Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Rokob Sándor

Véletlen gráfok és időfüggő elágazó folyamatok

Alkalmazott Matematikus MSc szakdolgozat

Témavezető:

Móri F. Tamás

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Budapest, 2018

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Móri Tamásnak, akivel a több éve tartó közös munka ezen szakdolgozaton kívül is oly sok szép eredményt fialt.

Köszönöm továbbá Anyukámnak, mostohaapukámnak Lacinak, nővéremnek Emmának, illetve bátyámnak Jakabnak, akik támogatása és tehermentesítése nagyban hozzájárult eddigi sikereimhez.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az elmúlt években sok figyelem irányult a nagyméretű hálózatokra és ezek véletlen gráfokkal való modellezésére. Habár ez alapvetően nem egy új terület, de az egyre nagyobb memória- és számítási kapacitással rendelkező számítógépek megjelenésével adódó lehetőségek sokaknak tették lehetővé a hálózatkutatásban való elmélyülést, a témakör gazdagítását.

Természetesen egy hálózat, illetve a vizsgálatához felhasznált módszerek sokfélék lehetnek. Például az olyan gyakorlatiasabb természettudományokban, mint amilyen a fizika vagy a biológia, inkább a való életben megfigyelhető hálózatok statisztikailag megfogható leírása, a szabályszerűségeinek a lehető legpontosabb jellemzése a cél. Ezzel szemben a matematikai modellezés során az eljárás fordított irányú, a hálózat fejlődési szabályának ismeretében egzakt módszereket felhasználva járhatunk el. Habár a dolgozat során a matematikai hozzáállás által kikövezett utat fogjuk követni, érdemes kiemelni, hogy hibás modellezés mellett előállhat az az érdekes helyzet, hogy ugyanazon hálózat esetén a két megközelítés eltérő eredményt szolgáltat. Ahelyett viszont, hogy ez az ellentétet feszítenék tovább, inkább felsorolunk néhány konkrét nevezetes modellt.

A modern idők alapvető problémáját az okozza, hogy a valós hálózatokban nagyon ritkán fordul elő az, hogy a csúcsok száma nem változik. Ennek eredményeképpen az olyan klasszikusnak számító modellek, mint például Erdős és Rényi [11] cikkben felvázolt véletlen gráfja a jelenkori alkalmazásokban nem kamatoztatható. Amennyiben viszont megengedjük, hogy a csúcsok száma is változzon az idő előrehaladtával, akkor a lehetőségek tárháza megsokszorozódik. Az ilyen fejlődő hálózati modellek közül az egyik legismertebb és lényegében legtöbbet taglalt mechanizmus az úgynevezett fokszámarányos választás (*preferential attachment*), melyet a [3] cikkben a világháló javarészt statisztikai vizsgálata során vetett fel és használt Barabási és Albert. Nyilvánvaló, hogy világháló során megfigyelt "gazdag gazdagabb lesz" elv nem feltétlenül ad reális képet más hálózatok esetén.

Például a sejten belüli biológiai hálózatok egyik fontos tulajdonsága, a magas klaszterezettség, nem jellemző a fokszámarányos választással ellátott modellekre. Persze az efféle sűrűség mögött az áll, hogy a genomban rejlő információ megduplázása domináns evolúciós hajtóerő a biológiai hálózatok kialakításában. Tehát az ilyenfajta rendszerek vizsgálatához olyan modelleket kell bevezetni, melyekben a fejlődés fő lépése egy véletlenszerűen választott csúcs (vagy akár él), valamilyen értelemben vett megkettőzése. Persze, az így adódó duplikációs modellek precíz matematikai elemzése nem egyszerű, hasonlóan a fokszámarányos dinamikával növő társaikhoz, de nem is teljesen reménytelen.

Ugyanakkor az ilyen általános duplikáció motiválta fejlődési mechanizmusok további dinamikákat inspirálhatnak. Ilyen például a [7] cikkben taglalt alábbi elgondolás. Legyen adott egy tetszőleges gráf, egy $p \in (0, 1)$ valószínűség. Ekkor, ebből a kezdeti állapotból az idő előrehaladtával fejlődjön úgy a gráf, hogy p valószínűséggel teljesen lemásoljuk egy tetszőleges csúcsát, méghozzá annak szomszédjaihoz hozzákötve az új csúcsot, míg $1-p$ valószínűséggel egy olyan új csúcsot hozzunk létre, mely eddig nem szerepelt a gráfban, azaz az új csúcs szomszédjai nem fedik egy az egyben egy korábbi csúcs szomszédjait.

Világos, hogy ez nem egy precízen definiált modell, ugyanakkor kiderült, hogy ennek a szakirodalomban **Simon-modellnek** nevezett dinamikának legfontosabb tulajdonságai már mind ismertek. Ezt az analízist tartalmazza, egy kissé más, de gráfokra könnyen átemelhető formában, Durrett és Schweinsberg [10] cikke. Ebben a szerzők az alábbi, egy egyedből induló többtípusos 1 intenzitású tisztán születési folyamatot, más nevén **Yule-folyamatot** tekintették.

Egy születés esetén az utód $1 - p$ valószínűséggel azonos típusú, mint a szülő, míg p valószínűséggel pedig teljesen új. Ha itt az azonos típusú egyedek összességét családnak nevezzük, akkor ebben a felírásban a szerzőknek egy Pólya-urnás megfeleltetés és coupling segítségével sikerül megmutatniuk, hogy egy bizonyos méretnél nem nagyobb családok száma aszimptotikusan hatványrendben lencsengő eloszlást ad, sőt azt is, hogy egy nagy tagszámú család mérete milyen határeloszlást követ.

Lévén a Yule-folyamat egy speciális folytonos idejű elágazó folyamat, így ha a hálózatok területét matematikai irányból közelítjük meg, akkor könnyen arra a következtetésre juthatunk, hogy érdemes lehet egy olyan modellt megvizsgálni, ahol valamilyen úton-módon a duplikáció egy általánosabb elágazó folyamat típusban van elkódolva. Természetesen ez az elgondolás önmagában nem számít forradalminak, ugyanis ha például a gráfunk struktúrája speciális, például egy fa, akkor temérdek ilyen megfeleltetés ismert, kezdve az egyszerűbb beágyazásoktól, mint a [6] és [21] cikkek véletlen rekurzív fái, az olyan egészen bonyolult kapocslatokig, mint a [23], [22], [1], illetve [12] cikkekben szereplők.

Ugyanakkor egy duplikációval fejlődő véletlen hálózat folyamán tetszőleges gráf keletkezhet a lépések során, aminek következtében az előbbi cikkek eredményei, illetve a háttérben dolgozó **általános elágazó folyamatnak**, avagy **Crump-Mode-Jagers folyamatnak** nevezett elágazó folyamat csúcsokon értelmezett beágyazása az elképzelhető modelleknek csak kis részét fedi le. Ezt bővítendő, természetesen adódik az ötlet, hogy az általános elágazó folyamatot az éleken értelmezzük. Valóban, ezen hozzáállás alapján szemléletesen bevezethető a dolgozat szempontjából kulcsfontosságú **kollaborációs modell**.

A kollaborációs modellben a hálózatunk az egyed benne résztvevő egyedek közti páronkénti kollaboráció által szerveződik. Ha két egyed között létrejön egy sikeres együttműködés, akkor az további egyedeket vonz be a hálózatba, melyek összedolgozhatnak a korábbi kettes bármelyik szereplőjével, vagy akár mindkettőjükkel. A modellbe beleépítjük továbbá azt a valóságban teljesen reális elgondolást is, hogy egy-egy ilyen társulás során előfordulhat, hogy a benne résztvevő két fél kifárad, a közös munkát megszakítja.

Világos tehát, hogy ha az előbb felvetett modellben az egyedeket csúcsokkal, a páronkénti kollaborációt élekkel reprezentáljuk, akkor egy dinamikusan fejlődő véletlen gráfot kapunk. Sőt, ha pár pillanat erejéig elfelejtjük az éltörlés lehetőségét, akkor adódik, hogy a felvázolt hálózat tartalmaz néhányat a jól ismert időben fejlődő modellek közül. Valóban, ha feltesszük, hogy egy új csúcs mindig a kiszemelt él mindkét végpontjához csatlakozik, azaz mindig egy háromszög keletkezik, akkor az úgynevezett véletlen cseresznye gráfot kapjuk. Ezt a modellt determinisztikus esetben Bukszár és Prékopa vezette be az [5] cikkben, azon célból, hogy segítségével véletlen események uniójának valószínűségére adjanak a Bonferroni egyenlőtlenséghez hasonló felső becslést.

Másfelől, ha az élek törlésének elhanyagolása mellett azt is feltesszük, hogy minden új csúcs az együttműködő felek közül szigorúan csak az egyikkel kollaborál, akkor visszakapjuk a népszerű Barabási-Albert-féle hálózat fa változatát. Ez szintén nagyon örvendetes, mert ezen modell legtöbb tulajdonsága, kezdve az aszimptotikus fokszámeloszlástól, a maximális fokszám viselkedésén át, egészen a magasságáig ismert. Ugyanakkor, mivel ezen tulajdonságok vizsgálata tisztán martingálelméleti módszereket használt, a későbbiekben taglalt megközelítés (habár kapcsolatban van a martingálelmélettel) egy másfajta kontextusban világíthat rá a hálózatra, ezzel is elmélyítve korábbi ismereteinket.

A következőkben kifejtendő témakör motivációjának felvázolása után, a bevezető zárásaként térjünk rá a dolgozat szerkezeti felépítésére. A második fejezet során bevezetjük az olvasót az általános elágazó folyamatok elméletébe. Ezen belül hosszabban kitérve, annak aszimptotikus viselkedésének leírására. E szakaszokban két fő eredmény bizonyítását fogjuk részben elmondani, megjegyezve azt, hogy habár a gyengébb, sztochasztikus konvergenciát taglaló alakra nem lesz szükségünk, mivel segít az erősebb, 1 valószínűségű konvergenciát állító tétel mögötti szemlélet elsajátításában, mindenképp érdemes megismerni.

Ezután a harmadik fejezetben elsőként precízen definiáljuk a kollaborációs modellt. Ennek ismeretében nyilvánvaló lesz, hogy ez élek szempontjából egy Markov tulajdonságú elágazó folyamatról van szó, amely mivel az általános elágazó folyamat speciális esete, így a megelőző szakaszban szerzett apparátust tudjuk kamatoztatni. Sok más karakterizáló összefüggés mellett megmutatjuk, hogy a modell paramétereinek milyen feltételeket kell kielégíteniük ahhoz, hogy a kiüresedés valószínűsége kisebb legyen, mint 1. Bebizonyítunk a véletlen gráf éleire, illetve csúcsaira vonatkozó aszimptotikus összefüggéseket. Majd végezetül, a modell diszkrét verziójának vizsgálata után rávilágítunk arra is, hogy extremális paraméterezés során a hipergeometrikus függvények segítségével az addig kapott eredményeink könnyen kezelhetővé válnak.

A dolgozat végén az addigiak összefoglalása mellett felvetünk néhány általánosítási lehetőséget, illetve további, az eredeti kollaborációs modellel kapcsolatos kérdést, melyek kijelölhetik a soron következő kutatási irányokat.

2. Általános elágazó folyamatok

A fejezetben lefektetjük a konkrét modellünk vizsgálatához szükséges általános elágazó folyamatok elméletének alapjait, illetve a számunkra legfontosabb konvergenciatételeit. Ebben elsősorban a [19] cikk alapján fogunk haladni, de olykor felhasználjuk a [13] könyv megközelítését.

2.1. Alapok

Tekintsük egyedek egy egyetlen őstől származó populációját. Tegyük fel, hogy minden egyed egy $(\xi(t))_{t\geq 0}$-vel jelölt, a $[0,\infty)$ intervallumon értelmezett pontfolyamat (továbbiakban **reprodukciós folyamat**) által meghatározott időpontokban szül új utódokat, illetve egy $0 \leq \lambda \leq \infty$ valószínűségi változó által meghatározott ideig (ezentúl **élettartam**) van életben. (Az egyed halva született, amennyiben $\lambda = 0$.) Az élettartam eloszlásfüggvényét jelölje

$$L(t) = P(\lambda \leq t),$$

míg a reprodukciós folyamat által a $[0,t]$ intervallumon meghatározott mértéket

$$\xi(t) = \xi([0,t]).$$

Világos, hogy ha $P(L(0) = 1) = 1$, akkor a populációban egy egyed sem található, tehát az elkövetkezőkben fel fogjuk tenni, hogy $L(0) < 1$ teljesül. Ugyanakkor attól függően, hogy mit követelünk meg a λ és a ξ közötti kapcsolatról, különböző nevezetes modelleket kaphatunk vissza. Például abban az esetben, ha a reprodukciós folyamat értéke az egyed halála után nem változik, akkor a **Sevastyanov-féle hasító modell** adódik. Ha azt is feltesszük, hogy az előbbi mellett ξ és λ függetlenek, akkor az úgynevezett **Bellman-Harris-féle elágazó folyamatot** kapjuk, melyet szokás **kor-függőnek** is nevezni, mely arra utal, hogy ellentétben a **Galton-Watson folyamat** által leszámolt generációval, itt az egyedek kora is fontos szerepet játszik.

Az **általános elágazó folyamat**, avagy **Crump-Mode-Jagers folyamat** az előbbiektől abban tér el, hogy az élettartam és a reprodukciós folyamat között semmiféle függetlenséget nem feltételez, sőt az is előfordulhat, hogy egy egyed a halála után még hoz létre utódot, azaz

$$P(\xi(\infty) \leq \xi(\lambda)) < 1$$

teljesül. (A konkrét véletlen gráf modell vizsgálatánál a halálozás utáni utódnemzés nem lesz megengedett.) Természetesen ezen általános folyamat vizsgálatában is sokszor támaszkodunk a beágyazott Galton-Watson folyamatra, melyhez érdemes további fogalmakat, illetve jelöléseket is bevezetni.

Egy konkrét, folyamatban résztvevő egyedet jelöljünk

$$x = (i_1, i_2, \dots, i_n)$$

segítségével, ha az a kiindulási ős i_1. gyereke i_2. gyerekének, …, i_n. gyereke. Tehát, ha kiindulási őst 0-val jelöljük, akkor bevezethető a

$$\mathcal{F} = \{0\} \cup \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n \right\}$$

populáció tér, ahol értelemszerűen

$$\mathcal{F}_n = \big\{ (i_1, i_2, \dots, i_n) \, : \, i_j \in \mathbb{Z}^+ \big\}.$$

Ennek segítségével leírató az a valószínűségi mező, amelyen a továbbiakban dolgozni fogunk. Minden $x \in \mathcal{F}$ egyedhez hozzárendelhető egy $(\Omega_x, \mathcal{B}_x, P_x)$ valószínűségi mértéktér, ahol az egyed reprodukciós folyamatának és élettartamának (ξ_x, λ_x) párja értelmezett. Ezen párok mind az előbb taglalt (ξ, λ) kettős egymástól független, de megegyező eloszlású másolatai. Ekkor az itt használt valószínűségi mező nem lesz más, mint az egyes egyedekhez rendelt mezők által meghatározott szorzattér, azaz

$$(\Omega, \mathcal{B}, P) = \prod_{x \in \mathcal{F}} (\Omega_x, \mathcal{B}_x, P_x).$$

Nyilvánvaló, hogy egy konkrét folyamatban nem feltétlenül realizálódik az összes, előbbi módon jelölhető egyed. A populáció x egyedének k. utódja pontosan akkor fog megjelenni a folyamatban, ha $\xi_x(\infty) \geq k$ teljesül, sőt ez az (x, k) utód akkor születik, amikor az anyja

$$\tau_x(k) = \inf\{t \, : \, \xi_x(t) \geq k\}$$

éves, azaz születési ideje (a folyamathoz mérten), amennyiben

$$x = (j_1, j_2, \dots, j_n),$$

az egyes egyedek megfelelő utódnemzési ideinek összege, vagyis

$$\sigma_{(x,k)} = \sigma_{(j_1, j_2, \dots, j_n, k)} = \tau_0(j_1) + \tau_{(j_1)}(j_2) + \tau_{(j_1, j_2, \dots, j_{n-1})}(j_n) + \tau_x(k),$$

ahol értelemszerűen a kiindulási ős σ_0 születési idejét definiáljuk, 0-nak. Világos tehát, hogy a populáció x eleme egy adott $t \geq 0$ időpontban akkor él, ha

$$\sigma_x \leq t < \sigma_x + \lambda_x$$

teljesül, illetve ugyanezen egyed kora a $t \geq 0$ időpontban $t - \sigma_x$. Sőt, az is könnyen adódik, hogy ha a folyamatunkra csak ezen σ_x születési időkben nézünk rá, akkor megkapjuk a korábban említett **beágyazott Galton-Watson folyamatot**. Mielőtt továbbmennénk, megjegyezzük, hogy a legtöbbször (amikor nem okoz értelmezésbeli problémát) a ξ_x, λ_x, τ_x és σ_x jelölések helyett ξ, λ, τ és σ konkrét egyed nélküli jelöléseket fogjuk használni.

Mindezek tudatában rátérhetünk a folyamat, elágazó folyamatok témakörében szokásos kérdéseknek megfelelő tulajdonságok összefoglalására. Az egyik ilyen alapvető kérdés, hogy milyen feltételek mellett lesz az adott időpontig megszületett egyedek száma véges. Az erre vonatkozó, a [13] könyv 6.2. szakaszában fellelhető eredményeket az alábbi, itt nem bizonyított tételben foglalhatjuk össze.

2.1. Tétel. (Végesség) *Ha a reprodukciós folyamat* 0 *időpontbeli várható értéke szigorúan nagyobb, mint* 1 *(azaz* $E\xi(0) > 1$*), akkor tetszőleges nemnegatív* t *pillanatban annak valószínűsége, hogy az adott időpontig megszületett egyedek száma* ∞*, pozitív valószínűségű. Ha viszont* $E\xi(0) < 1$ *és létezik olyan* $t > 0$*, hogy* $E\xi(t) < \infty$*, akkor a folyamat nem robban fel.* ▲

Ugyanakkor a dolgozat szempontjából legfontosabb alapvető kérdés nem az egyedszám felrobbanásának karakterizálása, hanem hogy milyen valószínűséggel hal ki a folyamat. Ennek megválaszolásához elegendő az előbb említett beágyazott Galton-Watson folyamatot tekinteni. Világos, hogy ezen beágyazott folyamat kihalása ekvivalens az eredeti folyamat valamely generációjának kiüresedésével, azaz az általános elágazó folyamat kihalásával. Ennek alapján a következő tételt mondhatjuk ki, szintén bizonyítás nélkül.

2.2. Tétel. (Kihalás valószínűsége) *Ha az általános elágazó folyamatban egy egyed reprodukciós generátorfüggvényét*

$$f(s) = E\big[s^{\xi(\infty)}\big]$$

jelöli, akkor ez az f *a beágyazott Galton-Watson folyamat utódlásának is generátorfüggvénye, aminek következtében az általános elágazó folyamat kihalásának valószínűségét az*

$$f(s) = s$$

egyenlet q*-val jelölt legkisebb nemnegatív gyöke adja.* ▲

Sőt, az sem meglepő, hogy a Galton-Watson folyamathoz hasonlóan a q kihalási valószínűséget az

$$E[\xi(\infty)] = f'(1),$$

sokszor **reprodukciós várható értéknek** nevezett érték határozza meg. Ennek következtében egy általános elágazó folyamatot osztályozhatunk annak alapján, hogy az előbbi $E[\xi(\infty)]$ várható utódszám mennyi, csakúgy mint azt a Galton-Watson folyamat esetén tesszük. Így érdemes a szokásos elnevezéseket is megtartani, azaz az általános esetet **szubkritikusnak**, **kritikusnak**, vagy

szuperkritikusnak nevezni amennyiben $E[\xi(\infty)]$ kisebb, egyenlő, vagy nagyobb, mint 1. A korábbi Galton-Watson folyamatra vonatkozó ismereteink alapján világos, hogy a szubkritikus, illetve kritikus esetekben a folyamat majdnem biztosan kihal, ugyanakkor a szuperkritikus esetben ez a valószínűség kisebb, mint 1.

Habár az előbbi két rezszim esetén is ismertek érdekes, illetve hasznos eredmények, melyekre például jó összefoglalót ad a [13] könyv 6.6. és 6.7. alfejezete, számunkra csak a szuperkritikus eset lesz releváns, így a továbbiakban végig feltesszük, hogy a reprodukciós várható értékre $1 < E[\xi(\infty)] < \infty$ teljesül. Ehhez első lépésben vezessünk be további fogalmakat és jelöléseket. A szakirodalomnak megfelelően a $(\xi(t))_{t\geq 0}$ reprodukciós folyamat **intenzitás mértékén** a

$$\mu(t) = E[\xi(t)]$$

várható érték függvényt értjük. Erről a továbbiakban feltesszük, hogy mint mérték, nem rácsos, azaz nem létezik $h > 0$, hogy μ a

$$\{0, h, 2h, 3h, \dots\}$$

halmazra koncentrált. Egy másik fogalomra is szükségünk lesz, mely alapvető szerepet játszik az elágazó folyamatok elméletében, így (habár csak a speciális esetre szorítkozva) külön kiemeljük.

2.1. Definíció. *Egy általános elágazó folyamatot* ***Malthus tulajdonságúnak*** *nevezünk, ha létezik $\alpha \in \mathbb{R}$ szám, hogy azzal*

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\mu(dt) = 1$$

teljesül.

Tehát ahogyan a definíció sejteti, a Malthus tulajdonságú szuperkritikus folyamatok esetén, feltéve, hogy a folyamat nem hal ki, a időbeli növekedés az $e^{\alpha t}$ értékkel arányos. Ennek következtében ahhoz, hogy értelmes eredményeket kapjunk egy ilyen folyamat aszimptotikus viselkedésére, a folyamatot érdemes evvel a kifejezéssel lenormálni, melyből adódóan ezt továbbiakban **lenormált általános elágazó folyamatnak** fogjuk nevezni. Ennek persze csak akkor van értelme, ha a **Malthus-paraméternek** nevezett α érték szigorúan pozitív és véges, mely feltételek közül a pozitivitás a szuperkritikus rezsim esetén mindig feltehető. Az intenzitás mérték, illetve a Malthus-paraméter segítségével bevezethető kettő, a fejezet során gyakran felbukkanó

$$_\alpha\xi(t) = \int_0^t e^{-\alpha u}\,\xi(du),$$

és

$$\mu_\alpha(t) = \int_0^t e^{-\alpha s}\,\mu(ds),$$

jelölés, ahol az előbbi a **lenormált reprodukció**, míg az utóbbi a **lenormált intenzitás mérték**.

Habár korábban utaltunk rá, hogy hogyan számolható egy adott x egyed $t \geq 0$ pillanatbeli életkora, az eddigiekben nem taglaltuk, hogyan lehetne az egyes életkorok aszimptotikus viselkedését leírni. Ez okkal történt, ugyanis az általános elágazó folyamatok használatát az teszi igazán népszerűvé, ha a korábbi (ξ, λ) párt kiegészítjük egy harmadik (legtöbbször) ϕ-vel jelölt folyamattal, melyről egyelőre csak annyit teszünk fel, hogy a korábbi valószínűségi mezőben mérhető, illetve nemnegatív, méghozzá úgy, hogy minden $t \leq 0$ esetén $\phi(t) = 0$ teljesül. Ezt a folyamatot nevezzük **véletlen karakterisztikának**, melyre úgy érdemes gondolni, hogy az egy t időpillanatban az x egyedhez valamilyen "score" értéket rendel. Ennek segítségével már minden elérhető ahhoz, hogy a jelen dolgozat legfontosabb fogalmát bevezessük.

