

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

HÁLÓZATI FOLYAMATOK KÖZELÍTŐ DIFFERENCIÁLEGYENLETEI

MSc szakdolgozat

Írta: Varga Roxána

Alkalmazott matematikus MSc, Alkalmazott analízis szakirány

Témavezető:

Simon L. Péter, egyetemi docens

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



Budapest, 2013

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. SIS típusú járványterjedés	2
2.1. Közelítő differenciálegyenletek	3
2.2. A numerikus szimuláció	5
2.3. Teljes gráf	6
2.4. Erdős-Rényi gráf	7
2.5. Reguláris véletlen gráf	8
2.6. Az alarendszer egyenletei	10
3. A részgráf megközelítés	17
3.1. A teljes rendszer felírása egy példán	18
3.2. Lezárás az élek szintjén	20
3.2.1. Bizonyítás egyetlen fertőzött csúcs esetén	21
3.2.2. Bizonyítás három csúcsú út esetén	22
3.2.3. Bizonyítás csillag alakú gráf esetén	23
3.2.4. Függetlenségen alapuló bizonyítás	27
3.3. Lezárás a hármasok szintjén	28
3.3.1. Bizonyítás differenciálegyenletek segítségével	31
3.3.2. Függetlenségen alapuló bizonyítás	35
4. Összefoglalás	36
Irodalomjegyzék	39

1. fejezet

Bevezetés

Jelen dolgozat célja megismertetni az olvasót a hálózati folyamatokat leíró differenciálegyenletek elméletével, és azok vizsgálatának módszereivel. Hálózati folyamat például egy populáción belüli fertőzés- illetve hír terjedésének időbeli lefolyása. A folyamatot egy gráfon lezajló folyamatnak tekintjük. A gráf csúcsai a populáció egyedeinek felelnek meg, és két csúcs között akkor van él, ha azok között a fertőzés terjedhet. A fertőzés dinamikáját tekintve kétféle modellt szoktak vizsgálni. Az első az *SIS* dinamika, ahol minden csúcs lehet fertőzhető (*S*) és fertőzött (*I*) állapotú. Ekkor adott ráták mellett egy *S* típusú csúcsot megfertőzhetnek az *I* típusú szomszédjai, valamint egy *I* típusú csúcs fertőzhetővé válhat. A második modell az *SIR* dinamika, ahol egy fertőzött csúcs, ha meggyógyul, akkor *R* típusúvá válik, és többé nem fertőződhet meg. Célunk lehet megtudni, hogy egy bizonyos idő elteltével a populációnak várhatóan hány egyede fertőződött meg, illetve az, hogy egy bizonyos egyed vagy egyedek csoportja mekkora eséllyel lesz fertőzött. Az előbbi esetet kompartmentes, utóbbit részgráf megközelítésnek szokás nevezni.

A kompartmentes megközelítés vizsgálata egészen a XX. század elejéig nyúlik vissza. Ezt a témakört mára már számos cikk és könyv részletesen tárgyalja, ilyen például [2] és [3]. A részgráf megközelítés vizsgálata egy viszonylag új terület [1].

Mindkettő esetben a dinamikát leíró egyenletek száma a gráf méretével exponenciálisan növekszik. Így érdemes és szükséges is lezárásokat vagy közelítéseket keresni bizonyos változókra. Dolgozatomban a fent említett eseteket mutatom be, valamint ismertetek néhány közelítési módszert, melyek helyességét bizonyítom is.

2. fejezet

SIS típusú járványterjedés

Olyan betegségterjedéseket vizsgálunk, ahol a terjedési paramétereken kívül figyelembe vesszük az egyedek közötti kapcsolatot, de a születést és a halálozást nem. A populációt egy gráffal írjuk le, ahol a csúcsok az egyes egyedeket jelölik és két csúcs akkor van összekötve, ha közöttük a betegség terjedhet.

A csúcsokat az állapotaiknak megfelelően kompartmentekre osztjuk fel:

- S : fertőzhető csúcsok (*Susceptible*),
- I : fertőző csúcsok (*Infectious*),

Az *SIS* járványterjedés esetén egy S típusú csúcs $k\tau$ rátával fertőződhet meg (ahol k a beteg szomszédok száma), vagyis átkerül az I kompartmentbe. Hasonlóan egy I típusú csúcs γ rátával meggyógyulhat és átkerülve az S kompartmentbe újra fertőzhetővé válik. Jelölje $[S]$ illetve $[I]$ a fertőzhető illetve fertőző csúcsok számának várható értékét. Ekkor $[S]$ és $[I]$ időbeli megváltozására a következő egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{aligned} \dot{[I]} &= \tau[S] - \gamma[I], \\ \dot{[S]} &= \gamma[I] - \tau[S]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ahol $[SI]$ az SI típusú élek számának várható értékét jelöli.

Bár ebben a formában az egyenletrendszer egzakt, $[SI]$ értéket a legtöbb esetben nem tudjuk pontosan megadni. Ebben a fejezetben *SIS* dinamika esetén bemutattunk két lehetséges lezárási módszert melyek homogén fokszámeloszlású rendszereken (vagyis olyan gráfok esetében, ahol minden csúcs fokszáma közel azonos) jó

közelítést adnak, majd ezek jóságát az úgynevezett Monte-Carlo szimulációval fogjuk ellenőrizni, valamint levezetjük, hogyan írható fel egy tetszőleges gráfon a dinamikát pontosan leíró differenciálegyenlet-rendszer.

Megjegyezzük, hogy SIR dinamikát is szokás vizsgálni, ahol ha egy I csúcs meggyógyul, nem lehet újból megfertőzni, hanem R típusú lesz és kikerül a rendszerből. Így SIR folyamat esetén hasonlóan felírható a modell, de az $[S]$ -re felírt egyenletben nem jelenik meg a $+\gamma[I]$ tag.

2.1. Közelítő differenciálegyenletek

Tegyük fel, hogy a hálózatunk N csúcsú homogén foksámeloszlású, vagyis minden csúcsonak közel azonos a fokszáma, ezt jelöljük n -el.

Először heurisztikus bizonyítással megmutatjuk, hogy az $[SI]$ várható értékre felírható egy olyan közelítés, melyben csak $[I]$ szerepel, és ezzel a fenti egyenlet zárt alakba írható. Tekintsünk egy S csúcsot és az ő n darab szomszédját. Ekkor a gráfban a maradék $N - 1$ darab csúcs közül $[I]$ darab I típusú van, ezek közül átlagosan $n[I] \setminus (N - 1)$ darab van összekötve az S csúccsal. Így az S -ből átlagosan $n[I] \setminus (N - 1)$ darab SI él indul ki. Mivel a gráfban S típusú csúcs $N - [I]$ darab van, ezért $[SI]$ -re a következő közelítést kaptuk:

$$[SI] \simeq n \frac{[I]}{N - 1} (N - [I]). \quad (2.2)$$

Ezt beírva a differenciálegyenletbe kapjuk a legegyszerűbb zárt egyenletet:

$$[\dot{I}] = \tau \frac{n}{N - 1} [I] (N - [I]) - \gamma [I]. \quad (2.3)$$

Mivel $[S] = N - [I]$, elég csak $[I]$ -re felírni az egyenletet.

Egy másik, pontosabb közelítést kapunk, ha a különböző típusú élek számának várható értékeire is felírjuk az egyenleteket:

$$\begin{aligned} [\dot{I}] &= \tau [SI] - \gamma [I], \\ [\dot{SI}] &= \gamma ([II] - [SI]) + \tau ([SSI] - [ISI] - [SI]), \\ [\dot{II}] &= -2\gamma [II] + 2\tau ([ISI] + [SI]), \\ [\dot{SS}] &= 2\gamma [SI] - 2\tau [SSI]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Itt $[SSI]$ és $[ISI]$ az ilyen típusú hármasok számának várható értékét jelöli a gráfban. Ebben a formában a felírt egyenletrendszer még nem zárt, de a hármasok várható értéke közelíthető egy formulával melyekben csak az élek és a csúcsok számának várható értéke szerepel. Erre is heurisztikus bizonyítást adunk.

Tekintsük az SSI típusú hármasokat, ezek várható értékének kiszámításához vegyünk egy S csúcsot. Meghatározzuk, hogy az n szomszédja közül átlagosan hány darab S illetve I típusú. S típusú csúcsból átlagosan $[S]$ darab van, így ezekből összesen $n[S]$ él indul ki. Tehát az S csúcsból egy véletlenszerűen választott él $[SI] \setminus n[S]$ eséllyel lesz SI , és így az n barab él közül átlagosan $n[SI] \setminus n[S] = [SI] \setminus [S]$ darab lesz SI . Hasonlóan kapjuk, hogy a maradék $n - 1$ darab él között az SS típusúak aránya $[SS] \setminus n[S]$. Ebből kapjuk, hogy rögzített S középső csúcs esetén az SSI hármasok száma:

$$\frac{[SI]}{[S]}(n-1)\frac{[SS]}{n[S]}.$$

Minden S csúcsra ennyi SSI hármas illeszkedik, így a várható érték kiszámításához a fenti képletet még meg kell szorozni $[S]$ -el. Ekkor

$$[SSI] \simeq \frac{(n-1)}{n} \frac{[SI][SS]}{[S]}.$$

Felhasználva, hogy $[SI] = [IS]$, hasonló érveléssel kapjuk az ISI hármasok várható értékére a következő közelítést:

$$[ISI] \simeq \frac{n-1}{n} \frac{[SI]^2}{[S]}.$$

Ezeket beírva a rendszerbe kapjuk az úgynevezett momentum lezárásnak nevezett modellt:

$$\begin{aligned} [\dot{I}] &= \tau[SI] - \gamma[I], \\ [\dot{SI}] &= \gamma([II] - [SI]) + \tau \left(\frac{n-1}{n} \left[\frac{[SS][SI]}{N-[I]} - \frac{[SI]^2}{N-[I]} \right] - [SI] \right), \\ [\dot{II}] &= -2\gamma[II] + 2\tau \left(\frac{n-1}{n} \frac{[SI]^2}{N-[I]} + [SI] \right), \\ [\dot{SS}] &= 2\gamma[SI] - 2\tau \frac{n-1}{n} \frac{[SS][SI]}{N-[I]}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2. A numerikus szimuláció

A numerikus szimuláció során a fertőzés és a gyógyulás folyamatát is független Poisson folyamatnak tekintjük. Vagyis annak a valószínűsége, hogy egy elég kicsi Δt idő alatt egy egészséges csúcs fertőzött lesz $1 - e^{-k\tau\Delta t}$, ahol most is τ a fertőzési ráta és k a fertőzött szomszédok száma. Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy egy elég kicsi Δt idő alatt egy fertőzött csúcs egészséges lesz $1 - \exp^{-\gamma\Delta t}$, ahol γ a gyógyulási ráta. Továbbá fontos a Δt időintervallumot úgy megválasztani, hogy Δt idő alatt csakis egy csúcson történjen változás.

SIS betegségterjedés esetén az állapotter a $\{0, 1\}^N$ halmaz. Egy $t > 0$ időpontban a csúcsok állapotát az $x(t) \in \{0, 1\}^N$ vektorral írjuk le, ahol a k . koordináta reprezentálja a k . csúcsot, és $x_k(t) = 0$, ha a k . csúcs *S* típusú, valamint $x_k(t) = 1$, ha a k . csúcs *I* típusú. A gráf szomszédsági mátrixát jelölje $A \in \{0, 1\}^{N \times N}$. Ekkor az $Ax(t)$ vektor azt mondja meg, hogy egy csúcson hány darab fertőző szomszédja van. Nekünk ez csak az *S* csúcsok esetében érdekes, ezért szorozzuk még meg az előbbi vektort koordinátánként $(e - x(t))$ vektorral (ahol e jelöli azt a vektort amelynek minden koordinátája 1). Tehát $y(t) = Ax(t) * (e - x(t))$, és $y(t)$ -ben 0 áll ott, ahol $x(t)$ -ben 1, a többi helyen pedig a megfelelő *S* csúcsok beteg szomszédainak a száma. Ahhoz, hogy megállapítsuk, hogy melyik csúcson történik változás generáljunk egy $r \in [0, 1]^N$ véletlen számokból álló vektort, és rögzítsünk egy j csúcsot. Ekkor két eset lehetséges:

Ha $x_j(t) = 0$, azaz a j . csúcs a t időpontban *S* típusú, akkor ez a csúcs a $t + \Delta t$ időpontban *I* típusú lesz, ha

$$r_j < 1 - \exp(-y_j(t)\tau\Delta t).$$

Ha $x_j(t) = 1$, azaz a j . csúcs a t időpontban *I* típusú, akkor ez a csúcs a $t + \Delta t$ időpontban *S* típusú lesz, ha

$$r_j < 1 - \exp(-\gamma\Delta t).$$

Feltéve, hogy Δt elég kicsi, akkor a $1 - \exp(-x) = x$ lineáris közelítés használható. Ekkor a j . csúcsban való változás feltétele így írható:

$$r_j < (y(t)\tau + x(t)\gamma)_j \Delta t. \quad (2.6)$$

A $[t, t + \Delta t]$ időintervallumban a változást leíró vektor legyen $v \in \{0, 1\}^N$:

$$v = \frac{1}{2} \left(\text{sign} [y(t)\tau\Delta t + x(t)\gamma\Delta t - r] + e \right), \quad (2.7)$$

Ahol a *sign* függvényt koordinátánként alkalmazzuk. Könnyen látszik, hogy a v vektor azon koordinátái 1-esek, melyekre (2.6) fennáll, a többi pedig 0. A változást megadó vektor pedig $e - 2x(t)$, hiszen ennek egy koordinátája az S csúcsok esetében -1 , az I csúcsok esetében pedig 1 . Ezzel $x(t)$ ismeretében már fel tudjuk írni $x(t + \Delta t)$ vektort:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v * (e - 2x(t)). \quad (2.8)$$

A Monte-Carlo szimuláció során egy $x(0)$ kezdeti állapotból indulunk és egy előre megadott M lépésszám szerint kiszámoljuk az $x(\Delta t), x(2\Delta t), \dots, x(M\Delta t)$ állapotokat. A szimuláció sokszori ismétlésével és az eredmények átlagát véve jó közelítést kapjuk a Poisson-folyamatnak. Ennek bizonyítása nem tartozik a dolgozat tárgyához.

