-3i}{i}} = \frac{(n-4i)}{(n-3i)} \cdot \frac{(n-4i-1)}{(n-3i-1)} \cdot \frac{(n-4i-2)}{(n-3i-2)} \cdot \frac{(n-4i-3)}{(i+1)} >^{?} 1 \tag{31}$$

Tényezőnként vizsgálva a hányados, kapjuk, hogy

$$\frac{(n-4i)}{(n-3i)} < 1; \frac{(n-4i-1)}{(n-3i-1)} < 1; \frac{(n-4i-2)}{(n-3i-2)} < 1 \qquad i \in \left\{1, \ldots, \frac{n}{4}\right\}$$

mindig teljesül. Továbbá, ha $i > \frac{n-4}{5}$, akkor

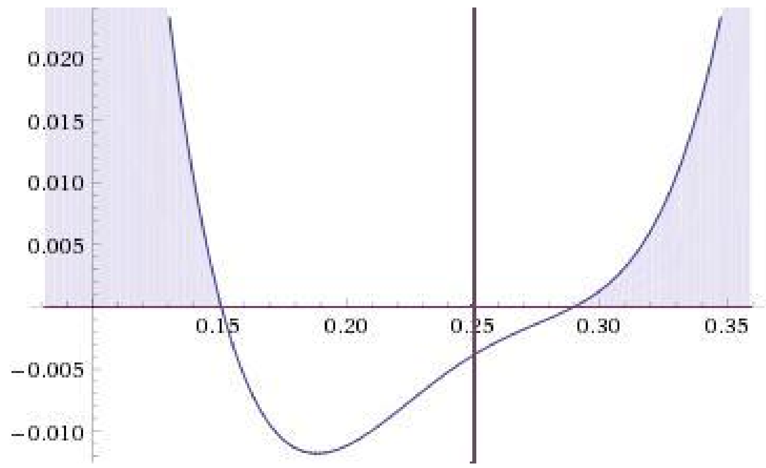
$$\frac{(n-4i-3)}{(i+1)} < 1$$

is teljesül. Tehát a hányados kisebb 1 azaz nem éri meg növelni az i-t, ha már $i > \frac{n-4}{5}$.

A továbbiakhoz érdemes az i változónkat $i = an$ alakba keresni, ahol $0 \leq a < 1/4$. Ekkor vissza helyettesítve a (31) egyenletbe, kapunk egy n-ben negyedfokú egyenlőtlenséget a paraméterrel. Itt azzal az egyszerűsítéssel élhetünk, hogy ha n elég nagy, akkor a negyedfokú tag lesz a meghatározó. Tehát elég csak a főegyüttható előjelét vizsgálni. Az egyenlőtlenséget standard alakra hozva, kapjuk, hogy a főegyüttható, $283a^4 - 238a^3 + 105a^2 - 17a + 1$. Vagyis a vizsgálandó egyenlőtlenség:

$$283a^4 - 238a^3 + 105a^2 - 17a + 1 > 0$$

Itt a gyököket numerikusan kiszámolva kapjuk, hogy két valós gyöke van, az $a_1 = 0.1508$ és $a_2 = 0.2898$ pontokban, továbbá a főegyüttható a számunkra érdekes tartományban az alábbi módon néz ki (lásd 4. ábra).



4. ábra. $283a^4 - 238a^3 + 105a^2 - 17a + 1$

Tehát az $i = 0.15n = \frac{3n}{20}$ a legnagyobb a lehetséges tagok közül. Továbbá érdemes megjegyezni, hogy $0.15 < 0.1508$ választás miatt továbbra is érvényes, hogy az n^4-es tag a domináns.