Ha a populáció minden $x \in \mathcal{F}$ egyedéhez hozzárendeljük a $(\xi_x, \lambda_x, \phi_x)$ hármast, melyek az előbbi (ξ, λ, ϕ) egymástól független másolatai, akkor az

$$Z^\phi(t) = \sum_{x \in \mathcal{F}} \phi_x(t - \sigma_x)$$

összeget a ϕ **véletlen karakterisztika által leszámolt általános elágazó folyamatnak** nevezzük. Ahhoz, hogy mind a véletlen karakterisztika, mind a leszámolt folyamat fogalmát jobban megértsük, érdemes néhány példát adni.

Az egyik leggyakrabban felbukkanó véletlen karakterisztika a

$$\phi(t) = \mathbb{1}_{\{0 \leq t < \lambda\}}$$

indikátor, mely által a leszámolt $Z^\phi(t)$ folyamat az adott pillanatban élő egyedek számát adja vissza. Hasonlóan fontos szerepet játszik az előbbinek egy kicsit módosított

$$\phi_a(t) = \mathbb{1}_{\{0 \leq t < \min(a, \lambda)\}}$$

változata, mellyel azt tudjuk megszámolni, hogy a folyamatban mennyi a még élő, de a-kornál fiatalabb egyed. Ezt a folyamatot szokás $Z^{\phi_a}(t)$ helyett $Z^a(t)$-vel is jelölni és **korfolyamatnak** nevezni. Egy nagyon egyszerű véletlen karakterisztikának számít a

$$\phi(t) = \mathbb{1}_{\{\sigma_x \leq t\}}$$

indikátor, amely által leszámolt $T(t) = Z^\phi(t)$ folyamat azt adja vissza, hogy adott t időpontig hány egyed született. Persze sok további példa is adható, melyekből néhányat érdemes még megemlíteni. Ilyen lehet a

$$\phi(t) = \mathbb{1}_{0 \leq t < \min(\tau(1), \lambda)},$$

mely segítségével az utód nélküli, még élő egyedek számát határozhatjuk meg, vagy az ennél bonyolultabb

$$\phi(t) = t\mathbb{1}_{\{0 \leq t < \lambda\}} + \lambda \mathbb{1}_{\{t \geq \lambda\}} = \min\{t, \lambda\}$$

választás, mely a folyamatban résztvevő egyedek úgynevezett összműködési idejét számolja a t időpontig, és amely által leszámolt folyamat felírható, mint

$$Z^{\phi}(t) = \int_0^t Z^{\phi'}(u)\, du,$$

ahol $\phi'(t) = \mathbb{1}_{\{0 \le t < \lambda\}}$.

Ahogyan az az elágazó folyamatokra vonatkozó korábbi ismereteinkből fakadóan ismerős lehet, egy ilyen folyamat egyik legelemibb tulajdonsága, hogy felbontható egymástól független másolatok összegére. Nincs ez máshogy az előbb bevezetett leszámolt általános esetben sem, mely állítást a következő, itt nem bizonyított tételben foglalhatjuk össze.

2.3. Tétel. (Felbonthatóság) *Tetszőleges ϕ karakterisztika által leszámolt folyamatra felírható a*

$$Z^{\phi}(t) = \phi_0(t) + \sum_{i=1}^{\xi_0(t)} {}_{(i)}Z^{\phi}(t - \sigma_{(i)})$$

alakban, ahol $({}_xZ^{\phi}(t))_t$ jelöli azt a ϕ karakterisztika által leszámolt általános elágazó folyamatot, melyet az x utódból indítunk (tehát mintha $\sigma_x = 0$ lenne). Ekkor a $({}_{(i)}Z^{\phi}(t))$ $(i = 1, 2, \ldots)$ folyamatok független másolatai az eredetinek, továbbá függetlenek a ξ_0 és ϕ_0 folyamatoktól is. ▲

Ennek a felbonthatóságnak egy hasznos következménye a következő. Jelölje

$$m_t^{\phi} = E[e^{-\alpha t} Z^{\phi}(t)]$$

a lenormált folyamatot. Ekkor, lévén a ϕ véletlen karakterisztika nemnegatív, így az előbbi kifejezés teljesíti az

$$m_t^{\phi} = e^{-\alpha t} E[\phi(t)] + \int_0^t m_{t-s}^{\phi} e^{-\alpha s}\, \mu(ds)$$

felújítási egyenletet. Ez azért kifejezetten hasznos, mert a fejezet fő célja, hogy a lehető legáltalánosabb feltételek mellett le tudjuk írni az $e^{-\alpha t} Z^{\phi}(t)$ lenormált folyamat aszimptotikus viselkedését, amint t-vel a ∞-be tartunk. Ugyanakkor ilyen aszimptotikus eredmények a felújítási egyenlet megoldására vonatkozóan már régóta ismertek (lásd például a [13] könyv 5.2. alfejezetét), melyekből az alábbi állítást lehet levezetni. (A bizonyítás megtalálható a [19] cikkben.)

2.1. Állítás. *Tegyük fel, hogy a ϕ olyan véletlen karakterisztika, hogy $E[\phi(t)]$, mint t függvénye Lebesgue majdnem mindenütt folytonos, illetve a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{k \le t \le k+1} \left(E[\phi(t)] e^{-\alpha t} \right) < \infty$$

lokális korlátosság teljesül. Ekkor a $[0, \infty)$ intervallumon értelmezett

$$\mu_\alpha(t) = \int_0^t e^{-\alpha s}\, \mu(ds)$$

mértékkel a

$$\lim_{t\to\infty} m_t^\phi = \frac{\int_0^\infty e^{-\alpha t} E[\phi(t)]\,dt}{\int_0^\infty u\mu_\alpha(du)} =: m_\infty^\phi$$

konvergencia írható fel. ▲

Ennél valamennyivel kevesebbet állít a lenormált folyamat eloszlásbeli konvergenciáját karakterizáló alábbi tétel, melynek bizonyítása megtalálható a [8] és [9] cikkekben.

2.4. Tétel. *Legyen $\phi(t) = \mathbb{1}_{\{0\le t<\lambda\}}$, azaz a $Z^\phi(t)$ a t pillanatban élő egyedeket számolja, ekkor ha*

$$e^{-\alpha t} Z^\phi(t) \longrightarrow W$$

eloszlásban, amint $t \to \infty$, akkor az alábbi ekvivalenciák állnak fent:

$$\begin{aligned}
&E\big[{}_\alpha\xi(\infty)\log^+{}_\alpha\xi(\infty)\big] < \infty \iff\\
&EW < \infty \iff\\
&E\big[e^{-\alpha t} Z^\Phi(t)\big] \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} EW \text{ majdnem biztosan } \iff\\
&W > 0 \text{ majdnem biztosan a } \{T(t)\to\infty\} \text{ eseményen.}
\end{aligned}$$

▲

Habár ezen tételek is jól használhatóak általános elágazó folyamatok vizsgálatára, a dolgozat folyamán erősebb konvergenciával szeretnénk dolgozni. Ahhoz, hogy ilyen állításokat konstruáljunk, illetve bizonyítsunk, az egyik legerősebb eszköz a martingál konvergencia tétel. Tehát természetes ötlet, hogy az eddigiek során definiált folyamatban próbálunk meg megkeresni egy olyan mennyiséget, mely martingálként viselkedik. Ehhez az alábbi definíción keresztül juthatunk el.

2.2. Definíció. *Az eddigi jelöléseink mellett jelölje $x_1, x_2, \ldots$ az első, második, $\ldots$ egyedet a folyamatban, méghozzá abban az értelemben, hogy születési idejükre*

$$0 \le \sigma_{x_1} \le \sigma_{x_2} \le \ldots$$

teljesül. Ekkor a ***reproduktivitás érték martingálon*** *az*

$$R_0 = 1; \qquad R_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\xi_{x_j}(\infty)} e^{-\alpha\sigma_{(x_i,k)}} - \sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha\sigma_{x_i}} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

sorozatot értjük.

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy a reproduktivitás érték martingál az első n egyed (az $x_2, \ldots, x_n$ utódoktól eltekintve) összes gyerekeinek $e^{-\alpha\sigma_x}$

súlyokkal vett súlyozott összege. Természetesen a neve elárulja, hogy ez egy martingál lesz, de ehhez szükséges megadni a filtrációt is. Ez nem lesz más, mint minden n-re az első $x_1, x_2, \ldots, x_n$ egyed életútjai által generált σ-algebra, melyet jelölje a továbbiakban $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ennek segítségével, a következő lemmában megmutatjuk hogy az $(R_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pár valóban martingál, sőt nemnegatív is.

2.1. Lemma. *Az előbb bevezetett $(R_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pár egy nemnegatív martingál.*

Bizonyítás. Mivel a nemnegativitás triviális, így egyedül a martingálságot kell ellenőrizni. A definíció alapján világos, hogy R_n, sőt mivel x_{n+1} az első n egyed valamelyikének utódja, így $\sigma_{x_{n+1}}$ is mérhető az $\mathcal{A}_n$ σ-algebrára nézve. Ugyanakkor nyilvánvaló az is, hogy ehhez az x_{n+1} egyedhez tartozó ${}_{\alpha}\xi_{x_{n+1}}(\infty)$ normált reprodukció független ugyanettől a $\mathcal{A}_n$ σ-algebrától.

Mivel az R_n felírható úgy is, mint

$$R_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha\sigma_{x_i}}({}_{\alpha}\xi_{x_i}(\infty) - 1),$$

így a vizsgálandó martingál differenciára

$$E[R_{n+1} - R_n | \mathcal{A}_n] = e^{-\alpha\sigma_{x_{n+1}}} E[{}_{\alpha}\xi_{x_{n+1}}(\infty) - 1]$$

teljesül. A bizonyítás befejezéséhez csak annyit kell észrevenni, hogy a Fubini tétel, illetve a Malthus-paraméter definíciója alapján az

$$E[{}_{\alpha}\xi_{x_{n+1}}(\infty)] = E\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,\xi(dt)\Big] = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\,\mu(dt) = 1$$

összefüggés írható, fel, azaz az előbbi kifejezés ténylegesen martingál differencia. ▲

Habár ez a reproduktivitás érték martingál az elágazó folyamatok elméletében sokszor felbukkan, jelen esetben ennek egy könnyebben kezelhető, illetve értelmezhető megállítottját fogjuk használni. Ehhez szükségünk van egy további jelölés bevezetésére. Az eddigiek mellett legyen

$$\mathcal{F}(t) = \{x = (x', i) \,|\, \sigma_{x'} \le t \text{ és } t < \sigma_x < \infty\},$$

azaz $\mathcal{F}(t)$-ben azon egyedek szerepelnek, melyek t időpont után születtek, de felmenőjük még ugyanezen pillanat előtt, vagy éppen ekkor. Világos, hogy ha tekintjük az

$$Y_t = \sum_{x\in\mathcal{F}(t)} e^{-\alpha\sigma_x}$$

összeget, akkor mivel $\mathcal{F}(t)$-ben pontosan a $[0, t]$ intervallumban született egyedek (számukat jelölje $T(t)$) utódai vannak, így $Y_t = R_{T(t)}$ teljesül. Ugyanakkor, ahogyan a következő, vázlatosan bizonyított állítás is mutatja, ez szintén (nemnegatív) martingál lesz, méghozzá a megállított σ-algebrával.

2.2. Állítás. *Az előbb bevezetett $(Y_t, \mathcal{A}_{T(t)})_{t\geq 0}$ pár nemnegatív martingál.*

Bizonyítás. Világos, hogy rögzített t esetén az összes egyedek $T(t)$ száma megállási idő az $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ filtrációra nézve. Ekkor az opcionális mintavételezési tétel egy megfelelő alakja szerint (lásd a [20] könyv $II-2-13$. Tételét) $(Y_t)_{t\geq 0}$ szupermartingál a $(\mathcal{A}_{T(t)})_{t\geq 0}$ megállított σ-algebrára nézve. A [13] könyv 6.3.3. Tétele alapján tudjuk, hogy $ET(t)$ várható érték véges, sőt a korábbiak alapján az is megmutatható, hogy

$$E[||R_{n+1} - R_n||\mathcal{A}_n] = e^{-\alpha\sigma_{x_{n+1}}} E[|_\alpha\xi(\infty) - 1|] \leq 2$$

korlátosság is teljesül. Ennek következtében a [4] könyv 5.33. Állítását felhasználva megmutatható, hogy

$$EY_t \equiv 1$$

teljesül. Tehát $(Y_t)_{t\geq 0}$ nemcsak egy nemnegatív szupermartingál, hanem martingál is. ▲

Az előbb állítás alapján, felhasználva a martingál konvergencia tételt az alábbi következményt kapjuk, mely alapvető lesz a további konvergenciatételeink bizonyítása során.

2.1. Következmény. *Létezik egy $Y_\infty < \infty$ 1 várható értékű valószínűségi változó, hogy az előbbi $(Y_t, A_{T(t)})_{t\geq 0}$ majdnem biztosan ide konvergál, amint t-vel a ∞-be tartunk.* ▲

2.2. Konvergenciatételek

2.2.1 Nagy számok törvényei

Ahogyan azt később látni, illetve külön hangsúlyozni fogjuk, az elágazó folyamatok felbonthatósági tulajdonsága miatt az aszimptotikus vizsgálat sokszor a nagy számok törvényeinek valamilyen általánosabb alakján múlik. Ennek következtében érdemes először ezen felhasznált tételeket összegyűjteni. Habár ezek önmagukban is érdekesek lehetnek, mivel jelen helyzetben csak eszközként szolgának, ezért bizonyításaikat nem közöljük. Ugyanakkor az érdeklődő olvasó számára minden kimondott állítás esetén megadjuk, hogy a bizonyítást hol lehet megtalálni.

Egyes tételekben kimondásában felbukkan a **sztochasztikus rendezést** jelentő $\leq_s$ jelölés. Az X és Y valószínűségi változók között fennálló $X \leq_s Y$ reláció definíció szerint annyit jelent, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(X > x) \leq P(Y > x)$$

teljesül. Ennek ismeretében már az összes szükséges állítás kimondható.

2.5. Tétel. *Legyenek az $(X_i)_{i=1,2,\ldots}$ független valószínűségi változók olyanok, hogy létezik egy Y változó, melyre $EY < \infty$, illetve $|X_i| \leq_s Y$ $(i = 1, 2, \ldots)$, ekkor*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i)}{n} \longrightarrow 0$$

majdnem biztosan, ha $n \to \infty$.

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható a [19] cikk 4. szakaszában. ▲

2.2. Következmény. (Asmussen-Kurtz) *Legyen $(X_{ij})_{j=1,2,\ldots,n_i;i>0}$ szériákon belül független valószínűségi változók szériasorozata. Tegyük fel, hogy létezik Y véges várható értékű változó, mellyel*

$$0 \leq X_{tk} \leq_s X$$

teljesül, továbbá

$$\liminf_{i\to\infty} \frac{n_{i+1}}{n_1 + \ldots + n_i} > 0.$$

Ekkor

$$S_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - EX_{ij})}{n_i} \longrightarrow 0$$

majdnem biztosan, amint $t \to \infty$, avagy látszólag erősebb alakban, tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\big(|S_i| > \varepsilon\big) < \infty.$$

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható a [19] cikk 4. szakaszában. ▲

2.6. Tétel. (Athreya-Kaplan) *Legyen $(X_{ij})_{j=1,2,\ldots,n_i;i>0}$ szériákon belül független valószínűségi változók szériasorozata olyan, hogy $n_i \to \infty$, amint $i \to \infty$. Ezen felül tegyük fel, hogy létezik X véges várható értékű változó, mellyel*

$$0 \leq X_{ij} \leq_s X$$

teljesül. Ekkor

$$\frac{\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - EX_{ij})}{n_i} \xrightarrow{p} 0$$

amint $i \to \infty$.

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható a [2] cikk 4. szakaszában. ▲

Az alfejezet zárásaként még egy, a későbbiekben fontos plusz eredményt elevenítünk fel, mely habár nem igazán mondható nagy számok törvényének, a dolgozat jól strukturáltságának érdekében mégis itt közöljük.

2.7. Tétel. (Lévy-féle Borel-Cantelli lemma) *Legyen $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σ-algebrák monoton bővülő sorozata. Ekkor események tetszőleges $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatára, az*

$$E = \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|\mathcal{F}_n) < \infty \Big\}$$

jelölés mellett

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty} A_n \Big| E \Big) = 0$$

teljesül.

Bizonyítás. Az állítás (és így bizonyítása) megtalálható a [14] könyvben, mint 21. Tétel. ▲

2.2.2 Gyenge tétel

Habár vizsgálataink során főként a lenormált folyamat majdnem biztos konvergenciáját biztosító tételt fogjuk használni, a mögöttes ötletek elsajátításához érdemes először egy gyengébb alakot, a sztochasztikus konvergenciát kimondó állítást taglalni.

2.8. Tétel. (Sztochasztikus konvergencia) *Tegyük fel, hogy a $(\phi(t))_{t\geq 0}$ véletlen karakterisztika rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

1. *$t \mapsto E[\phi(t)]$ Lebesgue majdnem mindenütt folytonos;*
2. *minden $t < \infty$ esetén $E[\sup_{s\leq t} \phi(s)] < \infty$;*
3. *továbbá*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{k\leq t\leq k+1} \Big(e^{-\alpha t} E[\phi(t)] \Big) < \infty.$$

Ekkor a

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} Z^{\phi}(t) = Y_\infty m_\infty^{\phi}$$

sztochasztikus konvergencia teljesül.

A tétel bizonyítása előtt szükségünk van két további észrevételre, amiket az alábbi jelölés bevezetése után mondhatunk ki. Azon $\mathcal{F}(t)$-beli egyedeket, melyek szigorúan $t+c$ után születtek, jelölje $\mathcal{F}(t,c)$, azaz

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(t,c) &= \{x \in \mathcal{F}(t) \,:\, t+c < \sigma_x < \infty\} \\ &= \{x = (x', i) \,:\, \sigma_{x'} \le t \text{ és } t+c < \sigma_x < \infty\}.\end{aligned}$$

Ennek segítségével az Y_t súlyozott összeggel analóg módon bevezethetjük a

$$Y_{t,c} = \sum_{x \in \mathcal{F}(t,c)} e^{-\alpha\sigma_x}$$

kifejezést, mely értelemszerűen a t előtt született őssel rendelkező, de $t+c$ után születő egyedeket tömöríti. Világos az is, hogy ha a véletlen karakterisztikát az alábbinak választjuk:

$$\tilde{\phi}(s) = \big[{}_\alpha\xi(\infty) - {}_\alpha\xi(s+c)\big]e^{\alpha s} \quad (s \ge 0),$$

akkor az általa leszámolt általános elágazó folyamatra a

$$\begin{aligned}Z_{\tilde{\phi}}(t) &= \sum_{x\in\mathcal{F}} \tilde{\phi}(t-\sigma_x) = \sum_{x\in\mathcal{F}} \big[{}_\alpha\xi(\infty) - {}_\alpha\xi(t+c-\sigma_x)\big]e^{\alpha(t-\sigma_x)} \\ &= e^{\alpha t}\sum_{x\in\mathcal{F}} \mathbb{1}_{x\in\mathcal{F}(t,c)} e^{-\alpha\sigma_x} = e^{\alpha t} Y_{t,c}\end{aligned}$$

összefüggés írható fel. Így a születést meghatározó ξ reprodukciós folyamat tulajdonságait felhasználva, a 2.1 Állítás következtében az alábbi konvergencia teljesül:

$$E[Y_{t,c}] = m_t^{\tilde{\phi}} \longrightarrow m_\infty^{\tilde{\phi}} = \frac{\int_0^\infty e^{-\alpha t} E[\tilde{\phi}(t)]\,dt}{\int_0^\infty u\mu_\alpha(du)} = \frac{\int_c^\infty (1-\mu_\alpha(u))\,du}{\int_0^\infty (1-\mu_\alpha(u))\,du} \tag{2.1}$$

amint $t \to \infty$. Érdemes megjegyezni, hogy a kapott határérték, mint c függvénye, a 0-hoz tart, ha a c-vel a ∞-be tartunk.

A bizonyításhoz szükséges másik észrevétel önmagában is érdekes, így ennek állítását az alábbi lemmában foglalhatjuk össze.

2.2. Lemma. *Jelölje $N(t,c)$ a folyamat azon egyedeinek számát, melyek a $\mathcal{F}(t) \setminus \mathcal{F}(t,c)$ halmazban vannak (azaz t után, de legfeljebb $t+c$-kor születtek). Ekkor ha $\mu(c) > 1$, akkor a $\{T(t) \to \infty\}$ eseményen*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{N(t,c)}{T(t)} \ge \mu(c) - 1 > 0$$

áll fent, majdnem biztosan.

Bizonyítás. A folyamatra tett feltételeink miatt világos, hogy $(\xi_{x_i}([0,c]))_{i\in\mathbb{N}}$ egymástól független, azonos eloszlású, $\mu(c)$ várható értékű valószínűségi változók. Így, a

$$N(t,c) \ge \sum_{i=1}^{T_t} \xi_{x_i}([0,c]) - T(t)$$

becslésből, a nagy számok erős törvénye alapján könnyen adódik az állítás, felhasználva, hogy a $\{T(t) \to \infty\}$ eseményen vagyunk. ▲

Ezt a két észrevételt szem előtt tartva rátérhetünk a sztochasztikus konvergenciát taglaló 2.8. Tétel bizonyítására.

Bizonyítás. [2.8. Tétel] Először tegyük fel, hogy a véletlen karakterisztikánk olyan, hogy valamely s érték esetén $\phi(t) = 0$, minden $t \geq s$ mellett. Ekkor nyilvánvaló, hogy azok az egyedek, melyeket leszámolunk a $Z^\phi(t+s)$ általános elágazó folyamatban, a t időpont után születtek, melynek következtében a folyamat felbontása a

$$Z^\phi(t+s) = \sum_{x \in \mathcal{F}(t)} {}_xZ^\phi(t+s-\sigma_x)$$

alakban írható fel. Sőt, ezt ekvivalens átalakításokkal a következő alakra hozhatjuk:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha(t+s)}Z^\phi(t+s) &= \sum_{x \in \mathcal{F}(t)} e^{-\alpha\sigma_x}e^{-\alpha(t+s-\sigma_x)}{}_xZ^\phi(t+s-\sigma_x) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{F}(t)\setminus\mathcal{F}(t,c)} e^{-\alpha\sigma_x}e^{-\alpha(t+s-\sigma_x)}{}_xZ^\phi(t+s-\sigma_x)+ \\ &\quad + \sum_{x \in \mathcal{F}(t,c)} e^{-\alpha\sigma_x}e^{-\alpha(t+s-\sigma_x)}{}_xZ^\phi(t+s-\sigma_x), \end{aligned}$$

mely összefüggésre a későbbiekben támaszkodni fogunk.