A fejezet következő részében három példán mutatjuk be a közelítő differenciálegyenletek és a numerikus szimuláció összehasonlításával kapott eredményeket.

2.3. Teljes gráf

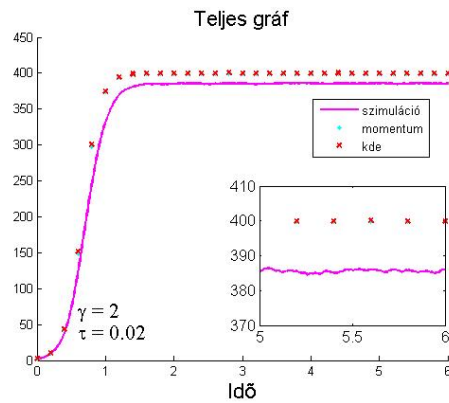
Egy N csúcsú teljes gráf esetén minden csúcs foka ugyanannyi, mégpedig $n = N - 1$. Mivel ez egy homogén foksámeloszlású gráf, a 2.1-es részben tárgyalt közelítő differenciálegyenletek érvényesek, és a következő képpen írhatók:

$$\dot{[I]} = \tau[I](N - [I]) - \gamma[I]. \quad (2.9)$$

A momentum lezárással felírt (2.5) modell:

$$\begin{aligned} \dot{[I]} &= \tau[SI] - \gamma[I], \\ \dot{[SI]} &= \gamma([II] - [SI]) + \tau \left(\frac{N-2}{N-1} \left[\frac{[SS][SI]}{N-[I]} - \frac{[SI]^2}{N-[I]} \right] - [SI] \right), \\ \dot{[II]} &= -2\gamma[II] + 2\tau \left(\frac{N-2}{N-1} \frac{[SI]^2}{N-[I]} + [SI] \right), \\ \dot{[SS]} &= 2\gamma[SI] - 2\tau \frac{N-2}{N-1} \frac{[SS][SI]}{N-[I]}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

A Monte-Carlo szimulációhoz egy 500 csúcsú teljes gráfon tekintettük a folyamatot. A futási eredmény a 2.1 ábrán látható. Azt mondhatjuk, hogy teljes gráf esetén már a (2.9) közelítés is igen jó.



2.1. ábra. 500 szimuláció átlaga az 500 csúcsú teljes gráf esetében. Folytonos vonallal a szimuláció eredménye látható, pontozottal a (2.10) rendszer megoldása, csillagozottal pedig a (2.9) egyenlet megoldása. A függőleges tengelyen az I típusú csúcsok számának várható értéke van, míg a vízszintes tengelyen az eltelt idő. A szimuláció kezdetén 2 beteg csúcs van a gráfban és a gyógyulás paramétere $\gamma = 2$, a fertőzés paramétere pedig $\tau = 0.02$.

2.4. Erdős-Rényi gráf

Legyen adott N különböző csúcs és a lehetséges $N(N - 1)/2$ él mindegyikét húzzuk be egy $0 < p < 1$ valószínűséggel, és ne húzzuk be $1 - p$ valószínűséggel. Az így generált gráfot szokás Erdős-Rényi gráfnak nevezni. Belátható, hogy a gráf homogén fokszámeloszlású és az átlagos fokszám $n = p(N - 1)$. A gráfon lezajló folyamatot közelítő egyenletek:

$$\dot{I} = \tau p [I] (N - [I]) - \gamma [I]. \quad (2.11)$$

A momentum lezárással felírt (2.5) modell:

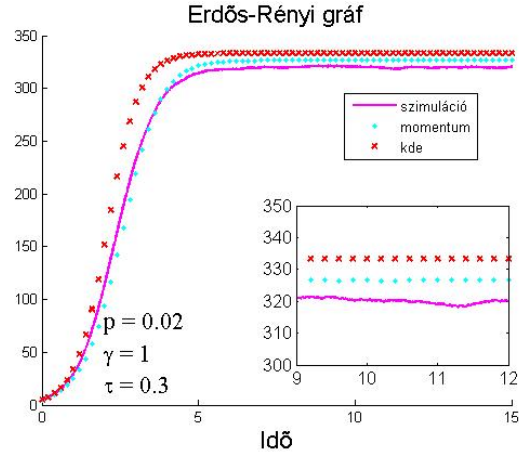
$$\begin{aligned}
\dot{[I]} &= \tau[SI] - \gamma[I], \\
[\dot{SI}] &= \gamma([II] - [SI]) + \tau \left(\frac{(N-1)p-1}{(N-1)p} \left[\frac{[SS][SI]}{N-[I]} - \frac{[SI]^2}{N-[I]} \right] - [SI] \right), \\
[\dot{II}] &= -2\gamma[II] + 2\tau \left(\frac{(N-1)p-1}{(N-1)p} \frac{[SI]^2}{N-[I]} + [SI] \right), \\
[\dot{SS}] &= 2\gamma[SI] - 2\tau \frac{(N-1)p-1}{(N-1)p} \frac{[SS][SI]}{N-[I]}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Mivel az Erdős-Rényi gráf egy véletlen gráf, ezért a szimuláció során minden egyes futtatás alkalmával újra kell generálnunk a gráfot, hogy valóban független megfigyelések átlagát vehessük. A szimuláció és a közelítések összehasonlítása az 2.2 ábrán látható. Azt figyelhetjük meg, hogy minél ritkább a gráfunk, vagyis a p valószínűség értéke minél kisebb, a differenciálegyenletes közelítések annál rosszabbak, de hosszú távon még mindig elég jó eredményt adnak. Érdeemes észrevenni, hogy a harmadik momentum lezárásával kapott (2.12) modell mennyivel jobban közelíti a szimuláció eredményét, mint a két kompartment esetére felírt (2.11) közelítő egyenlet.

2.5. Reguláris véletlen gráf

Reguláris véletlen gráfnak nevezzük az olyan N csúcsú gráfokat, ahol úgy húzzuk be véletlenszerűen az éleket, hogy minden csúcsnak azonosan n legyen a fokszáma. A gráf létrehozásának az algoritmusát jelen dolgozatban nem részletezzük. A gráfhoz tartozó közelítő differenciálegyenletek a következők:

$$\dot{[I]} = \tau \frac{n}{N-1} [I](N-[I]) - \gamma[I]. \tag{2.13}$$

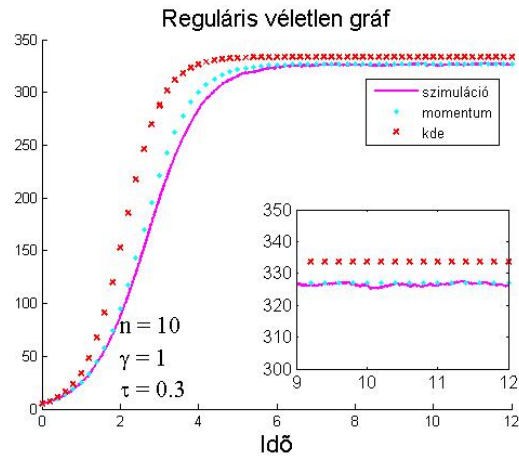


2.2. ábra. 500 szimuláció átlaga az 500 csúcsú Erdős-Rényi véletlen gráf esetében $p=0.02$ valószínűséggel behúzza az éleket, így az átlagos fokszám $n = 9.98$. Folytonos vonallal a szimuláció eredménye látható, pontozottal a (2.12) rendszer megoldása, csillagozottal pedig a (2.11) egyenlet megoldása. A függőleges tengelyen az I típusú csúcsok számának várható értéke van, míg a vízszintes tengelyen az eltelt idő. A szimuláció kezdetén 5 beteg csúcs van a gráfban. A fertőzés paramétere $\tau = 0.3$, a gyógyulás paramétere $\gamma = 1$.

Momentum lezárással felírt (2.5) modell:

$$\begin{aligned}
 [\dot{I}] &= \tau[SI] - \gamma[I], \\
 [\dot{SI}] &= \gamma([II] - [SI]) + \tau \left(\frac{n-1}{n} \left[\frac{[SS][SI]}{N-[I]} - \frac{[SI]^2}{N-[I]} \right] - [SI] \right), \\
 [\dot{II}] &= -2\gamma[II] + 2\tau \left(\frac{n-1}{n} \frac{[SI]^2}{N-[I]} + [SI] \right), \\
 [\dot{SS}] &= 2\gamma[SI] - 2\tau \frac{n-1}{n} \frac{[SS][SI]}{N-[I]}.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

A szimuláció során most is minden lépésben újra kell generálni a reguláris véletlen gráfot, hogy valóban függetlenek legyenek a megfigyeléseink. A szimuláció és a közelítések összehasonlítása a 2.3 ábrán látható. Reguláris véletlen gráf esetében a közelítések kezdetben nem olyan jók, mint ahogyan az Erdős-Rényi gráf esetében láttuk, viszont hosszú távon most is jónak mondható mindkét modell.



2.3. ábra. 500 szimuláció átlaga 500 csúcsú reguláris véletlen gráf esetében, ahol az átlagos fokszám $n = 10$. Folytonos vonallal a szimuláció eredménye látható, pontozottal a (2.14) rendszer megoldása, csillagozottal pedig a (2.13) egyenlet megoldása. A függőleges tengelyen az I típusú csúcsok számának várható értéke van, míg a vízszintes tengelyen az eltelt idő. A szimuláció kezdetén a fertőzött csúcsok száma 5. A fertőzés paramétere $\tau = 0.3$, a gyógyulás paramétere $\gamma = 1$.

2.6. Az alaprendszer egyenletei

Ebben a részben megmutatjuk, hogy egy tetszőleges N csúcsú hurokmentes és irányítatlan gráfon hogyan lehet pontosan leírni az SIS dinamikát. Ehhez - mint ahogyan azt a 2.2-es fejezetben is tettük - legyen a gráf szomszédsági mátrixa $G = (g_{ij})_{i,j=1}^N$, vagyis a mátrix egy g_{ij} eleme 1, ha az i és j csúcsok össze vannak kötve, különben 0. A csúcsok egy adott időpillanatban kétféle állapotban lehetnek: egészséges (S), illetve fertőző (I), így a rendszer egy N hosszúságú vektorral írható le, melynek minden eleme S vagy I . Az időben lezajló folyamat során egy fertőzött csúcs adott valószínűséggel meggyógyulhat, illetve egy egészséges csúcsot a fertőző szomszédai adott valószínűséggel megfertőzhetnek. Az átmeneteket független Poisson-folyamatnak tekintjük, vagyis annak a valószínűsége, hogy egy Δt idő alatt egy beteg csúcs meggyógyul $1 - e^{-\gamma\Delta t}$, valamint annak a valószínűsége, hogy egy Δt idő alatt egy egészséges csúcsot egy beteg szomszédja megfertőz $1 - e^{-\tau k\Delta t}$. γ illetve τ pozitív számok a gyógyulás valamint fertőzési ráta és k az adott egészséges csúcs beteg szomszédainak a száma. A rendszer állapottere egy 2^N elemű

halmaz, melyen az átmenetek egy Markov-láncot határoznak meg. Az általunk vizsgált *SIS* dinamikát a Markov-lánchoz tartozó átmenet mátrix írja le, amely azt adja meg, hogy milyen valószínűséggel jut a rendszer egyik állapotból a másikba egységnyi idő alatt. A folyamatot folytonos idejűnek tekintve az átmenet mátrix által meghatározott alap egyenlettel (master equation), amely egy lineáris közönséges differenciálegyenlet-rendszer, meghatározhatjuk az egyes állapotok valószínűségeit. Tehát feladatunk meghatározni a rendszerhez tartozó átmenet mátrixot. Ehhez célszerű az állapotteret $N + 1$ darab részhalmazra osztani az alapján, hogy a gráfban hány I típusú csúcs van. Vezessük be a következő jelöléseket: legyen \mathcal{S}^0 az az állapot, amikor minden csúcs S típusú, vagyis $\mathcal{S}^0 = (S, \dots, S)$, \mathcal{S}^k azon állapotok halmaza, ahol pontosan k darab fertőző csúcs van, és \mathcal{S}^N az az állapot, amikor minden csúcs fertőző, vagyis $\mathcal{S}^N = (I, \dots, I)$. \mathcal{S}^k részhalmaz elemei legyenek $\mathcal{S}_1^k, \mathcal{S}_2^k, \dots, \mathcal{S}_{c_k}^k$ ahol $c_k = \binom{N}{k}$. Jelölje $\mathcal{S}_j^k(l)$ az \mathcal{S}_j^k állapot l -dik csúcsának típusát, vagyis $\mathcal{S}_j^k(l) = S$ vagy $\mathcal{S}_j^k(l) = I$. A fenti jelölésekkel egy csúcsnál történő változást a következőképpen tudjuk leírni:

Fertőzés: egy S típusú csúcs I típusú lesz. Ez egy $\mathcal{S}_j^k \rightarrow \mathcal{S}_i^{k+1}$ átmenet, ahol i és j olyanok, hogy létezik egy l csúcs amelyre $\mathcal{S}_j^k(l) = S$ és $\mathcal{S}_i^{k+1}(l) = I$, a többi $m \neq l$ csúcsra pedig $\mathcal{S}_j^k(m) = \mathcal{S}_i^{k+1}(m)$. Valmint létezik legalább egy olyan $r \neq l$ csúcs, melyre $\mathcal{S}_j^k(r) = I$ és $g_{l,r} = 1$ (azaz az l -nek van fertőző szomszédja).

