

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

VÉGESELEM-MÓDSZEREK  
ÖSSZEHASONLÍTÁSA TÁRIGÉNY ÉS  
KONVERGENCIA SZEMPONTJÁBÓL

Szakdolgozat

Szabó Emerencia Éva

Alkalmazott matematikus MSc, Alkalmazott analízis szakirány

Témavezető: Horváth Tamás, egyetemi tanársegéd  
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



Budapest, 2013

# Tartalomjegyzék

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Bevezetés</b>                                   | <b>4</b>  |
| <b>2. Folytonos Galjorkin-módszer</b>                 | <b>5</b>  |
| 2.1. Elméleti alapok . . . . .                        | 5         |
| 2.2. A módszer ismertetése . . . . .                  | 7         |
| 2.3. A folytonos módszer implementálása . . . . .     | 9         |
| 2.3.1. $\tau_h$ felbontás . . . . .                   | 9         |
| 2.3.2. Mátrixösszefűzés . . . . .                     | 12        |
| 2.3.3. $w$ kiszámítása . . . . .                      | 17        |
| 2.3.4. $H^1(\Omega)$ és $L^2(\Omega)$ norma . . . . . | 18        |
| <b>3. Nemfolytonos Galjorkin-módszer (DG)</b>         | <b>19</b> |
| 3.1. A módszer ismertetése . . . . .                  | 19        |
| 3.2. A nemfolytonos módszer implementálása . . . . .  | 22        |
| 3.2.1. $\tau_h$ felbontás . . . . .                   | 22        |
| 3.2.2. Mátrixösszefűzés . . . . .                     | 23        |
| 3.2.3. $w$ kiszámítása . . . . .                      | 25        |
| 3.2.4. $L^2(\Omega)$ norma . . . . .                  | 25        |
| <b>4. Konvergencia</b>                                | <b>26</b> |
| 4.1. Folytonos módszer konvergenciája . . . . .       | 26        |
| 4.2. Nemfolytonos módszer konvergenciája . . . . .    | 28        |
| <b>5. Összehasonlítás</b>                             | <b>30</b> |
| 5.1. Eredmények háromszögelemekkel . . . . .          | 31        |
| 5.2. Eredmények téglalapelemekkel . . . . .           | 35        |
| <b>Irodalomjegyzék</b>                                | <b>38</b> |

# Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Horváth Tamásnak, hogy hasznos tanácsaival, észrevételeivel segítette szakdolgozatom elkészülését. Köszönöm a sok segítséget, melyet a konzultációk során és e-mailen keresztül kaptam. Nagyon hálás vagyok, hogy sokat segédkezett az implementáció során felmerülő hibakeresésben.

Hálával és köszönettel tartozom családomnak, szeretteimnek támogatásukért és az erőt adó biztatásért.

# 1. fejezet

## Bevezetés

Az elliptikus parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásának egyik leghatékonyabb módszere a különböző végeelem-módszerek. Gyakorlatban is számos helyen alkalmazzák ezeket a módszereket, pl.: fizikai folyamatok modellezése, mérnöki szimulációk stb.

Szakedolgozatom témája a folytonos és nemfolytonos Galjorkin-módszerek implementálása és összehasonlítása tárigény és konvergencia szempontjából. A dolgozat során először az elméleti háttérrel mutatom be, azt követően áttérek a Matlabban történő implementálásra. A folytonos és nemfolytonos esetben is háromszögeket illetve téglalapokat választottam elemeknek.

A 4. és 5. fejezet tárgyalja részletesebben a különböző konvergenciatételeket illetve kiszámításra kerülnek a tárigények. Ezek segítségével definiálok egy hatékonysági függvényt, ami alapján készül az összehasonlítás. Az utolsó részben a Matlabban megírt kódokat néhány tesztfüggvényre futtatom és a kapott konvergencia ábrák egybevetésével vonom le a konklúziót a módszereket illetően.

## 2. fejezet

# Folytonos Galjorkin-módszer

### 2.1. Elméleti alapok

A végeselem-módszerek összehasonlítása során a következő elliptikus Dirichlet peremérték-feladattal fogunk foglalkozni. Keressük azt az  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  függvényt, melyre

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \Omega\text{-n,} \\ u|_{\partial\Omega} &= g, \end{aligned}$$

ahol  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  korlátos tartomány,  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ .

Elsőként tekintsük a homogén Dirichlet peremfeltétel esetét

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \Omega\text{-n,} \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

A klasszikus feladatot írjuk át először gyenge alakra. Ehhez válasszunk egy  $v \in C_0^1(\Omega)$  tesztfüggvényt. Az egyenletet szorozzuk meg a tesztfüggvénnyel és integráljuk  $\Omega$ -n,

$$\int_{\Omega} -\Delta u v = \int_{\Omega} f v.$$

Az egyenlet bal oldalán a Green-tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u v = \int_{\Omega} f v,$$

ahol  $\nu$  jelöli a kifelé mutató normálist. Mivel  $v = 0$  a peremen, ezért

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u v = 0.$$

Így a következő összefüggést kapjuk:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v. \tag{2.1}$$

Gyenge alaknál az  $u$  megoldásnak nem kell  $C^2$ -ben lennie, elég, ha  $u \in H^1(\Omega)$ . Homogén Dirichlet peremfeltétel esetén elegendő, ha  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

**2.1.1. Definíció.**  $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \partial_i u \in L^2(\Omega) \ \forall i = 1, \dots, n\}$ ,  $\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$ .

**2.1.2. Definíció.**  $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ ,  $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$ .

**2.1.3. Definíció.** Homogén Dirichlet peremérték-feladat gyenge megoldása  $u \in H_0^1(\Omega)$ , mely teljesíti (2.1)-et  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ -ra.

**2.1.4. Állítás.** Ha  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  kielégíti a klasszikus Dirichlet feladatot, akkor gyenge megoldás is. Ha  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , akkor  $u$  a klasszikus feladatnak is megoldása.

Legyen  $a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$ . Ekkor  $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  bilineáris forma, amely

a) korlátos, azaz  $\exists M > 0$ , hogy  $|a(u, v)| \leq M \cdot \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \ \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$

b) koercív, azaz  $\exists m > 0$ , hogy  $a(u, u) \geq m \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \ \forall u \in H_0^1(\Omega)$ .

A következő állítás bizonyításától eltekintünk, [3]-ban részletesen megtalálható.

**2.1.5. Állítás.** A  $H^1(\Omega)$  norma és a  $H_0^1(\Omega)$  norma ekvivalens a  $H_0^1(\Omega)$ -n.

Most tekintsük az egyenlet jobb oldalát. Jelölje  $lv := \int_{\Omega} f v$ . Ekkor  $l : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos, lineáris funkcionál.

**2.1.6. Tétel (Lax-Milgram lemma).** Legyen  $H$  valós Hilbert-tér,  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos, koercív, bilineáris forma,  $l : H \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos, lineáris funkcionál. Ekkor  $\exists! u \in H$ , melyre  $a(u, v) = lv \ \forall v \in H$ .

Tehát a gyenge megoldás keresése során egy olyan  $u \in H_0^1(\Omega)$  függvényt keresünk, melyre  $a(u, v) = lv$  teljesül  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$  esetén. Ezen  $u$  létezését és egyértelműségét a Lax-Milgram lemma biztosítja.

Most térjünk át az inhomogén Dirichlet perem esetére, amely könnyen visszavezethető a homogén esetre. A klasszikus feladat:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \Omega\text{-n,} \\ u|_{\partial\Omega} &= g. \end{aligned}$$

Ekkor legyen  $u_0$  olyan, hogy  $u_0|_{\partial\Omega} = g$ ,  $u = w + u_0$ . Így  $w$ -re egy homogén peremfeltételű feladatot kapunk:

$$\begin{aligned} -\Delta w &= f - (-\Delta u_0), \\ w|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

A homogén eset gyenge alakja alapján  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ -ra igaz a következő összefüggés:

$$\underbrace{\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v}_{a(w,v)} = \int_{\Omega} f v - \underbrace{\int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v}_{a(u_0,v)},$$

$\tilde{l}v := \int_{\Omega} f v - a(u_0, v)$  jelöléssel,  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ -ra

$$a(w, v) = \tilde{l}v.$$

## 2.2. A módszer ismertetése

A folytonos Galjorkin-módszer során a közelítő megoldást, melyre teljesül, hogy

$$a(u_h, v) = l v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

a  $H_0^1(\Omega)$  egy véges dimenziós  $V_h$  alterében fogjuk keresni.  $V_h$  bázisfüggvényeit jelölje  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ .

$$?u_h \in V_h : a(u_h, v_h) = l v_h \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.2)$$

Az  $u_h$  közelítő megoldást írjuk fel a bázisfüggvények segítségével:  $u_h = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j$ . Cél a  $c_j$  együtthatók meghatározása. Az  $u_h$  bázisfüggvényekkel való felírását a 2.2-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$a \left( \sum_{j=1}^N c_j \phi_j, v_h \right) = l v_h \quad \forall v_h \in V_h.$$

Elég a bázisfüggvényekre megkövetelni az egyenlőséget, ezért

$$a \left( \sum_{j=1}^N c_j \phi_j, \phi_i \right) = l \phi_i \quad (i = 1, \dots, N).$$

Mivel  $a$  bilineáris forma, ezért érvényes a következő átalakítás,

$$\sum_{j=1}^N c_j a(\phi_j, \phi_i) = l \phi_i \quad (i = 1, \dots, N).$$

$$s_{ij} := a(\phi_j, \phi_i), \quad w_i := l \phi_i$$

Így egy lineáris egyenletrendszert kaptunk

$$\sum_{j=1}^N s_{ij} c_j = w_i \quad (i = 1, \dots, N),$$

ahol

$$s_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i, \quad S = \{s_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}.$$

### 2.2.1. Állítás. $S$ pozitív definit.

*Bizonyítás:* Legyen  $c \in \mathbb{R}^n, c \neq \mathbf{0}, v_h := \sum_{j=1}^n c_j \phi_j$ .

Ekkor  $Sc \cdot c = \sum_{i,j=1}^n s_{ij} c_j c_i = \sum_{i,j=1}^n a(\phi_j, \phi_i) c_j c_i = a\left(\sum_{j=1}^n c_j \phi_j, \sum_{i=1}^n c_i \phi_i\right) = a(v_h, v_h)$ . Mivel  $a$  koercív, ezért  $\exists m > 0$ , hogy  $a(v_h, v_h) \geq m \|v_h\|^2$ . A  $v_h \neq \mathbf{0}$ , ezért  $Sc \cdot c = a(v_h, v_h) \geq m \|v_h\|^2 > 0$ . Ezzel bebizonyítottuk, hogy az  $S$  mátrix pozitív definit. ■

### 2.2.2. Következmény. Az $Sc = w$ lineáris egyenletrendszernek egyértelműen létezik megoldása.

A konvergenciatételekről a későbbiekben lesz szó. A végeelem-módszereknél a  $V_h$  alteret szakaszonként polinomok alkotják. Az  $\Omega$  tartományt felosztjuk két dimenzió esetén pl. háromszögekre vagy téglalapokra, három dimenzió esetén pl. tetraéderekre vagy téglákra. A szakdolgozat két dimenziós feladatokkal foglalkozik első-, másod-, ill. harmadfokú polinomok esetén háromszög felosztással és téglalap felosztással is. Az  $\Omega$  felbontásának a következőket kell teljesítenie:

**2.2.3. Definíció ( $\tau_h$  felbontás).**  $T_1, \dots, T_M \subset \Omega, \partial T_k$  Lipschitz-folytonos  $\forall k = 1, \dots, M, \text{int } T_k \cap \text{int } T_l = \emptyset (\forall k \neq l), \cup_{k=1}^M T_k = \Omega$  valamint  $T_k \cap T_l$  csak csúcs, teljes oldal vagy üres halmaz lehet.

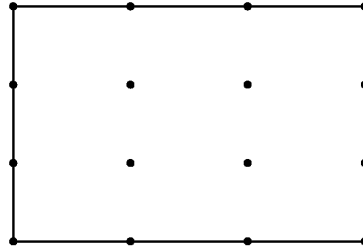
**2.2.4. Definíció.**  $h$ -val jelöljük a  $\tau_h$  finomságát, ahol  $h = \max_{k=1, \dots, M} \text{diam}(T_k)$ .