A sztochasztikus konvergencia bizonyításához elég azt megmutatnunk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$P\Big(\big|e^{-\alpha(t+s)}Z^\phi(t+s) - Y_\infty m_\infty\big| \geq \varepsilon\Big) \leq \varepsilon$$

teljesül, amennyiben $t \geq t_0$, ahol t_0, s és c olyanok, hogy teljesítik az alábbi négy tulajdonság mindegyikét.

$$\mu(c) > 1 \text{ és } E[Y_{t,c}] \leq \frac{\varepsilon^2}{16\sup_t m_t^\phi} \text{ tetszőleges } t \geq t_0 \text{ esetén;} \tag{2.2}$$

$$\big|m_t^\phi - m_\infty^\phi\big| \leq \frac{\varepsilon^2}{16} \text{ minden } t \geq s-c \geq 0 \text{ mellett;} \tag{2.3}$$

$$P\Big(\big|Y_t - Y_\infty\big| \leq \frac{\varepsilon}{4m_\infty^\phi}\Big) \leq \frac{\varepsilon}{4} \text{ tetszőleges } t \geq t_0 \text{ esetén;} \tag{2.4}$$

$$P\Big(\Big|\sum_{x \in \mathcal{F}(t)\setminus\mathcal{F}(t,c)} e^{-\alpha\sigma_x}\big(e^{-\alpha(t+s-\sigma_x)}{}_xZ^\phi_{t+s-\sigma_x} - m^\phi_{t+s-\sigma_x}\big)\Big| \geq \frac{\varepsilon}{4}\Big) \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.5}$$

Persze az, hogy ezen feltételeket teljesítő értékek miért léteznek, néhány plusz megfontolást igényel, így először ezeket taglaljuk.

Mivel az m_t^ϕ a véges intervallumokon korlátos, illetve a 2.1. Állítás szerint az m_∞^ϕ értékhez konvergál, így a (2.1) konvergencia alapján világos, hogy adhatóak a (2.2) tulajdonságot teljesítő értékek. Hasonlóan könnyen adódik, hogy a (2.3) és (2.4) feltételek is elérhetőek. Az előbbihez megint csak a 2.1. Állítást, az utóbbihoz pedig a 2.1. Következményt használhatjuk fel. Az (2.5) feltételhez teljesüléséhez többre van szükségünk. A tulajdonsággal ekvivalensen azt fogjuk megmutatni, hogy ha $\mu(c) > 1$ (ez a (2.2) tulajdonság alapján feltehető), akkor a korábbi ϕ véletlen karakterisztikára, illetve $s \geq c$ értékre a

$$\sum_{x\in\mathcal{F}(t)\setminus\mathcal{F}(t,c)} e^{-\alpha\sigma_x}\big(e^{-\alpha(t+s-\sigma_x)}{}_xZ^\phi(t+s-\sigma_x) - m^\phi_{t+s-\sigma_x}\big) \xrightarrow{p} 0 \tag{2.6}$$

sztochasztikus konvergencia teljesül a $\{T(t)\to\infty\}$ halmazon, amint $t\to\infty$.

Ehhez használjuk a korábbi $N(t,c)$ jelölést a $\mathcal{F}(t)\setminus\mathcal{F}(t,c)$ halmazbeli egyedek számára. Amennyiben ez pozitív (máskülönben kész vagyunk), akkor értelmes az alábbi átalakítás:

$$\sum_{x\in\mathcal{F}(t)\setminus\mathcal{F}(t,c)} e^{-\alpha\sigma_x}\big(e^{-\alpha(t+s-\sigma_x)}{}_xZ^\phi(t+s-\sigma_x) - m^\phi_{t+s-\sigma_x}\big) =$$
$$= N(t,c)e^{-\alpha(t+c)}\cdot$$
$$\cdot\frac{\sum_{x\in\mathcal{F}(t)\setminus\mathcal{F}(t,c)} e^{\alpha(t+c-\sigma_x)}\big(e^{-\alpha(t+s-\sigma_x)}{}_xZ^\phi(t+s-\sigma_x) - m^\phi_{t+s-\sigma_x}\big)}{N(t,c)}.$$

A definíció alapján, ha $x\in\mathcal{F}(t)\setminus\mathcal{F}(t,c)$, akkor $\sigma_x \leq t+c$, így a megjelent szorzótényezőre az alábbi becslés írható fel:

$$N(t,c)e^{-\alpha(t+c)} = \sum_{x\in\mathcal{F}(t)\setminus\mathcal{F}(t,c)} e^{-\alpha(t+c)} \leq \sum_{x\in\mathcal{F}(t)\setminus\mathcal{F}(t,c)} e^{-\alpha\sigma_x} \leq \sum_{x\in\mathcal{F}(t)} e^{-\alpha\sigma_x} = Y_t,$$

amiből a 2.1 Következmény alapján adódik, hogy $N(t,c)e^{-\alpha(t+c)} \leq Y_\infty < \infty$ majdnem biztosan, amint $t\to\infty$.

Az egyszerűség kedvéért a második tényezőt jelöljük

$$A(t) = \frac{\sum_{x\in\mathcal{F}(t)\setminus\mathcal{F}(t,c)} e^{\alpha(t+c-\sigma_x)}\big(e^{-\alpha(t+s-\sigma_x)}{}_xZ^\phi(t+s-\sigma_x) - m^\phi_{t+s-\sigma_x}\big)}{N(t,c)}$$

segítségével. Mivel a 2.2. Lemma alapján az előbbi $N(t,c)e^{-\alpha(t+c)}$ majdnem biztosan pozitív is, így a (2.6) konvergenciához elegendő azt megmutatni, hogy tetszőleges $\varepsilon' > 0$ érték esetén

$$P\big(|A(t)| > \varepsilon',\, N(t,c)\to\infty\big) \longrightarrow 0$$

teljesül, amint $t\to\infty$. Ehhez az előző szakaszban taglalt 2.6. Tételben szereplő sztochasztikus konvergenciát fogjuk felhasználni.

A korábbi jelöléseink alapján $\mathcal{A}_{T(t)}$ jelöli azon egyedek teljes életútja-i által generált σ-algebrát, melyek legkésőbb a t pillanatban születtek. Ennek következtében $N(t,c)$ $\mathcal{A}_{T(t)}$-mérhető, hiszen az $N(t,c)$ számot adó egyedek szülei mind t előtt, vagy t-kor születtek. Hasonlóan minden $x \in \mathcal{F}(t) \setminus \mathcal{F}(t,c)$ egyed esetén ugyanez a mérhetőség teljesül a σ_x születési időre is. Sőt, az is igaz, hogy $\mathcal{A}_{T(t)}$ ismeretében tetszőleges $x \in \mathcal{F}(t) \setminus \mathcal{F}(t,c)$ egyedek ${}_xZ^\phi(u)$ folyamatainak eloszlásai nem változnak, függetlenségük megmarad.

Lévén a ϕ olyan véletlen karakterisztika mely egy fix s érték után azonosan 0, így az alábbi becslés írható fel:

$$Z^\phi(u) = \sum_x \phi_x(u - \sigma_x) \leq \sum_{x:\sigma_x \leq s} \sup_{u \leq s} \phi_x(s).$$

Ugyanakkor tetszőleges x egyed esetén feltettük, hogy σ_x és ϕ_x függetlenek, tehát a becslés várható értékének kiszámolásához használhatjuk a Wald-azonosság egy általános alakját, mely szerint

$$E\Big[\sum_{x:\sigma_x \leq s} \sup_{u \leq s} \phi_x(s)\Big] = E[T(s)]E\Big[\sup_{u \leq s} \phi_x(s)\Big]$$

írható fel. Ez véges az $E[T(s)]$ végessége, illetve a tétel véletlen karakterisztikára tett harmadik feltétele miatt. Tehát alkalmazva a 2.6. Tételt, adódott, hogy ha azon eseményen vagyunk, melyen

$$N(t,c) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} \infty$$

áll fent, akkor tetszőleges $\varepsilon' > 0$ esetén

$$P\big(|A(t)| > \varepsilon' \big| \mathcal{A}_{T(t)}\big) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

teljesül. Ennek következtében a teljes várható érték tétele, illetve a Lebesgue-féle dominált konvergenciatétel miatt a szükséges

$$P\big(|A(t)| > \varepsilon', N(t,c) \to \infty\big) = E\big[\mathbb{1}_{\{N(t,c)\to\infty\}} P\big(|A(t)| > \varepsilon' \big| \mathcal{A}_{T(t)}\big)\big] \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

konvergencia adódik. Összegezve, választhatóak úgy a t_0, s, illetve c értékek, hogy a korábbi (2.2), (2.3), (2.4) és (2.5) tulajdonságok mindegyike teljesül.

Térjünk vissza a minket érdeklő állítás igazolására. Ahogyan azt korábban már megemlítettük, a sztochasztikus konvergencia definíciója alapján elegendő annyit megmutatni, hogy ha t elég nagy, akkor a normált folyamat a megelőlegezett határértékétől kis valószínűséggel tér el. Ehhez tegyük fel, hogy t_0, s, c értékek olyanok, hogy a korábbi tulajdonságokat teljesítik, és legyen $t \geq t_0$. Ekkor tagok becsempészésével, illetve a valószínűség szubadditivitását kihasználva a becsülendő valószínűség a következőképp alakítható át.

$$P\Big(\big|e^{-\alpha(t+s)}Z^\phi(t+s)-Y_\infty m^\phi_\infty\big|\geq\varepsilon\Big)=$$
$$=P\Big(\Big|\sum_{x\in\mathcal{F}(t)\setminus\mathcal{F}(t,c)}e^{-\alpha\sigma_x}\big(e^{-\alpha(t+s-\sigma_x)}{}_xZ^\phi(t+s-\sigma_x)\big)+$$
$$+\sum_{x\in\mathcal{F}(t,c)}e^{-\alpha\sigma_x}\big(e^{-\alpha(t+s-\sigma_x)}{}_xZ^\phi(t+s-\sigma_x)\big)-Y_\infty m^\phi_\infty\Big|\geq\varepsilon\Big)=$$
$$=P\Big(\Big|\sum_{x\in\mathcal{F}(t)\setminus\mathcal{F}(t,c)}e^{-\alpha\sigma_x}\big(e^{-\alpha(t+s-\sigma_x)}{}_xZ^\phi(t+s-\sigma_x)-m^\phi_{t+s-\sigma_x}\big)+$$
$$+\sum_{x\in\mathcal{F}(t)\setminus\mathcal{F}(t,c)}e^{-\alpha\sigma_x}m^\phi_{t+s-\sigma_x}+$$
$$+\sum_{x\in\mathcal{F}(t,c)}e^{-\alpha\sigma_x}\big(e^{-\alpha(t+s-\sigma_x)}{}_xZ^\phi(t+s-\sigma_x)\big)-Y_tm^\phi_\infty+$$
$$+(Y_t-Y_\infty)m^\phi_\infty\Big|\geq\varepsilon\Big)\leq$$
$$\leq P\Big(\Big|\sum_{x\in\mathcal{F}(t)\setminus\mathcal{F}(t,c)}e^{-\alpha\sigma_x}\big(e^{-\alpha(t+s-\sigma_x)}{}_xZ^\phi(t+s-\sigma_x)-m^\phi_{t+s-\sigma_x}\big)\Big|\geq\frac{\varepsilon}{4}\Big)+$$
$$+P\Big(\Big|\sum_{x\in\mathcal{F}(t)\setminus\mathcal{F}(t,c)}e^{-\alpha\sigma_x}m^\phi_{t+s-\sigma_x}+$$
$$+\sum_{x\in\mathcal{F}(t,c)}e^{-\alpha\sigma_x}\big(e^{-\alpha(t+s-\sigma_x)}{}_xZ^\phi(t+s-\sigma_x)\big)-Y_tm^\phi_\infty\Big|\geq\frac{\varepsilon}{2}\Big)+$$
$$+P\Big(\big|Y_t-Y_\infty\big|m^\phi_\infty\geq\frac{\varepsilon}{4}\Big)$$

A megjelent három kifejezést külön külön kezelhetjük. Az elsőre a (2.5) tulajdonság alapján a

$$P\Big(\Big|\sum_{x\in\mathcal{F}(t)\setminus\mathcal{F}(t,c)}e^{-\alpha\sigma_x}\big(e^{-\alpha(t+s-\sigma_x)}{}_xZ^\phi(t+s-\sigma_x)-m^\phi_{t+s-\sigma_x}\big)\Big|\geq\frac{\varepsilon}{4}\Big)\leq\frac{\varepsilon}{4}$$

becslést írhatjuk fel. Hasonlóan, a (2.4) összefüggést felhasználva az utolsó valószínűségre a

$$P\Big(\big|Y_t-Y_\infty\big|m^\phi_\infty\geq\frac{\varepsilon}{4}\Big)=P\Big(\big|Y_t-Y_\infty\big|\geq\frac{\varepsilon}{4m^\phi_\infty}\Big)\leq\frac{\varepsilon}{4}$$

korlát adódik. A második tagnál egy kicsivel szemfülesebbnek kell lennünk. Először vegyük észre, hogy az Y_t definíciója és a szubadditivitás alapján ez felülről becsülhető:

$$P\Big(\Big|\sum_{x\in\mathcal{F}(t)\setminus\mathcal{F}(t,c)}e^{-\alpha\sigma_x}m^\phi_{t+s-\sigma_x}+$$
$$+\sum_{x\in\mathcal{F}(t,c)}e^{-\alpha\sigma_x}\big(e^{-\alpha(t+s-\sigma_x)}{}_xZ^\phi(t+s-\sigma_x)\big)-Y_tm^\phi_\infty\Big|\geq\frac{\varepsilon}{2}\Big)\leq$$
$$\leq P\Big(\sum_{x\in\mathcal{F}(t)\setminus\mathcal{F}(t,c)}e^{-\alpha\sigma_x}\Big|m^\phi_{t+s-\sigma_x}-m^\phi_\infty\Big|\geq\frac{\varepsilon}{4}\Big)+$$
$$+P\Big(\sum_{x\in\mathcal{F}(t,c)}e^{-\alpha\sigma_x}\Big|e^{-\alpha(t+s-\sigma_x)}{}_xZ^\phi(t+s-\sigma_x)-m^\phi_\infty\Big|\geq\frac{\varepsilon}{4}\Big).$$

A megjelent első tényezőre a Markov egyenlőtlenség, kihasználva a (2.3) tulajdonságot, illetve, hogy Y_t 1 várható értékű martingál, az alábbi felső becslést szolgáltatja:

$$P\Big(\sum_{x\in\mathcal{F}(t)\setminus\mathcal{F}(t,c)} e^{-\alpha\sigma_x}\Big|m^{\phi}_{t+s-\sigma_x}-m^{\phi}_{\infty}\Big|\geq\frac{\varepsilon}{4}\Big)\leq P\Big(\frac{\varepsilon^2}{16}Y_t\geq\frac{\varepsilon}{4}\Big)\leq\frac{\varepsilon}{4}.$$

A megmaradt második tagot szintén a Markov egyenlőtlenség segítségével becsülhetjük, melyhez először vizsgáljuk ezen tényező várható értékét. Kihasználva az $Y_{t,c}$ definícióját, triviálisan kapjuk az

$$E\Big[\sum_{x\in\mathcal{F}(t,c)} e^{-\alpha\sigma_x}\Big|e^{-\alpha(t+s-\sigma_x)}{}_xZ^{\phi}(t+s-\sigma_x)-m^{\phi}_{\infty}\Big|\Big]\leq E[Y_{t,c}]\sup_{t\geq t_0}m^{\phi}_t$$

becslést, mely a (2.2) feltétel alapján tovább becsülhető, mint

$$E[Y_{t,c}]\sup_{t\geq t_0}m^{\phi}_t\leq\frac{\varepsilon^2}{16},$$

tehát a Markov egyenlőtlenséggel

$$P\Big(\sum_{x\in\mathcal{F}(t,c)} e^{-\alpha\sigma_x}\Big|e^{-\alpha(t+s-\sigma_x)}{}_xZ^{\phi}(t+s-\sigma_x)-m^{\phi}_{\infty}\Big|\geq\frac{\varepsilon}{4}\Big)\leq\frac{\varepsilon}{4}$$

adódik. Ezeket összetéve adódott, hogy olyan véletlen karakterisztikára, melyre $\phi(t)=0$, valamely s-nél nagyobb indexek esetén, tetszőleges $\varepsilon>0$ mellett

$$P\Big(\big|e^{-\alpha(t+s)}Z^{\phi}(t+s)-Y_{\infty}m_{\infty}\big|\geq\varepsilon\Big)\leq\varepsilon,$$

azaz a szükséges sztochasztikus konvergencia teljesül.

Tetszőleges ϕ véletlen karakterisztika esetén jelölje

$$\phi'(t)=\phi(t)\mathbb{1}_{\{t<c'\}}$$

a levágott karakterisztikát. Ekkor nyilvánvalóan a ϕ' által leszámolt folyamat kisebb vagy egyenlő, mint az eredeti által leszámolt, sőt az eddigiek alapján

$$e^{-\alpha t}Z^{\phi'}(t)\xrightarrow{p}Y_{\infty}m^{\phi'}_{\infty},$$

amint $t\to\infty$. Ezen levágott véletlen karakterisztikát felhasználva a következő becslést írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}P\Big(\big|e^{-\alpha t}Z^{\phi}(t)-Y_{\infty}m^{\phi}_{\infty}\big|\geq\varepsilon\Big)\leq&\\ \leq P\Big(e^{-\alpha t}\big|Z^{\phi}(t)-Z^{\phi'}(t)\big|\geq\frac{\varepsilon}{3}\Big)&+P\Big(\big|e^{-\alpha t}Z^{\phi'}(t)-Y_{\infty}m^{\phi'}_{\infty}\big|\geq\frac{\varepsilon}{3}\Big)+\\ &+P\Big(\big|m^{\phi'}_{\infty}-m^{\phi}_{\infty}\big|Y_{\infty}\geq\frac{\varepsilon}{3}\Big),\end{aligned}$$

ahol az egyes tagok elég nagy c' és t értékek esetén már egyenként kisebbek mint $\varepsilon/3$, tehát a szükséges

$$e^{-\alpha t}Z^{\phi}(t)\xrightarrow{p}Y_{\infty}m^{\phi}_{\infty}$$

sztochasztikus konvergencia adódik, a tételt beláttuk. ▲

Azon kívül, hogy ez az előbbi 2.8. Tétel jól rámutat arra, hogy az elágazó folyamatok aszimptotikus vizsgálata erősen épít a nagy számok törvényeire, és sejteti azt is, hogy ha feltételek egy erős törvény teljesülését biztosítják, akkor az előbbi konvergencia 1 valószínűséggel is igaz, több hasznos következménye is ismert. Ezek közül a legfontosabb az, hogy amennyiben a ξ reprodukciós folyamat eloszlása az $\mathcal{L}\log^+\mathcal{L}$ osztályban van, akkor a korábbi feltételeknek megfelelő véletlen karakterisztikák által leszámolt elágazó folyamat normálás után várható értékben is konvergál. Ezt mondja ki az alábbi állítás, mely bizonyításának utolsó lépését nem részletezzük.

2.3. Következmény. (Várható értékbeli konvergencia) *Tegyük fel azt, hogy a $(\phi(t))_{t\geq 0}$ véletlen karakterisztika rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

1. *$t \mapsto E[\phi(t)]$ Lebesgue majdnem mindenütt folytonos;*
2. *minden $t < \infty$ esetén $E[\sup_{s\leq t}\phi(s)] < \infty$;*
3. *továbbá*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{k\leq t\leq k+1} \left(e^{-\alpha t} E[\phi(t)]\right) < \infty,$$

illetve, hogy az utódeloszlást meghatározó folyamatra

$$E\left[{}_{\alpha}\xi(\infty)\log^{+}{}_{\alpha}\xi(\infty)\right] < \infty$$

teljesül. Ekkor

$$e^{-\alpha t} Z^{\phi}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}^1} Y_\infty m_\infty^\phi$$

teljesül, amint $t \to \infty$.

Bizonyítás. A 2.8. Tétel alapján tudjuk, hogy az $e^{-\alpha t}Z^\phi(t) \to Y_\infty m_\infty^\phi$ sztochasztikus konvergencia teljesül. Ugyanakkor a 2.4. Tétel miatt az $Y_\infty m_\infty^\Phi$ határváltozónak ugyanolyan eloszlása kell legyen, mint W-nek. Kihasználva, hogy $EY_\infty = 1$, adódik, hogy

$$\lim_{t\to\infty} E[e^{-\alpha t}Z^\phi(t)] = m_\infty^\phi = E[Y_\infty m_\infty^\phi]$$

teljesül, melyből viszont az állítás már befejezhető. ▲

Ahogyan azt látni fogjuk, sokszor a nehezen meghatározható Y_∞ határváltozót elkerülendő, az egyes leszámolt folyamatok hányadosának aszimptotikus viselkedését vizsgálják. Erről szól a szakasz utolsó állítása, mely bizonyítása a korábbiak alapján könnyen adódik, így azt az olvasóra hagyjuk.

2.4. Következmény. *Tegyük fel, hogy a $(\phi_i(t))_{t\geq 0}$ véletlen karakterisztikák $(i = 1, 2)$ rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:*

1. $t \mapsto E[\phi_i(t)]$ Lebesgue majdnem mindenütt folytonos;

2. minden $t < \infty$ esetén $E[\sup_{s \le t} \phi_i(s)] < \infty$;

3. továbbá

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{k \le t \le k+1} \left(e^{-\alpha t} E[\phi_i(t)] \right) < \infty,$$

illetve, hogy a reprodukciós folyamatra

$$E\left[{}_{\alpha}\xi(\infty) \log^{+} {}_{\alpha}\xi(\infty) \right] < \infty$$

teljesül. Ekkor a $\{T(t) \to \infty\}$ halmazon

$$\frac{Z^{\phi_1}(t)}{Z^{\phi_2}(t)} \xrightarrow{p} \frac{m_{\infty}^{\phi_1}}{m_{\infty}^{\phi_2}}$$

teljesül, amint $t \to \infty$. ▲

2.2.3 Erős tétel

Mielőtt belevágnánk a normált folyamat majdnem biztos konvergenciájának taglalásába, érdemes átgondolni, hogy a sztochasztikus konvergenciát állító 2.8. Tétel során milyen lépéseink voltak. Feltéve, hogy a véletlen karakterisztika 0 egy adott s időponton túl, az ez által leszámolt $e^{-\alpha(t+s)} Z^{\phi}(t+s)$ normált folyamat felbontását szétvágtuk két részre:

$$\sum_{x \in \mathcal{F}(t) \setminus \mathcal{F}(t,c)} e^{-\alpha(t+s)} {}_{x}Z^{\phi}(t+s-\sigma_x) + \sum_{x \in \mathcal{F}(t,c)} e^{-\alpha(t+s)} {}_{x}Z^{\phi}(t+s-\sigma_x).$$

Ezután a nagy számok gyenge törvényének egy megfelelő változatát használva megmutattuk, hogy elég nagy s, c és t értékekre az első tényező közel van a $(Y_t - Y_{t,c}) m_{\infty}^{\phi}$ kifejezéshez. Használva a felújítási elméletből származtatott 2.1. Állítást beláttuk, hogy elég nagy c és t értékek esetén $Y_{t,c}$ várható értéke kicsi, melyből a Markov egyenlőtlenséget használva következett, hogy $Y_{t,c}$ 0-hoz közeli. Tehát, ha s, c és t elég nagyok, akkor az első tényező közel $Y_{\infty} m_{\infty}^{\phi}$. Másfelől megmutattuk, hogy a második tényező várható értéke kisebb mint a $EY_{t,c} \sup_t m_t^{\phi}$ érték, mely nagy s, c és t értékek esetén szintén elenyésző.