Gyógyulás: egy I típusú csúcs S típusú lesz. Ez egy $\mathcal{S}_j^k \rightarrow \mathcal{S}_i^{k-1}$ átmenet, ahol i és j olyanok, hogy létezik egy l csúcs amelyre $\mathcal{S}_j^k(l) = I$ és $\mathcal{S}_i^{k-1}(l) = S$, a többi $m \neq l$ csúcsra pedig $\mathcal{S}_j^k(m) = \mathcal{S}_i^{k-1}(m)$.

Jelölje $X_j^k(t)$ annak a valószínűségét, hogy a rendszer a t időpillanatban az \mathcal{S}_j^k állapotban van. Legyen $X^k(t)$ egy c_k dimenziós vektor, amely az $X_j^k(t)$, ($j = 1 \dots c_k$) valószínűségeket tartalmazza:

$$X^k(t) = (X_1^k(t), X_2^k(t), \dots, X_{c_k}^k(t)).$$

Az átmenetek az $X^k(t)$ függvényekre egy lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszert határoznak meg, amely a Markov-lánchoz tartozó alap egyenlet. Mivel a

fertőzött csúcsok száma legfeljebb 1-el változhat minden időpillanatban, ezért az alapegyenlet a következő blokkdiagonális alakban írható:

$$\dot{X}^k = A^k X^{k-1} + B^k X^k + C^k X^{k+1}, \quad k = 0, \dots, N, \quad (2.15)$$

ahol A^0 és C^N nullmátrixok. Mátrixos alakban írva:

$$\dot{X} = PX,$$

ahol

$$P = \begin{pmatrix} B^0 & C^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A^1 & B^1 & C^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A^2 & B^2 & C^2 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & & A^{N-1} & B^{N-1} & C^{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & A^N & B^N \end{pmatrix}$$

Az A^k mátrixok a fertőzés folyamatát írják le, vagyis egy A_{ij}^k elem adja meg az \mathcal{S}_j^{k-1} állapotból az \mathcal{S}_i^k állapotba történő átmenet rátáját. Mivel az \mathcal{S}^{k-1} halmaznak c_{k-1} , \mathcal{S}^k -nak pedig c_k részhalmaza van, ezért az A^k mátrixnak c_k sora van és c_{k-1} oszlopa. Egy A_{ij}^k elem akkor lehet nem 0, ha az \mathcal{S}_j^{k-1} és \mathcal{S}_i^k állapotok pontosan egy csúcsban különböznek, legyen ez az l csúcs melyre $\mathcal{S}_j^{k-1}(l) = S$ és $\mathcal{S}_i^k(l) = I$. Még szükséges, hogy létezzék olyan $r \neq l$ csúcs melyre $g_{lr} = 1$ és $\mathcal{S}_j^{k-1}(r) = I$, vagyis az \mathcal{S}_j^{k-1} állapotban az l egészséges csúcsnak van fertőző szomszédja a gráfban. Ekkor

$$A_{ij}^k = \tau \# \{r \in \{1, 2, \dots, N\} : g_{lr} = 1, \mathcal{S}_j^{k-1}(r) = I\}.$$

A C^k mátrixok a gyógyulás folyamatát írják le, vagyis C_{ij}^k elem adja meg az \mathcal{S}_j^{k+1} állapotból az \mathcal{S}_i^k állapotba történő átmenet rátáját. Mivel az \mathcal{S}^{k+1} halmaznak c_{k+1} , \mathcal{S}^k -nak pedig c_k részhalmaza van, ezért a C^k -nak c_k sora és c_{k+1} oszlopa van. Egy C_{ij}^k elem pontosan akkor nem nulla, ha az \mathcal{S}_j^{k+1} és az \mathcal{S}_i^k állapotok egyetlen csúcs állapotában térnek el, legyen ez a csúcs l és $\mathcal{S}_j^{k+1}(l) = I$, $\mathcal{S}_i^k(l) = S$ valamint minden $m \neq l$ csúcsra $\mathcal{S}_j^{k+1}(m) = \mathcal{S}_i^k(m)$. Ekkor $C_{ij}^k = \gamma$.

A B^k mátrixok az $\mathcal{S}_i^k \rightarrow \mathcal{S}_j^k$ átmenetek rátáit adják meg, így ezek diagonális mátrixok c_k sossal és oszloppal. Meggondolható, hogy egy B_{ij}^k elem csakis akkor

lehet nem nulla, ha $i = j$. Mivel a P mátrix minden oszlopösszege 0, ezért könnyen meghatározhatóak a B mátrix diagonálelemei is:

$$B_{ii}^k = - \sum_{j=1}^{c_{k+1}} A_{ji}^{k+1} - \sum_{j=1}^{c_{k-1}} C_{ji}^{k-1}.$$

Írjuk most fel a alap egyenleteket a három csúcsú teljes gráf esetében! Ekkor a gráf állapottere a $2^3 = 8$ elemű halmaz, melyet az I típusú csúcsok számának megfelelően négy osztályra oszthatunk, ezek $X^0 = X_{SSS}$, $X^1 = (X_{ISS}, X_{SIS}, X_{SSI})$, $X^2 = (X_{IIS}, X_{ISI}, X_{SII})$ és $X^3 = X_{III}$. A három csúcsú gráfhoz tartozó P mátrix a következő alakú:

$$P = \begin{pmatrix} B^0 & C^0 & 0 & 0 \\ A^1 & B^1 & C^1 & 0 \\ 0 & A^2 & B^2 & C^2 \\ 0 & 0 & A^3 & B^3 \end{pmatrix}$$

Teljes gráf esetében az egyes részmátrixok:

$$\begin{aligned} B^0 &= (0), & C^0 &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma & \gamma \end{pmatrix}, \\ A^1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & B^1 &= \begin{pmatrix} -2\tau - \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -2\tau - \gamma & 0 \\ 0 & 0 & -2\tau - \gamma \end{pmatrix}, & C^1 &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma & 0 \\ \gamma & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & \gamma \end{pmatrix}, \\ A^2 &= \begin{pmatrix} \tau & \tau & 0 \\ \tau & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \tau \end{pmatrix}, & B^2 &= \begin{pmatrix} -2\tau - 2\gamma & 0 & 0 \\ 0 & -2\tau - 2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -2\tau - 2\gamma \end{pmatrix}, & C^2 &= \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix}, \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 2\tau & 2\tau & 2\tau \end{pmatrix}, & B^3 &= (-3\gamma). \end{aligned}$$

Ekkor az $\dot{X} = PX$ differenciálegyenlet-rendszer a következő alakban írható:

$$\begin{aligned} \dot{X}^0 &= B^0 X^0 + C^0 X^1, \\ \dot{X}^1 &= A^1 X^0 + B^1 X^1 + C^1 X^2, \\ \dot{X}^2 &= A^2 X^1 + B^2 X^2 + C^2 X^3, \\ \dot{X}^3 &= A^3 X^2 + B^3 X^3. \end{aligned}$$

A fenti egyenletekben az X^1 és X^2 vektorokat kifejtve megkapjuk a teljes 8 egyenletből álló egyenletrendszert.

$$\begin{aligned}
\dot{X}_{SSS} &= \gamma X_{ISS} + \gamma X_{SIS} + \gamma X_{SSI}, \\
\dot{X}_{ISS} &= \gamma X_{IIS} + \gamma X_{ISI} - (\gamma + 2\tau)X_{ISS}, \\
\dot{X}_{SIS} &= \gamma X_{IIS} + \gamma X_{SII} - (\gamma + 2\tau)X_{SIS}, \\
\dot{X}_{SSI} &= \gamma X_{ISI} + \gamma X_{SII} - (\gamma + 2\tau)X_{SSI}, \\
\dot{X}_{IIS} &= \tau X_{ISS} + \tau X_{SIS} + \gamma X_{III} - 2(\gamma + \tau)X_{IIS}, \\
\dot{X}_{ISI} &= \tau X_{ISS} + \tau X_{SSI} + \gamma X_{III} - 2(\gamma + \tau)X_{ISI}, \\
\dot{X}_{SII} &= \tau X_{SIS} + \tau X_{SSI} + \gamma X_{III} - 2(\gamma + \tau)X_{SII}, \\
\dot{X}_{III} &= 2\tau X_{IIS} + 2\tau X_{ISI} + 2\tau X_{SII} - 3\gamma X_{III}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

A fenti eljáráshoz hasonlóan bármilyen gráf esetén felírható az egyenletrendszer amely az SIS dinamikát leíró Markov-lánchoz tartozó alap egyenlet. Megjegyezzük, hogy az így kapott rendszer már egy $N = 20$ csúcsú gráf esetén is igen nagy méretű lesz, hiszen ekkor az állapottér 2^{20} elemű halmaz, így a P mátrix mérete is ekkora. Ezért érdemes az egyenletek számának csökkentésére összevonásokat illetve közelítéseket alkalmazni. Erre mutattattunk két példát a megelőző alfejezetekben, most pedig megmutatjuk, hogy a három csúcsú teljes gráf egyenleteit hogyan érdemes összevonni.

Tehát tekintsük a (2.16) egyenleteket. Az összevonás lényege az, hogy azokat azon differenciálegyenleteket amelyek ugyanazon osztályba tartozó állapotokhoz tartoznak összeadjuk és ezekre új változókat vezetünk be. Vagyis:

$$x^0 := X^0, \quad x^1 := X_1^1 + X_2^1 + X_3^1, \quad x^2 := X_1^2 + X_2^2 + X_3^2, \quad x^3 := X^3.$$

Az ezekhez atrtozó egyenletek pedig a következők:

$$\begin{aligned}
\dot{x}^0 &= \gamma x^1, \\
\dot{x}^1 &= 2\gamma x^2 - (2\tau + \gamma)x^1, \\
\dot{x}^2 &= 3\gamma x^3 + 2\tau x^1 - 2(\tau + \gamma)x^2, \\
\dot{x}^3 &= 2\tau x^2 - 3\gamma x^3.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Az így kapott egyenletrendszert mátrixos alakban írva:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -(2\tau + \gamma) & 2\gamma & 0 \\ 0 & 2\tau & -2(\tau + \gamma) & 3\gamma \\ 0 & 0 & 2\tau & -3\gamma \end{pmatrix} x.$$

A fenti mátrix megkapható a P mátrixból, mégpedig úgy, hogy az A, B, C részmatrixok oszlopösszegeit vesszük. Megjegyezzük, hogy az összevonás feltétele az, hogy az egyes A mátrixok oszlopösszegei megegyezzenek. Ez azzal magyarázható, hogy a gráf szerkezete a fertőzés során tud érvényesülni, így az az A mátrixokban tükröződik.

Az összevonással kapott egyenletrendszer 8 helyett csak 4 egyenletet tartalmaz, ami nyilván kevesebb információt tartalmaz, viszont a számunkra érdekes mennyiség, nevezetesen a fertőző illetve egészséges csúcsok számának várható értéke így is felírható. Ez a várható érték definíciója alapján:

$$[I](t) = x^1(t) + 2x^2(t) + 3x^3(t), \quad [S](t) = 3x^0(t) + 2x^1(t) + x^2(t).$$

Megjegyezzük, hogy általános esetben nem mindig triviális, hogy hogyan vonjuk össze az egyenleteket. Erre egy módszer a gráf automorfizmus csoportjainak vizsgálata, és az egy csoportba tartozó egyenletek összevonása. A következőkben megmutatjuk, hogy teljes gráf esetén a gráf automorfizmuscsoportját használva a 2^N egyenletből álló alarendszer összevonható $N + 1$ egyenletből álló rendszerré. Mivel a teljes gráf permutációcsoportja az S_N permutációcsoport, így az egy \mathcal{S}^l osztályba tartozó állapotok összevonhatóak. Vagyis azon állapotok, ahol az I csúcsok száma megegyezik összevonhatóak. Ezzel kapjuk az $N + 1$ új osztályt [7]. Az összevonás mátrixa a következő T mátrix:

$$T = \begin{pmatrix} S_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_N \end{pmatrix},$$

ahol $S_k = (1, 1, \dots, 1)$, c_k hosszúságú vektor. Az új ismeretlen függvények pedig

$$x^k = \sum_{j=1}^{c^k} X_j^k = S_k X^k.$$

Az X^k függvényekre vonatkozó (2.15) egyenletrendszer c^k egyenletből áll, ezeket összeadva:

$$\dot{x}^k = S_k A^k x^{k-1} + S_k B^k x^k + S_k C^k x^{k+1}. \quad (2.18)$$

A fenti egyenletben $S_k A^k$ és $S_k B^k$ értékei kiszámíthatóak, amikkel a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \dot{x}^0 &= \gamma x^1, \\ \dot{x}^k &= (k+1)\gamma x^{k+1} + (k-1)(N-k+1)\tau x^{k-1} - (k(N-k)\tau + k\gamma)x^k \\ \dot{x}^N &= (N-1)\tau x^{N-1} - N\gamma x^N, \end{aligned} \quad (2.19)$$

ahol $k = (1, 2, \dots, N-1)$.