A dolgozatban bemutatott módszerek során a  $\tau_h$  minden eleme azonos típusú és minden  $T_k$ -n azonos fokszámú polinomokat alkalmaztam. A bázisfüggvények bizonyos csomóponti értékek segítségével adhatóak meg egy adott  $T_k$  elemen. Minden csomóponti értékhez tartozni fog egy bázisfüggvény, amely az adott csomópontban 1-et vesz fel, a többi csomópontban pedig 0-t. Csomóponti értékek pl: csúcsok, felezési pontok stb. A dolgozatban használt felbontások és  $V_h$  alterek:

- $T_k$  háromszög  $\forall k = 1, \dots, M$   
 $V_h = \{\text{szakaszonként lineáris függvények}\}$   
A bázisfüggvényeket az adott  $T_k$  háromszög csúcspontjaiban lévő értékek határozzák meg, ezek lesznek a csomóponti értékek.
- $T_k$  háromszög  $\forall k = 1, \dots, M$   
 $V_h = \{\text{szakaszonként másodfokú függvények}\}$   
A csomóponti értékek a  $T_k$  háromszög csúcspontjai és az oldalak felezési pontjai.



- $T_k$  háromszög  $\forall k = 1, \dots, M$   
 $V_h = \{\text{szakaszonként harmadfokú függvények}\}$   
A csomóponti értékek a  $T_k$  háromszög csúcspontjai, az oldalak harmadoló pontjai és a súlypont.
- $T_k$  téglalap  $\forall k = 1, \dots, M$   
 $V_h = \{a + bx + cy + dxy \text{ alakú, elemenként bilineáris függvények}\}$   
A  $T_k$  téglalap csúcspontjai a csomóponti értékek.
- $T_k$  téglalap  $\forall k = 1, \dots, M$   
 $V_h = \{u : u|_{T_i} \in \text{span}\{1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, x^2y^2, xy^2\}\}$   
A csomóponti értékek: a  $T_k$  téglalap csúcspontjai, az oldalak felezési pontjai és a súlypont.
- $T_k$  téglalap  $\forall k = 1, \dots, M$   
 $V_h = \{u : u|_{T_i} \in \text{span}\{1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, x^2y^2, xy^2, x^3, y^3, x^3y^2, x^3y, x^2y^3, xy^3, x^3y^3\}\}$   
A csomóponti értékek az alábbi ábrán látható pontok, ahol a téglalap oldalain a csúcsokon kívül a harmadoló pontok találhatóak.



## 2.3. A folytonos módszer implementálása

Ebben a fejezetben a folytonos Galjorkin-módszer implementálásáról lesz szó. A kódokat Matlab-ban készítettem.

A megoldandó feladat a következő:

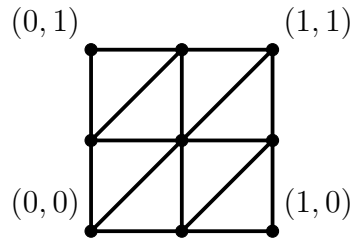
$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \\ u|_{\partial\Omega} &= g. \end{aligned}$$

Az  $\Omega$  tartomány minden esetben a  $[0, 1] \times [0, 1]$  egységnyezet lesz.

### 2.3.1. $\tau_h$ felbontás

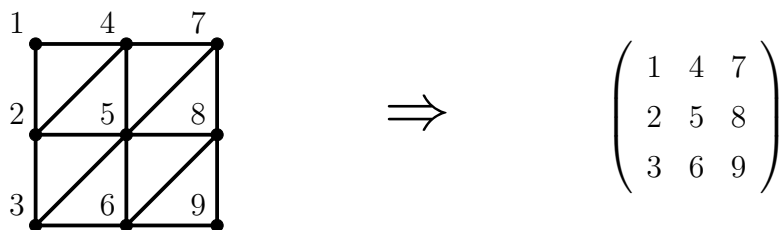
Először az  $\Omega$   $\tau_h$  felbontását készítjük el, ahol az egyik esetben a  $T_i$  elemek csak háromszögek, a másik esetben pedig csak téglalapok. Az egységnyezetet  $x$  irány-

ban  $m$  részre,  $y$  irányban  $n$  részre osztjuk fel. Ezekben a rácspontokban vagyunk kíváncsiak a közelítő megoldás értékére.

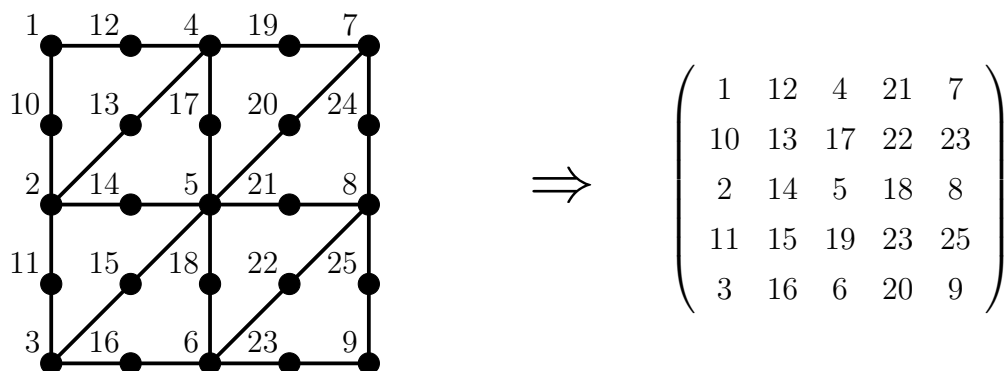


2.1. ábra. Egységnégyzet felosztása háromszögekre  $n = 2, m = 2$  esetén

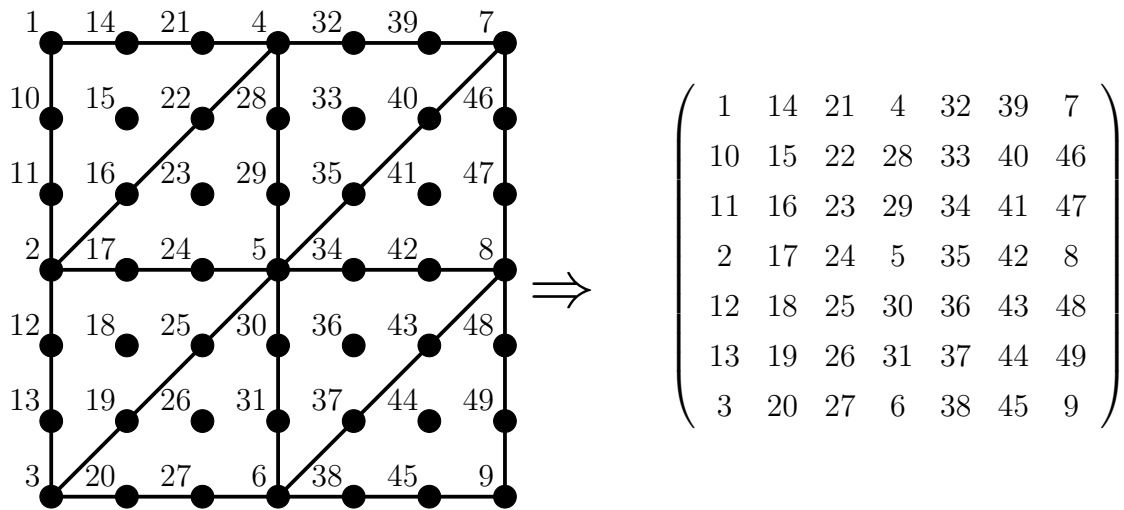
Elsőfokú bázisfüggvények esetén a csomóponti értékek csak a háromszögek/téglalapok csúcsai, ezért nem lesz szükségünk a rácspontokon kívül további pontokra. Másod- ill. harmadfokú bázisfüggvények esetén már a csomópontokat is meg kell sorszámozni. Először mindig a rácspontok kapnak egy sorszámot, utána jönnek csak a csomópontok. Így később könnyebb lesz megkeresni a rácspontokat, hiszen tudjuk, hogy az első  $(n+1) \cdot (m+1)$  sorszámot kapták. Egy mátrixban fogjuk eltárolni a pontok sorszámait. A következő ábrákon a rác- és csomópontok sorszámozása valamint a belőlük készített mátrixok láthatóak. Mivel a pontok sorszámozása háromszögek és téglalapok esetén is ugyanaz, csak az elemek lesznek mások, ezért az ábrákon csak a háromszöggrác szerepel.



2.2. ábra. Felosztás és sorszámozás elsőfokú bázisfüggvények esetén



2.3. ábra. Felosztás és sorszámozás másodfokú bázisfüggvények esetén



2.4. ábra. Felosztás és sorszámozás harmadfokú bázisfüggvények esetén

A sorszámok legenerálása után el kell raktározni az adott indexhez tartozó csúcs koordinátáit is. Ezután az elemeket is megszámozzuk fentről lefelé és balról jobbra. Tehát a bal felső sarokban lévő elem lesz az első elem a jobb alsó sarokban lévő pedig az utolsó. Egy mátrixban tároljuk majd az elemeket. A mátrixnak annyi sora lesz, ahány elem keletkezett a felosztás során és annyi oszlopból fog állni, ahány rácspont és csomópont található az adott elemen.

Így például a 2.2 esetén a mátrix első két sora:

- háromszögelemeknél:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{matrix}$$

- téglalapok esetén:

$$\begin{matrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \end{matrix}$$

- 2.3 esetén háromszögelemeknél:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 4 & 10 & 13 & 12 \\ 5 & 4 & 2 & 17 & 13 & 14 \end{matrix}$$

- téglalapok esetén:

$$\begin{matrix} 2 & 5 & 4 & 1 & 14 & 17 & 12 & 10 & 13 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 16 & 18 & 14 & 11 & 15 \end{matrix}$$

- 2.4 esetén háromszögelemeknél:

1 2 4 10 11 16 22 21 14 15  
5 4 2 29 28 22 16 17 24 23

- téglalapok esetén:

2 5 4 1 17 24 29 28 21 14 10 11 16 23 22 15  
3 6 5 2 20 27 31 30 24 17 12 13 19 26 25 18

### 2.3.2. Mátrixösszefűzés

Az  $\Omega$  felosztása után az  $S$  mátrixot készítjük el.

$$S_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i$$

$\phi_i$ -vel és  $\phi_j$ -vel a bázisfüggvényeket jelöljük. Elemenként fogjuk összefűzni a mátrixot. Ez azt jelenti, hogy minden  $T_s$  elemen kiszámoljuk a következő integrált:

$$\int_{T_s} \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_l,$$

ahol  $\phi_k$  és  $\phi_l$  azon bázisfüggvények, amelyekre igaz, hogy  $T_s \subset \text{supp}(\phi_k) \cap \text{supp}(\phi_l)$ . Ezeket az integrálokat egy  $E$  referenciaelem segítségével számoljuk ki. Tehát a referenciaelemen integráljuk az  $E$ -n definiált bázisfüggvényeket, majd integráltranszformáció segítségével kapjuk az aktuális  $T_s$ -en vett integrál értékét. A referenciaelemek az elemek típusától függően a következők:

- Ha háromszögre bontjuk az  $\Omega$  tartományt, akkor az  $E$  a  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  és  $(0, 1)$  csúcsokkal rendelkező háromszög.
- Ha téglalapokra bontjuk az  $\Omega$  tartományt, akkor az  $E$  a  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  és  $(1, 1)$  pontok által meghatározott négyzet.

A referenciaelemen definiált bázisfüggvények:

- $p = 1$ , háromszög:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_1 &= 1 - x - y \\ \tilde{\phi}_2 &= x \\ \tilde{\phi}_3 &= y \end{aligned}$$