Tehát világos, hogy ahhoz, hogy a normált folyamat sztochasztikus konvergenciáját majdnem biztos konvergenciára tudjuk lecserélni, az első tagban elegendő a korábbi gyenge törvényt egy alkalmas erőssel helyettesíteni, illetve a második tényező kezeléséhez olyan feltételt adni, melynek következményeképp

$$\lim_{c \to \infty} \limsup_{t \to \infty} Y_{t,c} = 0$$

majdnem biztos konvergencia teljesül. Ez utóbbihoz tekintsük a következő feltételt.

1. Feltétel. *Létezik egy $[0,\infty)$ félegyenesen értelmezett, monoton csökkenő, korlátos, pozitív, integrálható g függvény, mellyel a ξ reprodukciós folyamatra*

$$E\Big[\sup_t \frac{{}_\alpha\xi(\infty) - {}_\alpha\xi(t)}{g(t)}\Big] < \infty$$

teljesül.

Ezzel kapcsolatban két dolgot érdemes megjegyezni. Először is a g függvény korlátossága igazából elhagyható, ugyanis megmutatható, hogy ha a reprodukciós folyamatra a feltétel fent áll, akkor a g-t tudjuk korlátosnak is választani. Másodszor érdemes megjegyezni, hogy az 1. Feltétel teljesül, hogy ha létezik olyan monoton csökkenő, pozitív, integrálható g függvény, melyre

$$\int_0^\infty \frac{1}{g(t)} e^{-\alpha t}\, \mu(dt) < \infty.$$

Ez utóbbi azért igaz, mert a definíció, illetve a monoton csökkenés miatt a

$$\begin{aligned}\frac{{}_\alpha\xi(\infty) - {}_\alpha\xi(t)}{g(t)} &= \int_t^\infty \frac{1}{g(t)} e^{-\alpha s}\, \xi(ds) \leq \int_t^\infty \frac{1}{g(s)} e^{-\alpha s}\, \xi(ds) \\ &\leq \int_0^\infty \frac{1}{g(s)} e^{-\alpha s}\, \xi(ds)\end{aligned}$$

felső becslés írható fel, melyből a szuprémum várható értékére a kívánt

$$E\Big[\sup_t \frac{{}_\alpha\xi(\infty) - {}_\alpha\xi(t)}{g(t)}\Big] \leq \int_0^\infty \frac{1}{g(s)} e^{-\alpha s}\, \mu(ds) < \infty$$

végesség adódik. Fontos észrevétel, hogy ez a feltétel gyengébb, mintha a μ_α második momentumának végességét, azaz

$$\int_0^\infty t^2 e^{-\alpha t}\, \mu(dt) < \infty,$$

korlátosságot, vagy

$$\int_0^\infty t(\log^+ t)^{1+\varepsilon} e^{-\alpha t}\, \mu(dt) < \infty$$

teljesülését (valamilyen $\varepsilon > 0$ esetén) várnánk el.

Természetesen a 2.8. Tételt nem csak egy adott ponton túl 0 véletlen karakterisztikák esetén bizonyítottuk. Így annak érdekében, hogy a korábbi csonkításos módszerünk majdnem biztos konvergencia mellett is működjön, szükségünk van a véletlen karakterisztikákra adott feltételre is, mely valamilyen értelemben duálisa a reprodukciós folyamatra adott 1. Feltételnek.

2. Feltétel. *Létezik egy $[0,\infty)$ félegyenesen értelmezett, monoton csökkenő, korlátos, pozitív, integrálható h függvény, mellyel a ϕ véletlen karakterisztikával definiált*

$$U = \sup_t \Big(\frac{e^{-\alpha t}\phi(t)}{h(t)}\Big)$$

változó várható értéke véges.

A gyenge konvergenciát taglaló előző szakasszal ellentétben a normált folyamat majdnem biztos konvergenciájának bizonyítását kisebb egymás követő állításokra bontjuk. Először megmutatjuk, hogy a t időpontig bezárólag bekövetkezett összes születések számára, ezt továbbra is $T(t)$ jelöli, aszimptotikus felső korlát adható.

2.3. Lemma. *Létezik egy $K < \infty$ konstans, melyre*

$$\limsup_{t\to\infty} e^{-\alpha t} T(t) \leq K Y_\infty$$

teljesül majdnem biztosan.

Bizonyítás. Az előző szakasz 2.2. Lemmája alapján tudjuk, hogy $\mu(c) > 1$ esetén a $\{T(t) \to \infty\}$ eseményen a

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{N(t,c)}{T(t)} \geq \mu(c) - 1 > 0$$

majdnem biztos alsó korlát írható fel. Lévén $N(t,c)$ azon egyedek számát jelölte, melyek a $\mathcal{F}(t) \setminus \mathcal{F}(t,c)$ halmazban vannak (azaz t után, de legfeljebb $t+c$-kor születtek), korábbi jelülésünkkel a

$$Y_t \geq e^{-\alpha(t+c)} N(t,c)$$

becslés adható. Ezt behelyettesítve az előző összefüggésbe a

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{Y_t}{e^{-\alpha t} T(t)} \geq (\mu(c) - 1) e^{-\alpha c}$$

majdnem biztos becslést kapjuk, amely átrendezés után pont az bizonyítandó állítást adja. ▲

Emlékezzünk vissza, ahhoz, hogy a sztochasztikus konvergencia esetén használt gondolatmenet jelen esetben is alkalmazható maradjon, szükségünk van annak megmutatására, hogy az $Y_{t,c}$ tényező nagy c és t értékek esetén majdnem biztosan 0. Ennek a megfigyelésnek a gerincét adja a következő lemma, mely bizonyításának alapötlete erősen támaszkodik a korábban nem bizonyított 2.2. Következményre, így csak azt említjük meg, hogy ez a bizonyítás hol lelhető fel.

2.4. Lemma. *Tegyük fel, hogy a ϕ véletlen karakterisztika teljesíti a 2. Feltételt, továbbá rögzített c esetén jelölje $\phi'(t) = \phi(t)\mathbb{1}_{\{t>c\}}$ a levágott karakterisztikát. Ekkor létezik egy $K < \infty$ konstans, hogy tetszőleges $c > 0$ érték esetén*

$$\limsup_{t\to\infty} e^{-\alpha t} Z^{\phi'}(t+c) \leq K\Big(\int_{c-K}^{\infty} h(t)\,dt\Big) Y_\infty$$

teljesül majdnem biztosan.

Bizonyítás. A bizonyítás megtalálható a [19] cikk 5. szakaszában. ▲

A lemma következményeként adódik a számunkra szükséges állítás az $Y_{t,c}$ elhanyagolhatóságáról. Érdemes megjegyezni azt is, hogy ebben a bizonyításban derül ki az is, hogy az 1. és 2. Feltételek milyen értelemben duálisai egymásnak.

2.5. Következmény. *Tegyük fel, hogy a ξ reprodukciós folyamat teljesíti a 1. Feltételt. Ekkor létezik egy $K < \infty$ konstans, hogy tetszőleges $c > 0$ esetén*

$$\limsup_{t\to\infty} Y_{t,c} \le K\Big(\int_{c-K}^{\infty} g(t)\,dt\Big)Y_\infty$$

teljesül majdnem biztosan.

Bizonyítás. Ahhoz, hogy az előbbi 2.4. Lemmát alkalmazni tudjuk, legyen a véletlen karakterisztikánk

$$\phi(t) = e^{\alpha t}\big({}_\alpha\xi(\infty) - {}_\alpha\xi(t)\big).$$

Ekkor a c-nél levágott ϕ' karakterisztikával a

$$\begin{aligned}
Z^{\phi'}(t+c) &= \sum_{x\in\mathcal{F}} \phi(t+c-\sigma_x)\mathbb{1}_{\{t+c-\sigma_x>c\}}\\
&= \sum_{x\in\mathcal{F}} \big[{}_\alpha\xi(\infty) - {}_\alpha\xi(t+c-\sigma_x)\big]e^{\alpha(t+c-\sigma_x)}\\
&= e^{\alpha(t+c)}\sum_{x\in\mathcal{F}} \mathbb{1}_{x\in\mathcal{F}(t,c)}e^{-\alpha\sigma_x} = e^{\alpha(t+c)}Y_{t,c}
\end{aligned}$$

egyenlőség írható fel, melyből adódik, hogy a reprodukciós folyamatra adott 1. Feltétel, egybeesik az ezen ϕ véletlen karakterisztikára vonatkozó 2. Feltétellel, tehát az előző lemma alkalmazható. ▲

Hasonlóan a sztochasztikus konvergencia esetéhez, annak igazolása, hogy a normált folyamat $\mathcal{F}(t)\setminus\mathcal{F}(t,c)$ egyedeket tartalmazó része (t-ig megszületett ős $t+c$-ig megszületett utódai) közel olyan, mint a határértéket adó változó, majdnem biztos konvergencia esetén sem egyszerű. Ezt megnehezíti az is, hogy a nagy számok erős törvényének használatához a folyamatot adott rácspontokban kell tekinteni és majd ezután lehet csak visszatérni az eredeti folyamathoz. Azért, hogy ezt az átmenetet tudjuk kezelni, egy további állításra lesz szükségünk, melyet az alábbi jelölés bevezetése után bizonyítunk.

Jelölés. Tetszőleges ϕ véletlen karakterisztika esetén jelöljük annak lokális szuprémumát, illetve lokális infimumát a következőképp:

$$\phi^\varepsilon(t) = \mathbb{1}_{\{t\ge 0\}}\sup_{|s-t|\le\varepsilon}\phi(s) \qquad \text{és} \qquad \phi_\varepsilon(t) = \inf_{|s-t|\le\varepsilon}\phi(s).$$

Ezen jelölések segítségével kimondható, illetve bizonyítható az előbb említett problémát áthidaló állítás.

2.3. Állítás. *Tegyük fel, hogy ϕ teljesíti a 2. Feltételt és trajektóriái a Szkorohod D-térből valók. Ekkor $E[\phi(t)]$, $E[\phi^{\varepsilon}(t)]$ és $E[\phi_{\varepsilon}(t)]$, mint t függvényei, majdnem biztosan folytonosak. Sőt, amint $\varepsilon \searrow 0$, az*

$$E[\phi^{\varepsilon}(t)] \searrow E[\phi(t)]$$

és az

$$E[\phi_{\varepsilon}(t)] \nearrow E[\phi(t)]$$

konvergenciák teljesülnek, majdnem minden t esetén.

Bizonyítás. Feltettük, hogy $\phi(t)$ trajektóriái jobbról folytonosak, balról létezik a határértékük, sőt a 2. Feltétel alapján alkalmazhatjuk a Lebesgue-féle dominált konvergencia tételt, tehát ugyanez elmondható a $E[\phi(t)]$ függvényre is. Ebből viszont már következik, hogy a $t \mapsto E[\phi(t)]$ majdnem biztosan folytonos. Lévén $\phi^{\varepsilon}(t)$ és $\phi_{\varepsilon}(t)$ trajektóriái szintén benne vannak a Szkorohod D-térben, így hasonló érveléssel ezek majdnem biztos folytonossága is következik. Sőt az is világos, hogy a ϕ folytonossági pontjaiban a

$$\phi^{\varepsilon}(t) \searrow \phi(t) \qquad \text{és} \qquad \phi_{\varepsilon}(t) \nearrow \phi(t)$$

konvergenciák teljesülnek, amint $\varepsilon \searrow 0$. Mivel viszont ϕ-nek csak megszámlálható sok szakadása lehetséges, így az állítás utolsó összefüggése is adódik. ▲

Tehát már nincs más dolgunk, mint bevezetni a szükséges rácspontokat, melyeket az elkövetkezőkben alkalmazni fogunk.

Jelölés. Tetszőleges $c > 0$ és $t_0 \geq 0$ értékek esetén legyen

$$t_k = kc + t_0 \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

mely következtében a rácspontjaink halmaza $\{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$.

Ezen rácspontok esetén a majdnem biztos konvergenciát az alábbi tétel feltételei szolgáltatják.

2.9. Tétel. *Tegyük fel, hogy az alábbiak teljesülnek:*

1. *a ξ reprodukciós folyamat teljesíti az 1. Feltételt;*
2. *a ϕ véletlen karakterisztika teljesíti a 2. Feltételt;*
3. *a $t \mapsto E[\phi(t)]$ függvény majdnem mindenütt folytonos a Lebesgue mérték szerint;*
4. *a $\{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$ felosztásban szereplő $c > 0$ olyan, hogy $\mu(c) > 1$.*

Ekkor a

$$\lim_{k \to \infty} e^{-\alpha t_k} Z^{\phi}(t_k) = Y_{\infty} m_{\infty}^{\phi}$$

majdnem biztos konvergencia teljesül.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy a véletlen karakterisztikánk olyan, hogy létezik egy $n_0 \in \mathbb{N}$ szám, mellyel $\phi(t) = 0$, amint $t \geq n_0 c$. Ekkor világos, hogy tetszőleges $n \geq n_0$ esetén a t_{k+n} időpontban a ϕ által leszámolt normált folyamatban csak azok a legfeljebb $t_k + nc$ időpontban született egyedek játszanak szerepet, melyek őse legfeljebb t_k-ban született. Tehát felírható az alábbi becslés:

$$\begin{aligned}
&\left|e^{-\alpha t_{k+n}} Z^\phi(t_{k+n}) - m_\infty^\phi Y_\infty\right| \leq \\
&\quad \leq \Big| \sum_{x \in \mathcal{F}(t_k) \setminus \mathcal{F}(t_k, nc)} e^{-\alpha\sigma_x} \left(e^{-\alpha(t_{k+n}-\sigma_x)} {}_x Z^\phi(t_{k+n} - \sigma_x) - m^\phi_{t_{k+n}-\sigma_x}\right)\Big| + \\
&\qquad + \Big|\Big(\sum_{x \in \mathcal{F}(t_k) \setminus \mathcal{F}(t_k, nc)} e^{-\alpha\sigma_x} m^\phi_{t_{k+n}-\sigma_x}\Big) - m_\infty^\phi Y_\infty\Big|.
\end{aligned}$$

Jelölje az első tagot $S_1(t_k)$, míg a másodikat $S_2(t_k)$. Feltéve, hogy $N(t_k, nc)$ nem 0, az első tagot tovább írhatjuk a

$$\begin{aligned}
S_1(t_k) &= \left|e^{-\alpha t_k} N(t_k, nc)\right| \cdot \\
&\cdot \left| \frac{\sum_{x \in \mathcal{F}(t_k) \setminus \mathcal{F}(t_k, nc)} e^{-\alpha(\sigma_x - t_k)} \left(e^{-\alpha(t_{k+n}-\sigma_x)} {}_x Z^\phi(t_{k+n} - \sigma_x) - m^\phi_{t_{k+n}-\sigma_x}\right)}{N(t_k, nc)} \right|
\end{aligned}$$

alakban. Itt világos, hogy $k \to \infty$ esetén a

$$e^{-\alpha t_k} N(t_k, nc) \leq e^{\alpha nc} Y_{t_k} \longrightarrow e^{\alpha nc} Y_\infty < \infty$$

majdnem biztos felső becslés teljesül, tehát ahhoz, hogy megmutassuk, hogy a $\{T(t) \to \infty\}$ eseményen $S_1(t_k) \to 0$ majdnem mindenütt ($k \to \infty$), elegendő azt belátni, hogy ugyanezen eseményen a szorzat második tényezője 1 valószínűséggel tart a 0-hoz, amint k tart a ∞-be.

Ennek bizonyításához használjuk a 2.2. Következményt. Ehhez először vegyük észre, hogy $\mathcal{F}(t_k) \setminus \mathcal{F}(t_k, nc)$ és ennek következtében $N(t_k, nc)$, illetve σ_x ($x \in \mathcal{F}(t_k) \setminus \mathcal{F}(t_k, nc)$ esetén) mérhetőek az $\mathcal{A}_{t_k}$ σ-algebrára nézve. Sőt, feltéve az előbbi $\mathcal{A}_{t_k}$ σ-algebra ismeretét $x \in \mathcal{F}(t_k) \setminus \mathcal{F}(t_k, nc)$ esetén az ${}_x Z^\phi(s)$ folyamatok eloszlása nem változik, függetlenségük megmarad.

Világos, hogy egy ilyen $\mathcal{F}(t_k) \setminus \mathcal{F}(t_k, nc)$-beli egyedhez tartozó elágazó folyamatra a

$$\sup_{s \leq cn} Z^\phi(s) \leq \sum_{x: \sigma_x \leq cn} \sup_{s \leq cn} \phi_x(s)$$

becslés írható fel. Sőt mivel

$$e^{-\alpha(\sigma_x - t_k)} e^{-\alpha(t_{k+n} - \sigma_x)} = e^{-\alpha cn} < 1,$$

így kihasználva a σ_x és ϕ_x függetlenségét, a $ET(t) < \infty$ végességet, illetve a 2. Feltételt, a Wald azonosságot alkalmazva adódik, hogy a felső becslés véges várható értékű:

$$E\Big[\sum_{x: \sigma_x \leq cn} \sup_{s \leq cn} \phi_x(s)\Big] = E[T(cn)] E\Big[\sup_{s \leq cn} \phi_x(s)\Big] < \infty.$$

Tehát ahhoz, hogy a szorzat második tényezőjére a 2.2. Következményt használni tudjuk, azt kell megmutatni, hogy a $\{T(t) \to \infty\}$ eseményen

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N(t_k, c)}{\sum_{j=1}^{k-1} N(t_j, c)} > 0$$

majdnem biztos pozitivitás áll fent. Ez viszont könnyen adódik, ugyanis a rácspontok definíciója alapján világos, hogy

$$\sum_{j=1}^{k-1} N(t_j, c) \leq T(t_k)$$

teljesül, így a $\{T(t) \to \infty\}$ eseményen

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{N(t_k, c)}{\sum_{j=1}^{k-1} N(t_j, c)} \geq \liminf_{k\to\infty} \frac{N(t_k, c)}{T_{t_k}},$$

mely viszont a $\mu(c) > 1$ feltétel szerint, a korábbi 2.2. Lemma miatt pozitív.

Tehát alkalmazhatjuk a szorzat második tényezőjére a 2.2. Következményt, melyből adódik, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\Big(\Big| \sum_{x\in\mathcal{F}(t_k)\setminus\mathcal{F}(t_k,nc)} e^{-\alpha(\sigma_x - t_k)}\big(e^{-\alpha(t_{k+n}-\sigma_x)}{}_xZ^{\phi}(t_{k+n} - \sigma_x) - m^{\phi}_{t_{k+n}-\sigma_x}\big)\cdot \\ \cdot \frac{1}{N(t_k, nc)}\Big| > \varepsilon \Big| \mathcal{A}_{T_{t_k}}\Big) < \infty$$

majdnem biztosan. Most használhatjuk a 2.7. Következményt, amely alapján

$$P\Big(\limsup_{k\to\infty} \Big\{\Big| \sum_{x\in\mathcal{F}(t_k)\setminus\mathcal{F}(t_k,nc)} e^{-\alpha(\sigma_x - t_k)}\big(e^{-\alpha(t_{k+n}-\sigma_x)}{}_xZ^{\phi}(t_{k+n} - \sigma_x) - m^{\phi}_{t_{k+n}-\sigma_x}\big)\cdot \\ \cdot \frac{1}{N(t_k, nc)}\Big| > \varepsilon\Big\}\Big) = 0,$$

tehát a korábbi jelölésünkkel az $S_1(t_k) \to 0$ majdnem biztos konvergencia teljesül, amint $k \to \infty$.

Térjünk rá az $S_2(t_k)$ tényező vizsgálatára. A tétel levágott véletlen karakterisztika melletti igazolásához elegendő azt megmutatni, hogy tetszőleges pozitív ε esetén létezik $n \geq n_0$, hogy

$$\limsup_{k\to\infty} S_2(t_k) \leq \varepsilon Y_\infty$$

majdnem biztosan, ugyanis ekkor a Y_∞ korlátossága, illetve az előző számolás miatt az

$$\left|e^{-\alpha t_{k+1}} Z^{\phi}(t_{k+n}) - m^{\phi}_{\infty} Y_\infty\right| \leq S_1(t_k) + S_2(t_k) \longrightarrow 0$$

1 valószínűségű konvergencia adódik, amint k-val és ε-nal a 0-hoz tartunk.

Ehhez először vegyük észre, hogy 2.5. Következmény alapján tudunk akkora r értéket választani, mellyel

$$\limsup_{t\to\infty} Y_{t,cr} \leq \frac{\varepsilon}{2\sup_t m_t^\phi} Y_\infty$$

teljesül majdnem mindenütt. Sőt, az 2.1. Állítás miatt választhatunk olyan n_0-nél szigorúan nagyobb n (illetve a korábbinál esetleg nagyobb r) számot, hogy a normált folyamat várható értékére

$$\left| m_t^\phi - m_\infty^\phi \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

áll fent, ha $t > (n-r)c$. Ezeket és az Y_t definícióját felhasználva, a limesz szuperiort a következőképp becsülhetjük:

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} S_2(t_k) &= \limsup_{k\to\infty} \left| \Big(\sum_{x\in\mathcal{F}(t_k)\setminus\mathcal{F}(t_k,nc)} e^{-\alpha\sigma_x} m^\phi_{t_{k+n}-\sigma_x} \Big) - m_\infty^\phi Y_\infty \right| \\
&= \limsup_{k\to\infty} \Bigg| \Big(\sum_{x\in\mathcal{F}(t_k)\setminus\mathcal{F}(t_k,nc)} e^{-\alpha\sigma_x} (m^\phi_{t_{k+n}-\sigma_x} - m_\infty^\phi) \Big) - \\
&\qquad - \sum_{x\in\mathcal{F}(t_k,nc)} e^{-\alpha\sigma_x} m_\infty^\phi + m_\infty^\phi Y_\infty - m_\infty^\phi Y_\infty \Bigg| \\
&\leq \limsup_{k\to\infty} \left| \Big(\sum_{x\in\mathcal{F}(t_k)\setminus\mathcal{F}(t_k,rc)} e^{-\alpha\sigma_x} (m^\phi_{t_{k+n}-\sigma_x} - m_\infty^\phi) \Big) \right| + \\
&\qquad + \limsup_{k\to\infty} \Bigg| \Big(\sum_{x\in\mathcal{F}(t_k,rc)\setminus\mathcal{F}(t_k,nc)} e^{-\alpha\sigma_x} (m^\phi_{t_{k+n}-\sigma_x} - m_\infty^\phi) \Big) - \\
&\qquad - \sum_{x\in\mathcal{F}(t_k,nc)} e^{-\alpha\sigma_x} m_\infty^\phi \Bigg| + \\
&\qquad + \limsup_{k\to\infty} \left| m_\infty^\phi Y_{t_k} - m_\infty^\phi Y_\infty \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \limsup_{k\to\infty} Y_{t_k} + \big(\sup_t m_t^\phi\big) \limsup_{k\to\infty} Y_{t_k,rc} + 0 \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} Y_\infty + \big(\sup_t m_t^\phi\big) \frac{\varepsilon}{2\sup_t m_t^\phi} Y_\infty = \varepsilon Y_\infty.
\end{aligned}$$

Összefoglalva, adódott, hogy levágott véletlen karakterisztika esetén igaz az állítás.