3. fejezet

A részgráf megközelítés

Ebben a fejezetben a járványterjedés vizsgálatának egy másik módszerét, az úgynevezett részgráf (*subsystem*) megközelítést mutatjuk be *SIR* dinamika esetén [1]. Most a populáció minden egyede három különböző állapotban lehet egy adott időpillanatban:

- *S*: fertőzhető (*Susceptible*),
- *I*: fertőző (*Infectious*),
- *R*: meggyógyult (*Recovered*).

Az időben lezajló folyamat során egy egészséges egyed megfertőződhet, és egy fertőzött egyed meggyógyulhat, de újból nem tud megfertőződni, vagyis kikerül a rendszerből.

Az egyes egyedek állapotát minden időben két vektorral fogjuk leírni: *I*-vel és *S*-el, ahol $I_i = 1$, ha az *i*. csúcs fertőzött és 0 különben, hasonlóan $S_i = 1$, ha az *i*. csúcs egészséges és 0 különben. A fertőzés és a gyógyulás folyamatát most is független Poisson-folyamatnak tekintjük τ fertőzési illetve γ gyógyulási rátákkal. Jelölje $A \in \{0, 1\}^{N \times N}$ az *N* csúcsú hálózat szomszédsági mátrixát. Ekkor felírható

a következő differenciálegyenlet-rendszer:

$$\begin{aligned}
\langle \dot{S}_i \rangle &= - \sum_{j=1}^N A_{ij} \tau \langle S_i I_j \rangle, \\
\langle \dot{I}_i \rangle &= \sum_{j=1}^N A_{ij} \tau \langle S_i I_j \rangle - \gamma \langle I_i \rangle, \\
\langle \dot{S}_i I_j \rangle &= \sum_{k=1, k \neq i}^N A_{jk} \tau \langle S_i S_j I_k \rangle - \sum_{k=1, k \neq i}^N A_{ik} \tau \langle I_k S_i I_j \rangle - A_{ij} \tau \langle S_i I_j \rangle - \gamma \langle S_i I_j \rangle, \\
\langle \dot{S}_i S_j \rangle &= - \sum_{k=1, k \neq i}^N A_{jk} \tau \langle S_i S_j I_k \rangle - \sum_{k=1, k \neq i}^N A_{ik} \tau \langle I_k S_i S_j \rangle.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Ahol $\langle S_i \rangle$ és $\langle I_i \rangle$ annak a valószínűségét jelöli, hogy az i . csúcs egészséges illetve beteg az adott időpillanatban. $\langle A_i B_j \rangle$ annak a valószínűsége, hogy az i . csúcs A , a j . csúcs pedig B állapotú, hasonlóan értelmezzük a $\langle A_i B_j C_k \rangle$ jelölést is.

Például az $\langle \dot{I}_i \rangle$ -re vonatkozó egyenletet a következő képpen kapjuk meg. Az i csúcsot, ha az S állapotú, akkor bármely fertőző szomszédja meg tudja fertőzni τ rátával, így az $S_i I_j$ éleket τ -val szorozva és összegezve kell bevenni az egyenletbe. Ha pedig az i csúcs fertőzött állapotú, akkor γ rátával meg tud gyógyulni, és ezzel kikerül az I_i állapotból.

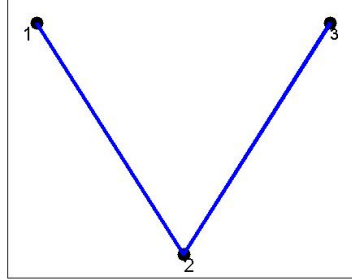
Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a fenti jelölések nem követelik meg, hogy a párok illetve hármasok között élek fussanak.

Az egyenletrendszer teljessé tehető, ha felírjuk a megjelenő hármasokra, négyesekre és így tovább az egyenleteket. Ezzel azonban a csúcsok méretével exponenciálisan növekvő méretű egyenletrendszert kapunk, ami már öt csúcsú gráf esetében is túl nagy ahhoz, hogy gyorsan meg tudjuk oldani. Ezért általában különböző közelítéseket szoktak felírni a hármasokra, négyesekre, stb., ezzel valamilyen szinten lezárva az egyenletrendszert. A következőkben bemutatunk két lezárási módszert melyek pontosak és ezek pontosságát be is bizonyítjuk.

3.1. A teljes rendszer felírása egy példán

Először megmutatjuk egy konkrét irányítatlan gráfon, hogy hogyan is épül fel az egyenletrendszer. Tekintsük a három csúcsú, nem teljes gráfot, mely a 3.1 ábrán

látható. Legyen a fertőzési ráta τ és a gyógyulási ráta γ . A csúcsokra a következő



3.1. ábra. Három csúcsú út gráf.

egyenletek írhatók fel:

$$\begin{aligned}
 \langle \dot{I}_1 \rangle &= \tau \langle S_1 I_2 \rangle - \gamma \langle I_1 \rangle, \\
 \langle \dot{I}_2 \rangle &= \tau \langle I_1 S_2 \rangle + \tau \langle S_2 I_3 \rangle - \gamma \langle I_2 \rangle, \\
 \langle \dot{I}_3 \rangle &= \tau \langle I_2 S_3 \rangle - \gamma \langle I_3 \rangle.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Itt I_1 és I_3 szerepe teljesen szimmetrikus. Mindkettő állapot úgy jöhet létre, ha a I_2 megfertőzi S_1 -et illetve S_3 -at az őket összekötő élen keresztül, ez τ rátával történik. Valamint mindkét csúcs γ rátával meggyógyulhat. I_2 -re az egyenlet hasonló módon írható fel. Az S_2 csúcs fertőző állapotú lesz, ha az 1-es és a 3-as csúcsok egyike megfertőzi, valamint I_2 meg is gyógyulhat. Az S állapotokra az egyenletek következnek (3.2) egyenletekből, hiszen csak egy S állapotú csúcs válhat I állapotúvá.

$$\begin{aligned}
 \langle \dot{S}_1 \rangle &= -\tau \langle S_1 I_2 \rangle, \\
 \langle \dot{S}_2 \rangle &= -\tau \langle I_1 S_2 \rangle - \tau \langle S_2 I_3 \rangle, \\
 \langle \dot{S}_3 \rangle &= -\tau \langle I_2 S_3 \rangle.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

A fenti egyenletekben megjelentek az élek állapotaira a valószínűségek, így azokra is fel kell írni az egyenleteket:

$$\begin{aligned}
\langle \dot{S}_1 I_2 \rangle &= \tau \langle S_1 S_2 I_3 \rangle - \tau \langle S_1 I_2 \rangle - \gamma \langle S_1 I_2 \rangle, \\
\langle \dot{I}_1 S_2 \rangle &= -\tau \langle I_1 S_2 I_3 \rangle - \tau \langle I_1 S_2 \rangle - \gamma \langle I_1 S_2 \rangle, \\
\langle \dot{S}_2 I_3 \rangle &= -\tau \langle I_1 S_2 I_3 \rangle - \tau \langle S_2 I_3 \rangle - \gamma \langle S_2 I_3 \rangle, \\
\langle \dot{I}_2 S_3 \rangle &= \tau \langle I_1 S_2 S_3 \rangle - \tau \langle I_2 S_3 \rangle - \gamma \langle I_2 S_3 \rangle.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Például az $S_1 I_2$ él megváltozása a következő módon írható. Ha $S_1 S_2$ állapotban van az $1 - 2$ él, akkor τ rátával az I_3 csúcs meg tudja fertőzni a 2-es csúcsot, és ezzel az $1 - 2$ él $S_1 I_2$ állapotú lesz. Az $S_1 I_2$ állapotban a 2-es csúcs megfertőzheti az 1-es csúcsot, valamint meg is gyógyúehat, ezzel kikerülve az $S_1 I_2$ állapotból.

Végül felírjuk a hármasokra az egyenleteket:

$$\begin{aligned}
\langle \dot{S}_1 \dot{S}_2 I_3 \rangle &= -\tau \langle S_1 S_2 I_3 \rangle - \gamma \langle S_1 S_2 I_3 \rangle, \\
\langle \dot{I}_1 \dot{S}_2 I_3 \rangle &= -2\tau \langle I_1 S_2 I_3 \rangle - 2\gamma \langle I_1 S_2 I_3 \rangle, \\
\langle \dot{I}_1 \dot{S}_2 S_3 \rangle &= -\tau \langle I_1 S_2 S_3 \rangle - \gamma \langle I_1 S_2 S_3 \rangle.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

A fent (3.2)-(3.5) egyenletek teljes egyenletrendszert alkotnak, így adott kezdeti feltételek mellett meg lehet oldani. Tehát például meghatározható az $\langle I_1 \rangle(t)$ függvény $t \geq 0$ esetén.

3.2. Lezárás az élek szintjén

Legyen a gráfunk összefüggő és körmentes, azaz egy fa, és tegyük fel, hogy a rendszer kezdeti állapotát 1 valószínűséggel meg tudjuk határozni. Megmutatjuk, hogy ekkor a rendszer az élek szintjén lezárható és a lezárás pontos. Ez azt jelenti, hogy az élek egyenleteiben megjelenő hármasok valószínűségét ki tudjuk fejezni csak az élek és csúcsok valószínűségeivel, így az egyenletrendszerben nem jelennek meg a hármasok. Pontosabban, megfogalmazható a következő tétel:

3.2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a gráf körmentes (vagyis egy fa) és a rendszer állapota kezdetben 1 valószínűséggel a 3^N lehetséges állapot valamelyike. Ekkor a követ-*

kező egyenlőségek fennállnak minden $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ esetén:

$$\langle S_i \rangle \langle S_j S_i I_k \rangle = \langle S_j S_i \rangle \langle S_i I_k \rangle$$

minden olyan j -re és k -ra melyek össze vannak kötve i -vel és $j \neq k$;

$$\langle S_i \rangle \langle I_j S_i I_k \rangle = \langle I_j S_i \rangle \langle S_i I_k \rangle$$

minden olyan j -re és k -ra melyek össze vannak kötve i -vel és $j \neq k$.

Ekkor a tétel szerint a (3.1) rendszer ilyen zárt alakban írható:

$$\begin{aligned} \langle \dot{S}_i \rangle &= - \sum_{j=1}^N A_{ij} \tau \langle S_i I_j \rangle, \\ \langle \dot{I}_i \rangle &= \sum_{j=1}^N A_{ij} \tau \langle S_i I_j \rangle - \gamma \langle I_i \rangle, \\ \langle \dot{S}_i I_j \rangle &= \sum_{k=1, k \neq i}^N A_{jk} \tau \frac{\langle S_i S_j \rangle \langle S_j I_k \rangle}{\langle S_j \rangle} - \sum_{k=1, k \neq i}^N A_{ik} \tau \frac{\langle I_k S_i \rangle \langle S_i I_j \rangle}{\langle S_i \rangle} - A_{ij} \tau \langle S_i I_j \rangle - \gamma \langle S_i I_j \rangle, \\ \langle \dot{S}_i S_j \rangle &= - \sum_{k=1, k \neq i}^N A_{jk} \tau \frac{\langle S_i S_j \rangle \langle S_j I_k \rangle}{\langle S_j \rangle} - \sum_{k=1, k \neq i}^N A_{ik} \tau \frac{\langle I_k S_i \rangle \langle S_i S_j \rangle}{\langle S_i \rangle}. \end{aligned}$$

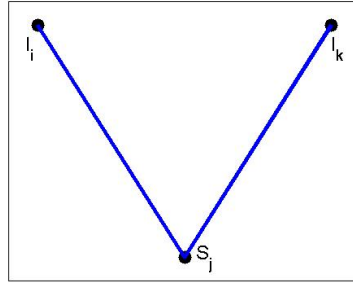
A tételre általános esetben adható egy hosszadalmas, a differenciálegyenletek eszközeit használó konstruktív bizonyítás mely először a [1] cikkben jelent meg. Jelen dolgozatban a bizonyítás módszerét három speciális esetre mutatjuk meg, valamint adunk egy másik, a valószínűségszámítási alapokon nyugvó bizonyítást is.