- $p = 1$ , téglalap:

$$\tilde{\phi}_1 = (x-1)(y-1)$$

$$\tilde{\phi}_2 = x(1-y)$$

$$\tilde{\phi}_3 = xy$$

$$\tilde{\phi}_4 = y(1-x)$$

- $p = 2$ , háromszög:

$$\tilde{\phi}_1 = 2(1-x-y) \left( \frac{1}{2} - x - y \right)$$

$$\tilde{\phi}_2 = 2x \left( x - \frac{1}{2} \right)$$

$$\tilde{\phi}_3 = 2y \left( y - \frac{1}{2} \right)$$

$$\tilde{\phi}_4 = 4x(1-x-y)$$

$$\tilde{\phi}_5 = 4xy$$

$$\tilde{\phi}_6 = 4y(1-x-y)$$

- $p = 2$ , téglalap:

$$\tilde{\phi}_1 = 4 \left( x - \frac{1}{2} \right) (x-1) \left( y - \frac{1}{2} \right) (y-1)$$

$$\tilde{\phi}_2 = 4 \left( x - \frac{1}{2} \right) x \left( y - \frac{1}{2} \right) (y-1)$$

$$\tilde{\phi}_3 = 4 \left( x - \frac{1}{2} \right) x \left( y - \frac{1}{2} \right) y$$

$$\tilde{\phi}_4 = 4 \left( x - \frac{1}{2} \right) (x-1) \left( y - \frac{1}{2} \right) y$$

$$\tilde{\phi}_5 = -8x(x-1) \left( y - \frac{1}{2} \right) (y-1)$$

$$\tilde{\phi}_6 = -8 \left( x - \frac{1}{2} \right) xy(y-1)$$

$$\tilde{\phi}_7 = -8x(x-1) \left( y - \frac{1}{2} \right) y$$

$$\tilde{\phi}_8 = -8 \left( x - \frac{1}{2} \right) (x-1) y(y-1)$$

$$\tilde{\phi}_9 = 16x(x-1)y(y-1)$$

- $p = 3$ , háromszög:

$$\tilde{\phi}_1 = \frac{9}{2}(1-x-y) \left(\frac{1}{3}-x-y\right) \left(\frac{2}{3}-x-y\right)$$

$$\tilde{\phi}_2 = \frac{9}{2}x \left(x-\frac{1}{3}\right) \left(x-\frac{2}{3}\right)$$

$$\tilde{\phi}_3 = \frac{9}{2}y \left(y-\frac{1}{3}\right) \left(y-\frac{2}{3}\right)$$

$$\tilde{\phi}_4 = \frac{27}{2}x(1-x-y) \left(\frac{2}{3}-x-y\right)$$

$$\tilde{\phi}_5 = \frac{27}{2}x \left(x-\frac{1}{3}\right) (1-x-y)$$

$$\tilde{\phi}_6 = \frac{27}{2}xy \left(x-\frac{1}{3}\right)$$

$$\tilde{\phi}_7 = \frac{27}{2}xy \left(y-\frac{1}{3}\right)$$

$$\tilde{\phi}_8 = \frac{27}{2}(1-x-y)y \left(y-\frac{1}{3}\right)$$

$$\tilde{\phi}_9 = \frac{27}{2}(1-x-y)y \left(\frac{2}{3}-x-y\right)$$

$$\tilde{\phi}_{10} = 27xy(1-x-y)$$

- $p = 3$ , téglalap:

$$\tilde{\phi}_1 = \frac{81}{4} \left(x-\frac{1}{3}\right) \left(x-\frac{2}{3}\right) (x-1) \left(y-\frac{1}{3}\right) \left(y-\frac{2}{3}\right) (y-1)$$

$$\tilde{\phi}_2 = -\frac{81}{4} \left(x-\frac{1}{3}\right) \left(x-\frac{2}{3}\right) x \left(y-\frac{1}{3}\right) \left(y-\frac{2}{3}\right) (y-1)$$

$$\tilde{\phi}_3 = \frac{81}{4} \left(x-\frac{1}{3}\right) \left(x-\frac{2}{3}\right) x \left(y-\frac{1}{3}\right) \left(y-\frac{2}{3}\right) y$$

$$\tilde{\phi}_4 = -\frac{81}{4} \left(x-\frac{1}{3}\right) \left(x-\frac{2}{3}\right) (x-1) \left(y-\frac{1}{3}\right) \left(y-\frac{2}{3}\right) y$$

$$\tilde{\phi}_5 = -\frac{243}{4} \left(x-\frac{1}{3}\right) \left(x-\frac{2}{3}\right) x \left(y-\frac{1}{3}\right) \left(y-\frac{2}{3}\right) (y-1)$$

$$\tilde{\phi}_6 = \frac{243}{4} \left(x-\frac{1}{3}\right) x (x-1) \left(y-\frac{1}{3}\right) \left(y-\frac{2}{3}\right) (y-1)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_7 &= \frac{243}{4} \left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x - \frac{2}{3}\right) x \left(y - \frac{1}{3}\right) \left(y - \frac{2}{3}\right) y \\
\tilde{\phi}_8 &= -\frac{243}{4} \left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x - \frac{2}{3}\right) x \left(y - \frac{1}{3}\right) y (y - 1) \\
\tilde{\phi}_9 &= -\frac{243}{4} \left(x - \frac{1}{3}\right) x (x - 1) \left(y - \frac{1}{3}\right) \left(y - \frac{2}{3}\right) y \\
\tilde{\phi}_{10} &= \frac{243}{4} x \left(x - \frac{2}{3}\right) (x - 1) \left(y - \frac{1}{3}\right) \left(y - \frac{2}{3}\right) y \\
\tilde{\phi}_{11} &= \frac{243}{4} \left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x - \frac{2}{3}\right) (x - 1) \left(y - \frac{1}{3}\right) y (y - 1) \\
\tilde{\phi}_{12} &= -\frac{243}{4} \left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x - \frac{2}{3}\right) (x - 1) \left(y - \frac{1}{3}\right) y (y - 1) \\
\tilde{\phi}_{13} &= \frac{729}{4} x \left(x - \frac{2}{3}\right) (x - 1) y \left(y - \frac{2}{3}\right) (y - 1) \\
\tilde{\phi}_{14} &= -\frac{729}{4} \left(x - \frac{1}{3}\right) x (x - 1) y \left(y - \frac{2}{3}\right) (y - 1) \\
\tilde{\phi}_{15} &= \frac{729}{4} \left(x - \frac{1}{3}\right) x (x - 1) \left(y - \frac{1}{3}\right) y (y - 1) \\
\tilde{\phi}_{16} &= -\frac{729}{4} x \left(x - \frac{2}{3}\right) (x - 1) \left(y - \frac{1}{3}\right) y (y - 1)
\end{aligned}$$

Az integrálok kiszámolásához szükségünk lesz arra az affín transzformációra, ami az  $E$  referenciaelemet az aktuális elemre képezi. Az affín transzformációt írjuk fel  $Ax + b$  alakban, ahol  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $b \in \mathbb{R}^2$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ . Az aktuális elem három csúcsát jelölje  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ . Tegyük fel, hogy a következő módon képezi le a referenciaelemet a transzformáció:

$$\begin{aligned}
A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\
A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b &= \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ekkor az  $A$  és  $b$  a következő:

$$A = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Téglalapelemek esetén ezután az  $(1, 1)$  csúcsot a transzformáció automatikusan a téglalap negyedik,  $(x_4, y_4)$ -gyel jelölt csúcsába képezi. Jelöljük  $Cx + d$ -vel az előző affin transzformáció inverzét, azaz a  $Cx + d$  az adott  $T_s$  elemet képezi a referenciaelemre. Így a  $T_s$  elemen vett  $\phi_i$  bázisfüggvények és a referenciaelem  $\tilde{\phi}_i$  bázisfüggvényei között igaz az alábbi összefüggés:

$$\phi_i(x) = \tilde{\phi}_i(Cx + d). \quad (2.3)$$

A  $T_s$  elemen kiszámolt integrálok értékét egy lokális mátrixban tároljuk el:

$$Loc_{ij} = \int_{T_s} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j.$$

$Loc$  mátrix elemeinek kiszámolása:

$$\int_{T_s} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j = \int_{T_s} \sum_{l=1}^2 \partial_l \phi_i \partial_l \phi_j.$$

Az integrál további átalakításához használjuk fel a 2.3 összefüggést:

$$\begin{aligned} \int_{T_s} \sum_{l=1}^2 \partial_l \phi_i \cdot \partial_l \phi_j &= \int_{T_s} \sum_{l=1}^2 \partial_l \tilde{\phi}_i(Cx + d) \cdot \partial_l \tilde{\phi}_j(Cx + d) = \\ &= \int_{T_s} \sum_{l=1}^2 \left( \sum_{m=1}^2 \partial_m \tilde{\phi}_i \cdot C_{ml} \right) \left( \sum_{n=1}^2 \partial_n \tilde{\phi}_j \cdot C_{nl} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Számoljuk ki a következő integrál értékét  $s = Cx + d$  helyettesítéssel:

$$\int_{T_s} \partial_m \tilde{\phi}_i(Cx + d) \partial_n \tilde{\phi}_j(Cx + d) = \int_E \partial_m \tilde{\phi}_i(s) \cdot \partial_n \tilde{\phi}_j(s) \cdot |\det A|. \quad (2.5)$$

Az  $\int_E \partial_m \tilde{\phi}_i(s) \partial_n \tilde{\phi}_j(s)$  értéket tároljuk el egy  $M_{mn}$  mátrix  $i$ -edik sorának  $j$ -edik elemeként, hiszen erre az értékre a felosztás minden eleme esetén szükségünk lesz.

Az  $M_{mn}$  mátrixok segítségével a 2.4 kifejezésből a következőt kapjuk:

$$|\det A| \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 (M_{mn})_{ij} \cdot C_{ml} \cdot C_{nl}. \quad (2.6)$$

Így a lokális mátrix a következő lesz:

$$Loc = |\det A| \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 (M_{mn}) \cdot C_{ml} \cdot C_{nl}. \quad (2.7)$$

Összefoglalva, tehát a  $\mathcal{T}_h$  felbontás elkészítése után kiszámoljuk az  $M_{mn}$  mátrixot, majd minden elemre legyártjuk a  $Loc$  mátrixot és ezt fűzzük be  $S$ -be a megfelelő helyre. A befűzés azt jelenti, hogy ha a  $Loc$  mátrix adott eleme a  $\phi_i$  és  $\phi_j$  bázisfüggvényekhez tartozik, akkor azt az  $S$   $j$ -edik sorának  $i$ -edik eleméhez adjuk hozzá.



### 2.3.3. $w$ kiszámítása

Az  $S$  mátrix összefűzése után szükségünk van az egyenletrendszer jobb oldalának, a  $w$  vektornak a meghatározására.

$$w_i = l\phi_i = \int_{\Omega} f\phi_i - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla \phi_i, \quad (2.8)$$

ahol  $u_0|_{\partial\Omega} = g$ . A második tag átírható a következő alakba:

$$\int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla \phi_i = a(u_0, \phi_i) = \sum_{(x_j, y_j) \in \partial\Omega} g(x_j, y_j) a(\phi_j, \phi_i), \quad (2.9)$$

ahol  $(x_j, y_j)$  jelöli azt a pontot, ahol a  $\phi_j$  bázisfüggvény értéke 1. Mivel az  $a(\phi_j, \phi_i)$  az adott elemhez tartozó  $Loc$  mátrix egyik eleme, ezért a numerikus integrálást csak az  $\int_{\Omega} f\phi_i$  esetében kell elvégeznünk. Ezen értékek meghatározásához Gauss-kvadraturát használtam:

$$\sum_k s_k \cdot f(x_k) \phi_i(x_k), \quad (2.10)$$

ahol  $x_k \in \mathbb{R}^2$  a  $k$ . integrálási alappont,  $s_k$  pedig az ehhez tartozó súly. A numerikus módszer háromszögön való integrálás esetén a  $(-1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  és  $(1, -1)$  csúcsokkal rendelkező  $T_0$  háromszögön van definiálva. Téglalapok esetén a  $T_0$  a  $(-1, -1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, 1)$  és  $(1, -1)$  pontok által meghatározott téglalap. Ezért ismét integráltranszformáció alkalmazására lesz szükségünk. Az integrálást elemenként végezzük el. Jelölje  $Bx + e$  azt az affín leképezést, ami a  $T_0$ -t az  $E$  referenciaelembe viszi. Így a  $T_0$  az  $ABx + Ae + b$  leképezéssel az aktuális  $T_j$ -be vihető. Ekkor

$$\int_{T_j} f(x) \phi_i(x) = |\det AB| \int_{T_0} f(ABx + Ae + b) \cdot \phi_i(ABx + Ae + b). \quad (2.11)$$

A bázisfüggvények közötti 2.3 összefüggést felhasználva:

$$|\det AB| \int_{T_0} f(ABx + Ae + b) \cdot \phi_i(ABx + Ae + b) = \quad (2.12)$$

$$|\det AB| \int_{T_0} f(ABx + Ae + b) \cdot \tilde{\phi}_i(CABx + CAe + Cb + d). \quad (2.13)$$

Mivel az  $Ax + b$  leképezés a  $Cx + d$  leképezés inverze, ezért  $CA = I$  és  $Cb + d = 0$ . A 2.13 ezért az alábbi módon írható át:

$$|\det AB| \int_{T_0} f(ABx + Ae + b) \cdot \tilde{\phi}_i(Bx + e). \quad (2.14)$$

Ezzel az  $x_k$  pontok kiszámítása:

$$x_k = ABx'_k + Ae + b, \quad (2.15)$$

ahol  $x'_k$  a  $T_0$  elemhez tartozó integrálási alappontok. A  $\tilde{\phi}_i(Bx + e)$  értékeket nem kell minden elemén újraszámolni, hiszen nem függ, attól, hogy melyik elemén integrálunk.

### 2.3.4. $H^1(\Omega)$ és $L^2(\Omega)$ norma

Az  $S$  és  $w$  kiszámolása után megoldjuk az  $Sc = w$  egyenletrendszert, ahol a  $c_i$  értékek lesznek a bázisfüggvények együtthatói. Az  $u_h$  közelítő megoldás:

$$u_h = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i.$$

Ezután az  $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ -t és az  $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ -t számoljuk ki, ahol  $u$  a pontos megoldás. A  $H^1(\Omega)$  norma kiszámolásához szükségünk lesz a  $\partial_x(u - u_h)$  és a  $\partial_y(u - u_h)$  függvényekre is, hiszen

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_x(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_y(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

ahol  $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u - u_h|^2$ . Az integrálok meghatározása itt is Gauss-kvadrátúrával történik. Az  $u - u_h$ ,  $\partial_x(u - u_h)$  és a  $\partial_y(u - u_h)$  integrálási alappontokban vett értékeit úgy számítjuk ki, hogy a rácspontokban és a csomópontokban kiszámolt  $u_h$  értékek segítségével interpolációt végzünk. Az interpoláció során háromszögek esetén egy legfeljebb  $p$ -ed fokú polinomot illesztünk az adott pontokra, téglalapok esetén pedig változójukban legfeljebb  $p$ -ed fokú polinomot keresünk.