Tovább írva a (30) becslést, kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n/4} \binom{n-3i}{i} \geq \binom{n - \frac{9n}{20}}{\frac{3n}{20}} = \binom{\frac{11n}{20}}{\frac{3n}{20}}$$

Ismét a Stirling-formulát használva és az exponenciális tagokon kívülieket elhagyva,

$$\binom{\frac{11n}{20}}{\frac{3n}{20}} \approx \frac{\sqrt{2\pi\frac{11n}{20}}\left(\frac{11n}{20e}\right)^{\frac{11n}{20}}}{\sqrt{2\pi\cdot\frac{3n}{20}}\left(\frac{3n}{20e}\right)^{\frac{3n}{20}}\sqrt{2\pi\cdot\frac{8n}{20}}\left(\frac{8n}{20e}\right)^{\frac{8n}{20}}} = \frac{\sqrt{2\pi\frac{11n}{20}}}{\sqrt{2\pi\cdot\frac{3n}{20}}\sqrt{2\pi\cdot\frac{8n}{20}}} \cdot \frac{\left(11^{11}\right)^{n/20}\left(\frac{n}{20e}\right)^{\frac{11n}{20}}}{\left(\frac{n}{20e}\right)^{\frac{3n}{20}} 27^{n/20}\left(\frac{n}{20e}\right)^{\frac{8n}{20}}\left(8^8\right)^{n/20}} \approx$$

$$\approx \left(\frac{11^{11}}{27\cdot 8^8}\right)^{n/20} \approx 1.38^n \approx 2^{0.46n} \text{ becslést kapjuk.}$$

Ezzel kész az $2^{0.46n}$ -es elméleti alsó korlát.□

5.2. Elméleti korlát becslésének javítása

Ez azonban még mindig messze van a konstrukció felső becslésénél kapott $2^{0.81n}$ hiánytól, ezért érdemes megnézni egy másik típusú alsó becslést is. Az első becslés nagy hiányossága volt, hogy csak a szintenkénti közeliségre figyeltünk, így sok extra halmazt is bevettünk.

5.2. Tétel. $[n]$ *alaphalmazon vett maximális méretű* $\mathcal{S}$ *közeli halmazrendszerre*

$$|\overline{\mathcal{S}}| \geq 2^{0.58n}, \quad n \to \infty \tag{32}$$

Bizonyítás: Továbbra is induljunk ki egy optimális halmazrendszerből. Válasszunk ki egy A halmazt a lehető legkisebb szintről. Ez legyen a k-adik szint. Ekkor (az első verzióhoz hasonlóan) elmondható, hogy ez a halmaz kijelöl legfeljebb $3k$ elemet, amelyekből az összes többi halmaznak, (ezúttal szinttől függetlenül) tartalmaznia kell elemet. Másképpen kifejezve minden olyan halmazt kizárunk, ami nem tartalmaz ilyen elemet. Továbbá ki kell zárni minden olyan halmazt, ami ugyan tartalmaz belőle elemet, de a mérete kisebb, mint k. Ezek alapján a kizárt halmazok száma:

$$2^{n-\kappa(A)} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}.$$

Viszont a k értéke számunkra ismeretlen, csak annyit tudunk, hogy $k < \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$. Így a fenti gondolatmenet csak akkor ad használható alsó korlátot, hogyha a k paraméter olyannak választjuk, ahol az előbbi hiány a lehető legkisebb. Tehát az alsó korlát:

$$\min_{k=1 \ldots \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} \left\{ 2^{n-3k} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{n}{i} \right\}.$$

Keressük k-t ismételten $k = an$ alakban, ahol $0 < a < 1/3$ és továbbra is tegyük fel, hogy n nagy. Alkalmazzuk a már többször használt (4.3)-as tételt, $\sum_{i=1}^{an} \binom{n}{i} \approx 2^{nH(a)}$ az összeg második tagján.

Vegyük észre, hogy k pontosabban a növelésével az első tag kitevője csökken, a másodig tag kitevője viszont nőni fog. A minimumot tehát ott veszi fel, ahol a két kitevő megegyezik. Vagyis az $n - 3an = nH(a)$ egyenlet a kérdés. Itt n-nel egyszerűsítve kapjuk a

$$0 = H(a) + 3a - 1 \tag{33}$$

egyenletet.