Persze a tétel kimondásban nem tettük fel, hogy csak levágott véletlen karakterisztikák jöhetnek szóba. Ahhoz, hogy az érvelésünk teljes legyen használjuk fel a 2.4. Lemmát, mely szerint ha levágjuk a folyamatot, jelen esetben az n_0c értéknél, akkor az, amit eldobtunk, 1 valószínűséggel korlátos, méghozzá egy olyan korláttal, mely n_0c-nek csökkenő függvénye. Tehát tekintsünk egy általános, a tétel feltételeit kielégítő ϕ véletlen karakterisztikát és egy elég nagy n_0 szám esetén használjuk a $\overline{\phi}(t) = \phi(t)\mathbb{1}_{\{t\geq n_0c\}}$ és $\underline{\phi}(t) = \phi(t)\mathbb{1}_{\{t<n_0c\}}$ jelöléseket. Ekkor az eddigiek alapján a lenormált folyamatra a

$$\lim_{k,c\to\infty} e^{-\alpha t_k} Z^\phi(t_k) = \lim_{k,c\to\infty} e^{-\alpha t_k} Z^{\overline{\phi}}(t_k) + \lim_{k,c\to\infty} e^{-\alpha t_k} Z^{\underline{\phi}}(t_k) = 0 + m_\infty^\phi Y_\infty$$

1 valószínűségű konvergencia teljesül, azaz a tételt beláttuk. ▲

Az előbbi tételnek egy nagy hiányossága, hogy az osztópontokat nem tudjuk úgy sűrűsíteni, hogy közben az utolsó feltétel igaz maradjon. Ezt kiküszöbölendő érdemes egy új rácsot bevezetni.

Jelölés. Tetszőleges $c > 0$ esetén jelölje a

$$t_{n,k} = \frac{kc}{n} \qquad k = 0, 1, \ldots; \quad n = 1, 2, \ldots$$

osztópontok által meghatározott rácsot $\{t_{n,k}\}_{n,k}$.

Világos, hogy $\{t_{n,k}\}_{n,k}$ rendszerrel már van lehetőség kellően besűrűsíteni a rácspontokat. Persze az nem világos, hogy fix n esetén ugyanúgy érvényben marad-e az előbbi tétel. Ez viszonylag sztenderd módszerekkel könnyen adódik, ugyanakkor a teljesség érdekében külön tételként is összefoglaljuk.

2.10. Tétel. *Tegyük fel, hogy az alábbiak teljesülnek:*

1. *a ξ reprodukciós folyamat teljesíti az 1. Feltételt;*
2. *a ϕ véletlen karakterisztika teljesíti a 2. Feltételt;*
3. *a $t \mapsto E[\phi(t)]$ függvény majdnem mindenütt folytonos a Lebesgue mérték szerint;*
4. *a $\{t_{n,k}\}_{n,k}$ rács definíciójában szereplő $c > 0$ olyan, hogy $\mu(c) > 1$.*

Ekkor tetszőleges fix n esetén a

$$\lim_{k\to\infty} e^{-\alpha t_{n,k}} Z^{\phi}(t_{n,k}) = Y_\infty m_\infty^\phi$$

majdnem biztos konvergencia teljesül.

Bizonyítás. Jelölje A_r azon eseményt, melyen a korábbi $\{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$ felosztás mellett a $t_0 = rc$ választással fent áll az előbbiekben taglalt

$$e^{-\alpha t_k} Z^{\phi}(t_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} m_\infty^\phi Y_\infty$$

1 valószínűségű konvergencia. Ekkor világos, hogy az

$$A = \bigcap_{r\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} A_r$$

metszethalmazon, fix n mellett adott $\{t_{n,k}\}_{n,k}$ ráccsal teljesül a kívánt konvergencia. Ugyanakkor a korábbiak alapján $P(A_r) = 1$, aminek következtében $P(A) = 1$ is igaz, azaz a tételt beláttuk. ▲

Mindezen állítások tudatában már minden adott ahhoz, hogy a szakasz fő eredményét kimondhassuk és igazolhassuk.

2.11. Tétel. (Majdnem biztos konvergencia) *Tegyük fel, hogy a ξ reprodukciós folyamat teljesíti az 1., a ϕ véletlen karakterisztika a 2. Feltételt, továbbá az utóbbi trajektóriái a Szkorohod D-térben vannak. Ekkor a*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} Z^{\phi}(t) = Y_\infty m_\infty^\phi$$

majdnem biztos konvergencia teljesül.

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $c > 0$ értéket, melyre $\mu(c) > 1$. A 2.3. Állítás miatt tudjuk, hogy ekkor a korábban bevezetett $E[\phi^{c/n}(t)]$ és $E[\phi_{c/n}(t)]$ kifejezések, mint t függvényei majdnem mindenütt folytonosak. Sőt ezen lokális szuprémum, infimum karakterisztikák definíciója alapján

$$Z^{\phi_{c/n}}(t_{k,n}) \le Z^{\phi}(t) \le Z^{\phi^{c/n}}(t_{k+1,n})$$

teljesül, tetszőleges $t \in [t_{k,n}, t_{k+1,n}]$ esetén.

Lévén $\phi^{c/n}$ és $\phi_{c/n}$ szintén teljesítik a 2. Feltételt, így minden adott ahhoz, hogy az előzőekben megjelent rácspontokon értelmezett folyamatokra alkalmazzuk a 2.10. Tételt, mely az előbbi becslések alapján a következő 1 valószínűségű összefüggést adja:

$$e^{-\alpha c/n} Y_\infty m_\infty^{\phi_{c/n}} \le \liminf_{t\to\infty} e^{-\alpha t} Z^{\phi}(t) \le \limsup_{t\to\infty} e^{-\alpha t} Z^{\phi}(t) \le e^{\alpha c/n} Y_\infty m_\infty^{\phi^{c/n}},$$

ahol az egyenlőséget végigszoroztuk $e^{-\alpha t}$-val, majd az intervallumvégeknek megfelelően korrigáltunk.

Emlékezzünk vissza, mit is jelentett m_∞^{ϕ} adott ϕ esetén.

$$m_\infty^{\phi} = \frac{\int_0^\infty e^{-\alpha t} E[\phi(t)]\, dt}{\int_0^\infty u e^{-\alpha u}\, \mu(du)}$$

Mivel $\phi^{c/n}$ kielégíti a 2. Feltételt, így $m_\infty^{\phi_{c/n}} \le m_\infty^{\phi^{c/n}} < \infty$ teljesül. Így viszont újfent használva a 2.3. Állítást, továbbá a Lebesgue-féle dominált konvergencia tételt adódik, hogy az $m_\infty^{\phi_{c/n}}$ és $m_\infty^{\phi^{c/n}}$ értékek m_∞^{ϕ}-hez konvergálnak, amint $n \to \infty$. Tehát ha vesszük azon halmazok metszetét, melyekre az előbbi egyenlőtlenséglánc fent áll, akkor ez szintén egy 1 valószínűségű halmaz lesz, amiből a tétel már adódik. ▲

Hasonlóan a sztochasztikus konvergencia esetéhez, 1 valószínűségű konvergencia mellett is érdemes az előbbi állítást folyamatok hányadosára megfogalmazni (lévén a határértékként megjelent Y_∞ változó nem változott). Mivel ennek bizonyítása hasonló a gyengébb eset bizonyításához, így azt az olvasóra hagyjuk.

2.6. Következmény. *Tegyük fel, hogy a ξ reprodukciós folyamat kielégíti az 1., a ϕ_i véletlen karakterisztikák ($i = 1, 2$) a 2. Feltételt, utóbbiak trajektóriái a Szkorohod D-térben vannak, továbbá, hogy*

$$E\left[{}_\alpha\xi(\infty) \log^+ {}_\alpha\xi(\infty)\right] < \infty.$$

Ekkor a $\{T(t) \to \infty\}$ eseményen a

$$\frac{Z^{\phi_1}(t)}{Z^{\phi_2}(t)} \longrightarrow \frac{m_\infty^{\phi_1}}{m_\infty^{\phi_2}}$$

1 valószínűségű konvergencia teljesül, amint $t \to \infty$. ▲

A fejezet zárásaként, habár a továbbiakban nem fogjuk használni, érdemes megjegyezni, hogy az előbbi következmény feltételei gyengíthetők. Nevezetesen, ezen állítás igaz marad akkor is, ha a lenormált reprodukciós folyamatra

$$E\left[{}_{\alpha}\xi(\infty)\log^{+}{}_{\alpha}\xi(\infty)\right]=\infty$$

teljesül. A 2.8. és a 2.4. Tételek alapján világos, hogy ekkor a gondot az okozza, hogy ebben az esetben a határértékként megjelenő Y_∞ változó azonosan 0. A következő tétel értelmében viszont ekkor is igaz marad az állítás, ha reprodukciós folyamatra, illetve a véletlen karakterisztikára adott feltételeket megfelelően változtatjuk.

2.12. Tétel. *Tegyük fel, hogy az alábbi feltételek teljesülnek:*

1. *létezik egy $\beta<\alpha$ konstans, hogy $\mu_\beta=E[{}_{\beta}\xi(\infty)]<\infty$;*
2. *létezik egy $\beta<\alpha$ konstans, hogy az $U=\sup_t e^{-\beta t}\phi_i$ várható értéke véges ($i=1,2$);*
3. *a ϕ_i véletlen karakterisztikák ($i=1,2$) trajektóriái a Szkorohod D-térben vannak.*

Ekkor a $\{T(t)\to\infty\}$ eseményen a

$$\frac{Z^{\phi_1}(t)}{Z^{\phi_2}(t)}\longrightarrow\frac{m_\infty^{\phi_1}}{m_\infty^{\phi_2}}$$

1 *valószínűségű konvergencia teljesül, amint $t\to\infty$.* ▲

3. Modell

Ahogyan azt a bevezetésben említettük, az előző szakaszban taglalt mély matematikai elméletet arra szeretnénk alkalmazni, hogy a korábban kollaborációs modellnek nevezett időben fejlődő véletlen gráfot megvizsgáljuk. Ugyanakkor ennek eddig csak egy elég homályos leírását adtuk, így a most következő fejezetben először precízen definiáljuk az elemzés tárgyát képező modellt, majd a már elsajátított apparátus segítségével meghatározzuk tulajdonságait.

3.1. Alapok

Tegyük fel, hogy a 0 időpontban adott két csúcs és az őket összekötő él. Ebből az inicializáló helyzetből fejlődik a gráf az idő előrehaladtával, méghozzá a következőképp. Egy, a folyamatban résztvevő él a megszületésétől kezdve egy egységnyi intenzitású homogén Poisson folyamat szerint képez utódokat. Egy ilyen születési esemény során az aktuális gráfhoz egy új csúcs adódik, mely $p \in [0, 1]$ valószínűséggel a szülő él mindkét végpontjához, $q = 1 - p$ valószínűséggel pedig csak egy véletlenszerűen választott végpontjához csatlakozik. A továbbiakban egy él t időpontig (precízebben az él t **fizikai koráig**) született utódainak számát az adott él **biológiai korának** fogjuk nevezni. Ennek segítségével a modellbe tudjuk integrálni annak időbeni linearitását megtörő halálozást is, mely alatt azt értjük, hogy bármely él véges időn belül törlődik a gráfból, azaz kihal, méghozzá a biológiai kor lineáris függvényével egyenlő hazárdrátával.

Világos, hogy az előbb felvázolt véletlen gráf modell, amennyiben az élek szempontjából tekintjük, egy olyan folytonos idejű elágazó folyamatot ad, mely Markov-tulajdonságú. Habár ez önmagában is érdekes, sőt akár az elemzéshez is felhasználható lehetne, itt jelen esetben ezt a tényt csak abban a formában fogjuk használni, hogy egy ilyen folyamat speciális esete az előző fejezetben bevezetett általános elágazó folyamatnak, tehát a korábban bizonyított eredmények mind alkalmazhatóak. Ahhoz persze, hogy ezt a kapcsolatot minél egyszerűbben fel tudjuk állítani érdemes az általános elágazó folyamatok korábban bevezetett jelölésrendszerét – némi kiegészítés után – átemelni erre a konkrét esetre.

Egy adott él születési eseményeit leíró 1 intenzitású homogén Poisson folyamatot jelölje $(\pi(t))_{t\geq 0}$. Ekkor a definíció alapján ennek a τ_i időpontokban bekövetkező ugrásai során a gráfhoz ε_i darab él adódik hozzá, ahol ezen változó eloszlására

$$P(\varepsilon_i = 2) = p; \qquad\qquad P(\varepsilon_i = 1) = q = 1 - p$$

teljesül. Ennek tükrében felírható a háttérben meghúzódó elágazó folyamat reprodukciós folyamata, azaz $(\xi(t))_{t\geq 0}$. Világos, hogy ez nem lesz más, mint a $(\pi(t))_{t\geq 0}$ és a ε_i változók által meghatározott összetett folyamat λ élettartam által vett megállítottja, vagyis

$$\xi(t) = \sum_{\tau_i \leq t\wedge\lambda} \varepsilon_i = S_{\pi(t\wedge\lambda)},$$

ahol $\wedge$ jelöli a kettő érték minimumát és S_n az első n darab ε_i összegét. Kihasználva a $(\pi(t))_{t\geq 0}$ születési folyamat ε_i utódszámoktól vett függetlenségét, a megfelelő Wald-azonosság értelmében a reprodukció intenzitás mértékét is megkaphatjuk, mely nem lesz más mint a

$$\mu(t) = E\xi(t) = E(\varepsilon_1)E(\lambda \wedge t) = (1+p)\int_0^t [1 - L(s)]\, ds$$

integrál.

Végezetül szükségünk van egy él halálozását leíró jelölések bevezetésére is. Mivel azt tettük fel, hogy egy él törlődik a gráfból a biológiai kor lineáris függvényének hazárdrátájával, így a megfelelő lineáris függvény együtthatóit, melyek nyilvánvalóan pozitívak, jelöljük rendre b és c segítségével. Tehát egy t fizikai korú él élettartamának hazárdrátája $b + c\xi(t)$. Mindezeket összevetve világos, hogy a mi kollaborációs modellünk mögött meghúzódó általános elágazó folyamat olyan, hogy az a 0 időpontban 1 ősből indul, illetve minden e él életútját karakterizálja a $(\lambda_e, \pi_e(.), \xi_e(.))$ hármas, ahol ezek az előbb taglalt változókból álló $(\lambda, \pi(.), \xi(.))$ hármas egymástól független másolatai.

Világos tehát, hogy ha a megfelelő feltételek teljesülnek, akkor az előző fejezetben taglalt apparátust alkalmazva az előbb részletezett modell aszimptotikus viselkedése, akár egészen egzotikus tulajdonságokat is beleértve, könynyen jellemezhető. Természetesen mielőtt ezeket a babérokat learatnánk, szükséges az elágazó folyamatok tanulmányozása során természetesen felmerülő kérdések megválaszolása. Ezek közé tartozik a folyamat növekedési rezsimjének meghatározására vonatkozó feltételek megadása, illetve ebből következően a kihalás jellemzése. Az általános elmélet alapján az előbbihez nincs másra szükség, mint a $E[\xi(\infty)]$ reprodukciós várható érték meghatározására, mely mennyiség könnyen adódik, ha $\mu(t)$ intenzitás mértéket ismerjük. Ehhez, az előbbi összefüggés alapján az élettartam $1 - L(t)$ túlélésfüggvényét kell meghatároznunk. Abban az esetben, ha a szuperkritikus rezsimbe esés feltétele adott, akkor 2.2. Tételt alapján, a generátorfüggvény segítségével a kihalás valószínűsége is kiszámolható. A szakasz további részében ezeket a kérdéseket fogjuk vizsgálni.

3.1.1 Élettartam túlélésfüggvénye

Ahogyan az az előbb említésre került, a Wald-azonosság segítségével a $E[\xi(\infty)]$ reprodukciós várható érték explicit meghatározásához az élettartam túlélésfüggvényének felírásán keresztül vezet az út. Így első lépésként erre adunk zárt alakot, mely bizonyítás azon a statisztikából jól ismert tényen alapul, hogy egy Poisson folyamat $[0,t]$-beli ugrási időpontjainak együttes eloszlása megegyezik egy az egyenletes eloszlásból vett megfelelő elemszámú rendezett minta együttes eloszlásával (feltéve, hogy az ugrások számát ismerjük).

3.1. Állítás. *Az eddigi jelöléseink mellett, tetszőleges él élettartamának túlélésfüggvényére*

$$1 - L(t) = \exp\Big\{ -(1+b)t + \frac{1}{2c}(1-e^{-ct})(2-p(1-e^{-ct}))\Big\}$$

teljesül.

Bizonyítás. Először számoljuk ki a λ élettartam túlélésfüggvényét a t időpillanatban, feltéve, hogy ismerjük a születések számát ($\pi(t)$) és időpontjait (τ_i), illetve ezen reprodukciók során született utódok mennyiségét (ε_i). A modell definíciója alapján, ha a τ_i születési időpont után az összes utódok száma j, akkor a halálozási ráta $b + cj$, és így annak valószínűsége, hogy a vizsgált él nem hal meg a következő születési időpont előtt:

$$\exp\big(-(b+cj)(\tau_{i+1}-\tau_i)\big).$$

Ennek következményeképp, a meghatározandó feltételes valószínűségre:

$$\begin{aligned} &P(\lambda > t \,|\, \pi(t) = k,\, \tau_1,\dots,\tau_k,\, \varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k) = \\ &\quad = e^{-b\tau_1} \cdot e^{-(b+cS_1)(\tau_2-\tau_1)} \cdot e^{-(b+cS_2)(\tau_3-\tau_2)} \cdot \ldots \cdot e^{-(b+cS_k)(t-\tau_k)} \\ &\quad = \exp\left(c\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i\tau_i - (b+cS_k)t\right) \end{aligned}$$

adódik. Ahogyan az állítás kimondása előtt megjegyeztük, ismert, hogy amennyiben a t ideig bekövetkezett születési események számát tudjuk, azaz felteszszük, hogy $\pi(t) = k$ teljesül, akkor a $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ születési időpontok együttes eloszlása egybeesik

$$(tU_1^{(k)}, tU_2^{(k)}, \dots, tU_k^{(k)})$$

eloszlással, ahol $U_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ egy k elemű, $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlásból származó rendezett minta i-edik eleme, mely az egyes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ utódszámoktól független.

Ennek következtében

$$P(\lambda > t \,|\, \pi(t) = k) = E\bigg(\exp\Big(-bt + ct\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i(U_i^{(k)} - 1)\Big)\bigg)$$

teljesül. Itt ugyanakkor $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ egyedszámok felcserélhetősége miatt eltekinthetünk a rendezéstől:

$$P(\lambda > t \,|\, \pi(t) = k) = E\bigg(\exp\Big(-bt + ct\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i(U_i - 1)\Big)\bigg),$$

ahol $U_1, U_2, \ldots, U_k$ a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású, ε_i utódszámoktól független valószínűségi változók.

A függetlenség miatt viszont az előbbi várható érték szorzatra bomlik, azaz a

$$\begin{aligned}
P(\lambda > t \,|\, \pi(t) = k) &= e^{-bt}\left[E\left(\frac{1-e^{-ct\varepsilon_1}}{ct\varepsilon_1}\right)\right]^k \\
&= e^{-bt}\left[p\,\frac{1-e^{-2ct}}{2ct} + q\,\frac{1-e^{-ct}}{ct}\right]^k \\
&= e^{-bt}\left[\frac{1}{2ct}\big(1-e^{-ct}\big)\big(2-p(1-e^{-ct})\big)\right]^k
\end{aligned}$$

egyenlőség írható fel. Ebből pedig a teljes valószínűség tétele alapján adódik a kívánt

$$\begin{aligned}
P(\lambda > t) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(\pi(t) = k) P(\lambda > t \,|\, \pi(t) = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} e^{-t} \cdot e^{-bt}\left[\frac{1}{2ct}\big(1-e^{-ct}\big)\big(2-p(1-e^{-ct})\big)\right]^k \\
&= \exp\Big(-(1+b)t + \frac{1}{2c}\big(1-e^{-ct}\big)\big(2-p(1-e^{-ct})\big)\Big)
\end{aligned}$$

összefüggés. ▲

Ennek segítségével a reprodukciós folyamat intenzitás mértéke már felírható, mely eredményt az alábbi egyszerű következményben foglalhatjuk össze.

3.1. Következmény. *Tetszőleges él intenzitásmértékére a*

$$\mu(t) = \frac{1+p}{c}\int_0^{1-e^{-ct}} (1-u)^{\frac{1+b}{c}-1} \exp\left\{\frac{u(2-pu)}{2c}\right\} du$$

összefüggés írható fel.

Bizonyítás. Korábban már megmutattuk, hogy a Wald-azonosság megfelelő verziója alapján az intenzitásmérték a következő alakba írható át:

$$\mu(t) = (1+p)\int_0^t [1 - L(u)]\, du.$$

Az előbbi állításban levezetett explicit formulát alkalmazva ebből az

$$\mu(t) = (1+p)\int_0^t \exp\left\{-(1+b)v + \frac{1}{2c}(1-e^{-cv})(2-p(1-e^{-cv}))\right\} dv$$

egyenlőség adódik. Használva az $u = 1 - e^{-cv}$ változó helyettesítést ez viszont átírható, mint

$$\begin{aligned}
\mu(t) &= (1+p)\int_0^{1-e^{-ct}} (1-u)^{\frac{1+b}{c}} \exp\left\{\frac{1}{2c}u(2-pu)\right\}\frac{1}{c}\frac{1}{1-u}\, du \\
&= \frac{1+p}{c}\int_0^{1-e^{-ct}} (1-u)^{\frac{1+b}{c}-1} \exp\left\{\frac{u(2-pu)}{2c}\right\} du
\end{aligned}$$

ami pont az, amit állítottunk. ▲

Emlékezzünk vissza: az intenzitásmértékre, habár a későbbiekben is jó hasznát fogjuk venni, jelen esetben ezért volt szükségünk, hogy a reprodukciós várható értéket és ezzel a folyamat növekedési rezsimekbe való beosztását tudjuk jellemezni. A korábbiak alapján világos, hogy amint t-vel a ∞-be tartunk, akkor az

$$E[\xi(\infty)] = \mu(\infty) = (1+p)E[\xi(\lambda \wedge \infty)] = (1+p)E[\xi(\lambda)]$$

összefüggés alapján megkapjuk a kívánt mennyiséget. Tehát az előbbi összefüggésből a keresett várható értékre

$$E[\xi(\infty)] = \frac{1+p}{c} \int_0^1 (1-u)^{\frac{1+b}{c}-1} \exp\left\{\frac{u(2-pu)}{2c}\right\} du$$

adódik. Sőt az eddigiekből az is látszik, hogy ez $(1+p)$-vel leosztva a modell paramétereit felhasználva egy egyed várható élettartamát is ki tudjuk fejezni, méghozzá az

$$E[\lambda] = \frac{1}{c} \int_0^1 (1-u)^{\frac{1+b}{c}-1} \exp\left\{\frac{u(2-pu)}{2c}\right\} du$$

integrál segítségével.

Ahogyan azt már korábban megjegyeztük, szubkritikus és kritikus esetekben az általános elágazó folyamat és evvel együtt a modell majdnem biztosan kiürül, így ezen eshetőségek során nincs értelme további vizsgálódásnak. Ugyanakkor a korábban bizonyított konvergenciatételek alapján világos, hogy számunkra ezen esetek nem túlzottan érdekesek. A megmaradt szuperkritikus rezsimben a kihalási valószínűség szigorúan kisebb mint 1, mely érték a 2.2. Tétel értelmében a $\xi(\infty)$ reprodukció generátorfüggvényének legkisebb fixpontjaként kapható meg. A következő alfejezetben erre a valószínűségre adunk a modell paramétereitől függő explicit formulát.