## 3. fejezet

# Nemfolytonos Galjorkin-módszer (DG)

### 3.1. A módszer ismertetése

A szakdolgozatban vizsgált másik végeelem-módszer a nemfolytonos interior penalty Galjorkin-módszer. Továbbra is a következő elliptikus peremérték-feladatot szeretnénk megoldani. Keressük azt az  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  függvényt, melyre

$$-\Delta u = f \quad \Omega\text{-n}, \quad (3.1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = g, \quad (3.2)$$

ahol  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  korlátos tartomány,  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ .

A gyenge alak meghatározásához osszuk fel először az  $\Omega$  tartományt az alábbi módon.  $\tau_h = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ , ahol  $\cup_{i=1}^m E_i = \Omega$  és  $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ , ha  $i \neq j$ . Nemfolytonos Galjorkin-módszer esetében a  $\tau_h$  felbontásnak nem kell teljesítenie azt a feltételt, hogy  $E_i \cap E_j$  csak csúcs, teljes oldal vagy üres halmaz lehet. A módszer akkor is működik, ha megengedünk ún. "függő csúcsokat" (angolul hanging node), ahol  $E_i \cap E_j$  pl. nem az egyik elem teljes oldala, hanem az elem oldalának csak egy szakasza.

**3.1.1. Definíció.**  $H^s(\tau_h) = \{v \in L^2(\Omega) : \forall E_i \in \tau_h v|_{E_i} \in H^s(E_i)\}$

$H^s(\tau_h)$  neve tört Szoboljev tér, ami nem egyezik meg a törtrendű Szoboljev tér definíciójával. Itt a tört kifejezés arra utal, hogy elemenként  $H^s$ -beli a függvény. A gyenge alak előállításához, most is válasszunk egy  $v$  tesztfüggvényt. Legyen  $v \in H^s(\Omega)$ , ahol  $s \geq 2$ . Szorozzuk be  $v$ -vel 3.1-et és integráljuk egy  $E_i$  elemen:

$$\int_{E_i} -\Delta u v = \int_{E_i} f v.$$

Ezután alkalmazzuk a Green-tételt és jelölje  $\nu_{E_i}$  az  $E_i$  elem kifelé mutató normális vektorát:

$$\int_{E_i} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial E_i} (\partial_{\nu_{E_i}} u) v = \int_{E_i} f v.$$

Miután minden  $E_i$  elemen elvégeztük a szorzást és az integrálást, adjuk össze az egyenleteket. Így a következőt kapjuk:

$$\sum_{E_i \in \tau_h} \int_{E_i} \nabla u \cdot \nabla v - \sum_{E_i \in \tau_h} \int_{\partial E_i} (\partial_{\nu_{E_i}} u) v = \int_{\Omega} f v. \quad (3.3)$$

Ezt a kifejezést fogjuk tovább alakítani, de előtte definiáljuk az ugrás és az átlag fogalmát. Jelölje  $\Gamma_h$  a belső élek halmazát,  $\nu_e$  pedig az élre merőleges egységvektort. Ha az  $e$  él az  $E_1$  és  $E_2$  elemet határolja, akkor  $\nu_e$  azon egységvektor, ami  $E_1$ -ről  $E_2$ -re mutat.

**3.1.2. Definíció.**  $v$  átlagát jelölje  $\{v\}$  és  $\{v\} := \frac{1}{2}v|_{E_1} + \frac{1}{2}v|_{E_2}$ .

**3.1.3. Definíció.**  $v$  ugrására a  $[[v]]$  jelölést használjuk majd, ahol  $[[v]] := v|_{E_1} - v|_{E_2}$ .

Ha az  $e$  él peremél, akkor  $\{v\} = [[v]] = v|_{E_1}$ .

Most vizsgáljuk a 3.3 egyenlet bal oldalának 2. tagját. Ehhez tekintsünk egy  $E_i$  és egy  $E_j$  elemet, melyek közös élet jelölje  $e$ . Ekkor  $e$  belső él,  $\nu_{E_i}$  és  $\nu_{E_j}$  legyenek az  $e$ -re merőleges egységvektorok,  $\nu_{E_i}$   $E_i$ -ről  $E_j$ -re,  $\nu_{E_j}$  pedig  $E_j$ -ről  $E_i$ -re mutasson. Így fennáll, hogy  $\nu_{E_j} = -\nu_{E_i}$ . Ekkor,

$$\int_e (\partial_{\nu_{E_i}} u|_{E_i}) v|_{E_i} + \int_e (\partial_{\nu_{E_j}} u|_{E_j}) v|_{E_j} = \int_e (\partial_{\nu_{E_i}} u|_{E_i}) v|_{E_i} - (\partial_{\nu_{E_i}} u|_{E_j}) v|_{E_j} = \int_e [[(\partial_{\nu_{E_i}} u) v]].$$

Minden  $e \in \tau_h$ -ra szummázva:

$$\sum_{E_i \in \tau_h} \int_{\partial E_i} \partial_{\nu_{E_i}} u v = \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e [[\partial_{\nu_e} u v]] + \sum_{e \in \partial \Omega} \int_e (\partial_{\nu_e} u) v. \quad (3.4)$$

Mivel  $u$  folytonosan differenciálható, ezért  $\partial_{\nu_e} u = \{\partial_{\nu_e} u\}$ . Ennek következményeként,

$$[[(\partial_{\nu_e} u) v]] = ((\partial_{\nu_e} u) v)|_{E_i} - ((\partial_{\nu_e} u) v)|_{E_j} = (\partial_{\nu_e} u) [[v]] = \{\partial_{\nu_e} u\} [[v]]. \quad (3.5)$$

3.4 és 3.5 felhasználásával 3.3 a következő alakba írható,

$$\sum_{E_i \in \tau_h} \int_{E_i} \nabla u \cdot \nabla v - \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \{\partial_{\nu_e} u\} [[v]] + \sum_{e \in \partial \Omega} \int_e \partial_{\nu_e} u v = \int_{\Omega} f v. \quad (3.6)$$

A 3.5-öt a pereméleken vett integrálok esetén alkalmazva kapjuk, hogy

$$\sum_{E_i \in \tau_h} \int_{E_i} \nabla u \cdot \nabla v - \sum_{e \in \tau_h} \int_e \{\partial_{\nu_e} u\} [[v]] = \int_{\Omega} f v.$$

A bal oldalon található kifejezés még nem lenne jó bilineáris formának, mert nem koercív. Ezért adjuk hozzá a következő tagot,

$$\sum_{e \in \tau_h} \frac{\sigma}{|e|} \int_e \llbracket u \rrbracket \llbracket v \rrbracket.$$

A koercivitas csak elég nagy  $\sigma$  esetén fog teljesülni. A dolgozatban  $\sigma$  értéke a Süli Endréék által javasolt  $10p^2$ . A  $\sigma$  értékéről részletesebben [1]-ben olvashatunk. Ezenkívül hozzáadunk még egy tagot, amivel elérhetjük azt is, hogy szimmetrikus legyen a bilineáris forma:

$$\varepsilon \sum_{e \in \tau_h} \int_e \{\{\partial_{\nu_e} v\}\} \llbracket u \rrbracket.$$

Az  $\varepsilon$  értékét  $0, 1, -1$  közül szokták választani.  $\varepsilon = -1$  esetén a szimmetria is fennáll, ezért a szakdolgozat csak ezzel az esettel foglalkozik.

Így a bilineáris formát az alábbi módon definiáljuk:

$$\begin{aligned} a_{DG}(u, v) &:= \sum_{E_i \in \tau_h} \int_{E_i} \nabla u \cdot \nabla v - \sum_{e \in \tau_h} \int_e \{\{\partial_{\nu_e} u\}\} \llbracket v \rrbracket + \varepsilon \sum_{e \in \tau_h} \int_e \{\{\partial_{\nu_e} v\}\} \llbracket u \rrbracket \\ &\quad + \sum_{e \in \tau_h} \frac{\sigma}{|e|} \int_e \llbracket u \rrbracket \llbracket v \rrbracket. \end{aligned}$$

A két tag hozzáadásakor, a jobb oldalon csak akkor adtunk hozzá nemnulla értéket, ha  $e \in \partial\Omega$ , ugyanis mindkét tag tartalmazza  $\llbracket u \rrbracket$ -t, ami pedig 0 a belső éleken. Így a jobb oldalon a következő lineáris funkcionált kapjuk:

$$l_{DG}v := \int_{\Omega} f v + \sum_{e \in \partial\Omega} \left( \varepsilon \partial_{\nu_e} v + \frac{\sigma}{|e|} v \right) g.$$

**3.1.4. Állítás.** *A bilineáris forma és a lineáris funkcionál független  $\nu_e$  választásától.*

*Bizonyítás:* Legyen  $e$  egy olyan él, melyre  $E_i \cap E_j = e$ . Ekkor jelölje  $n_{ij}$  azt az  $e$ -re merőleges normálvektort, ami  $E_i$ -ről  $E_j$ -re mutat. Ha  $\nu_e$ -nek  $\nu_{ij}$ -t választjuk, akkor

$$\begin{aligned} \{\{\partial_{\nu_{ij}} v\}\} \llbracket u \rrbracket &= \left( \frac{\partial_{\nu_{ij}} v|_{E_i} + \partial_{\nu_{ij}} v|_{E_j}}{2} \right) (u|_{E_i} - u|_{E_j}) \\ &= \left( \frac{\partial_{-\nu_{ij}} v|_{E_i} + \partial_{-\nu_{ij}} v|_{E_j}}{2} \right) (u|_{E_j} - u|_{E_i}) \\ &= \left( \frac{\partial_{\nu_{ji}} v|_{E_j} + \partial_{\nu_{ji}} v|_{E_i}}{2} \right) (u|_{E_j} - u|_{E_i}) = \{\{\partial_{\nu_{ji}} v\}\} \llbracket u \rrbracket. \end{aligned}$$

■

**3.1.5. Definíció.** *A Dirichlet peremérték-feladat gyenge megoldásának közelítése az  $u \in H^s(\Omega)$  ( $s \geq 2$ ), melyre teljesül, hogy  $a_{DG}(u, v) = l_{DG}v \quad \forall v \in H^s(\Omega)$ .*

A folytonos Galjorkin-módszerhez hasonlóan a közelítő megoldást itt is egy  $V_{DG}$  véges dimenziós altérben keressük. A  $V_{DG} \subset H^s(\Omega)$  altér lehet pl. az elemenként legfeljebb  $p$ -ed fokú polinomok tere vagy téglalapelemek esetén pl. az elemenként változóikban legfeljebb  $p$ -ed fokú polinomok tere.

A feladat során az  $u_{DG} \in V_{DG}$  közelítő megoldást keressük, melyre

$$a_{DG}(u_{DG}, v) = lv \quad \forall v \in V_{DG}. \quad (3.7)$$

Minden elemhez  $N_{loc}$  db bázisfüggvény tartozik. Így a  $V_{DG}$  bázisfüggvényeinek száma összesen  $N_{loc} \cdot (\text{elemek száma})$ , amit jelöljünk  $N$ -nel, a bázisfüggvényeket pedig  $\phi_i$ -vel.

Az  $u_{DG}$  megoldást a bázisfüggvények segítségével szeretnénk felírni:

$$u_{DG} = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j.$$

Elég ha a bázisfüggvényekre teljesül a 3.7, azaz

$$a_{DG}(u_{DG}, \phi_i) = l\phi_i \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

A bilinearitás miatt,

$$\sum_{i=1}^N c_j a_{DG}(\phi_j, \phi_i) = l\phi_i \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Ez egy lineáris egyenletrendszer a  $c_i$  együtthatókra, azaz  $Sc = w$ , ahol  $S_{i,j} = a_{DG}(\phi_j, \phi_i)$  és  $w_i = l\phi_i$ . Az egyenletrendszer megoldása után a  $c_i$  együtthatók segítségével már meghatározható az  $u_{DG}$  közelítő megoldás. A módszer konvergenciájáról szóló tételek a 4. fejezetben találhatóak.