Bár itt a pontos megoldásra lenne szükségünk, numerikus közelítése is jól mutatja az alsó korlát nagyságát. Tehát a (33) egyenletet megoldva, $a = 0.13924$ értéket kapunk.

Erre

$$2^{n-3an} \approx 2^{nH(a)} \approx 2^{0.58n}.\square$$

Így a második becslési módszerrel az eddigi $2^{0.46n}$-es alsó korlátot $2^{0.58n}$-re tudtuk javítani.

6. Konklúzió

Az eddigi eredményeket összevonva a következő tételt kapjuk:

6.1. Tétel. *Adott* $[n]$ *alaphalmaz esetén, a kiválasztható maximális* $\mathcal{S}$ *közeli halmazrendszer mérete:*

$$2^n - 2^{0.58n} \geq |\mathcal{S}| \geq 2^n - 2^{0.97n} \quad n \to \infty.$$

Bizonyítás: A tétel adódik a (4.5) és (5.2) tételből.□

A probléma tárgyalása során alkalmazott becslésekben nagyvonalúak voltak, többször alkalmaztunk nem éles becsléseket. Ezek alapján elmondható, hogy a tételben szereplő korlátok sem élesek. A sejtésünk az, hogy mindkét irányú korlátot, $H\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0.81n$-ig lehet javítani, pontosabban:

Sejtés: Adott $[n]$ alaphalmaz esetén, a kiválasztható maximális $\mathcal{S}$ közeli halmazrendszer mérete nagyságrendileg

$$\mathcal{S} = 2^n - 2^{nH\left(\frac{1}{4}\right)}.$$

7. Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Katona Gyulának. Ő hívta fel a figyelmemet a szakdolgozatom alapjául szolgáló új problémára. Ez elmúlt évben időt és fáradtságot nem kímélve segítette munkámat. Bármikor felkereshettem ötleteimmel, tanácsai nélkül nem jöhettetek volna létre a dolgozatom második felében lévő eredmények. Köszönöm családomnak, akik támogattak az egyetem 5 éve alatt, így létrejöhetett ez a szakdolgozat. Továbbá hálával tartozom Keszthelyi Gabriellának. Dolgozatom végső formáját értékes tanácsainak, latex jártasságának köszönhetem.

8. Irodalomjegyzék

[1] Erdős, P.; Ko, C.; Rado, R. (1961): Intersection theorems for systems of finite sets, The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford. Second Series 12,313 - 320

[2] G.O.H. Katona(1972): A simple proof of the Erdős - Chao Ko - Rado theorem, J. Combin. Theory Ser. B 13, 183 - 184.

[3] Ronald L. Graham; Donald E. Knuth, Oren Patashnik (1996): Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science (2nd Edition), 492.

[4] E.C. Milner (1968): A combinatorial theorem on systems of sets, J. London Math. Soc. 43, 204 - 206.

[5] G. Katona (1964): Intersection theorems for systems of finite sets, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 15, 329 - 337

[6] Deza, M.; Frankl P. (1981), Every large set of equidistant $(0, +1, -1)$-vectors forms a sunflower, Combinatorica 1 : 225 - 231

[7] Erdős P.; Rado R. (1960), Intersection theorems for systems of sets, Journal of the London Mathematical Society, Second Series 35, 85 - 90

[8] S. Jukna (2001), Extremal Combinatorics: With Applications in Computer Science (1st Edition)

[9] Erdős P.; Frankl P.; G.O.H. Katona(1984), Intersecting Sperner families and their convex hulls, Combinatorica4, 21-34.

[10] P. Frankl; Z. Füredi(1986), Nontrivial intersecting families, J. Combin. Theory Ser. A 41, 150 - 153.