3.2.1. Bizonyítás egyetlen fertőzött csúcs esetén

Ha kezdetben a rendszerben egyetlen fertőzött csúcs található, akkor a fertőzés csakis lineárisan terjedhet. Tehát annak a valószínűsége, hogy a 3.2 ábrán látható hármas $I_i S_j I_k$ állapotban legyen 0, hiszen akár i -ből, akár k -ból indul a betegség, keresztül kell haladnia a j csúcson, hogy eljusson a másik csúcshoz.

Tehát például az

$$\langle I_i S_j \rangle = \langle I_i S_j S_k \rangle + \langle I_i S_j I_k \rangle + \langle I_i S_j R_k \rangle$$



3.2. ábra. A három csúcsú út gráfon, ha kezdetben egyetlen fertőzött csúcs van, akkor annak a valószínűsége, hogy az ábrán látható $I_i S_j I_k$ állapotba kerüljön a gráf 0.

egyenletben a $\langle I_i S_j I_k \rangle$ valószínűség 0 és így a $\langle I_i S_j R_k \rangle$ valószínűség is. Tehát

$$\langle I_i S_j \rangle = \langle I_i S_j S_k \rangle.$$

Ezzel megmutattuk, hogy egy körmentes összefüggő hálózaton, kezdetben egyetlen fertőzött csúcs esetén a (3.1) rendszer így írható:

$$\begin{aligned} \langle \dot{S}_i \rangle &= - \sum_{j=1}^N A_{ij} \tau \langle S_i I_j \rangle, \\ \langle \dot{I}_i \rangle &= \sum_{j=1}^N A_{ij} \tau \langle S_i I_j \rangle - \gamma \langle I_i \rangle, \\ \langle \dot{S}_i I_j \rangle &= \sum_{k=1, k \neq i}^N A_{jk} \tau \langle S_j I_k \rangle - A_{ij} \tau \langle S_i I_j \rangle - \gamma \langle S_i I_j \rangle, \\ \langle \dot{S}_i S_j \rangle &= - \sum_{k=1, k \neq i}^N A_{ik} \tau \langle I_k S_i \rangle - \sum_{k=1, k \neq i}^N A_{jk} \tau \langle S_j I_k \rangle. \end{aligned}$$

3.2.2. Bizonyítás három csúcsú út esetén

Tekintsük a már korábban tárgyalt 3.1-es ábrán látható gráfot, és a hozzá felírt (3.2), (3.4) és (3.5) egyenleteket. A tétel bizonyításához szükségünk lesz ezeken kívül a következő két egyenletre is:

$$\langle \dot{S}_1 S_2 \rangle = -\tau \langle S_1 S_2 I_3 \rangle \quad \text{és} \quad \langle \dot{S}_2 S_3 \rangle = -\tau \langle I_1 S_2 S_3 \rangle.$$

Megmutatjuk, hogy az egyenletrendszer lezárható az élek szintjén, és a (3.5)

egyenletekre nincs szükség. Tekintsük először a következő közelítést:

$$\langle I_1 S_2 I_3 \rangle \approx \frac{\langle I_1 S_2 \rangle \langle S_2 I_3 \rangle}{\langle S_2 \rangle}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fent, ha $\alpha(t) = 0$, ahol

$$\alpha(t) = \langle S_2 \rangle \langle I_1 S_2 I_3 \rangle - \langle I_1 S_2 \rangle \langle S_2 I_3 \rangle.$$

Vegyük az α függvény idő szerinti deriváltját:

$$\alpha'(t) = \langle \dot{S}_2 \rangle \langle I_1 S_2 I_3 \rangle + \langle S_2 \rangle \langle I_1 \dot{S}_2 I_3 \rangle - \langle \dot{I}_1 S_2 \rangle \langle S_2 I_3 \rangle - \langle I_1 S_2 \rangle \langle \dot{S}_2 I_3 \rangle.$$

Helyettesítsük be a megfelelő deriváltakat a (3.2) - (3.5) egyenletekből:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) = & - \left(\tau \langle I_1 S_2 \rangle + \tau \langle S_2 I_3 \rangle \right) \langle I_1 S_2 I_3 \rangle - 2(\tau + \gamma) \langle S_2 \rangle \langle I_1 S_2 I_3 \rangle \\ & + \left(\tau \langle I_1 S_2 I_3 \rangle + (\tau + \gamma) \langle I_1 S_2 \rangle \right) \langle S_2 I_3 \rangle + \langle I_1 S_2 \rangle \left(\tau \langle I_1 S_2 I_3 \rangle + (\tau + \gamma) \langle S_2 I_3 \rangle \right). \end{aligned}$$

Egyszerűsítve ott, ahol tudunk kapjuk a következő differenciálegyenletet:

$$\alpha'(t) = -2(\tau + \gamma)\alpha(t).$$

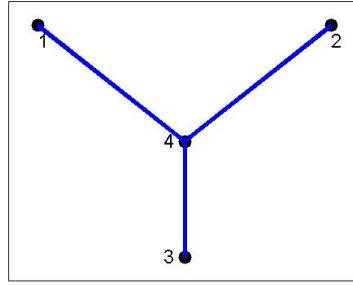
Ezt megoldva kapjuk:

$$\alpha(t) = \alpha(0)e^{-2(\tau+\gamma)t}.$$

Könnyen meggondolható, hogy $\alpha(0) = 0$. Tegyük fel, hogy a rendszer kezdeti állapota 1 valószínűséggel $I_1 S_2 I_3$, ekkor $\langle S_2 \rangle = 1$ és $\langle I_1 S_2 \rangle = \langle S_2 I_3 \rangle = 1$, amiből következik, hogy $\alpha(0) = 0$. Ha pedig a kezdeti állapot 1 valószínűséggel egy másik állapot, akkor is $\alpha(0) = 0$ világos. Vagyis $\alpha(t) = 0$ minden $t > 0$ időpontban. Ezzel beláttuk, hogy a lezárás egzakt. A másik két hármasra, $\langle S_1 S_2 I_3 \rangle$ -ra és $\langle I_1 S_2 S_3 \rangle$ -ra teljesen hasonlóan működik a bizonyítás, felhasználva az SS típusú élekre a megfelelő egyenleteket.

3.2.3. Bizonyítás csillag alakú gráf esetén

Tekintsük a 3.3 ábrán látható irányítatlan gráfot. Megint legyen minden csúcsra a fertőzési ráta τ és a gyógyulási ráta γ . Először írjuk fel a gráfhoz tartozó teljes



3.3. ábra. 4 csúcsú csillag gráf.

rendszer, mert a bizonyításhoz majd szükségünk lesz bizonyos egyenletekre.

A csúcsokra vonatkozó egyenletek a következők:

$$\begin{aligned}
 \langle \dot{I}_1 \rangle &= \tau \langle S_1 I_4 \rangle - \gamma \langle I_1 \rangle, \\
 \langle \dot{I}_2 \rangle &= \tau \langle S_2 I_4 \rangle - \gamma \langle I_2 \rangle, \\
 \langle \dot{I}_3 \rangle &= \tau \langle S_3 I_4 \rangle - \gamma \langle I_3 \rangle, \\
 \langle \dot{I}_4 \rangle &= \tau \langle I_1 S_4 \rangle + \tau \langle I_2 S_4 \rangle + \tau \langle I_3 S_4 \rangle - \gamma \langle I_4 \rangle. \\
 \langle \dot{S}_1 \rangle &= -\tau \langle S_1 I_4 \rangle, \\
 \langle \dot{S}_2 \rangle &= -\tau \langle S_2 I_4 \rangle, \\
 \langle \dot{S}_3 \rangle &= -\tau \langle S_3 I_4 \rangle, \\
 \langle \dot{S}_4 \rangle &= -\tau \langle I_1 S_4 \rangle - \tau \langle I_2 S_4 \rangle - \tau \langle I_3 S_4 \rangle.
 \end{aligned}$$

Az élek állapotaihoz tartozó egyenletek:

$$\begin{aligned}
 \langle \dot{S}_1 I_4 \rangle &= \tau \langle S_1 I_2 S_4 \rangle + \tau \langle S_1 I_3 S_4 \rangle - (\tau + \gamma) \langle S_1 I_4 \rangle, \\
 \langle \dot{S}_2 I_4 \rangle &= \tau \langle I_1 S_2 S_4 \rangle + \tau \langle S_2 I_3 S_4 \rangle - (\tau + \gamma) \langle S_2 I_4 \rangle, \\
 \langle \dot{S}_3 I_4 \rangle &= \tau \langle I_1 S_3 S_4 \rangle + \tau \langle I_2 S_3 S_4 \rangle - (\tau + \gamma) \langle S_3 I_4 \rangle. \\
 \langle \dot{I}_1 S_4 \rangle &= -\tau \langle I_1 I_2 S_4 \rangle - \tau \langle I_1 I_3 S_4 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_1 S_4 \rangle, \\
 \langle \dot{I}_2 S_4 \rangle &= -\tau \langle I_1 I_2 S_4 \rangle - \tau \langle I_2 I_3 S_4 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_2 S_4 \rangle, \\
 \langle \dot{I}_3 S_4 \rangle &= -\tau \langle I_1 I_3 S_4 \rangle - \tau \langle I_2 I_3 S_4 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_3 S_4 \rangle. \\
 \\
 \langle \dot{S}_1 S_4 \rangle &= -\tau \langle S_1 I_2 S_4 \rangle - \tau \langle S_1 I_3 S_4 \rangle, \\
 \langle \dot{S}_2 S_4 \rangle &= -\tau \langle I_1 S_2 S_4 \rangle - \tau \langle S_2 I_3 S_4 \rangle, \\
 \langle \dot{S}_3 S_4 \rangle &= -\tau \langle I_1 S_3 S_4 \rangle - \tau \langle I_2 S_3 S_4 \rangle.
 \end{aligned}$$

A megjelenő hármasok állapotaihoz tartozó egyenletek:

$$\begin{aligned}
\langle I_1 \dot{S}_2 S_4 \rangle &= -\tau \langle I_1 S_2 I_3 S_4 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_1 S_2 S_4 \rangle, \\
\langle I_1 \dot{S}_3 S_4 \rangle &= -\tau \langle I_1 I_2 S_3 S_4 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_1 S_3 S_4 \rangle, \\
\langle S_1 \dot{I}_2 S_4 \rangle &= -\tau \langle S_1 I_2 I_3 S_4 \rangle - (\tau + \gamma) \langle S_1 I_2 S_4 \rangle, \\
\langle I_2 \dot{S}_3 S_4 \rangle &= -\tau \langle I_1 I_2 S_3 S_4 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_2 S_3 S_4 \rangle, \\
\langle S_1 \dot{I}_3 S_4 \rangle &= -\tau \langle S_1 I_2 I_3 S_4 \rangle - (\tau + \gamma) \langle S_1 I_3 S_4 \rangle, \\
\langle S_2 \dot{I}_3 S_4 \rangle &= -\tau \langle I_1 S_2 I_3 S_4 \rangle - (\tau + \gamma) \langle S_2 I_3 S_4 \rangle, \\
\langle I_1 \dot{I}_2 S_4 \rangle &= -\tau \langle I_1 I_2 I_3 S_4 \rangle - 2(\tau + \gamma) \langle I_1 I_2 S_4 \rangle, \\
\langle I_1 \dot{I}_3 S_4 \rangle &= -\tau \langle I_1 I_2 I_3 S_4 \rangle - 2(\tau + \gamma) \langle I_1 I_3 S_4 \rangle, \\
\langle I_2 \dot{I}_3 S_4 \rangle &= -\tau \langle I_1 I_2 I_3 S_4 \rangle - 2(\tau + \gamma) \langle I_2 I_3 S_4 \rangle.
\end{aligned}$$

Látható, hogy kétféle hármas lezárására van szükség: az $S - S - I$ és $I - S - I$ típusúakra. Most a gráfban három különböző hármas van, az $(1,4,2)$, $(1,4,3)$ és $(2,4,3)$. Elegendő lesz csak az egyiket bizonyítanunk, a többit ugyanígy lehet. Tehát célunk a következő két összefüggés igazolása:

$$\begin{aligned}
\langle S_4 \rangle \langle S_1 I_3 S_4 \rangle &= \langle S_1 S_4 \rangle \langle I_3 S_4 \rangle, \\
\langle S_4 \rangle \langle I_1 I_3 S_4 \rangle &= \langle I_1 S_4 \rangle \langle I_3 S_4 \rangle.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Ezeket nullára rendezve kapjuk:

$$\begin{aligned}
\langle S_4 \rangle \langle S_1 I_3 S_4 \rangle - \langle S_1 S_4 \rangle \langle I_3 S_4 \rangle &= 0, \\
\langle S_4 \rangle \langle I_1 I_3 S_4 \rangle - \langle I_1 S_4 \rangle \langle I_3 S_4 \rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Vezessük be a következő függvényt:

$$\alpha_1 = \langle S_4 \rangle \langle S_1 I_3 S_4 \rangle - \langle S_1 S_4 \rangle \langle I_3 S_4 \rangle.$$

Deriváljuk le és helyettesítsük be a deriváltak helyére a teljes rendszer megfelelő egyenleteit. Ekkor kapjuk:

$$\dot{\alpha}_1 = -(\tau + \gamma)\alpha_1 - \tau\alpha_2 - \tau\alpha_3 - \tau\alpha_4. \tag{3.7}$$