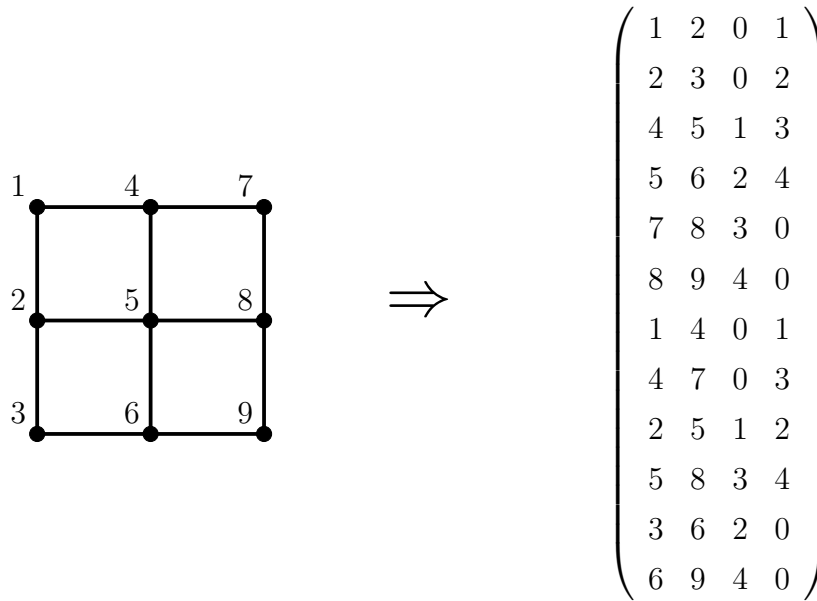
## 3.2. A nemfolytonos módszer implementálása

A nemfolytonos Galjorkin-módszer kódjai közül a téglalapelemes kódokat implementáltam  $V_{DG} = P_k(\tau_h)$  és  $V_{DG} = Q_k(\tau_h)$  esetén, ahol  $P_k(\tau_h) = \{\text{az elemenként legfeljebb } p\text{-ed fokú polinomok tere}\}$ ,  $Q_k(\tau_h) = \{\text{az elemenként változóikban legfeljebb } p\text{-ed fokú polinomok tere}\}$ . A  $p$  értéke 1, 2, 3 volt. A témavezetőmtől kaptam háromszögelemes kódokat csak futtattam az összehasonlítás során.

### 3.2.1. $\tau_h$ felbontás

Első lépésként most is a felbontást kell elkészíteni. Nem használtam függő csúcsokat, ezért ugyanolyan felosztást készítettem, mint a nemfolytonos esetben. A

rácsponatok sorszámozása, csúcsok, elemek eltárolása mellett, szükség van az élek nyilvántartására is. Az éleket egy (élek száma)  $\times$  4 méretű mátrixban tároltam. Az  $i$ -edik sor első és második eleme azon két csúcs sorszáma, amiket az adott él összeköt. A harmadik elem vízszintes élek esetén az él felett lévő téglalapelem sorszáma, a negyedik elem az él alatti téglalapelem sorszáma. Függőleges éleknél a bal oldali téglalapelem sorszáma a harmadik helyre kerül, a jobb oldali téglalapelem sorszámát pedig a negyedik elemként tároljuk el. Ha az adott él a peremen található, azaz csak egy elemet határol, akkor az élmátrixban a hiányzó elem sorszámához nullát írunk. Nézzünk egy példát az élmátrixra  $p = 1$  esetén!



3.1. ábra. Élmátrix  $2 \times 2$ -es felosztás esetén

### 3.2.2. Mátrixösszefűzés

Az  $S$  mátrix kiszámolása itt is mátrixösszefűzéssel történik.

$$S_{ij} = \sum_{E_i \in \tau_h} \int_{E_i} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i - \sum_{e \in \tau_h} \int_e \{ \partial_{\nu_e} \phi_j \} [ \phi_i ] + \varepsilon \sum_{e \in \tau_h} \int_e \{ \partial_{\nu_e} \phi_i \} [ \phi_j ] + \sum_{e \in \tau_h} \frac{\sigma}{|e|} \int_e [ \phi_j ] [ \phi_i ].$$

Most is elemenként fogunk haladni. A bázisfüggvények  $x^k y^l$  alakúak lesznek.  $V_{DG} = P_k(\tau_h)$  esetén  $k, l = 0, 1, \dots, p$  és  $k + l \leq p$ ,  $Q_k(\tau_h)$  altérnél  $k, l = 0, 1, \dots, p$ . Így  $n \times m$ -es felosztás esetén egy elem a bázisfüggvények száma  $P_k(\tau_h)$ -nál  $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$ ,  $Q_k(\tau_h)$ -nál  $(p+1)^2$ . Ha a bázisfüggvények számát egy elemen  $N$ -nel jelöljük, akkor összesen  $Nnm$  függvényünk lesz, azaz ennyi sora és oszlopa lesz az  $S$  mátrixnak. Az  $S_{ij}$ -ben szereplő tagokat szétválasztjuk az elem vett integrálokra és az éleken

vett integrálokra. Az elemen vett integrálok esetén hasonlóan járunk el, mint a folytonos módszernél. Minden elem esetén kiszámoljuk az affin leképezést, ami a referenciaelemet az aktuális elemre képezi. Ezután elkészítjük a *Loc* mátrixot és befűzzük *S* megfelelő helyeire. Ha a *Loc* mátrix az *i*. elemhez tartozik, akkor a befűzés a következőképpen történik:

$$\begin{aligned} \text{befuzes\_helye} &= ((i-1)N+1):iN; \\ \text{S}(\text{befuzes\_helye}, \text{befuzes\_helye}) &= \text{Loc}; \end{aligned}$$

Az éleken vett integrálok esetén bontsuk szét  $S_{ij}$  maradék tagjait:

$$-\sum_{e \in \tau_h} \int_e \{\{\partial_{\nu_e} \phi_j\}\} [\phi_i] + \varepsilon \sum_{e \in \tau_h} \int_e \{\{\partial_{\nu_e} \phi_i\}\} [\phi_j] + \sum_{e \in \tau_h} \frac{\sigma}{|e|} \int_e [\phi_j] [\phi_i] = m_{11} + m_{12} + m_{22} + m_{21}.$$

$m_{kl}$  az integrálokból csak azokat a tagokat tartalmazza, ahol a  $\phi_i$  bázisfüggvényt a  $k$ -adik elemen, a  $\phi_j$ -t pedig az  $l$ -edik elemen vesszük. Az ugrások és átlagok kiszámolásához a  $\nu_e$  vektort az alábbi módon választjuk. Peremélek esetén a  $\nu_e$  a kifelé mutató normális egységvektor, függőleges belső éleknél  $\nu_e = (1, 0)$ , vízszintes belső éleknél  $\nu_e = (0, 1)$ . Az  $m_{kl}$  kiszámításakor  $\phi_{E_1, i} := \phi_i|_{E_1}$  és  $\phi_{E_2, i} := \phi_i|_{E_2}$ . Az  $m_{kl}$  értékeket mátrixokba rendezzük a következő módon:

$$\begin{aligned} (M_{11})_{ij} &= -\frac{1}{2} \int_e \partial_{\nu_e} \phi_{E_1, j} \cdot \phi_{E_1, i} + \frac{\varepsilon}{2} \int_e \partial_{\nu_e} \phi_{E_1, i} \cdot \phi_{E_1, j} + \frac{\sigma}{|e|} \int_e \phi_{E_1, j} \cdot \phi_{E_1, i} \\ (M_{12})_{ij} &= -\frac{1}{2} \int_e \partial_{\nu_e} \phi_{E_2, j} \cdot \phi_{E_1, i} - \frac{\varepsilon}{2} \int_e \partial_{\nu_e} \phi_{E_1, i} \cdot \phi_{E_2, j} - \frac{\sigma}{|e|} \int_e \phi_{E_2, j} \cdot \phi_{E_1, i} \\ (M_{21})_{ij} &= \frac{1}{2} \int_e \partial_{\nu_e} \phi_{E_1, j} \cdot \phi_{E_2, i} + \frac{\varepsilon}{2} \int_e \partial_{\nu_e} \phi_{E_2, i} \cdot \phi_{E_1, j} - \frac{\sigma}{|e|} \int_e \phi_{E_2, j} \cdot \phi_{E_2, i} \\ (M_{22})_{ij} &= \frac{1}{2} \int_e \partial_{\nu_e} \phi_{E_2, j} \cdot \phi_{E_2, i} - \frac{\varepsilon}{2} \int_e \partial_{\nu_e} \phi_{E_2, i} \cdot \phi_{E_2, j} + \frac{\sigma}{|e|} \int_e \phi_{E_2, j} \cdot \phi_{E_2, i}. \end{aligned}$$

Ezután az  $M_{ij}$  mátrixokat is befűzzük az  $S$  mátrixba. Tegyük fel, hogy az aktuális  $e$  élhez tartozó  $E_1$  elem az  $i$ -edik sorszámú elem, az  $E_2$  elem pedig a  $j$ -edik elem. Ekkor az összefűzés:

$$\begin{aligned} \text{E1en\_levok} &= ((i-1)(p+1)^2+1):i(p+1)^2; \\ \text{E2n\_levok} &= ((j-1)(p+1)^2+1):j(p+1)^2; \\ \text{S}(\text{E1en\_levok}, \text{E1en\_levok}) &= \text{S}(\text{E1en\_levok}, \text{E1en\_levok}) + \text{M11}; \\ \text{S}(\text{E2n\_levok}, \text{E2n\_levok}) &= \text{S}(\text{E2n\_levok}, \text{E2n\_levok}) + \text{M22}; \\ \text{S}(\text{E1en\_levok}, \text{E2n\_levok}) &= \text{S}(\text{E1en\_levok}, \text{E2n\_levok}) + \text{M12}; \\ \text{S}(\text{E2n\_levok}, \text{E1en\_levok}) &= \text{S}(\text{E2n\_levok}, \text{E1en\_levok}) + \text{M21}; \end{aligned}$$

Peremélek esetén egy  $\tilde{M}_{11}$  mátrixot készítünk el és ezt fűzzük az  $S$  mátrixba.

$$(\tilde{M}_{11})_{ij} = -\int_e \partial_{\nu_e} \phi_{E_1, j} \cdot \phi_{E_1, i} + \varepsilon \int_e \partial_{\nu_e} \phi_{E_1, i} \cdot \phi_{E_1, j} + \frac{\sigma}{|e|} \int_e \phi_{E_1, j} \cdot \phi_{E_1, i}$$



### 3.2.3. $w$ kiszámítása

A  $w$  kiszámításánál ismét Gauss-kvadratúrát használtam.

$$w_i = \int_{\Omega} f \phi_i + \sum_{e \in \partial\Omega} \varepsilon \left( \partial_{\nu_e} \phi_i + \frac{\sigma}{|e|} \phi_i \right) g,$$

ahol  $g|_{\partial\Omega}$ .

Az első tagot, ugyanúgy számoljuk, mint a folytonos módszer esetében.

$$\int_{\Omega} f \phi_i \approx |\det AB| \sum_k s_k \cdot f(ABx_k + Ae + b) \cdot \tilde{\phi}_i(Bx_k + e),$$

ahol  $s_k$  a súlyok,  $x_k$  pedig az integrálási alappontok a  $(-1, -1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, -1)$  és  $(1, 1)$  pontok által meghatározott négyzet esetén. A  $w_i$  2. tagját csak a peremélek esetén kell kiszámolnunk, mivel ez a tag belső élek esetén nulla.

### 3.2.4. $L^2(\Omega)$ norma

Az  $Sc = w$  egyenletrendszer megoldása után a hibafüggvény  $L^2(\Omega)$  normáját számoljuk ki,  $\|u - u_{DG}\|_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} |u - u_{DG}|^2$ . A norma értékének meghatározásához szükségünk lesz  $u_{DG}$  értékére az integrálási alappontokban. Ehhez kiszámoljuk  $u_{DG}$  értékét a rácspontokban és csomópontokban majd elemenként interpolációt végzünk az  $u_{DG}$  meghatározása végett. Az interpolációnál  $P_k(\tau_h)$  esetén legfeljebb változóikban  $p$ -ed fokú polinomot,  $Q_k(\tau_h)$  esetén pedig legfeljebb  $p$ -ed fokú polinomot keresünk. Az interpolációs értékek kiszámolása a következő módon történik. Tudjuk, hogy  $u_{DG} = \sum_i c_i \phi_i$ . Ha egy adott elemen szeretnénk kiszámítani az interpolációs értékeket, akkor először elkészítjük a következő mátrixot:

$$\mathcal{I}_{ij} = \phi_j(x_i) \quad i = 1, \dots, (p+1)^2 \\ j = 1, \dots, N.$$

Tehát a mátrixnak annyi sora lesz ahány rácspont és csomópont van összesen egy elemén. Az oszlopok száma az egy elemén lévő bázisfüggvények számával fog meg egyezni. Ekkor ha az  $\mathcal{I}_{ij}$  mátrixot, beszorozzuk  $c$  azon részével, ami az adott elemhez tartozik, akkor megkapjuk az  $u_{DG}$  függvény helyettesítési értékeit az elemén lévő rácspont- és csomópontokban. Ezek lesznek az interpolációs értékek. Az integrálási alappontokat az interpolációval kapott polinomba helyettesítve végezzük el a numerikus integrálást.