3.1.2 Kihalás valószínűsége

Ahogyan azt a 2.2. Tétel is mutatja, egy általános elágazó folyamat esetén annak kihalási valószínűsége megkapható, mint az

$$E[s^{\xi(\infty)}] = s$$

egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke. A korábbiakban említett okok alapján világos, hogy ez csak abban az esetben ad 1-nél kisebb valószínűséget, ha az elágazó folyamat növekedési rezsimje szuperkritikus, azaz $E[\xi(\infty)] > 1$ teljesül. Tehát ahhoz, hogy a véletlen gráf modellünk kiüresedésének valószínűségét adott paraméterek mellett meg tudjuk adni, nincs másra szükségünk, mint a

$$g_\xi(x) = x$$

fixpont egyenletet megoldani, ahol g_ξ a $\xi(\infty) = \xi(\lambda)$ utódszámot leíró valószínűségi változó generátorfüggvénye, azaz

$$g_\xi(x) = E\big[x^{\xi(\lambda)}\big] = \sum_{i=0}^{\infty} P(\xi(\lambda) = i)x^i; \qquad x \in [-1,1],$$

méghozzá azon feltétel mellett, hogy a gráffolyamat szuperkritikus. Érdemes megint megjegyezni, hogy ez utóbbi, a korábbiak következményeképp azzal ekvivalens, hogy

$$E[\xi(\infty)] = \frac{1+p}{c}\int_0^1 (1-u)^{\frac{1+b}{c}-1} \exp\left\{\frac{u(2-pu)}{2c}\right\} du > 1$$

teljesül.

Értelemszerűen, ahhoz, hogy az előbbi fixpontegyenletnek a legkisebb nemnegatív gyökét megadhassuk, először magának a g_ξ generátorfüggvénynek a felírására van szükségünk. Ennek definíció szerinti meghatározása a $(\xi(t))_{t\geq 0}$ reprodukciós folyamat összetettségéből fakadóan nem feltétlenül vezet használható eredményre. Ennek okán a g_ξ helyett a $\pi(\lambda)$ és a $\xi(\lambda)$ változók $g_{\pi,\xi}(x,y)$ függvénnyel jelölt együttes generátorfüggvényét fogjuk meghatározni, amely a gráf növekedésének dinamikájából adódóan a

$$g_{\pi,\xi}(x,y) = E\big[x^{\pi(\lambda)}y^{\xi(\lambda)}\big] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{2i} P(\pi(\lambda) = i, \xi(\lambda) = j)x^i y^j; \quad x,\, y \in [-1,1]$$

sorösszeg segítségével áll elő. Világos, hogy ebből a megfelelő változóhelyettesítéssel a $\xi(\lambda)$ generátorfüggvényére vonatkozó képletet is megkaphatjuk.

3.1. Tétel. *A korábbi jelöléseink mellett a keresett együttes generátorfüggvényre a következő összefüggés írható fel:*

$$g_{\pi,\xi}(x,y) = \\ = 1 - \frac{1-qxy-pxy^2}{c}\int_0^1 (1-u)^{\frac{1+b}{c}-1} \exp\left\{\frac{qxy+pxy^2}{c}u - \frac{pxy^2}{2c}u^2\right\} du.$$

Bizonyítás. A formula bizonyítása két részre bontható. Először egy, a

$$(\pi(\lambda), \xi(\lambda))$$

együttes eloszlását leíró sorozathoz hasonló kétindexű sorozat kétváltozós generátorfüggvényét határozunk meg, melyhez a szokásosnak mondható differenciálegyenletes megközelítést alkalmazzuk. Ezután ezt az eredményt összekapcsolva a tételben szereplő $g_{\pi,\xi}$ függvénynyel, a szükséges átalakítások elvégzése következtében pont a bizonyítandó formula adódik.

Az első lépés kivitelezéséhez vezessük be az alábbi jelöléseket. Tetszőleges $0 \leq i \leq j$ indexek esetén legyen

$$w_{i,j} = P(\pi(\lambda) = i, \xi(\lambda) = j),$$

illetve

$$v_{i,j} = \frac{w_{i,j}}{b+jc}.$$

Ez utóbbi kétindexes sorozat $[-1,1]^2$ négyzeten értelmezett generátorfüggvényét jelölje

$$G(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} v_{i,i+j} x^i y^j.$$

A továbbiakban a tétel állítását félretéve, erre próbálunk meg explicit formulát adni.

Ehhez emlékezzünk vissza a gráf modellünk definíciójára. A születéseket meghatározó Poisson folyamat tulajdonságai alapján világos, hogy annak valószínűsége, hogy egy adott, j biológiai korral rendelkező él a következő születés előtt meghal, megegyezik a

$$\frac{b+cj}{1+b+cj}$$

mennyiséggel. Ennek következményeképp a $w_{i,j}$ együtthatókra a

$$w_{i,j} = P(\pi(\lambda) = i, \xi(\lambda) = j) = P(\exists\, t < \lambda \,:\, \pi(t) = i, \xi(t) = j) \frac{b+cj}{1+b+cj}$$

összefüggés írható fel. Másfelől a jobb oldalon megjelent valószínűség felbontható a születési esemény lezajlásának megfelelően, attól függően, hogy a szülés során a szülő hány utódot nemz.

$$\begin{aligned} &P(\exists\, t < \lambda \,:\, \pi(t) = i, \xi(t) = j) = \\ &\quad = P(\exists\, t < \lambda \,:\, \pi(t) = i-1, \xi(t) = j-1) \frac{q}{1+b+c(j-1)} \\ &\qquad + P(\exists\, t < \lambda \,:\, \pi(t) = i-1, \xi(t) = j-2) \frac{p}{1+b+c(j-2)} \end{aligned}$$

Ezeket összevetve, a $v_{i,j}$ elemekre a következő rekurzív kapcsolat adódik:

$$\begin{aligned} (1+b+c(i+j))v_{i,i+j} &= \frac{1+b+c(i+j)}{b+c(i+j)} P(\pi(\lambda) = i, \xi(\lambda) = i+j) \\ &= P(\exists\, t < \lambda \,:\, \pi(t) = i, \xi(t) = i+j) \\ &= \frac{qP(\exists\, t < \lambda \,:\, \pi(t) = i-1, \xi(t) = i+j-1)}{1+b+c(i+j-1)} \\ &\quad + \frac{pP(\exists\, t < \lambda \,:\, \pi(t) = i-1, \xi(t) = i+j-2)}{1+b+c(i+j-2)} \\ &= qP(\pi(\lambda) = i, \xi(\lambda) = i+j-1) + \\ &\quad + pP(\pi(\lambda) = i, \xi(\lambda) = i+j-2) \\ &= qv_{i-1,(i-1)+j} + pv_{i-1,(i-1)+(j-1)}, \end{aligned}$$

ahol az inicializáló értékekre nyilvánvalóan

$$v_{0,0} = \frac{1}{b+1}$$

és

$$v_{0,j} = 0, \qquad\qquad j \geq 1$$

teljesülnek.

Ahhoz, hogy ezen rekurzió segítségével megkapjuk a kérdéses $G(x,y)$ generátorfüggvényt, az összefüggés mindkét oldalát szorozzuk meg az $x^i y^j$ kifejezésekkel, majd összegezzük $i \geq 1$ és $0 \leq j \leq i$ indexekre. A $G(x,y)$ definíciójának folyamán a bal oldal a

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}(1+b+c(i+j))v_{i,i+j}x^i y^j = \\
&= (1+b)\Big[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} v_{i,i+j}x^i y^j - \frac{1}{b+1}\Big] + \\
&\quad + c\Big[x\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} i v_{i,i+j}x^{i-1}y^j + y\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} j v_{i,i+j}x^i y^{j-1}\Big] = \\
&= (1+b)\Big[G(x,y) - \frac{1}{b+1}\Big] + c\big[x\partial_x G(x,y) + y\partial_y G(x,y)\big],
\end{aligned}$$

mialatt a jobb oldal pedig a

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\big(qv_{i-1,(i-1)+j} + pv_{i-1,(i-1)+(j-1)}\big)x^i y^j = \\
&= qx\sum_{i=0}\infty\sum_{j=0}^{i} v_{i,i+j}x^i y^j + pxy\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} v_{i,i+j}x^i y^j = \\
&= qxG(x,y) + pxyG(x,y)
\end{aligned}$$

alakra redukálódik. Lévén a két oldal megegyezik, a G függvényre következő parciális differenciálegyenletet kapjuk:

$$(1+b)\Big[G(x,y) - \frac{1}{b+1}\Big] + c\big[x\partial_x G(x,y) + y\partial_y G(x,y)\big] = (qx+pxy)G(x,y),$$

méghozzá a

$$G(0,y) = \frac{1}{1+b}$$

kezdeti feltétellel.

Ahhoz, hogy a G kétváltozós generátorfüggvényre explicit formulát adhassunk, oldjuk meg az előbb adódott parciális differenciálegyenletet. Lévén a derivált tényezők egészen speciálisak, az egyenletet egy jól választott helyettesítéssel közönséges differenciálegyenletté alakíthatjuk. Valóban, $t \in [0,1]$ esetén vezessük be a

$$h(t) = G(tx, ty)$$

már egyváltozós függvényt. Mivel az összetett függvények differenciálási szabálya szerint erre

$$th'(t) = x\partial_x G(tx, ty) + y\partial_y G(tx, ty)$$

teljesül, így ez a függvény már kielégíti a

$$(1 + b - qxt - pxyt^2)h(t) + cth'(t) = 1; \qquad\qquad h(0) = \frac{1}{b+1}$$

kezdeti feltétellel adott közönséges differenciálegyenletet. Ennek viszont a megoldása könnyedén megadható, méghozzá a

$$h(t) = \frac{1}{c} t^{-\frac{1+b}{c}} \exp\Big\{\frac{qx}{c}t + \frac{pxy}{2c}t^2\Big\} \int_0^t s^{\frac{1+b}{c}-1} \exp\Big\{ - \frac{qx}{c}s - \frac{pxy}{2c}s^2\Big\}\, ds$$

alakban, mely leellenőrzését az olvasóra bízzuk. Ugyanakkor a h függvény definíciója alapján világos, hogy $h(1) = G(x, y)$ teljesül, tehát a behelyettesítve a $t = 1$ értéket, a keresett kétváltozós generátorfüggvényre a

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{1}{c} \exp\Big\{\frac{qx}{c} + \frac{pxy}{2c}\Big\} \int_0^1 s^{\frac{1+b}{c}-1} \exp\Big\{ - \frac{qx}{c}s - \frac{pxy}{2c}s^2\Big\}\, ds \\ &= \frac{1}{c}\int_0^1 (1-u)^{\frac{1+b}{c}-1} \exp\Big\{\frac{qx + pxy}{c}u - \frac{pxy}{2c}u^2\Big\}\, du \end{aligned}$$

képlet adódik, ahol a második egyenlőségnél az $u = 1 - s$ helyettesítést végeztük el.

Ahhoz, hogy a tétel bizonyítását befejezhessük, ezt a $G(x, y)$ függvényt kellene összekapcsolni a $g_{\pi,\xi}(x, y)$ függvénnyel. Ez a kapcsolat viszont könnyedén felállítható, ugyanis a korábbi jelöléseinket felhasználva tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} w_{i,i+j}x^i y^j &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} \big[b + c(i+j)\big] v_{i,i+j}x^i y^j \\ &= bG(x, y) + c\big(x\partial_x G(x, y) + y\partial_y G(x, y)\big) \end{aligned}$$

írható fel. Sőt a $G(x, y)$-ra adott parciális differenciálegyenlet alapján az is világos, hogy

$$c\big(x\partial_x G(x, y) + y\partial_y G(x, y)\big) = 1 - (1 + b - qx - pxy)G(x, y)$$

teljesül, így a $w_{i,i+j}$ kétindexes tagokkal megadott generátorfüggvényre a

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} w_{i,i+j}x^i y^j = 1 - (1 - qx - pxy)G(x, y)$$

összefüggés adódik. Ugyanakkor a $g_{\pi,\xi}(x, y)$ definíciója alapján a következőt írhatjuk fel:

$$g_{\pi,\xi}(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{2i} P(\pi(\lambda) = i, \xi(\lambda) = j)x^i y^j = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} w_{i,i+j}x^i y^{i+j},$$

azaz az előbbi képletbe az x helyébe xy szorzatot helyettesítve, illetve kihasználva a $G(x,y)$-ra adódott explicit formulát, bizonyítandó állítás már adódik:

$$
\begin{aligned}
&g_{\pi,\xi}(x,y) = \\
&\quad = 1 - (1 - qxy - pxy^2)G(xy,y) \\
&\quad = 1 - \frac{1 - qxy - pxy^2}{c} \int_0^1 (1-u)^{\frac{1+b}{c}-1} \exp\left\{ \frac{qxy + pxy^2}{c} u - \frac{pxy^2}{2c} u^2 \right\} du.
\end{aligned}
$$

▲

A tétel segítségével felírhatjuk a $\xi(\lambda)$ reprodukció generátorfüggvényét, melyből a szuperkritikus esetben következtethetünk a gráf növekedését irányító általános elágazó folyamat kihalási valószínűségére. Ezt az eredmény az alábbi következményben foglalhatjuk össze.

3.2. Következmény. *Tegyük fel, hogy*

$$
E[\xi(\infty)] = \frac{1+p}{c} \int_0^1 (1-u)^{\frac{1+b}{c}-1} \exp\left\{ \frac{u(2-pu)}{2c} \right\} du > 1
$$

teljesül, ekkor a gráf kiüresedésének y-nal jelölt valószínűsége egybeesik az

$$
1 = \frac{1+py}{c} \int_0^1 (1-u)^{\frac{1+b}{c}-1} \exp\left\{ \frac{qy + py^2}{c} u - \frac{py^2}{2c} u^2 \right\} du
$$

egyenlet legkisebb nemnegatív gyökével.

Bizonyítás. Ahogyan azt már korábban is emlegettük, a 2.2. Tétel szerint az általános elágazó folyamat kihalási valószínűsége megegyezik a

$$
g_\xi(y) = y
$$

fixpont egyenlet legkisebb nemnegatív gyökével. Tehát először a $g_\xi(y)$ generátorfüggvényt kell felírnunk. Ugyanakkor az előző tétel segítségével ez könnyen megtehető, ugyanis világos, hogy

$$
g_\xi(y) = g_{\pi,\xi}(1,y)
$$

és ennek következtében

$$
g_\xi(y) = 1 - \frac{1 - qy - py^2}{c} \int_0^1 (1-u)^{\frac{1+b}{c}-1} \exp\left\{ \frac{qy + py^2}{c} u - \frac{py^2}{2c} u^2 \right\} du
$$

teljesül. Így az előbbi fixpont egyenlet átírható, mint

$$
y = 1 - \frac{1 - qy - py^2}{c} \int_0^1 (1-u)^{\frac{1+b}{c}-1} \exp\left\{ \frac{qy + py^2}{c} u - \frac{py^2}{2c} u^2 \right\} du,
$$

melyből átrendezéssel a kívánt

$$
1 = \frac{1+py}{c} \int_0^1 (1-u)^{\frac{1+b}{c}-1} \exp\left\{ \frac{qy + py^2}{c} u - \frac{py^2}{2c} u^2 \right\} du,
$$

egyenlet adódik, ahol kihasználtuk, hogy az első tényező számlálója

$$1 - qy - py^2 = 1 - y + py - py^2 = (1 - y)(1 + py)$$

szorzattá bomlik, azaz $(1 - y)$-nal egyszerűsíthetünk. ▲

Természetesen ebből a képletből nem feltétlenül látszik elsőre, hogy az y valószínűség ténylegesen kisebb, mint 1, ahogyan az elmélet alapján azt elvárnánk. Ahhoz, hogy ez tisztázódjon, azt érdemes észrevenni, hogy az e-gyenlet jobb oldalán szereplő kifejezés monoton növő függvénye y-nak. Ez önmagában még nem lenne elég, ugyanakkor világos, hogy $y = 0$ esetén a felvett függvényérték $(1 + b)^{-1} \leq 1$, míg az $y = 1$ helyen nagyobb mint 1, vagyis az y a szuperkritikus növekedési rezsimben ténylegesen kisebb, mint 1.

Mindezeket összefoglalva, az alfejezetben, a modell precíz definíciója után, a háttérben meghúzódó általános elágazó folyamatra vonatkozó ismereteinket felhasználva megmutattuk, hogyan alakul a gráf modell $E[\xi(\infty)]$ reprodukciós várható értéke. Ennek segítségével a paraméterek megfelelő megválasztásával a folyamatot belerakhatjuk a számunkra érdekes szuperkritikus növekedési rezsimbe. Ebben az esetben karakterizáltuk, hogy milyen egyenletet kell kielégítenie a kiürülés valószínűségének. Ezek ismeretében, a következő alfejezet keretein belül rátérhetünk a modell további tulajdonságainak vizsgálatára.

3.2. Véletlen karakterisztikák

A 2. fejezetben felvonultatott apparátus arra használható, hogy egy szuperkritikus növekedési rezsimbe eső általános elágazó folyamat aszimptotikus viselkedését meg lehessen fogni. Mivel a korábban megadott gráf modellünk fejlődését szintén egy, az éleken definiált általános elágazó folyamat határozza meg, így világos, hogy ezek a konvergenciatételek a gráfunk vizsgálatára is alkalmazhatóak. Ahogyan azt látni fogjuk a továbbiakban, a modellünk olyan, hogy kielégíti a 2.11. Tétel feltételeit is, tehát az összes olyan valószínűségi változó, mely a gráf aszimptotikus viselkedését írja le, majdnem biztos konvergencia határváltozójaként kapható meg.

Természetesen ez a konvergenciatétel egyedül abban az esetben működik, mikor az általános elágazó folyamat és így a gráf modellünk szuperkritikus. Ennek következtében a továbbiakban végig feltesszük, hogy

$$E[\xi(\infty)] = \frac{1+p}{c} \int_0^1 (1-u)^{\frac{1+b}{c}-1} \exp\left\{\frac{u(2-pu)}{2c}\right\} du > 1$$

teljesül. Emellett az is világos, hogy azon az eseményen, ahol a folyamat nem hal ki, ahhoz, hogy értelmes eredményeket kaphassunk, a növekedéssel való normalizálásra van szükségünk. Ahogyan azt a 2. fejezetben említettük egy általános elágazó folyamat növekedését az

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \mu(dt) = 1$$

egyenletből kapható α Malthus-paramétere határozza meg. Így az aszimptotikus tulajdonságok vizsgálatát ennek karakterizálásával kezdjük.

Tudjuk, hogy az intenzitásmértékre a

$$\mu(t) = (1+p)\int_0^t [1 - L(u)]\, du$$

összefüggés teljesül, mely alapján a Malthus-paramétert megadó egyenletet átírhatjuk a következő alakba:

$$1 = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\mu(dt) = (1+p)\int_0^\infty e^{-\alpha t}[1 - L(t)]\, dt.$$

Ugyanakkor a 3.1. Állítást felhasználva az élettartam túlélésfüggvényét is fel tudjuk írni, tehát az előbb egyenlet az

$$1 = \frac{1+p}{c}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\exp\Big\{ - (1+b)t + \frac{1}{2c}(1 - e^{-ct})(2 - p(1 - e^{-ct}))\Big\}\, dt.$$

alakra hozható, ahol elvégezve a $u = 1 - e^{-ct}$ változóhelyettesítést, a Malthus-paramétert meghatározó egyenlet az alábbira redukálódik:

$$\frac{c}{1+p} = \int_0^1 (1-u)^{\frac{\alpha+b+1}{c}-1}\exp\Big\{\frac{u(2-pu)}{2c}\Big\}\, du.$$

Természetesen, habár a kapott formula igaz, kevésbé hasznos. Valami konkrétabb információt sejtet a Malthus-paraméterről az alábbi egyszerű észrevétel.

3.2. Állítás. *Az eddigi jelöléseink mellett a gráf növekedését meghatározó α Malthus-paraméterre a*

$$p - b < \alpha < 1 + p - b$$

becslés írható fel.

Bizonyítás. Az élettartam túlélésfüggvényére felírt 3.1. Állítás alapján, könnyen látható, hogy az

$$e^{-(1+b)t} < 1 - L(t) < \exp\Big\{ - (1+b)t + \frac{1 - e^{-ct}}{c}\Big\} \le e^{-bt}$$

becslés teljesül. Alkalmazzuk ezt a Malthus-paraméter egyenletére:

$$(1+p)\int_0^\infty e^{-(\alpha+b+1)t}\, dt < 1 < (1+p)\int_0^\infty e^{-(\alpha+b)t}\, dt.$$

Kiszámolva mindkét integrált a

$$\frac{1+p}{\alpha+b+1} < 1 < \frac{1+p}{\alpha+b}$$

kétoldali egyenlőtlenség teljesül, melyből elemi átalakításokkal a kívánt

$$p - b < \alpha < 1 + p - b$$

becslés már megkapható. ▲

Most, hogy már van egy (kissé homályos) képünk arról, hogy adott paraméterek mellett a gráfunk hogyan növekszik a szuperkritikus esetben, rátérhetünk a folyamat aszimptotikus viselkedésének leírására. Ez a vizsgálat két részre bontható. Először, azt kihasználva, hogy az általános elágazó folyamat a gráf modell élein keresztül van beágyazva, annak éleire vonunk le a 2.11. Tétel és a 2.6. Következmény által könnyen adódó, de mélyreható következtetéseket. Ezután az éleken definiált folyamatot felhasználva egy rögzített csúcs fokszámának aszimptotikus viselkedését fogjuk leírni. Mindezek előtt érdemes megjegyezni azt is, hogy a korábban kimondott 2.3. Következmény alapján, habár a soron következő tételeket csak 1 valószínűségű konvergenciára mondjuk ki, ezek ugyanúgy fennállnak $\mathcal{L}^1$ értelemben is.

3.2.1 Élek

Nyilvánvalóan ahhoz, hogy a 2.11. Tételt, vagy a 2.6. Következményt tudjuk használni, arra van szükségünk, hogy a gráfunkat meghatározó folyamatok ezen állítások feltételeit kielégítsék. Mivel az egyes tulajdonságokhoz különböző véletlen karakterisztikákat kell használnunk, ha megmutatjuk, hogy a reprodukciós folyamat rendelkezik a megfelelő tulajdonságokkal, akkor a továbbiakban felsorolt és értelmezett állítások bizonyításához elegendő csak ezeket a véletlen karakterisztikákat vizsgálni. Ennek okán az alfejezet első lépéseként megmutatjuk, hogy a reprodukciós folyamatra teljesülnek az elvárt feltételek.

Ehhez érdemes feleleveníteni, hogy az előbb hivatkozott tételek milyen, a reprodukciós folyamatra vonatkozó tulajdonságokra építkeznek. Mind a 2.11. Tétel, mind a 2.6. Következmény felhasználja, hogy $(\xi(t))_{t\geq 0}$ teljesíti a 1. Feltételt. Erről korábban már megmutattuk, hogy automatikusan teljesül, ha létezik olyan monoton csökkenő, pozitív és integrálható g függvény, melyre

$$E\Big[\int_0^\infty \frac{1}{g(t)} e^{-\alpha t}\,\xi(dt)\Big] < \infty$$

teljesül. Emellett a 2.6. Következményben arra is szükségünk van, hogy a korábbi

$$_\alpha\xi(t) = \int_0^t e^{-\alpha u}\,\xi(du)$$

jelöléssel adott változóra

$$E\big[{}_\alpha\xi(\infty)\log^+ {}_\alpha\xi(\infty)\big] < \infty$$

teljesüljön. Világos tehát, ha megmutatjuk, hogy az

$$M = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\,\xi(dt)$$

változó második momentuma véges, akkor abból már mind a kettő feltétel következik. (Itt a 1. Feltételhez a $g = e^{-(\alpha t)/2}$ függvényt választhatjuk.) Ez viszont az alábbi állítás értelmében teljesül.