Ahol

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \langle I_1 S_4 \rangle \langle S_1 I_3 S_4 \rangle - \langle S_1 S_4 \rangle \langle I_1 I_3 S_4 \rangle, \\ \alpha_3 &= \langle I_2 S_4 \rangle \langle S_1 I_3 S_4 \rangle - \langle S_1 S_4 \rangle \langle I_2 I_3 S_4 \rangle, \\ \alpha_4 &= \langle S_4 \rangle \langle S_1 I_2 I_3 S_4 \rangle - \langle I_3 S_4 \rangle \langle S_1 I_2 S_4 \rangle.\end{aligned}$$

Deriváljuk le α_2 -t:

$$\dot{\alpha}_2 = -2(\tau + \gamma)\alpha_1 - \tau\alpha_5 - \tau\alpha_6, \quad (3.8)$$

ahol

$$\begin{aligned}\alpha_5 &= \langle I_1 I_2 S_4 \rangle \langle S_1 I_3 S_4 \rangle - \langle S_1 I_2 S_4 \rangle \langle I_1 I_3 S_4 \rangle, \\ \alpha_6 &= \langle I_1 S_4 \rangle \langle S_1 I_2 I_3 S_4 \rangle - \langle S_1 S_4 \rangle \langle I_1 I_2 I_3 S_4 \rangle.\end{aligned}$$

α_3 és α_4 deriváltjait hasonlóan kaphatjuk meg. α_5 -öt is lederiválva kapjuk:

$$\dot{\alpha}_5 = -3(\tau + \gamma)\alpha_5 - \tau\alpha_7 - \tau\alpha_8, \quad (3.9)$$

ahol

$$\begin{aligned}\alpha_7 &= \langle I_1 I_2 I_3 S_4 \rangle \langle S_1 I_3 S_4 \rangle - \langle S_1 I_2 I_3 S_4 \rangle \langle I_1 I_3 S_4 \rangle \\ \alpha_8 &= \langle I_1 I_2 I_3 S_4 \rangle \langle S_1 I_2 S_4 \rangle - \langle S_1 I_2 I_3 S_4 \rangle \langle I_1 I_2 S_4 \rangle.\end{aligned}$$

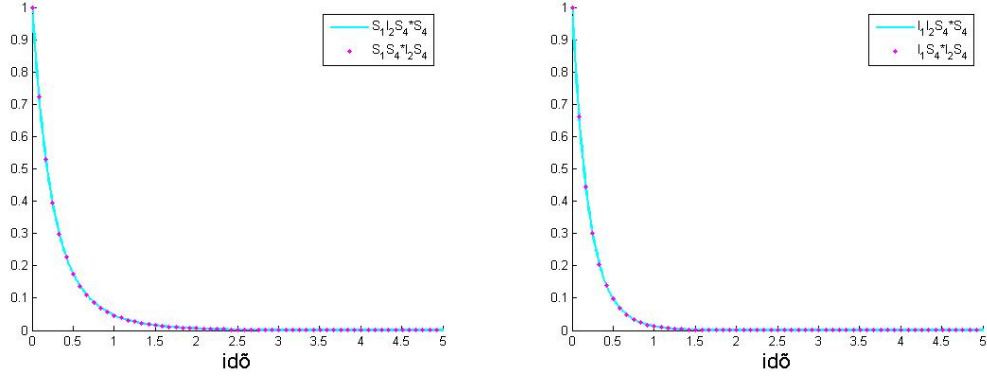
α_6 deriváltját szintén hasonlóan kaphatjuk meg. Végül α_7 és α_8 deriváltjait véve kapjuk, hogy

$$\dot{\alpha}_7 = -4(\tau + \gamma)\alpha_7 \quad \text{és} \quad \dot{\alpha}_8 = -4(\tau + \gamma)\alpha_8. \quad (3.10)$$

Ezeket már meg tudjuk oldani: $\alpha_7(t) = \alpha_7(0)e^{-4(\tau+\gamma)t}$ és $\alpha_8(t) = \alpha_8(0)e^{-4(\tau+\gamma)t}$. Feltehető, hogy a kezdeti állapot egy valószínűséggel a $3^4 = 81$ lehetőség egyike. Ezzel könnyen látható, hogy $\alpha_7(0) = 0$ és $\alpha_8(0) = 0$ és így $\alpha_7(t) = 0$ és $\alpha_8(t) = 0$ minden $t \geq 0$ esetén. Ebből az α_5 -re felírt egyenlet is megoldható, és hasonló érveléssel $\alpha_5(t) = 0$ is fennáll minden $t \geq 0$ esetén, ugyanez igaz α_6 -ra is. Következésképpen $\alpha_2 = 0$, és $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0$. Ezeket felhasználva látható, hogy $\alpha_1 = 0$, ami a bizonyításunk célja volt. Teljesen hasonló módon lehet megmutatni, hogy a (3.6) egyenlőség is fennáll.

A teljes rendszert a MATLAB programcsomag beépített ODE45 megoldójával megoldva numerikusan kiszámíthatók a (3.12) tételben szereplő egyenlőségek jobb

illetve bal oldalai. Ezeket szemléltetik a 3.4 ábrák.



3.4. ábra. A 4 csúcsú csillag alakú gráf esetében a teljes egyenletrendszert felírva és numerikusan megoldva összehasonlítható a 2.1 tételben szereplő egyenlőségek jobb és bal oldala. A bal oldali ábrán az $S_1 I_2 S_4$ állapotra vonatkozó egyenlőség két oldalának függvénye, míg a jobb oldalin a $I_1 I_2 S_4$ állapotra vonatkozó függvények láthatóak. Folytonos vonallal mindkét esetben az egyenlőségek bal oldala, pontozottal pedig a jobb oldal van ábrázolva.

3.2.4. Függetlenségen alapuló bizonyítás

Tekintsünk egy körmentes gráfot és azon a következő, a 3.2.1 tételben szereplő lezárásokat:

$$\langle S_i S_j I_k \rangle = \frac{\langle S_i S_j \rangle \langle S_j I_k \rangle}{\langle S_j \rangle}, \quad \langle I_i S_j I_k \rangle = \frac{\langle I_i S_j \rangle \langle S_j I_k \rangle}{\langle S_j \rangle},$$

ahol i, j és j, k csúcsok között fut él. Egy körmentes gráfban, ha egy j csúcs a t . időpillanatban S típusú, és egy k szomszédja I típusú, akkor a k csúcs j bármely másik szomszédjának az állapotát nem tudja befolyásolni. Vagyis egy S típusú csúcs bármely két szomszédjának az állapota egymástól független. Ezt az észrevételt felhasználva felírhatjuk a következőket:

$$\langle I_i I_k | S_j \rangle = \langle I_i | S_j \rangle \langle I_k | S_j \rangle.$$

Ahol $\langle A_i|B_j\rangle$ a feltételes valószínűséget jelöli, vagyis annak a valószínűsége, hogy az i A állapotú feltéve, hogy a j csúcs B állapotú.

Ha $I_i I_k$ és S_j is fennáll egy adott t időpillanatban, akkor $I_i S_j I_k$ is fennáll, ezért a fenti egyenlőséggel ekvivalens:

$$\langle I_i S_j I_k | S_j \rangle = \langle I_i S_j | S_j \rangle \langle S_j I_k | S_j \rangle.$$

Felhasználva a feltételes valószínűség tételét:

$$\langle I_i S_j I_k | S_j \rangle = \frac{\langle I_i S_j \rangle \langle S_j I_k \rangle}{\langle S_j \rangle^2}.$$

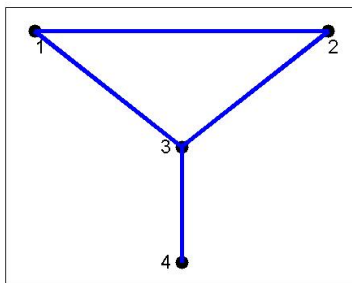
Mivel $I_i S_j I_k$ esetén S_j is bekövetkezik, ezért $\langle I_i S_j I_k | S_j \rangle \langle S_j \rangle = \langle I_i S_j I_k \rangle$. Ezt felhasználva kapjuk a tétel állítását:

$$\langle I_i S_j I_k \rangle = \frac{\langle I_i S_j \rangle \langle S_j I_k \rangle}{\langle S_j \rangle}. \quad (3.11)$$

A másik esetre hasonló érveléssel kapjuk, hogy az egyenlőség fennáll.

3.3. Lezárás a hármások szintjén

Tekintsük az 3.5 ábrán látható gráfot, melyet a továbbiakban lollipop gráfnak nevezünk. Ebben a részben meg fogjuk mutatni, hogy a gráfhoz tartozó rendszer egzakt módon lezárható a hármások szintjén. Először felírjuk a teljes egyenletrendszert, mivel azokat a bizonyításban használni fogjuk. Az egyenletek a csúcsokra:



3.5. ábra. Lollipop gráf.

$$\begin{aligned}
\langle \dot{S}_1 \rangle &= -\tau \langle S_1 I_2 \rangle - \tau \langle S_1 I_3 \rangle, \\
\langle \dot{S}_2 \rangle &= -\tau \langle I_1 S_2 \rangle - \tau \langle S_2 I_3 \rangle, \\
\langle \dot{S}_3 \rangle &= -\tau \langle I_1 S_3 \rangle - \tau \langle I_2 S_3 \rangle - \tau \langle S_3 I_4 \rangle, \\
\langle \dot{S}_4 \rangle &= -\tau \langle I_3 S_4 \rangle. \\
\langle \dot{I}_1 \rangle &= \tau \langle S_1 I_2 \rangle + \tau \langle S_1 I_3 \rangle - \gamma \langle I_1 \rangle, \\
\langle \dot{I}_2 \rangle &= \tau \langle I_1 S_2 \rangle + \tau \langle S_2 I_3 \rangle - \gamma \langle I_2 \rangle, \\
\langle \dot{I}_3 \rangle &= \tau \langle I_1 S_3 \rangle + \tau \langle I_2 S_3 \rangle + \tau \langle S_3 I_4 \rangle - \gamma \langle I_3 \rangle, \\
\langle \dot{I}_4 \rangle &= \tau \langle I_3 S_4 \rangle - \gamma \langle I_4 \rangle.
\end{aligned}$$

Az élekre vonatkozó egyenletek:

$$\begin{aligned}
\langle \dot{S}_1 I_2 \rangle &= \tau \langle S_1 S_2 I_3 \rangle - \tau \langle S_1 I_2 I_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle S_1 I_2 \rangle, \\
\langle \dot{I}_1 S_2 \rangle &= \tau \langle S_1 S_2 I_3 \rangle - \tau \langle I_1 S_2 I_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_1 S_2 \rangle, \\
\langle \dot{S}_1 I_3 \rangle &= \tau \langle S_1 I_2 S_3 \rangle - \tau \langle I_1 S_2 I_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle S_1 I_3 \rangle, \\
\langle \dot{I}_1 S_3 \rangle &= \tau \langle S_1 I_2 S_3 \rangle - \tau \langle I_1 I_2 S_3 \rangle - \tau \langle I_1 S_3 I_4 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_1 S_3 \rangle, \\
\langle \dot{S}_2 I_3 \rangle &= \tau \langle I_1 S_2 S_3 \rangle + \tau \langle S_2 S_3 I_4 \rangle - \tau \langle I_1 S_2 I_3 \rangle - (\tau + \gamma) \langle S_2 I_3 \rangle, \\
\langle \dot{I}_2 S_3 \rangle &= \tau \langle I_1 S_2 S_3 \rangle - \tau \langle I_1 I_2 S_3 \rangle - \tau \langle I_2 S_3 I_4 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_2 S_3 \rangle, \\
\langle \dot{S}_3 I_4 \rangle &= -\tau \langle I_1 S_3 I_4 \rangle - \tau \langle I_2 S_3 I_4 \rangle - (\tau + \gamma) \langle S_3 I_4 \rangle, \\
\langle \dot{I}_3 S_4 \rangle &= \tau \langle I_1 S_3 S_4 \rangle + \tau \langle I_2 S_3 S_4 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_3 S_4 \rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \dot{S}_1 S_2 \rangle &= -\tau \langle S_1 S_2 I_3 \rangle, \\
\langle \dot{S}_1 S_3 \rangle &= -2\tau \langle S_1 I_2 S_3 \rangle - \tau \langle S_1 S_3 I_4 \rangle, \\
\langle \dot{S}_2 S_3 \rangle &= -2\tau \langle I_1 S_2 S_3 \rangle - \tau \langle S_2 S_3 I_4 \rangle, \\
\langle \dot{S}_3 S_4 \rangle &= -\tau \langle I_1 S_3 S_4 \rangle - \tau \langle I_2 S_3 S_4 \rangle.
\end{aligned}$$