## 4. fejezet

# Konvergencia

A következő részben a módszerekre vonatkozó konvergencia tételekről lesz szó.

### 4.1. Folytonos módszer konvergenciája

**4.1.1. Állítás.** Az  $a(\cdot, \cdot)$  bilineáris forma korlátos a  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$  normában, azaz

$$|a(u, v)| \leq C_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

*Bizonyítás:*  $|a(u, v)| = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} \leq 1 \cdot \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$  ■

**4.1.2. Állítás.** Az  $a(\cdot, \cdot)$  bilineáris forma koercív a  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$  normában, azaz

$$a(u, u) \geq C_2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

*Bizonyítás:*  $a(u, u) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u = 1 \cdot \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$  ■

Mivel a  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  és a  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$  norma ekvivalens, ezért a korlátosság és koercivitás igaz  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  normában is.

**4.1.3. Tétel.** Mivel

- a korlátos:  $|a(u, v)| \leq C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$ ,
- a koercív:  $a(u, u) \geq C_2 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$ ,
- a konzisztens:  $a(u, v) = lv \quad \forall v \in V_h$ ,
- háromszögek esetén  $P_k(\tau_h)$ , téglalapok esetén  $Q_k(\tau_h)$  használata során igaz a közelítési tétel:  $\|u - u_I\|_{H^1(\Omega)} \leq C_3 h^p |u|_{p+1}$ , ahol  $u_I$  az interpoláns,  $p$  a közelítésnél használt polinomfok,  $h$  a felosztásnál használt legnagyobb átmérő

$$\Rightarrow \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_4 h^p |u|_{p+1}, \text{ ahol } |u|_{p+1}^2 = \sum_{|\alpha|=p} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} u|^2$$

$L^2(\Omega)$  normában magasabb konvergenciarend érhető el a Nitsche-trükk segítségével [3]:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C^* h^{p+1} |u|_{p+1}$$

Nézzünk néhány  $p$  és  $C$  értéket konkrét példák esetén! Jelölje  $p_H$  a  $H^1(\Omega)$  normabeli,  $p_L$  pedig az  $L^2(\Omega)$  normabeli konvergencia rendjét.

1. példa:  $\sin(5\pi x)\sin(4\pi y)$

| elem típusa | $p$ | $C_4$  | $p_H$ | $C^*$ | $p_L$ |
|-------------|-----|--------|-------|-------|-------|
| háromszög   | 1   | 61,15  | 0,96  | 20,21 | 1,91  |
| téglalap    | 1   | 40,57  | 0,99  | 10,76 | 2,01  |
| háromszög   | 2   | 169,37 | 1,96  | 21,55 | 3     |
| téglalap    | 2   | 77,48  | 1,99  | 9,74  | 2,92  |
| háromszög   | 3   | 346,65 | 3     | 38    | 4,1   |
| téglalap    | 3   | 97,55  | 2,98  | 9,5   | 3,96  |

2.példa:  $\ln((x + 0.1)^2 + (y + 0.1)^2)$

| elem típusa | $p$ | $C_4$ | $p_H$ | $C^*$ | $p_L$ |
|-------------|-----|-------|-------|-------|-------|
| háromszög   | 1   | 3,93  | 1     | 0,6   | 2,06  |
| téglalap    | 1   | 1,36  | 1     | 0,38  | 2     |
| háromszög   | 2   | 3,95  | 1,93  | 0,55  | 3,1   |
| téglalap    | 2   | 1,38  | 1,85  | 0,198 | 2,83  |
| háromszög   | 3   | 4,28  | 2,83  | 0,38  | 3,85  |
| téglalap    | 3   | 2,05  | 2,83  | 0,21  | 3,82  |

3.példa:  $(16xy(x - 1)(y - 1))^{16}$

| elem típusa | $p$ | $C_4$ | $p_H$ | $C^*$ | $p_L$ |
|-------------|-----|-------|-------|-------|-------|
| háromszög   | 1   | 8,4   | 0,97  | 2,67  | 1,93  |
| téglalap    | 1   | 6,48  | 0,97  | 1,85  | 1,96  |
| háromszög   | 2   | 16,9  | 1,88  | 2,63  | 2,97  |
| téglalap    | 2   | 14,35 | 1,95  | 2,01  | 2,93  |
| háromszög   | 3   | 40,11 | 2,94  | 4,82  | 4,06  |
| téglalap    | 3   | 24,6  | 2,95  | 2,53  | 3,94  |

## 4.2. Nemfolytonos módszer konvergenciája

A nemfolytonos módszer konvergenciájának vizsgálatához definiáljuk a következő normát:

$$\|u\|_{DG}^2 = \int_{\Omega} \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega)]^d}^2 + \sum_{e \in \Gamma_D \cup \Gamma_N} \int_e \frac{1}{|e|} \|[u]\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{E \in \tau_h} \int_E h \|\partial_{\nu_E} u|_E\|_{L^2(\partial\Omega)}^2$$

**4.2.1. Állítás.**  $a(\cdot, \cdot)_{DG}$  korlátos az  $\|\cdot\|_{DG}$  normában, azaz  $\exists C_1 > 0$

$$|a_{DG}(u, v)| \leq C_1 \|u\|_{DG} \|v\|_{DG} \quad \forall u, v \in V_{DG}.$$

**4.2.2. Állítás.**  $\exists \sigma_0 > 0$ , hogy bármely  $\sigma > \sigma_0$  esetén  $a_{DG}$  koercív a  $\|\cdot\|_{DG}$  normában, azaz  $\exists C_2 > 0$

$$a_{DG}(u, u) \geq C_2 \|u\|_{DG}^2 \quad \forall u \in V_{DG}.$$

**4.2.3. Tétel.** Mivel igaz, hogy

- $a_{DG}$  korlátos a  $\|\cdot\|_{DG}$  normában
- $a_{DG}$  koercív a  $\|\cdot\|_{DG}$  normában elég nagy  $\sigma$  esetén
- $a_{DG}$  konzisztens
- háromszögek esetén  $P_k(\tau_h)$ , téglalapok esetén  $Q_k(\tau_h)$  használata során igaz a közelítési tétel:  $\|u - u_I\|_{DG} \leq C' h^p |u|_{p+1}$ , ahol a közelítésnél használt függvényekről sem tesszük fel, hogy folytonosak

$$\Rightarrow \|u - u_{DG}\|_{DG} \leq C h^p |u|_{p+1}, \text{ ahol } |u|_{p+1}^2 = \sum_{|\alpha|=p} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} u|^2$$

Szimmetrikus esetben, azaz  $\varepsilon = -1$  esetén, a folytonos esethez hasonlóan  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  normában a következő igaz a konvergenciára:

$$\|u - u_{DG}\|_{L^2(\Omega)} \leq C^* h^{p+1} |u|_{p+1}$$

Példák nemfolytonos módszer esetén  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  norma esetén:

1. példa:  $\sin(5\pi x)\sin(4\pi y)$

| elem típusa | $p$ | $V_{DG}$      | $C^*$ | $p_L$ |
|-------------|-----|---------------|-------|-------|
| háromszög   | 1   | $P_k(\tau_h)$ | 12,02 | 1,84  |
| téglalap    | 1   | $Q_k(\tau_h)$ | 7,64  | 1,9   |
| téglalap    | 1   | $P_k(\tau_h)$ | 2,33  | 0,86  |
| háromszög   | 2   | $P_k(\tau_h)$ | 22,14 | 3,01  |
| téglalap    | 2   | $Q_k(\tau_h)$ | 9,69  | 2,94  |
| téglalap    | 2   | $P_k(\tau_h)$ | 12,01 | 1,9   |
| háromszög   | 3   | $P_k(\tau_h)$ | 36,01 | 4,03  |
| téglalap    | 3   | $Q_k(\tau_h)$ | 8,78  | 3,93  |
| téglalap    | 3   | $P_k(\tau_h)$ | 48,22 | 3,57  |

2.példa:  $\ln((x + 0.1)^2 + (y + 0.1)^2)$

| elem típusa | $p$ | $V_{DG}$      | $C^*$ | $p_L$ |
|-------------|-----|---------------|-------|-------|
| háromszög   | 1   | $P_k(\tau_h)$ | 0,34  | 1,94  |
| téglalap    | 1   | $Q_k(\tau_h)$ | 0,15  | 1,83  |
| téglalap    | 1   | $P_k(\tau_h)$ | 0,96  | 0,69  |
| háromszög   | 2   | $P_k(\tau_h)$ | 0,43  | 3,01  |
| téglalap    | 2   | $Q_k(\tau_h)$ | 0,15  | 2,79  |
| téglalap    | 2   | $P_k(\tau_h)$ | 1,88  | 0,98  |
| háromszög   | 3   | $P_k(\tau_h)$ | 0,35  | 3,83  |
| téglalap    | 3   | $Q_k(\tau_h)$ | 0,16  | 3,77  |
| téglalap    | 3   | $P_k(\tau_h)$ | 2,23  | 1     |

3.példa:  $(16xy(x - 1)(y - 1))^{16}$

| elem típusa | $p$ | $V_{DG}$      | $C^*$ | $p_L$ |
|-------------|-----|---------------|-------|-------|
| háromszög   | 1   | $P_k(\tau_h)$ | 1,85  | 1,89  |
| téglalap    | 1   | $Q_k(\tau_h)$ | 1,36  | 1,87  |
| téglalap    | 1   | $P_k(\tau_h)$ | 0,63  | 1,09  |
| háromszög   | 2   | $P_k(\tau_h)$ | 2,93  | 3,01  |
| téglalap    | 2   | $Q_k(\tau_h)$ | 2,14  | 2,97  |
| téglalap    | 2   | $P_k(\tau_h)$ | 1,91  | 1,94  |
| háromszög   | 3   | $P_k(\tau_h)$ | 4,36  | 3,83  |
| téglalap    | 3   | $Q_k(\tau_h)$ | 2,31  | 3,98  |
| téglalap    | 3   | $P_k(\tau_h)$ | 10,76 | 3,83  |

A téglalapelemekkel dolgozó,  $P_k(\tau_h)$  alteret használó nemfolytonos módszer esetében nem ismert interpolációs becslés, így az előző tétel sem érvényes. Mivel a kódban nem jelentett nagy módosítást a  $Q_k(\tau_h)$ -ről  $P_k(\tau_h)$ -ra váltás, ezért megnéztem  $P_k(\tau_h)$ -ra is, hogy milyen  $p_L$  értékeket kapunk. Ha megnézzük a táblázatok megfelelő oszlopában ezeket az értékeket, akkor azt látjuk, hogy a  $p_L$  értéke nem éri el a  $p + 1$ -et. Tehát téglalapelemek esetén nem elég a kevesebb bázisfüggvényből álló  $P_k(\tau_h)$  altér a konvergenciarend eléréséhez, szükség van a  $Q_k(\tau_h)$  altérre.

## 5. fejezet

# Összehasonlítás

A dolgozatom során tárigény és konvergencia szempontjából hasonlítottam össze a folytonos és nemfolytonos módszert. A tárigény esetén az  $S$  mátrixot fogjuk vizsgálni. Mivel  $S$  ritkamátrix, ezért a letárolt elemek száma a sorok számával lesz arányos. Sorok száma  $n \times n$ -es felosztás mellett, legfeljebb  $p$ -ed fokú bázisfüggvények mellett:

- folytonos módszer:
  - háromszölemek esetén:  $(pn + 1)^2$
  - téglalapelemek esetén:  $(pn + 1)^2$
- nemfolytonos módszer:
  - háromszölemek esetén:  $4n^2 \frac{(p+1)(p+2)}{2}$
  - téglalapelemek esetén:  $n^2(p + 1)^2$

Konvergencia szerint  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  normában történik az összehasonlítás. Vezessük be a következő jelölést:  $\tilde{C} := C^* \cdot |u|_{p+1}$ .

Mivel a téglalapelemeket használó nemfolytonos módszernél a  $V_{DG} = P_k(\tau_h)$  választással nem kapható meg a  $p + 1$ -es konvergenciarend a korábbiakban táblázatban összefoglalt eredmények szerint, ezért az összehasonlítás során ezen típusú módszerrel nem foglalkozunk. Így a háromszögelemeknél a folytonos és nemfolytonos módszernél is  $P_k(\tau_h)$ , téglalapelemeknél pedig  $Q_k(\tau_h)$  lesz a véges dimenziós altér.