3.3. Állítás. *Az előbb bevezetett M változóra $E\big[M^2\big] < \infty$ teljesül.*

Bizonyítás. A reprodukciós folyamat definíciója alapján az M-re az alábbi felső becslés adható:

$$M = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\,\xi(dt) = \sum_{\tau_i<\lambda} \varepsilon_i e^{-\alpha\tau_i} \le \sum_{i=1}^\infty 2e^{-\alpha\tau_i} = \tilde{M},$$

melyből látható, hogy elegendő azt megmutatni, hogy az $\tilde{M}$ változó második momentuma véges. Ehhez először vizsgáljuk meg az $E\tilde{M}$ várható értéket.

Mivel $(\pi(t))_{t\ge0}$ egy 1 intenzitású homogén Poisson folyamat, így ennek jól ismert tulajdonságai alapján világos, hogy τ_i születési időpontok eloszlásai rendre $Gamma(i,1)$ eloszlásokkal esnek egybe. Ennek következtében a Fubini tételt, és a $Gamma$ eloszlás momentumgeneráló függvényére ismert képletet alkalmazva kapjuk, hogy a keresett várható értékre

$$E\tilde{M} = 2\sum_{i=1}^\infty E\big(e^{-\alpha\tau_i}\big) = 2\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{(1+\alpha)^i} = \frac{2}{\alpha} < \infty$$

teljesül.

Ahhoz, hogy ennek segítségével a második momentumot is meghatározhassuk, vegyük észre, hogy ha τ egy $\tilde{M}$-tól független 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$\tilde{M} \overset{d}{=} e^{-\alpha\tau}(2+\tilde{M})$$

teljesül. Ennek következtében viszont a második momentumra az alábbi összefüggés írható fel

$$E\big[\tilde{M}^2\big] = E\big[(e^{-2\alpha\tau})\big]\big[4+4E\tilde{M}+E\big[\tilde{M}^2\big]\big] = \frac{1}{1+2\alpha}\Big(4+\frac{8}{\alpha}+E\big[\tilde{M}^2\big]\Big),$$

melyből átrendezéssel a kívánt

$$E\big[\tilde{M}^2\big] = \frac{2\alpha+4}{\alpha^2} < \infty$$

korlátosság már adódik. ▲

Most, hogy ez a, mondhatni utolsó, technikai lépés is adott, végre rátérhetünk az éleken értelmezett egyes mérőszámok aszimptotikus vizsgálatára, mely a meglévő apparátussal felszerelve egyedül a kiválasztott véletlen karakterisztika kezelhetőségén múlik. Az első ilyen természetes kérdés, hogy mi mondható el a továbbiakban csak $Z(t)$-vel jelölt aktuálisan élő (utódnemzésre képes) élek aszimptotikus számáról. Ezt foglalja össze az első állításunk.

3.4. Állítás. *Ha t-vel tartunk a ∞-be, akkor a*

$$e^{-\alpha t}Z(t) \longrightarrow m_\infty Y_\infty$$

1 valószínűségű konvergencia teljesül, ahol Y_∞ egy 1 várható értékű nemnegatív (pozitív, ha a gráf nem ürül ki) valószínűségi változó, míg m_∞-re

$$m_\infty = \Big[\frac{(1+p)^2}{c^2}\int_0^1 [-\log(1-u)](1-u)^{\frac{\alpha+b+1}{c}-1}\exp\Big\{\frac{u(2-pu)}{2c}\Big\}\,du\Big]^{-1}$$

teljesül.

Bizonyítás. A 3.3. Állítás alapján világos, hogy a 2.11. Tétel alkalmazásához egyedül annyit kell belátni, hogy az élő éleket számoló $\phi(t) = \mathbb{1}_{\{0\leq t<\lambda\}}$ véletlen karakterisztika teljesíti a 2. Feltételt, illetve trajektóriái a Szkorohod D-térben vannak. Ugyanakkor ezt a két tulajdonságot a megadott indikátor nyilvánvalóan teljesíti (càdlàg és korlátos), tehát a konvergencia adott, aminek értelmében egyedül az

$$\begin{aligned} m_\infty^\phi &= \frac{\int_0^\infty e^{-\alpha u} E[\phi(u)]\,du}{\int_0^\infty u\mu_\alpha(du)} = \frac{\int_0^\infty e^{-\alpha u} E[\phi(u)]\,du}{\int_0^\infty ue^{-\alpha u}\,\mu(du)} \\ &= \frac{\int_0^\infty e^{-\alpha u} E[\mathbb{1}_{\{0\leq t<\lambda\}}]\,du}{\int_0^\infty ue^{-\alpha u}\,\mu(du)} = \frac{\int_0^\infty e^{-\alpha u}[1-L(u)]\,du}{\int_0^\infty ue^{-\alpha u}\,\mu(du)} \end{aligned}$$

értéket kell kiszámolnunk. Azonban ez az intenzitásmértékre mutatott

$$\mu(t) = (1+p)\int_0^t [1-L(u)]\,du$$

összefüggés alapján átírható, mint

$$\frac{\int_0^\infty e^{-\alpha u}[1-L(u)]\,du}{\int_0^\infty ue^{-\alpha u}\,\mu(du)} = \frac{1}{(1+p)^2}\Big[\int_0^\infty te^{-\alpha t}[1-L(t)]\,dt\Big]^{-1}.$$

Ugyanakkor használhatjuk az élettartam túlélésfüggvényének explicit alakjáról szóló 3.1. Állítást is, mely alapján ez továbbírható, mint

$$\begin{aligned} m_\infty^\Phi = \frac{1}{(1+p)^2}\cdot \\ \cdot\Big[\int_0^\infty te^{-\alpha t}\exp\Big\{-(1+b)t + \frac{1}{2c}(1-e^{-ct})(2-p(1-e^{-ct}))\Big\}\,dt\Big]^{-1}, \end{aligned}$$

ahol újfent alkalmazva a $u = 1-e^{-ct}$ helyettesítést, az alábbi konstans adódik:

$$m_\infty^\Phi = \frac{1}{(1+p)^2}\Big[\frac{1}{c^2}\int_0^1 [-\log(1-u)](1-u)^{\frac{\alpha+b+1}{c}-1}\exp\Big\{\frac{u(2-pu)}{2c}\Big\}\,du\Big]^{-1}.$$

Tehát összegezve, beláttuk, hogy minden feltétel teljesül ahhoz, hogy a 2.11. Tételt alkalmazni lehessen, amely szerint a $e^{-\alpha t}Z(t)$ kifejezésnek létezik 1 valószínűségű határértéke (amint $t\to\infty$), és ez egybeesik a $m_\infty Y_\infty$ változóval, ami pedig pont az, amit szerettünk volna. ▲

Az előbbinél egy fokkal izgalmasabb kérdés, hogy mi mondható el az adott t időpontban élő élek biológiai korának a

$$B(t) = \sum_e \xi_e(t-\sigma_e)\mathbb{1}_{\{t-\sigma_e<\lambda_e\}}$$

segítségével jelölt összegéről (itt az összegzés az összes élre történik, és σ_e, a korábbiakhoz hasonlóan az e él születési időpontját jelöli), hogyan viszonyul ez az élő élek számához. Erre ad választ az alábbi eredmény, mely a 2.6. Következményből – egy kis számolás után – rögtön adódik

3.5. Állítás. *Feltéve, hogy a gráf nem ürül ki, a korábbi jelöléseink mellett a*

$$\frac{B(t)}{Z(t)} \longrightarrow \frac{1+p}{c^2}\int_0^1 u(1+p-pu)(1-u)^{\frac{\alpha+1+b}{c}-1}\exp\Big(\frac{u(2-pu)}{2c}\Big)du$$

1 valószínűségű konvergencia teljesül, amint t-vel a ∞-be tartunk.

Bizonyítás. Az adott t pillanatban élő élek számát számoló folyamat a 3.4. Állítás alapján rendben van, tehát ahhoz, hogy az előbb említett 2.6. Következményt tudjuk használni, elegendő megadni egy olyan $\phi(t)$ véletlen karakterisztikát, mely által leszámolt folyamat pont a $B(t)$ összeget adja vissza, és teljesíti a kívánt feltételeket. Ezen véletlen karakterisztika választásnak a

$$\phi(t) = \xi(t)\mathbb{1}_{\{t<\lambda\}}$$

jó lesz. Az, hogy az ezáltal leszámolt folyamat pont a $B(t)$ mennyiséget adja vissza, világos, sőt, a 3.4. Állításhoz hasonlóan adódik az is, hogy ez a megfelelő feltételeket teljesíti. Ennek következtében, egyedül az ezen $\phi(t)$ véletlen karakterisztikához tartozó

$$m_\infty^\phi = \frac{\int_0^\infty e^{-\alpha u} E[\phi(u)]\, du}{\int_0^\infty u\mu_\alpha(du)} = \frac{\int_0^\infty e^{-\alpha u} E[\phi(u)]\, du}{\int_0^\infty ue^{-\alpha u}\, \mu(du)}$$

mennyiséget kell kiszámolnunk, melyben az egyedüli nehézséget a

$$E[\phi(t)] = E\big[\xi(t)\mathbb{1}_{\{t<\lambda\}}\big]$$

várható érték felírása okozhatja.

Ezen várható érték megadásához a teljes várható érték tételét alkalmazva juthatunk el. Emlékezzünk vissza a 3.1. Állítás bizonyításában szerepeltekre. Ott megmutattuk, hogy

$$\begin{aligned} &P(\lambda > t \,|\, \pi(t) = k,\, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \\ &\qquad = E\Big[\exp\Big\{ -bt + ct\sum_{i=1}^k \varepsilon_i(U_i^{(k)} - 1)\Big\}\Big|\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\Big] \end{aligned}$$

összefüggés teljesül, ahol $U_1^{(k)}, \dots, U_k^{(k)}$ egy rendezett k elemű minta a $[0,1]$ intervallumon vett egyenletes eloszlásból. Ennek következtében a teljes várható érték tétele és a korábbi $\xi(t) = S_{\pi(t\wedge\lambda)}$ észrevétel alapján a kívánt mennyiség $\{\pi(t) = k\}$ eseményre vett feltételes várható értékére az

$$\begin{aligned} E\big[\xi(t)\mathbb{1}_{\{t<\lambda\}}\big|\pi(t) = k\big] &= E\big[S_k\mathbb{1}_{\{t<\lambda\}}\big|\pi(t) = k\big] \\ &= E\big[S_k P(\lambda > t \,|\, \pi(t) = k,\, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)\big|\pi(t) = k\big] \\ &= E\Big(E\Big[\exp\Big\{ -bt + ct\sum_{i=1}^k \varepsilon_i(U_i^{(k)} - 1)\Big\}\Big|\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\Big]\Big) \\ &= E\Big(e^{-bt} S_k \prod_{i=1}^k \exp\Big\{ct\varepsilon_i\big(U_i^{(k)} - 1\big)\Big\}\Big) \end{aligned}$$

egyenlőség írható fel. Világos, hogy a jobboldalon megjelent mennyiség nem változik akkor, ha a ε_i változók sorrendjét permutáljuk, melynek következtében a $U_1^{(k)}, \dots, U_k^{(k)}$ rendezett minta lecserélhető a nem rendezett $U_1, \dots, U_k$ mintára. Ennek következtében az előbbi feltételes várható érték továbbírható, mégpedig a következőképp:

$$
\begin{aligned}
E\big[\xi(t)\mathbb{1}_{\{t<\lambda\}}\big|\pi(t)=k\big] &= E\Big(e^{-bt}S_k\prod_{i=1}^{k}\exp\Big\{ct\varepsilon_i\big(U_i-1\big)\Big\}\Big)\\
&= E\Big(e^{-bt}\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j\prod_{i=1}^{k}\exp\Big\{ct\varepsilon_i\big(U_i-1\big)\Big\}\Big)\\
&= e^{-bt}kE\big[\varepsilon_1\exp\big\{ct\varepsilon_1(U_1-1)\big\}\big]\cdot\\
&\quad\cdot\big(E\big[\exp\big\{ct\varepsilon_1(U_1-1)\big\}\big]\big)^{k-1}\\
&= e^{-bt}kE\Big[\frac{1-e^{-ct\varepsilon_1}}{ct}\Big]\Big(E\Big[\frac{1-e^{-ct\varepsilon_1}}{ct\varepsilon_1}\Big]\Big)^{k-1}.
\end{aligned}
$$

Ha a kapott összefüggés mindkét oldalán várható értéket veszünk, akkor újfent a teljes várható érték tételének következményeképp adódik, hogy a keresett várható érték

$$
\begin{aligned}
E\big[\xi(t)\mathbb{1}_{\{t<\lambda\}}\big] &= \sum_{k=1}^{\infty}E\big[\xi(t)\mathbb{1}_{\{t<\lambda\}}\big|\pi(t)=k\big]P(\pi(t)=k)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}e^{-bt}kE\Big[\frac{1-e^{-ct\varepsilon_1}}{ct}\Big]\Big(E\Big[\frac{1-e^{-ct\varepsilon_1}}{ct\varepsilon_1}\Big]\Big)^{k-1}\frac{t^k}{k!}e^{-t}\\
&= E\Big[\frac{1-e^{-ct\varepsilon_1}}{c}\Big]\exp\Big\{-(b+1)t+E\Big[\frac{1-e^{-ct\varepsilon_1}}{c\varepsilon_1}\Big]\Big\}\\
&= \frac{1}{c}(1-pe^{-2ct}-qe^{-ct})\big[1-L(t)\big]\\
&= \frac{1}{c}(1-e^{-ct})(1+pe^{-ct})[1-L(t)]
\end{aligned}
$$

explicit formulával számolható, ahol az utolsó előtti egyenlőségnél a 3.1. Állítást használtuk.

Ezt behelyettesítve a 2.6. Következménybe, a határértékként kapott mennyiségre

$$
\begin{aligned}
&\frac{\int_0^\infty e^{-\alpha u}\frac{1}{c}(1-e^{-cu})(1+pe^{-cu})[1-L(u)]\,du}{\int_0^\infty e^{-\alpha u}[1-L(u)]\,du}\\
&\qquad= \frac{1+p}{c}\int_0^\infty e^{-\alpha u}(1-e^{-cu})(1+pe^{-cu})[1-L(u)]\,du
\end{aligned}
$$

adódik, ahol kihasználtuk a 3.4. Állításban szereplő korábbi gondolatmenetet. A jobboldalon megjelent integrálás során elvégezve az $u=1-e^{-ct}$ helyettesítést pedig könnyen adódik a kívánt

$$
\frac{1+p}{c^2}\int_0^1 u(1+p-pu)(1-u)^{\frac{\alpha+1+b}{c}-1}\exp\Big(\frac{u(2-pu)}{2c}\Big)du
$$

határérték, azaz az állítást beláttuk. ▲

Mielőtt továbbmennék a gráf csúcsainak vizsgálatára, vegyük górcső alá az előbbi állítás bizonyítása során megjelent $E\big[\xi(t)\mathbb{1}_{\{t<\lambda\}}\big]$ várható értéket. A feltételes várható érték parciális átlagolási tulajdonságát felhasználva erre a következő egyenlőséglánc írható fel

$$\begin{aligned}
E\Big[\frac{1}{c}(1-pe^{-2ct}-qe^{-ct})\mathbb{1}_{\{t<\lambda\}}\Big] &= E\Big[\frac{1}{c}(1-e^{-ct})(1+pe^{-ct})\mathbb{1}_{\{t<\lambda\}}\Big] \\
&= \frac{1}{c}(1-e^{-ct})(1+pe^{-ct})[1-L(t)] \\
&= E\big[\xi(t)\mathbb{1}_{\{t<\lambda\}}\big] \\
&= E\big[E[\xi(t)|\lambda>t]\mathbb{1}_{\{t<\lambda\}}\big],
\end{aligned}$$

melyből következik, hogy a megjelent feltételes várható értékre

$$E[\xi(t)|\lambda>t] = \frac{1}{c}(1-pe^{-2ct}-qe^{-ct}) < \frac{1}{c}$$

becslés teljesül. Hogy miért érdekes a kapott eredmény, azt a következő gondolatmenet indokolja.

A modell definíciója alapján világos, hogy a $(\xi(t))_{t\geq 0}$ összetett Poisson folyamat az él halálának bekövetkezéséig lineárisan növekszik, azaz az intuíciónk az, hogy ha t nagy, de még nem nagyobb, mint λ, akkor $\xi(t)$ szintén nagy értéket vesz fel, vagy legalábbis nincs egy univerzális korlátja, vagyis az előbbi becslés ellentmond várakozásainknak. Természetesen ezt az ellentmondást könnyű feloldani, méghozzá a következőképp. Tudjuk azt is, hogy a λ élettartam hazárdrátája a $\xi(t)$ biológiai kor lineáris függvényeként van definiálva. Tehát a $\lambda>t$ feltételből automatikusan következik, hogy habár a t lehet nagy, mivel az él még benne van a gráfban, így $\xi(t)$ biológiai kora kicsi.

3.2.2 Csúcsok

Térjünk rá a modell csúcsainak vizsgálatára. Itt két természetesen felmerülő kérdéssel fogunk foglalkozni. Először megnézzük, hogy aszimptotikusan hogyan alakul a csúcsok és az élek aránya. Ezután megmutatjuk, hogy hogyan alakul egy fix csúcs fokszáma a növekedés során. Ez előbbihez a korábbi sémát ugyanúgy használhatjuk, azaz elegendő lesz a megfelelő, csúcsokat számoló véletlen karakterisztika várható értékét meghatározni, majd ezt behelyettesíteni a 2.6. Következményben leírt formulába. Az utóbbihoz ugyanakkor kicsivel több ötlet szükséges, melyet a későbbiekben részletezünk.

Jelölje $V(t)$ azon csúcsok számát, melyek t ideig hozzáadódtak a gráfhoz. Ekkor mivel egy csúcs sosem törlődik a hálózatból világos, hogy $V(t)\to\infty$, amint $t\to\infty$, feltéve, hogy a folyamat nem hal ki. Ezen jelölést felhasználva a számunkra érdekes arány aszimptotikus viselkedésére az alábbi állítás bizonyítható.

3.6. Állítás. *Feltéve, hogy a gráf nem ürül ki, a korábbi jelöléseink mellett a*

$$\frac{V(t)}{Z(t)} \longrightarrow \frac{1}{\alpha}$$

1 valószínűségű konvergencia teljesül, amint $t\to\infty$.

Bizonyítás. Ahogyan azt jeleztük, megint csak a 2.6. Következmény feltételeinek teljesülését kell igazolnunk. Sőt az 3.3. Állítás alapján egyedül a megfelelő véletlen karakterisztikákat kell megvizsgálnunk. A $(Z(t))_{t\geq 0}$ leszámolt folyamathoz tartozó $\mathbb{1}_{\{0\leq t<\lambda\}}$ karakterisztikát már taglaltuk (lásd 3.4. Állítás), így nincs más hátra, mint a t időpontbeli $V(t)$ csúcsszámhoz találni egy megfelelő $\phi(t)$ karakterisztikát.

A modell definíciója alapján tudjuk, hogy minden születési esemény során egy új csúcs adódik a gráfhoz tehát jó választás lehet $\phi(t) = \pi(t \wedge \lambda)$. Habár aszimptotikusan nem érdekes, de fontos megjegyezni, hogy $V(t)$ nem fog egybeesni a $\phi(t)$ által leszámolt folyamattal, mivel a modell inicializálása egy éllel történik. Tehát az adott időpontbeli csúcsok számára a

$$V(t) = 2 + Z^{\phi}(t)$$

összefüggés írható fel.

Az, hogy az így választott véletlen karakterisztika trajektóriái cádlág függvények, világos, így elegendő azt megmutatni, hogy az $E\phi(t)$ várható érték korlátos. Ez viszont a Wald-azonosság alapján a $(\pi(t))_{t\geq 0}$ definícióját kihasználva nyilvánvalóan fennáll, mivel

$$E\phi(t) = E\pi(t \wedge \lambda) = E(t \wedge \lambda) = \int_0^t [1 - L(u)]\, du$$

teljesül. Tehát használva a 2.6. Következményt adódik, hogy a vizsgált hányados 1 valószínűséggel a

$$\frac{\int_0^\infty e^{-\alpha t} E\phi(t)\, dt}{\int_0^\infty e^{-\alpha t}[1 - L(t)]\, dt}$$

értékhez tart (megfelelő egyszerűsítés után), ahol viszont a számlálóbeli integrál a Fubini tétel alapján átírható, mint

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\alpha t} E\phi(t)\, dt &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \int_0^t [1 - L(u)]\, du\, dt \\
&= \int_0^\infty [1 - L(u)] \int_u^\infty e^{-\alpha t}\, dt\, du \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha u}[1 - L(u)]\, du.
\end{aligned}$$

Vagyis pont a kívánt eredmény adódik. ▲

Az alfejezet zárásaként vizsgáljuk meg, hogyan alakul egy rögzített csúcs fokszáma az idő előrehaladtával. Ahogyan azt korábban már említettük, ehhez kicsivel többet kell dolgoznunk, mint azt az eddigi tételeink során tettük. Tudjuk, hogy egy születési esemény során egy új csúcs adódik a gráfhoz, melynek fokszáma 2, vagy 1 lehet, rendre p és q valószínűségekkel. Egyszerűség kedvéért először tegyük fel, hogy a vizsgált csúcsunk kezdetben egy éllel csatlakozik a gráfhoz.

Az ötlet, mely alapján elindulhatunk, az, hogy a vizsgált csúcs fokszámának alakulását szintén egy általános elágazó folyamat írja le, csakhogy ebben az esetben a kiindulási élnek csak azon utódait kell figyelembe venni, melyek a rögzített csúcshoz csatlakoznak. Valóban, ha ennek a megszorított folyamatnak valamely éle 2 utódot nemz, akkor a megfigyelt csúcs fokszáma 1-gyel növekszik, míg ha csak 1 utódja születik, akkor annak valószínűsége, hogy ez növeli a fokszámot 1/2-del egyezik meg. A továbbiakban erre a folyamatra, mint **fokszámfolyamatra** fogunk hivatkozni. Nem elfelejtve, hogy egy él biológiai kora ugyanúgy növekszik akkor is, ha a születő utód nem csatlakozik a kijelölt csúcshoz, térjünk rá ezen folyamat vizsgálatára.