A hármasokra az egyenletek:

$$\begin{aligned}
\langle S_1 \dot{S}_2 I_3 \rangle &= \tau \langle S_1 S_2 S_3 I_4 \rangle - (2\tau + \gamma) \langle S_1 S_2 I_3 \rangle, \\
\langle S_1 \dot{I}_2 I_3 \rangle &= \tau \langle S_1 I_2 S_3 I_4 \rangle + \tau \langle S_1 S_2 I_3 \rangle + \tau \langle S_1 I_2 S_3 \rangle - 2(\tau + \gamma) \langle S_1 I_2 I_3 \rangle, \\
\langle I_1 \dot{S}_2 I_3 \rangle &= \tau \langle I_1 S_2 S_3 I_4 \rangle + \tau \langle I_1 S_2 S_3 \rangle + \tau \langle S_1 S_2 I_3 \rangle - 2(\tau + \gamma) \langle I_1 S_2 I_3 \rangle, \\
\langle S_1 \dot{I}_2 S_3 \rangle &= -\tau \langle S_1 I_2 S_3 I_4 \rangle - (2\tau + \gamma) \langle S_1 I_2 S_3 \rangle, \\
\langle I_1 \dot{I}_2 S_3 \rangle &= \tau \langle I_1 S_2 S_3 \rangle + \tau \langle S_1 I_2 S_3 \rangle - \tau \langle I_1 I_2 S_3 I_4 \rangle - 2(\tau + \gamma) \langle I_1 I_2 S_3 \rangle, \\
\langle I_1 \dot{S}_3 I_4 \rangle &= \tau \langle S_1 I_2 S_3 I_4 \rangle - \tau \langle I_1 I_2 S_3 I_4 \rangle - 2(\tau + \gamma) \langle I_1 S_3 I_4 \rangle, \\
\langle I_1 \dot{S}_2 S_3 \rangle &= -\tau \langle I_1 S_2 S_3 I_4 \rangle - (2\tau + \gamma) \langle I_1 S_2 S_3 \rangle, \\
\langle S_2 \dot{S}_3 I_4 \rangle &= -2\tau \langle I_1 S_2 S_3 I_4 \rangle - (\tau + \gamma) \langle S_2 S_3 I_4 \rangle, \\
\langle I_2 \dot{S}_3 I_4 \rangle &= \tau \langle I_1 S_2 S_3 I_4 \rangle - \tau \langle I_1 I_2 S_3 I_4 \rangle - 2(\tau + \gamma) \langle I_2 S_3 I_4 \rangle, \\
\langle I_1 \dot{S}_3 S_4 \rangle &= \tau \langle S_1 I_2 S_3 S_4 \rangle - \tau \langle I_1 I_2 S_3 S_4 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_1 S_3 S_4 \rangle, \\
\langle I_2 \dot{S}_3 S_4 \rangle &= \tau \langle I_1 S_2 S_3 S_4 \rangle - \tau \langle I_1 I_2 S_3 S_4 \rangle - (\tau + \gamma) \langle I_2 S_3 S_4 \rangle, \\
\langle S_1 \dot{S}_3 I_4 \rangle &= 2\tau \langle S_1 I_2 S_3 I_4 \rangle - (\tau + \gamma) \langle S_1 S_3 I_4 \rangle, \\
\langle S_1 \dot{S}_2 S_3 \rangle &= -\tau \langle S_1 S_2 S_3 I_4 \rangle.
\end{aligned}$$

Végül a négyesekre az egyenletek:

$$\begin{aligned}
\langle S_1 S_2 \dot{S}_3 I_4 \rangle &= -(\tau + \gamma) \langle S_1 S_2 S_3 I_4 \rangle, \\
\langle S_1 I_2 \dot{S}_3 I_4 \rangle &= -(3\tau + 2\gamma) \langle S_1 I_2 S_3 I_4 \rangle, \\
\langle I_1 S_2 \dot{S}_3 I_4 \rangle &= -(3\tau + 2\gamma) \langle I_1 S_2 S_3 I_4 \rangle, \\
\langle I_1 I_2 \dot{S}_3 I_4 \rangle &= \tau \langle I_1 S_2 S_3 I_4 \rangle + \tau \langle S_1 I_2 S_3 I_4 \rangle - 3(\tau + \gamma) \langle I_1 I_2 S_3 I_4 \rangle, \\
\langle S_1 I_2 \dot{S}_3 S_4 \rangle &= -(2\tau + \gamma) \langle S_1 I_2 S_3 S_4 \rangle, \\
\langle I_1 I_2 \dot{S}_3 S_4 \rangle &= \tau \langle I_1 S_2 S_3 I_4 \rangle + \tau \langle S_1 I_2 S_3 S_4 \rangle - 2(\tau + \gamma) \langle I_1 I_2 S_3 S_4 \rangle, \\
\langle I_1 S_2 \dot{S}_3 S_4 \rangle &= -(2\tau + \gamma) \langle I_1 S_2 S_3 S_4 \rangle.
\end{aligned}$$

Amint látható összesen hét különböző állapota érdekes a fenti gráf állapotainak. Ezek közül is, mivel az 1-es és a 2-es csúcsok szimmetrikusak, elegendő négy állapotot tekinteni: $I - S - S - S$, $I - S - S - I$, $I - I - S - S$, $I - I - S - I$. A lezárásnak a lényege az lesz, hogy a gráfot két részgráf egyesítéseként tekintjük, és figyelembe vesszük a közös részüket. Esetünkben ez az $1 - 2 - 3$ és a $3 - 4$ csúcsokból álló

háromszög illetve él, a kapcsolat a kettő között pedig a középső 3-as csúcs. Vegyük észre, hogy a megjelenő négyesekben a 3-as csúcs állapota minen esetben S . Ez azzal magyarázható, hogy az egyenletrendszer felépítése során mindig összefüggő részgráfok állapotai kerülnek be a rendszerbe. Egy csúcs akkor jelenik meg I állapottal, ha az egy ilyen összefüggő rendszer állapotát befolyásolni tudja. Jelen esetben a 3-as csúcs akkor tudna megjeleníteni I állapottal ha az 1, 2 és 4-es csúcsok összefüggőek lennének.

Megfogalmazható a következő tétel:

3.3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a rendszer állapota kezdetben 1 valószínűséggel a 3^N lehetséges állapot valamelyike. Ekkor a 3.5 gráf állapotaira fennáll a következő egyenlőség:*

$$\langle S_3 \rangle \langle A_1 B_2 S_3 C_4 \rangle = \langle A_1 B_2 S_3 \rangle \langle S_3 C_4 \rangle, \quad (3.12)$$

ahol A, B és C mindegyike az S, I állapotok egyike.

A teljes egyenletrendszert a Matlab beépített ODE45 megoldójával megoldva numerikusan is leellenőrizhető a tételben szereplő állítás. Az ezekre kapott eredményeket szemléltetik az (3.6) ábrák.

A fejezet további részében két bizonyítást adunk a fenti tételre. Az első egy hosszadalmas konstruktív bizonyítás lesz, a másik pedig egy valószínűségi számítási eszközöket használó rövidebb heurisztikus bizonyítás.

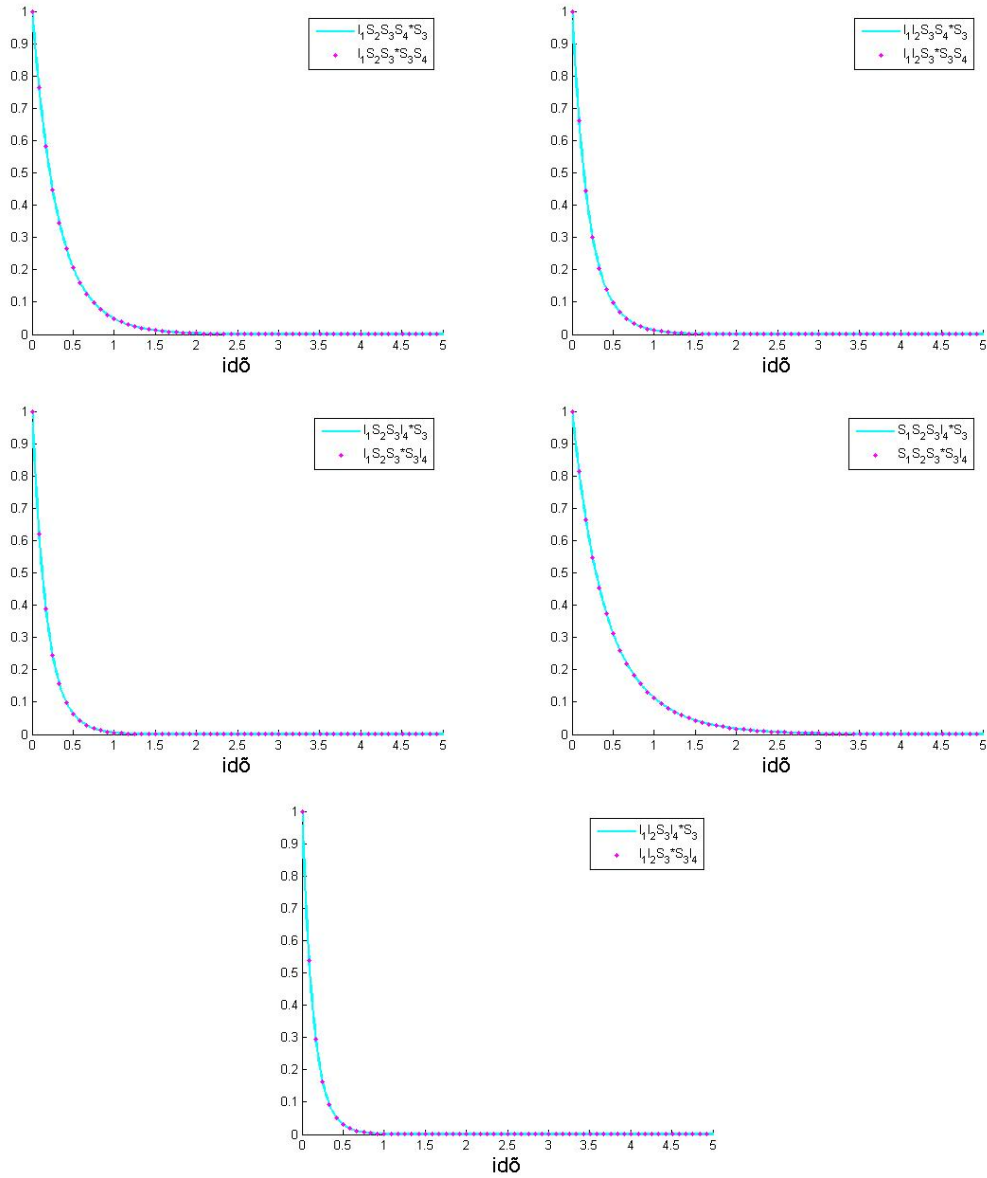
3.3.1. Bizonyítás differenciálegyenletek segítségével

A bizonyítást csak az $\langle I_1 S_2 S_3 S_4 \rangle$ állapotra fogjuk bemutatni, a többi esetben teljesen hasonló módszerrel lehet igazolni az állítást. Tehát a következő egyenlőséget szeretnénk igazolni:

$$\langle S_3 \rangle \langle I_1 S_2 S_3 S_4 \rangle = \langle I_1 S_2 S_3 \rangle \langle S_3 S_4 \rangle. \quad (3.13)$$

Vezessük be a következő α függvényt:

$$\alpha = \langle S_3 \rangle \langle I_1 S_2 S_3 S_4 \rangle - \langle I_1 S_2 S_3 \rangle \langle S_3 S_4 \rangle. \quad (3.14)$$



3.6. ábra. Minden előforduló négyesre a (3.12) egyenlőség jobb és bal oldalának numerikus összehasonlítása. Az egyenlőség jobb oldala folytonos vonallal, míg a bal oldala pontozottan ábrázolva.