Az összehasonlításhoz definiáljuk a következő hatékonysági függvényt:

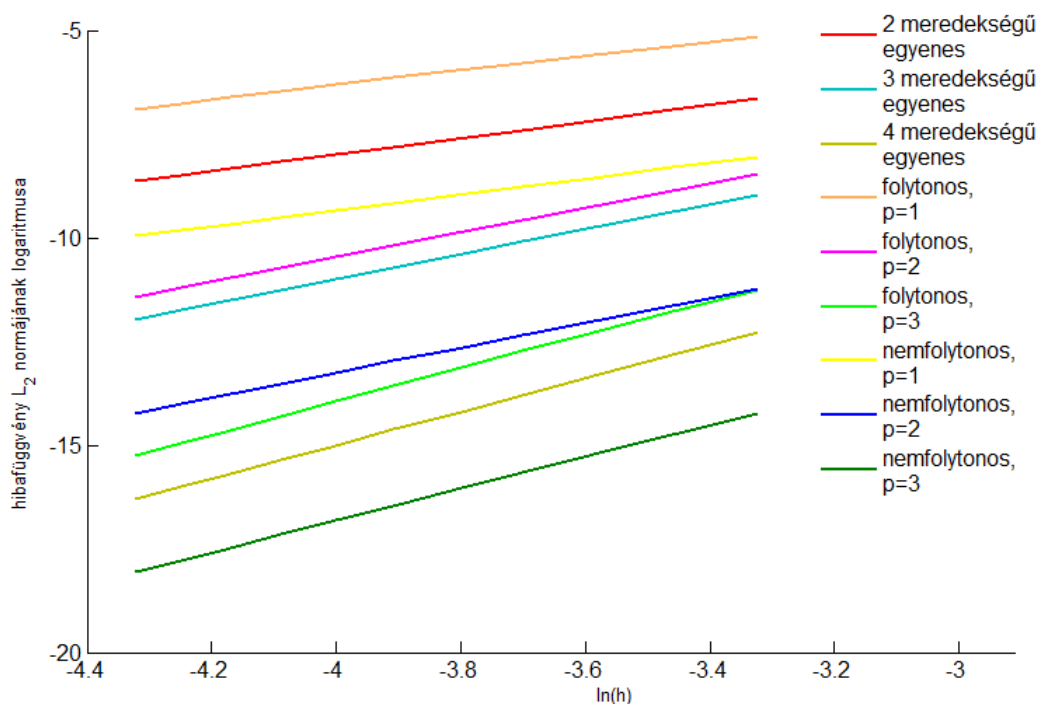
$$H := \frac{\tilde{C}_f}{\tilde{C}_{DG}} \cdot \frac{M_f}{M_{DG}},$$

ahol  $M_f$  a folytonos módszer tárigénye,  $M_{DG}$  a nemfolytonos módszer tárigénye,  $\tilde{C}_f$  a folytonos módszerhez,  $\tilde{C}_{DG}$  pedig a nemfolytonos módszerhez tartozik.

Ekkor ha  $H < 1$  akkor a folytonos módszer, ha  $H > 1$  akkor pedig nemfolytonos módszer a hatékonyabb.

## 5.1. Eredmények háromszögelemekkel

Ebben a részben a háromszögelemes módszerek kerülnek összehasonlításra. A konvergencia ábrák a következő módon készültek. Az  $\Omega$  felosztása  $10 \times 10$ -es rácstól megy  $20 \times 20$ -as vagy  $50 \times 50$ -es rácsig. Az ábrákon az  $x$  tengelyen a felosztás logaritmus, az  $y$  tengelyen pedig a hiba  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  normájának logaritmus, az  $y$  tengelyen pedig a hiba  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  normájának logaritmus található. Első példaként tekintünk a  $(16xy(x-1)(y-1))^{16}$  függvényt!



5.1. ábra. Konvergenciaábra  $(16xy(x-1)(y-1))^{16}$  függvény esetében  $p = 1, 2, 3$  választással

A kapott  $\tilde{C}$  értékek táblázatba foglalva:

$p = 1$  eset, maximum rácsméret:  $50 \times 50$ :

|              | $\tilde{C}$ | $M$   | H            |
|--------------|-------------|-------|--------------|
| folytonos    | 2,67        | 2601  | <b>0,125</b> |
| nemfolytonos | 1,85        | 30000 |              |

5.2. ábra.  $H$  kiszámítása  $(16xy(x-1)(y-1))^{16}$  függvény esetében,  $p = 1$

A táblázatból kiolvasható, hogy habár a nemfolytonos módszer  $\tilde{C}$  értéke a kisebb, a nagy méretkülönbség miatt  $H$  értéke kisebb, mint 1. Ez azt jelenti, hogy erre a

tesztfüggvényre a folytonos módszer a hatékonyabb.

$p = 2$  eset, maximum rácsméret:  $20 \times 20$ :

|              | $\tilde{C}$ | $M$  | H            |
|--------------|-------------|------|--------------|
| folytonos    | 2,63        | 1681 | <b>0,157</b> |
| nemfolytonos | 2,93        | 9600 |              |

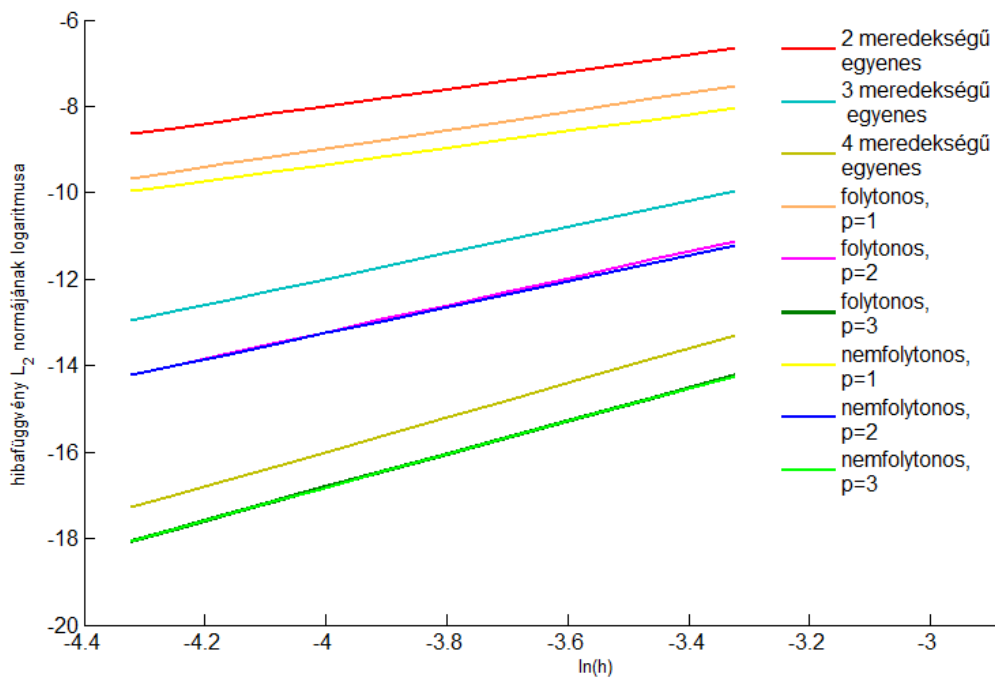
5.3. ábra.  $H$  kiszámítása  $(16xy(x-1)(y-1))^{16}$  függvény esetében,  $p = 2$

$p = 3$  eset, maximum rácsméret:  $20 \times 20$ :

|              | $\tilde{C}$ | $M$   | H            |
|--------------|-------------|-------|--------------|
| folytonos    | 4,82        | 3721  | <b>0,157</b> |
| nemfolytonos | 4,36        | 16000 |              |

5.4. ábra.  $H$  kiszámítása  $(16xy(x-1)(y-1))^{16}$  függvény esetében,  $p = 3$

Következő példánk:  $\ln((x+0.1)^2 + (y+0.1)^2)$ .



5.5. ábra. Konvergenciaábra  $\ln((x+0.1)^2 + (y+0.1)^2)$  függvény esetében  $p = 1, 2, 3$  választással



$p = 1$  eset, maximum rácsméret:  $50 \times 50$ :

|              | $\tilde{C}$ | $M$   | H            |
|--------------|-------------|-------|--------------|
| folytonos    | 0,6         | 2601  | <b>0,154</b> |
| nemfolytonos | 0,34        | 30000 |              |

5.6. ábra.  $H$  kiszámítása  $\ln((x + 0.1)^2 + (y + 0.1)^2)$  függvény esetében,  $p = 1$

$p = 2$  eset, maximum rácsméret:  $20 \times 20$ :

|              | $\tilde{C}$ | $M$  | H            |
|--------------|-------------|------|--------------|
| folytonos    | 0,55        | 1681 | <b>0,224</b> |
| nemfolytonos | 0,43        | 9600 |              |

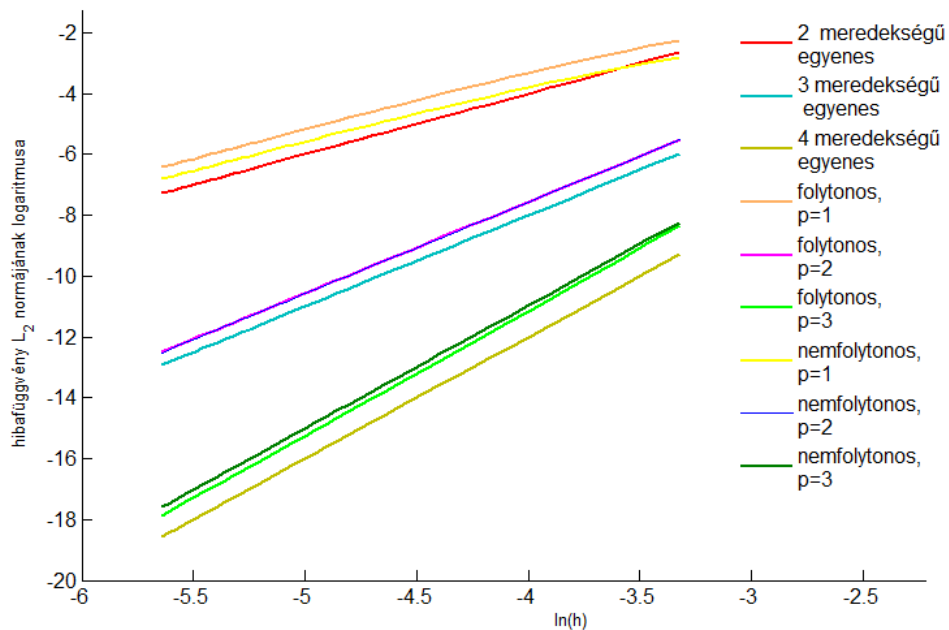
5.7. ábra.  $H$  kiszámítása  $\ln((x + 0.1)^2 + (y + 0.1)^2)$  függvény esetében,  $p = 2$

$p = 3$  eset, maximum rácsméret:  $20 \times 20$ :

|              | $\tilde{C}$ | $M$   | H           |
|--------------|-------------|-------|-------------|
| folytonos    | 0,38        | 3721  | <b>0,25</b> |
| nemfolytonos | 0,35        | 16000 |             |

5.8. ábra.  $H$  kiszámítása  $\ln((x + 0.1)^2 + (y + 0.1)^2)$  függvény esetében,  $p = 3$

3. példa:  $\sin(5\pi x)\sin(4\pi y)$



5.9. ábra. Konvergenciaábra  $\sin(5\pi x)\sin(4\pi y)$  függvény esetében  $p = 1, 2, 3$  választással

$p = 1$  eset, maximum rácsméret:  $50 \times 50$ :

|              | $\tilde{C}$ | $M$   | H            |
|--------------|-------------|-------|--------------|
| folytonos    | 20,21       | 2601  | <b>0,146</b> |
| nemfolytonos | 12,02       | 30000 |              |

5.10. ábra.  $H$  kiszámítása  $\sin(5\pi x)\sin(4\pi y)$  függvény esetében,  $p = 1$

$p = 2$  eset, maximum rácsméret:  $50 \times 50$ :

|              | $\tilde{C}$ | $M$   | H            |
|--------------|-------------|-------|--------------|
| folytonos    | 21,55       | 10201 | <b>0,166</b> |
| nemfolytonos | 22,14       | 60000 |              |

5.11. ábra.  $H$  kiszámítása  $\sin(5\pi x)\sin(4\pi y)$  függvény esetében,  $p = 2$

$p = 3$  eset, maximum rácsméret:  $50 \times 50$ :

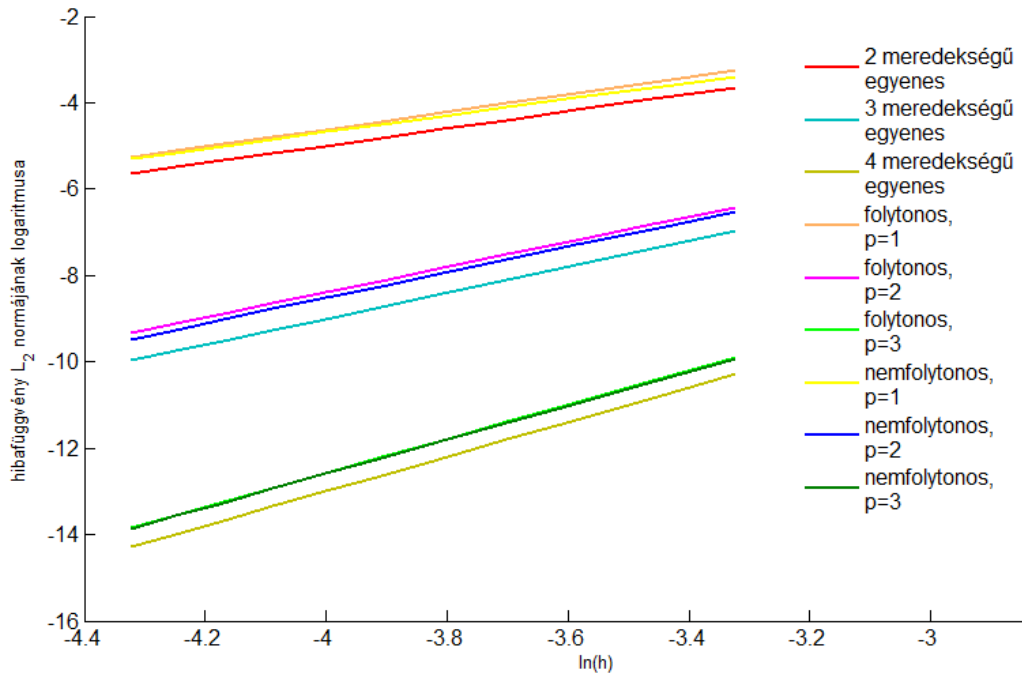
|              | $\tilde{C}$ | $M$    | H            |
|--------------|-------------|--------|--------------|
| folytonos    | 38          | 22801  | <b>0,166</b> |
| nemfolytonos | 36,01       | 100000 |              |

5.12. ábra.  $H$  kiszámítása  $\sin(5\pi x)\sin(4\pi y)$  függvény esetében,  $p = 3$

## 5.2. Eredmények téglalapelemekkel

A következő részben a téglalapelemekkel dolgozó módszereket hasonlítom össze.

1. tesztfüggvény:  $\sin(5\pi x)\sin(4\pi y)$ .



5.13. ábra. Konvergenciaábra  $\sin(5\pi x)\sin(4\pi y)$  függvény esetében  $p = 1, 2, 3$  választással

$p = 1$  eset, maximum rácsméret:  $20 \times 20$ :

|              | $\tilde{C}$ | $M$  | H            |
|--------------|-------------|------|--------------|
| folytonos    | 10,76       | 441  | <b>0,388</b> |
| nemfolytonos | 7,64        | 1600 |              |

5.14. ábra.  $H$  kiszámítása  $\sin(5\pi x)\sin(4\pi y)$  függvény esetében,  $p = 1$

$p = 2$  eset, maximum rácsméret:  $20 \times 20$ :

|              | $\tilde{C}$ | $M$  | H            |
|--------------|-------------|------|--------------|
| folytonos    | 9,74        | 1681 | <b>0,469</b> |
| nemfolytonos | 9,69        | 3600 |              |

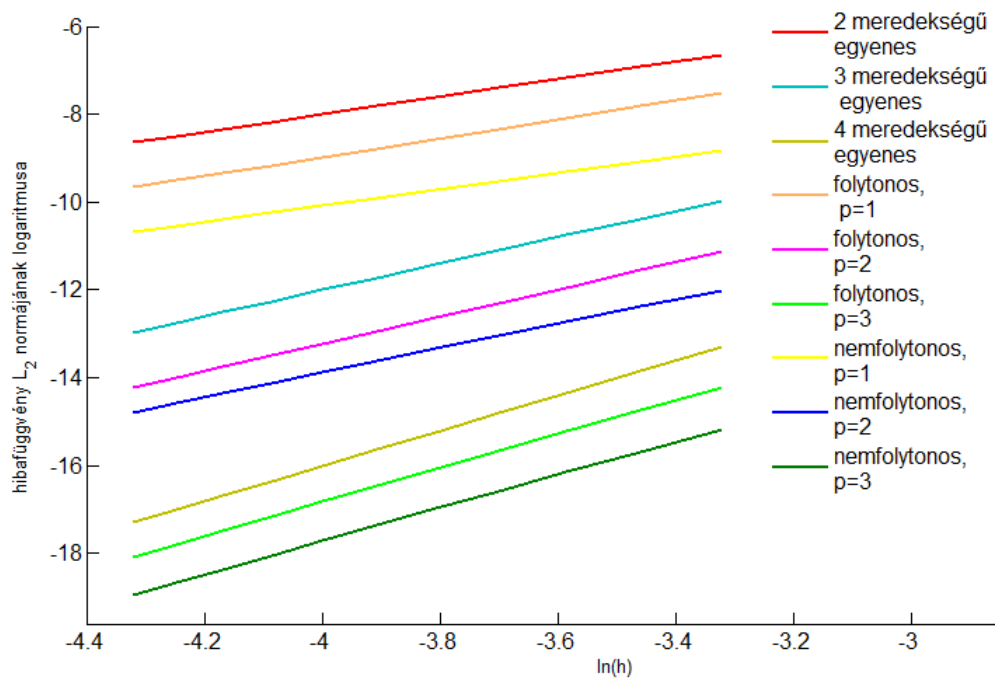
5.15. ábra.  $H$  kiszámítása  $\sin(5\pi x)\sin(4\pi y)$  függvény esetében,  $p = 2$

$p = 3$  eset, maximum rácsméret:  $20 \times 20$ :

|              | $\tilde{C}$ | $M$  | H            |
|--------------|-------------|------|--------------|
| folytonos    | 9,5         | 3721 | <b>0,629</b> |
| nemfolytonos | 8,78        | 6400 |              |

5.16. ábra.  $H$  kiszámítása  $\sin(5\pi x)\sin(4\pi y)$  függvény esetében,  $p = 3$

2. példa:  $\ln((x + 0.1)^2 + (y + 0.1)^2)$ .



5.17. ábra. Konvergenciaábra  $\ln((x + 0.1)^2 + (y + 0.1)^2)$  függvény esetében  $p = 1, 2, 3$  választással

$p = 1$  eset, maximum rácsméret:  $20 \times 20$ :

|              | $\tilde{C}$ | $M$  | H            |
|--------------|-------------|------|--------------|
| folytonos    | 0,38        | 441  | <b>0,698</b> |
| nemfolytonos | 0,15        | 1600 |              |

5.18. ábra.  $H$  kiszámítása  $\ln((x + 0.1)^2 + (y + 0.1)^2)$  függvény esetében,  $p = 1$

$p = 2$  eset, maximum rácsméret:  $20 \times 20$ :

|              | $\tilde{C}$ | $M$  | H            |
|--------------|-------------|------|--------------|
| folytonos    | 0,198       | 1681 | <b>0,616</b> |
| nemfolytonos | 0,15        | 3600 |              |

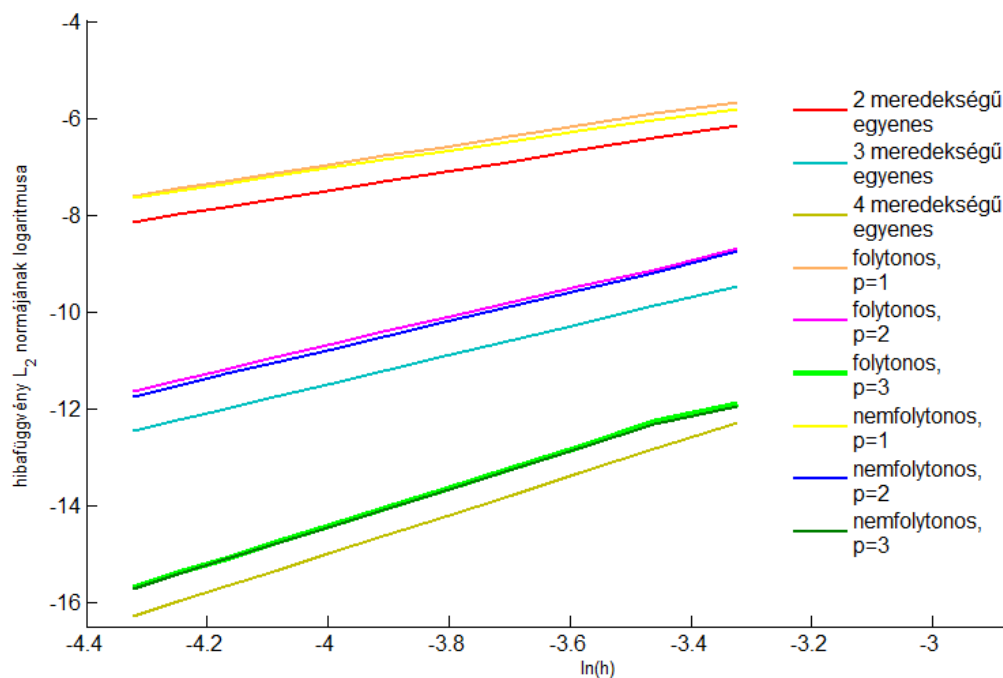
5.19. ábra.  $H$  kiszámítása  $\ln((x + 0.1)^2 + (y + 0.1)^2)$  függvény esetében,  $p = 2$

$p = 3$  eset, maximum rácsméret:  $20 \times 20$ :

|              | $\tilde{C}$ | $M$  | H            |
|--------------|-------------|------|--------------|
| folytonos    | 0,21        | 3721 | <b>0,763</b> |
| nemfolytonos | 0,16        | 6400 |              |

5.20. ábra.  $H$  kiszámítása  $\ln((x + 0.1)^2 + (y + 0.1)^2)$  függvény esetében,  $p = 3$

Utolsóként tesztelt függvény:  $(16xy(x - 1)(y - 1))^{16}$ .



5.21. ábra. Konvergenciaábra  $(16xy(x - 1)(y - 1))^{16}$  függvény esetében  $p = 1, 2, 3$  választással

$p = 1$  eset, maximum rácsméret:  $20 \times 20$ :

|              | $\tilde{C}$ | $M$  | H            |
|--------------|-------------|------|--------------|
| folytonos    | 1,85        | 441  | <b>0,375</b> |
| nemfolytonos | 1,37        | 1600 |              |

5.22. ábra.  $H$  kiszámítása  $(16xy(x-1)(y-1))^{16}$  függvény esetében,  $p = 1$

$p = 2$  eset, maximum rácsméret:  $20 \times 20$ :

|              | $\tilde{C}$ | $M$  | H            |
|--------------|-------------|------|--------------|
| folytonos    | 2,01        | 1681 | <b>0,439</b> |
| nemfolytonos | 2,14        | 3600 |              |

5.23. ábra.  $H$  kiszámítása  $(16xy(x-1)(y-1))^{16}$  függvény esetében,  $p = 2$

$p = 3$  eset, maximum rácsméret:  $20 \times 20$ :

|              | $\tilde{C}$ | $M$  | H            |
|--------------|-------------|------|--------------|
| folytonos    | 2,53        | 3721 | <b>0,637</b> |
| nemfolytonos | 2,31        | 6400 |              |

5.24. ábra.  $H$  kiszámítása  $(16xy(x-1)(y-1))^{16}$  függvény esetében,  $p = 3$

$n \geq 2$  esetén a nemfolytonos módszer tárigénye mindig nagyobb. Így az a kérdés, hogy kisebb-e a nemfolytonos módszer  $\tilde{C}$  értéke és ha igen, mennyivel. A tesztelés során az eredmények azt mutatták, hogy általában a folytonos módszer  $\tilde{C}$  értéke a nagyobb. Azonban a különbség nem jelentős. Ez az ábrákon is jól megfigyelhető, hiszen a legtöbb esetben a módszerekhez tartozó egyenesek nagyon közel vannak egymáshoz. Így a nemfolytonos módszer tárigénye nagyobb annyival, hogy a hatékonysági függvény kisebb 1-nél. Tehát az összehasonlítás során a folytonos módszer bizonyult hatékonyabbnak.

# Irodalomjegyzék

- [1] D. A. Di Pietro és A. Ern. *Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods, volume 69 of Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer, Heidelberg, 2012.
- [2] B. Rivière. *Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and parabolic equations*, volume 35 of *Frontiers in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2008. Theory and implementation.
- [3] Horváth Róbert, Izsák Ferenc és Karátson János: Parciális differenciálegyenletek numerikus módszerei számítógépes alkalmazásokkal
- [4] Horváth Tamás: Nemfolytonos Galjorkin módszer leírása
- [5] P. Solin, K. Segeth és I. Dolezel: *Higher-Order Finite Element Methods*, Chapman & Hall/CRC Press, 2003.
- [6] Stoyan Gisbert és Takó Galina: *Numerikus módszerek 1.*, Typotex, 2002.