Deriváljuk le $\dot{\alpha}$ -t az idő szerint:

$$\dot{\alpha} = \langle \dot{S}_3 \rangle \langle I_1 S_2 S_3 S_4 \rangle + \langle S_3 \rangle \langle I_1 S_2 \dot{S}_3 S_4 \rangle - \langle I_1 \dot{S}_2 S_3 \rangle \langle S_3 S_4 \rangle - \langle I_1 S_2 S_3 \rangle \langle \dot{S}_3 S_4 \rangle.$$

Behelyettesítve a megfelelő deriváltakat az egyenletrendszerből:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} = & - \left(\tau \langle I_1 S_3 \rangle + \tau \langle I_2 S_3 \rangle + \tau \langle S_3 I_4 \rangle \right) \langle I_1 S_2 S_3 S_4 \rangle - \langle S_3 \rangle \left((2\tau + \gamma) \langle I_1 S_2 S_3 S_4 \rangle \right) + \\ & + \left(\tau \langle I_1 S_2 S_3 I_4 \rangle + (2\tau + \gamma) \langle I_1 S_2 S_3 \rangle \right) \langle S_3 S_4 \rangle + \langle I_1 S_2 S_3 \rangle \left(+ \tau \langle I_1 S_3 S_4 \rangle + \tau \langle I_2 S_3 S_4 \rangle \right) \end{aligned}$$

Majd csoportosítva a megfelelő tagokat kapjuk:

$$\dot{\alpha} = -(2\tau + \gamma)\alpha + \tau\alpha_2 - \tau\alpha_3, \quad (3.15)$$

ahol

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \langle S_3 I_4 \rangle \langle I_1 S_2 S_3 S_4 \rangle - \langle S_3 S_4 \rangle \langle I_1 S_2 S_3 I_4 \rangle \\ \alpha_3 &= \langle I_1 S_2 S_3 \rangle \left(\langle I_1 S_3 S_4 \rangle - \langle I_2 S_3 S_4 \rangle \right) - \left(\langle I_1 S_3 \rangle - \langle I_2 S_3 \rangle \right) \langle I_1 S_2 S_3 S_4 \rangle \end{aligned}$$

Először foglalkozzunk α_2 -vel! Ezt is deriváljuk le:

$$\dot{\alpha}_2 = -(3\tau + 2\gamma)\alpha_2 - \tau\alpha_4 - \tau\alpha_5, \quad (3.16)$$

ahol

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \langle I_1 S_3 I_4 \rangle \langle I_1 S_2 S_3 S_4 \rangle - \langle I_1 S_3 S_4 \rangle \langle I_1 S_2 S_3 I_4 \rangle \\ \alpha_5 &= \langle I_2 S_3 I_4 \rangle \langle I_1 S_2 S_3 S_4 \rangle - \langle I_2 S_3 S_4 \rangle \langle I_1 S_2 S_3 I_4 \rangle \end{aligned}$$

α_4 -et lederiválva a következőt kapjuk:

$$\dot{\alpha}_4 = -(4\tau + 3\gamma)\alpha_4 + \tau\alpha_6 + \tau\alpha_7, \quad (3.17)$$

ahol

$$\begin{aligned} \alpha_6 &= \langle S_1 I_2 S_3 I_4 \rangle \langle I_1 S_2 S_3 S_4 \rangle - \langle S_1 I_2 S_3 S_4 \rangle \langle I_1 S_2 S_3 I_4 \rangle \\ \alpha_7 &= \langle I_1 I_2 S_3 S_4 \rangle \langle I_1 S_2 S_3 I_4 \rangle - \langle I_1 I_2 S_3 I_4 \rangle \langle I_1 S_2 S_3 S_4 \rangle \end{aligned}$$

Deriváljuk le α_6 -ot is. Összevonva a megfelelő tagokat kapjuk:

$$\dot{\alpha}_6 = -(5\tau + 3\gamma)\alpha_6. \quad (3.18)$$

A kapott differenciálegyenlet megoldását $\alpha_6(0)$ ismeretében meg tudjuk adni:

$$\alpha_6(t) = \alpha_6(0)e^{-(5\tau+3\gamma)t}. \quad (3.19)$$

Feltéve, hogy a gráf kezdeti állapota 1 valószínűséggel a $3^4 = 81$ esetek egyike, könnyen látható, hogy $\alpha_6(0) = 0$. Tegyük fel például, hogy $\langle I_1 S_2 S_3 S_4 \rangle(0) = 1$, ekkor $\langle I_1 I_2 S_3 I_4 \rangle(0) = \langle S_1 I_2 S_3 S_4 \rangle = \langle I_1 S_2 S_3 I_4 \rangle = 0$, és ezek alapján $\alpha_6(0) = 0$. Tehát azt kapjuk, hogy $\alpha_6(t) = 0$ minden $t \geq 0$ esetén.

Deriváljuk le α_7 -et is. Ekkor összevonások és egyszerűsítések után kapjuk, hogy

$$\dot{\alpha}_7 = -(5\tau + 4\gamma)\alpha_7 - \tau\alpha_6 = -(5\tau + 4\gamma)\alpha_7. \quad (3.20)$$

$\alpha_7(0)$ ismeretében az egyenlet megoldása: $\alpha_7(t) = \alpha_7(0)e^{-(5\tau+4\gamma)t}$. Az előbbiekhöz hasonló megfontolás után látható, hogy $\alpha_7(0) = 0$, és így $\alpha_7(t) = 0$.

Felhasználva az α_6 -ra és α_7 -re kapott eredményeinket:

$$\dot{\alpha}_4 = -(4\tau + 3\gamma)\alpha_4, \quad (3.21)$$

melyet megoldva kapjuk, hogy $\alpha_4(t) = 0$ minen $t \geq 0$ esetén.

Térjünk vissza α_5 -re, és deriváljuk le ezt is. Egyszerűsítések és összevonások után kapjuk:

$$\dot{\alpha}_5 = -(4\tau + 3\gamma)\alpha_5 + \tau\alpha_7 = -(4\tau + 3\gamma)\alpha_5. \quad (3.22)$$

Tehát $\alpha_5(t) = \alpha_5(0)e^{-(4\tau+3\gamma)t}$. Most is végiggondolható, hogy $\alpha_5(0) = 0$, és így $\alpha_5 = 0$. A fentieket felhasználva α_2 -re is egy autonóm differenciálegyenletet kapunk:

$$\dot{\alpha}_2 = -(3\tau + 2\gamma)\alpha_2, \quad (3.23)$$

melynek megoldása: $\alpha_2(t) = \alpha_2(0)e^{-(3\tau+2\gamma)t} = 0$, hiszen $\alpha_2(0) = 0$.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy a (3.14) egyenlettel megadott $\alpha = 0$, még meg kell vizsgálnunk α_3 -at is. Ezt is deriváljuk le. Összevonva a megfelelő tagokat a következőt kapjuk:

$$\dot{\alpha}_3 = -(4\tau + 3\gamma)\alpha_3 + \tau\alpha_4 + \tau\alpha_5 + \tau\alpha_8 + \tau\alpha_9.$$

Figyelembe véve, hogy már megmutattuk, hogy $\alpha_4 = 0$ és $\alpha_5 = 0$:

$$\dot{\alpha}_3 = -(4\tau + 3\gamma)\alpha_3 + \tau\alpha_8 + \tau\alpha_9, \quad (3.24)$$

ahol

$$\alpha_8 = \langle I_1 S_2 S_3 \rangle \langle S_1 I_2 S_3 S_4 \rangle - \langle S_1 I_2 S_3 \rangle \langle I_1 S_2 S_3 I_4 \rangle$$

$$\alpha_9 = \langle I_1 I_2 S_3 \rangle \langle I_1 S_2 S_3 S_4 \rangle - \langle I_1 S_2 S_3 \rangle \langle I_1 I_2 S_3 S_4 \rangle$$

Ezeket is deriváljuk le és vonjuk össze a megfelelő tagokat.

$$\dot{\alpha}_8 = -(4\tau + 2\gamma)\alpha_8 + \tau\alpha_6,$$

$$\dot{\alpha}_9 = -(4\tau + 3\gamma)\alpha_9 - \tau\alpha_8 - \tau\alpha_7.$$

Mivel $\alpha_6 = 0$, és $\alpha_8(0) = 0$, ezért $\alpha_8 = 0$. Hasonlóan $\alpha_7 = \alpha_8 = 0$ miatt és $\alpha_9(0) = 0$ miatt $\alpha_9 = 0$. Ezeket felhasználva kapjuk, hogy $\dot{\alpha}_3 = -(4\tau + 3\gamma)\alpha_3$, ebből pedig következik, hogy $\alpha_3 = 0$. Az előbbi számításainkat felhasználva kapjuk, hogy $\dot{\alpha} = -(2\tau + \gamma)\alpha$, amit megoldva $\alpha(t) = \alpha(0)e^{-(2\tau+\gamma)t}$, a kezdeti feltételre tett feltevésünk miatt $\alpha(0) = 0$, és így $\alpha(t) = 0$, ami a bizonyításunk célja volt.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a lollipop gráfban a rendszer lezárható a hármasok szintjén, vagyis a négyesekre felírt egyenletekre nincs szükség, hiszen azok mindegyike egzakt módon kifejezhető a megfelelő hármasok, élek és csúcsok felhasználásával.

3.3.2. Függetlenségen alapuló bizonyítás

Ahogy már a fejezet első felében is említettük, abban az esetben, ha a gráf állapota két részre osztható úgy, hogy a közös csúcs S típusú, akkor a két részgráf állapotai egymástól függetlenek. Ebben a részben ezen függetlenség felhasználásával szeretnénk bebizonyítani a 3.3.1 tételt.

Tehát tekintsük a következő lezárást:

$$\langle I_1 S_2 S_3 I_4 \rangle = \frac{\langle I_1 S_2 S_3 \rangle \langle S_3 I_4 \rangle}{\langle S_3 \rangle}. \quad (3.25)$$

Mivel az $1 - 2$ él állapota független a 4-es csúcs állapotától, ezért az $\langle I_1 S_2 I_4 | S_3 \rangle$ feltételes valószínűség így írható:

$$\langle I_1 S_2 I_4 | S_3 \rangle = \langle I_1 S_2 | S_3 \rangle \langle I_4 | S_3 \rangle.$$

Valamint a feltételes valószínűség tételét felhasználva fennáll:

$$\langle I_1 S_2 S_3 I_4 | S_3 \rangle = \langle I_1 S_2 S_3 | S_3 \rangle \langle S_3 I_4 | S_3 \rangle = \frac{\langle I_1 S_2 S_3 \rangle \langle S_3 I_4 \rangle}{\langle S_3 \rangle^2}.$$

Mivel az $I_1 S_2 S_3 I_4$ állapot bekövetkezésekor S_3 is fennáll, ezért $\langle I_1 S_2 S_3 I_4 | S_3 \rangle \langle S_3 \rangle = \langle I_1 S_2 S_3 I_4 \rangle$. Ebből és az előző egyenlőségből következik a tétel állítása az $ISSI$ állapotra:

$$\langle I_1 S_2 S_3 I_4 \rangle = \frac{\langle I_1 S_2 S_3 \rangle \langle S_3 I_4 \rangle}{\langle S_3 \rangle}.$$

A többi állapotra a bizonyítás teljesen hasonlóan működik.

4. fejezet

Összefoglalás

A dolgozatban betekintést nyújtottunk a hálózait folyamatok differenciálegyenleteinek elméletébe. *SIS* dinamika esetén bemutattuk a dinamikát leíró (2.1) egyenletrendszert, annak kétféle lezárási módszerét és a Monte-Carlo szimulációt. A lezárásokkal felírt egyenletek helyességét a szimulációval való numerikus összehasonlítással vizsgáltuk meg a teljes, Erdős-Rényi és reguláris véletlen gráfok esetében. Ezt a MATLAB programcsomagban valósítottuk meg, a lezárásokkal felírt egyenletrendszerek megoldásához a beépített ODE45 megoldót használtuk, a szimulációhoz pedig a 2.2 fejezetben ismertetett algoritmushoz írtunk egy programot.

SIR dinamika esetén ismertettük a részgráf megközelítést és a hozzá tartozó (3.1) differenciálegyenlet-rendszert. A lezárási lehetőségekre ismertettünk két tételt, 3.2.1-et, és 3.3.1-et. Az elsőt egy fa szerkezetű összetett gráfra mondtuk ki, és három speciális esetben adtunk egy-egy konstruktív bizonyítást. Az általános esetre vonatkozó igen hosszadalmas bizonyítás megtalálható a [1]-ben. A második tételt az úgynevezett lollipo gráf esetére mondtuk ki. Itt szeretnénk megemlíteni, hogy ez a tétel saját eredménynek is tekinthető. A MATLAB programcsomag segítségével a teljes egyenletrendszert megoldva módunk van összefüggéseket keresni az állapotfüggvények között. Az így kapott eredményeket mutatják a 3.4 és 3.6 ábrák. A bizonyítás kidolgozásához az első tételben szereplő ötletet használtuk fel.

További kutatásokhoz érdemes lehet egy olyan programot írni amely legenerálja a gráfhoz tartozó teljes egyenletrendszert, hiszen így egy adott gráf állapotaira vonatkozó bármely sejtésünket könnyen leellenőrizhetjük. Ez a módszer csak kisebb

gráfok esetében hatékony, hiszen egy N csúcsú gráfnak 3^N állapota van, így az differenciálegyenlet-rendszer is 3^N egyenletből áll. Ezért érdemes lenne a megfigyeléseinkből levonni egy általános estre vonatkozó következtetést és arra egy bizonyítást kidolgozni.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Simon Péternek, aki útmutatásaival, végtelen türelmével segítette munkámat. Mindig szakított rám időt és tanácsaival, észrevételeivel nem csak jelen dolgozat elkészülését segítette, hanem ezen túlmutató szakmai képességeket is tanulhattam tőle.

Hálával tartozom családomnak és barátaimnak is akik az elmúlt években szeretetükkel és bizalmukkal támogattak.

Irodalomjegyzék

- [1] Sharkey, K.J., Kiss, I.Z., Simon, P.L., *Exact equations for SIR epidemics on unclustered networks*, arXiv:1212.2172 [q-bio.PE], 2012.
- [2] Barrat, A., Barthélemy, M., Vespignani, A., *Dynamical processes on complex networks*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [3] Brauer, F., van den Driessche, P., Wu, J., *Mathematical epidemiology*, In Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [4] T. House, M. J. Keeling, *Insights from unifying modern approximations to infections on networks*, J. Roy. Soc. Interface 8, 67-73, 2011.
- [5] M.J. Keeling, K.T.D. Eames, *Networks and epidemic models*, J. Roy. Soc. Interface 2, 295-307, 2005.
- [6] Fan Chung, Linyuan Lu, *Complex graphs and networks*, CBMS regional conference series in mathematics; no. 107, 2006.
- [7] Simon, P.L., Taylor, M., Kiss, I.Z., *Exact epidemic models on graphs using graph-automorphism driven lumping*, J. Math. Biol., 62, 479-508 (2011).