Jelölje a fokszámfolyamat reprodukciós folyamatát $(\eta(t))_{t\geq 0}$. Mivel a modell definíciója, illetve a korábbi fogalmaink alapján világos, hogy egy él a t időpontig $\xi(t) - \pi(t \wedge \lambda)$ alkalommal szül 2 gyereket, és $2\pi(t \wedge \lambda) - \xi(t)$ alkalommal 1-et, az előbbi reprodukciós folyamatra

$$\eta(t) = \xi(t) - \pi(t \wedge \lambda) + \sum_{i=1}^{2\pi(t\wedge\lambda)-\xi(t)} \delta_i$$

teljesül, ahol a $\delta_1, \delta_2, \dots$ változók egymástól, a $(\pi(t))_{t\geq 0}$ és $(\xi(t))_{t\geq 0}$ folyamatoktól, illetve a λ élettartamtól függetlenek, méghozzá

$$P(\delta_1 = 0) = \frac{1}{2} = P(\delta_1 = 1)$$

eloszlással. Nyilvánvaló, hogy ha a kérdéses csúcs születésekor 2 éllel csatlakozik a gráfhoz, akkor a hozzá tartozó fokszámfolyamat az előbbi $(\eta(t), \lambda)$ pár két független másolatának az összegeként (pontosabban szuperpozíciójaként) kapható meg.

Tehát valamilyen értelemben az ötletünk az volt, hogy a korábbi ismereteinket használjuk fel, azaz a fokszám eloszlásának problémáját szintúgy vezessük vissza az általános elágazó folyamatok elméletére. Sőt, mivel a fokszámfolyamatban erősen szerepet játszik az eredeti gráffolyamat, mely kapcsolat az előbbi tulajdonságaira is kihat, így az erre vonatkozó eredményeinket az alábbi állításban foglalhatjuk össze.

3.7. Állítás.

Szuperkritikusság feltétele *Egy rögzített csúcs fokszámolyamata pontosan akkor szuperkritikus, ha*

$$E\eta(\infty) = \frac{1+p}{2c}\int_0^1 (1-u)^{\frac{1+b}{c}-1} \exp\left\{\frac{u(2-pu)}{2c}\right\} du > 1$$

teljesül.

Malthus-paraméter *Ha az előbbiekben bevezetett fokszámfolyamat szuperkritikus, akkor a β-val jelölt Malthus-paramétere az alábbi egyenlet egyértelmű pozitív gyöke:*

$$\frac{1+p}{2c}\int_0^1 (1-u)^{\frac{\beta+1+b}{c}-1} \exp\left\{\frac{u(2-pu)}{2c}\right\} du = 1.$$

Kihalás valószínűsége *Ha az előbbiekben bevezetett fokszámfolyamat szuperkritikus, akkor annak valószínűsége, hogy a vizsgált csúcs izolálttá válik megegyezik a*

$$pz^2 + qz$$

értékkel, ahol z az

$$\frac{1+p}{2c}\int_0^1 (1-u)^{\frac{1+b}{c}-1}\exp\left\{\frac{1+p}{2c}u(1-u)z\right\}dz = 1$$

egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke.

Bizonyítás. Az első állításhoz egyedül a korábban bevezetett $(\eta(t))_{t\geq 0}$ fokszámfolyamathoz tartozó reprodukciós folyamat $E\eta(t)$ intenzitásmértékét kell meghatározni. Ez viszont könnyen adódik felhasználva a teljes várható érték tételét.

$$\begin{aligned}
E\eta(t) &= E\big[E\big(\eta(t)\big|\pi(t\wedge\lambda),\xi(t)\big)\big] \\
&= E\Big[E\Big(\xi(t)-\pi(t\wedge\lambda)+\sum_{i=1}^{2\pi(t\wedge\lambda)-\xi(t)}\delta_i\Big|\pi(t\wedge\lambda),\xi(t)\Big)\Big] \\
&= E\big[\xi(t)-\pi(t\wedge\lambda)+(2\pi(t\wedge\lambda)-\xi(t))E\delta_1\big] \\
&= E\Big[\xi(t)-\pi(t\wedge\lambda)+\frac{1}{2}(2\pi(t\wedge\lambda)-\xi(t))\Big] \\
&= \frac{1}{2}E\xi(t)
\end{aligned}$$

Azt már korábban megmutattuk, hogy

$$E[\xi(\infty)] = \frac{1+p}{c}\int_0^1 (1-u)^{\frac{1+b}{c}-1}\exp\left\{\frac{u(2-pu)}{2c}\right\}du$$

fennáll, így behelyettesítve az előbbi kapcsolatot a két intenzitásmérték között az első állítás azonnal adódik.

Hasonlóan felhasználhatjuk az előbb adódott összefüggést a Malthus-paraméter egyenletének karakterizálására. Definíció szerint a keresett β előáll, mint az

$$\int_0^\infty e^{-\beta t}\,\mu_\eta(dt) = 1$$

egyenlet megoldása. Itt viszont elvégezhetjük a $\mu_\eta(t) = \frac{1}{2}\mu(t)$ helyettesítést, tehát felhasználva az eredeti folyamat α Malthus-paraméterére ismerteket, könnyen adódik a második pont által elvárt

$$1 = \frac{1+p}{2c}\int_0^\infty e^{-\beta t}\exp\Big\{-(1+b)t+\frac{1}{2c}(1-e^{-ct})(2-p(1-e^{-ct}))\Big\}dt.$$

egyenlet.

Végezetül térjünk rá a szuperkritikus fokszámfolyamat kihalásának, vagy pontosabban kiüresedésének taglalására. Az elmélet alapján ennek meghatározásához csak arra van szükségünk, hogy az $\eta(\infty) = \eta(\lambda)$ valószínűségi változó generátorfüggvényét felírjuk. Újból használva a teljes várható érték tételét, könnyen adódik az alábbi összefüggés.

$$\begin{aligned} g_\eta(z) &= E\big[z^{\eta(\lambda)}\big] = E\big[E\big(z^{\eta(\lambda)} \big| \pi(\lambda), \xi(\lambda)\big)\big] \\ &= E\Big[z^{\xi(\lambda)-\pi(\lambda)}\big(Ez^{\delta_1}\big)^{2\pi(\lambda)-\xi(\lambda)}\Big] = E\Big[z^{\xi(\lambda)-\pi(\lambda)}\Big(\frac{1+z}{2}\Big)^{2\pi(\lambda)-\xi(\lambda)}\Big] \\ &= E\Big[\Big(\frac{2z}{z+1}\Big)^{\xi(\lambda)}\Big(\frac{(1+z)^2}{4z}\Big)^{\pi(\lambda)}\Big] = g_{\pi,\xi}\Big(\frac{(1+z)^2}{4z}, \frac{2z}{1+z}\Big) \end{aligned}$$

Felhasználva a $(\pi(\lambda), \xi(\lambda))$ együttes generátorfüggvényére vonatkozó 3.1. Tétel állítását a keresendő generátorfüggvényre

$$g_\eta(z) = 1 - \frac{1+p}{2c}(1-z)\int_0^1 (1-u)^{\frac{1+b}{c}-1}\exp\Big\{\frac{1+p}{2c}u(1-u)z\Big\}\,dz$$

adódik. Tehát ha a kiválasztott csúcsunk kiindulási fokszáma 1, akkor a fokszámfolyamat a

$$g_\eta(z) = z$$

fixpont egyenlet $z \in (0,1)$ megoldásával megegyező valószínűséggel ürül ki, mely egyenletet átrendezés után, az $(1-z)$ kifejezéssel leosztva az

$$\frac{1+p}{2c}\int_0^1 (1-u)^{\frac{1+b}{c}-1}\exp\Big\{\frac{1+p}{2c}u(1-u)z\Big\}\,dz = 1$$

alakra hozhatjuk.

Ugyanakkor előfordulhat, hogy a kiválasztott csúcs inicializáló fokszáma 2. Mivel az, hogy konkrétan hány él indul ki az adott csúcsból kezdetben véletlenszerű, mely eloszlásnak generátorfüggvénye

$$\psi(z) = pz^2 + (1-p)z,$$

világos, hogy a keresett kihalási valószínűség $pz^2 + (1-p)z$ értékkel egyezik meg, ahol z a korábban kiszámolt érték. ▲

A szakaszt két megjegyzéssel zárjuk. Először érdemes értelmezni, a definícióval párhuzamba állítani a két folyamat intenzitásmértékei között fennálló $E\eta(t) = \frac{1}{2}E\xi(t)$ kapcsolatot. Tudjuk, hogy a fokszámfolyamatban egy születési esemény során a figyelembe vett élek várható száma megegyezik a

$$p + \tfrac{1}{2}(1-p) = \tfrac{1}{2}(1+p)$$

értékkel. Ez viszont pont fele az eredeti $(\xi(t))_{t\geq 0}$ reprodukciós folyamattal adott átlagos utódszámnak, azaz a bizonyítás során feltárt összefüggés összhangban van az elvárásainkkal.

Végezetül vizsgáljuk meg a két folyamat Malthus-paraméterét. Ennek definíciója alapján tudjuk, hogy ha $\deg(t)$ jelöli egy rögzített csúcs fokszámát a t pillanatban, akkor erre $\deg(t) = O(e^{\beta t})$ (amint $t \to \infty$) nagyságrendbeli egyenlőség teljesül. Sőt, a korábbiak alapján (lásd 3.6. Állítás)

$$\deg(t) = O(V(t)^{\beta/\alpha})$$

is felírható (t-vel megint a végtelenbe tartva). Ugyanakkor az eddigiek alapján semmi sem zárja ki azt az érdekes szituációt, hogy míg az eredeti folyamat szuperkritikus, addig a fokszámfolyamat nem az. Tehát előfordulhat, hogy tetszőleges csúcs 1 valószínűséggel izolálttá válik, de a folyamat nem hal ki. Sőt, az a helyzet is fennállhat, hogy mindkét folyamat szuperkritikus, egymástól eltérő $\beta < \alpha$ Malthus-paraméterekkel. Ekkor csak annyit tudunk, hogy egy-egy csúcs izolálódásának valószínűsége nagyobb, mint a teljes gráf kiüresedésének valószínűsége.

3.3. Diszkrét változat

Jelen alfejezetben megvizsgáljuk azt a diszkrét időben fejlődő véletlen gráfot, amelyet úgy kapunk, hogy az eredeti folyamatra csak akkor nézünk rá, amikor történik valami (születés vagy halálozás). Világos tehát, hogy az adódó modell a utóbbiba a megfelelő eseményeken keresztül beágyazható. Természetesen, lévén ez nem egy precíz definíció, így először azt adjuk meg.

Tegyük fel, hogy kezdetben 1 élünk van. Ebből fejlődik a gráf diszkrét lépésekben, mégpedig úgy, hogy minden lépés során az alábbi két lehetőség közül valamelyik következik be. Vagy egy él törlődik a hálózatból, vagy a gráfhoz hozzáadódik egy új csúcs, melyet egy véletlenszerűen választott él egyik, vagy mindkét végpontjához hozzákötünk. Megtartva a korábbi terminológiát, az utóbbi lehetőséget felfoghatjuk, mint a kiválasztott él szülése, a gráfhoz hozzáadandó új éleket pedig ennek megfelelően utódnak nevezzük. Ahhoz, hogy ezeket a lépéseket precízen karakterizálhassuk, vezessünk be néhány korábbról ismeretes elnevezést, illetve pár új jelölést.

Hasonlóan, mint az eredeti folyamatban, egy e él ξ_e-vel jelölt **biológiai korán** az adott pillanatig megszületett utódainak számát értjük. Ennek segítségével a halálozás már karakterizálható. Ehhez először vezessük be az E_n jelölést, mely nem más mint a diszkrét verzió élhalmaza n lépés után. Amennyiben ez nem az üreshalmaz, azaz $E_n \neq \emptyset$, akkor egy lépés során az A_e, B_e ($e \in E_n$) események közül pontosan egy következik be, ahol

$$A_e = \{\, e \text{ élt töröljük} \,\}, \qquad \text{illetve} \qquad B_e = \{\, e \text{ él szül} \,\}.$$

Ezen diszjunkt események valószínűségeire

$$P(A_e) = \kappa$$

és

$$P(B_e) = \kappa(b + c\xi_e)$$

írható fel, ahol $b, c > 0$ konstansok, κ (pontosabban κ_n) a normáló tényező.

Könnyű felismerni, hogy az előbbiekben felírt modell ténylegesen az eredeti folyamat diszkretizáltja. Ennek következtében néhány korábbi eredményünk, fájdalommentesen átemelhető erre a diszkrét gráf modellre is. Például a 2.2. Tételben bizonyított kihalás valószínűsége, illetve a 3.6. Állításban szereplő csúcs-él arány aszimptotikus viselkedése nem változnak az "új" modellben sem. Ugyanakkor, tekintettel arra, hogy ez a diszkrét folyamat az események számában lineárisan nő, ahhoz, hogy a növekedéssel lenormált gráf aszimptotikus viselkedéséről bármit tudjunk mondani, először azt kell megvizsgálnunk, hogy miként alakul ez a szám az eredeti modellben.

3.8. Állítás. *Jelölje a $W(t)$ a t időpillanatig bekövetkezett események (születés, illetve halálozás) számát az eredeti modellben. Ekkor feltéve, hogy a folyamat nem hal ki a*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W(t)}{Z(t)} = \frac{2+p}{\alpha} - 1$$

1 *valószínűségű konvergencia teljesül, ahol α a korábban taglalt Malthus-paraméter.*

Bizonyítás. Az állítás alakjából nyilvánvaló, hogy a bizonyításhoz a 2.6. Következményt kell felhasználnunk azaz ugyanúgy lehet eljárni, mint azt a 3.5. vagy 3.6. Állításokban tettük. Lévén az élő éleket számláló $(Z(t))_{t\geq 0}$ folyamatot ismerjük, egyedül a $W(t)$ eseményszámhoz kell megfelelő véletlen karakterisztikát választanunk, majd azt a formulákba behelyettesítenünk.

Világos, hogy a t időpontig bekövetkezett születési, illetve halálozási eseményeket rendre, $\pi(t \wedge \lambda)$ és $\mathbb{1}_{\{t\geq\lambda\}}$ változók számolják, azaz véletlen karakterisztikának jó lesz a

$$\phi(t) = \pi(t \wedge \lambda) + \mathbb{1}_{\{t\geq\lambda\}}$$

választás. Mivel ez nyilvánvalóan kielégíti a 2.6. Következmény feltételeit, így egyedül a hozzá tartozó m_∞^ϕ konstanst kell kiszámolnunk (a nevezőben szereplő $Z(t)$ esetén az értéket már a 3.4. Állításból ismerjük).

A definíció alapján könnyen adódik, hogy

$$E\phi(t) = E\pi(t \wedge \lambda) + L(t)$$

teljesül, ezt kell behelyettesítenünk a megfelelő formulába, mely a következő kifejezést adja

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\alpha t} E\phi(t)\,dt &= \int_0^\infty e^{-\alpha t}(E\pi(t\wedge\lambda)+L(t))\,dt \\
&= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha t}[1-L(t)]\,dt + \int_0^\infty e^{-\alpha t}L(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha t}[1-L(t)]\,dt + \\
&\quad + \int_0^\infty e^{-\alpha t}\,dt - \int_0^\infty e^{-\alpha t}[1-L(t)]\,dt \\
&= \frac{1}{\alpha} + \Big(\frac{1}{\alpha}-1\Big)\int_0^\infty e^{-\alpha t}[1-L(t)]\,dt \\
&= \frac{1}{\alpha} + \Big(\frac{1}{\alpha}-1\Big)\frac{1}{p+1}
\end{aligned}$$

ahol kihasználtuk a 3.6. Állítás bizonyításában taglaltakat, illetve a Malthus-paraméterre vonatkozó korábban ismertetett összefüggésünket. Tehát a 2.6. Következményben megjelenő határértékként adódó hányadosra (a 3.4. Állítást felhasználva)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{W(t)}{Z(t)} = \frac{\frac{1}{\alpha}+\big(\frac{1}{\alpha}-1\big)\frac{1}{p+1}}{\frac{1}{p+1}} = \frac{p+1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}-1 = \frac{2+p}{\alpha}-1$$

írható fel, mely pont az, amit szerettünk volna. ▲

Mielőtt taglalnánk az élek, illetve csúcsok növekedéssel lenormált számának aszimptotikus alakulását a diszkrét modellben, érdemes egy összefüggést adni arra, hogy az egyes események lenormálásához felhasznált κ (precízebben κ_n) érték hogyan alakul.

3.9. Állítás. *Feltéve, hogy a diszkrét folyamat nem hal ki, a*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\kappa_n = &\Big(\frac{2+p}{\alpha}-1\Big)\cdot \\
&\cdot\Big[1+b+\frac{1+p}{c}\int_0^1 u(1+p-pu)(1-u)^{\frac{\alpha+1+b}{c}-1}e^{\frac{u(2-pu)}{2c}}\,du\Big]^{-1}
\end{aligned}$$

1 valószínűségű konvergencia teljesül.

Bizonyítás. Megint csak nyilvánvaló, hogy a 2.6. Következményt szeretnénk használni. Ehhez viszont minden adott, csak annyit kell észrevennünk, hogy a diszkrét és a folytonos folyamatok között (egyfajta szótárként) értelmezhető az alábbi átmenet. Az események száma n lépésig a diszkrét modellben ugyanaz, mint $W(t)$ a folytonosban. Ezen felül, mivel κ_n a normálási tulajdonság alapján teljesíti a

$$\kappa_n = \frac{1}{\sum_{e\in E_n}(1+b+c\xi_e)}$$

összefüggést, így ennek folytonos időben a $[(1+b)Z(t)+cB(t)]^{-1}$ kifejezés felel meg (ahol $B(t)$ a 3.5. Állításban szereplő leszámolt folyamat). Tehát, a vizsgálandó határértékre felírható a

$$\lim_{n\to\infty} n\kappa_n = \lim_{t\to\infty} \frac{W(t)}{(1+b)Z(t)+cB(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{W(t)}{Z(t)} \frac{1}{1+b+c\frac{B(t)}{Z(t)}}$$

egyenlőség. Kihasználva a 3.5., 3.8. Állításokat, illetve az 1 valószínűségű konvergencia tulajdonságait, az állítás könnyen adódik. ▲

Az előbbi állításhoz hasonló szellemben bizonyítható az alábbi következmény. Ennek folytán a bizonyítást nem taglaljuk, de a kimondás során feltüntetjük a vizsgálandó hányadost.

3.3. Következmény. *Jelölje a diszkrét idejű modellben Z_n, illetve V_n rendre az élek és csúcsok számát n lépés után. Ekkor feltéve, hogy a folyamat nem hal ki az alábbi* 1 *valószínűségű konvergenciák teljesülnek:*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{n} &= \lim_{t\to\infty} \frac{Z(t)}{W(t)} = \frac{\alpha}{2+p-\alpha};\\ \lim_{t\to\infty} \frac{V_n}{n} &= \lim_{t\to\infty} \frac{V(t)}{W(t)} = \frac{1}{2+p-\alpha}.\end{aligned}$$

▲

Végezetül, a folytonos modellhez hasonlóan bevezethetjük egy rögzített csúcs fokszámfolyamatát. Valóban, legyen v egy fix csúcs, és jelölje $\deg_n(v)$ az n. lépés utáni fokszámát. Cseppet sem meglepő, hogy a $(\deg_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ fokszámfolyamat megtartja az eredeti gráf modell megfelelő tulajdonságait. Például, mivel a 3.7. Állítás egy az egyben igaz marad a diszkrét esetben is, ennek következtében ugyanúgy adódik, hogy ha a β-val jelölt Malthus-paraméter szigorúan pozitív, akkor a háttérben meghúzódó elágazó folyamat szuperkritikus.

Természetesen egy izgalmasabb kérdés, hogy egy fix csúcs fokszámfolyamata hogy alakul, ha n-nel a végtelenbe tartunk. Mivel a kapcsolódó eredmény könnyen adódik az előző szakasz végén tett megjegyzések alapján, így az alábbi tétel bizonyítását szintén az olvasóra hagyjuk.

3.10. Állítás. *Az előbbi jelölések mellett, tegyük fel, hogy a $(\deg_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ diszkrét fokszámfolyamat szuperkritikus. Ekkor a*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\beta/\alpha} \deg_n(v) = \zeta_v$$

1 *valószínűségű konvergencia teljesül, ahol α, β a megfelelő Malthus-paraméterek, ζ_v pedig egy olyan valószínűségi változó, mely pozitív azon az eseményen, hogy a v csúcs nem válik izolálttá.* ▲

3.4. Extremális esetek

A fejezet zárásaként, reflektálva a korábbi megjegyzésünkre, miszerint a kollaborációs modell szélsőséges paraméterválasztás mellett egybeesik néhány már jól ismert dinamikusan fejlődő véletlen gráffal, azt fogjuk megmutatni, hogy ezen esetekben a szuperkritikusság feltétele, illetve a kihalás valószínűsége könnyen meghatározhatók. Természetesen az nem világos, hogy könnyen kezelhetőség alatt mit is értünk. Jelen esetben ez csak annyit takar, hogy az adódó konstansokat könnyen ki tudjuk számolni. Ahhoz, hogy láthassuk, hogy miért lesz egyszerű ezek kiszámolása a p szélsőséges megválasztása mellett, vezessük be a differenciálegyenletek vizsgálata során felbukkanó **konfluens hipergeometrikus függvények** fogalmát.

Definíció szerint konfluens hipergeometrikus függvénynek nevezzük a

$$M(a,b,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}} \frac{z^n}{n!}$$

sor alakban előálló függvényeket, ahol

$$a^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 0; \\ a(a+1)\dots(a+n-1), & \text{ha } n > 0, \end{cases}$$

az úgynevezett **Pochhammer-szimbólum**. Nyilvánvaló, hogy ezen függvények nem a definíció szerinti alakjuk miatt lesznek számunkra érdekesek, hanem mert jól ismert tény, hogy amennyiben $\mathrm{Re}(a)$ és $\mathrm{Re}(b)$ pozitívak, felírhatók az alábbi integrálalakban:

$$M(a,b,z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-a-1} e^{zu}\, du.$$

Az már látszik, hogy a korábbi szuperkritikusságra és a generátorfüggvény fixpontjára vonatkozó összefüggéseink megfogalmazhatóak konfluens hipergeometrikus függvények segítségével, de ez első ránézésre nem feltétlenül visz közelebb a számolás leegyszerűsítéséhez. Utóbbihoz annyit kell csak megjegyezni, hogy ezen függvényeket a legtöbb tudományos program tudja kezelni. Például ilyen hipergeometrikus függvényeket numerikusan közelítő függvény a Mathematica® program `Hypergeometric1F1[a,b,z]`, a MATLAB® szoftver `kummer(a,b,z)`, vagy az 'fAsianOptions' R csomag `kummerM(a,b,z)` függvénye. Sőt, ezek mellett rengeteg további neten hozzáférhető számológép is van. Ilyen például a Keisan Online Calculator.

Felszerelkezve a konfluens hipergeometrikus függvények fegyverével, térjünk rá az említett extrém paraméterezések vizsgálatára. Elsőként taglaljuk azt a szituációt, amikor az utódszámot meghatározó p-t 0-nak választjuk. Világos, hogy ebben a helyzetben, egy-egy születés esetén az új csúcs csak egy éllel csatlakozik az addigi gráfhoz, tehát a hálózat nem tartalmaz kört. Ha a modellből kiszedjük az élek halálozását, akkor a **Barabási-Albert fának** nevezett dinamikusan fejlődő véletlen gráfot kapjuk. Ez a hálózat úgy növekszik, hogy egy születés során egy fokszámarányos választás alapján választott csúcshoz kötünk egy új csúcsot, mely ténylegesen egybeesik avval, ha először véletlenszerűen választunk egy élt, majd annak egy csúcsát. (Ezen véletlen gráf modell más módszerekkel való vizsgálatát tartalmazzák a [15] és [17] cikkek.)

Amennyiben viszont megengedjük az élek öregedését, a kapott gráf már nem marad összefüggő, a törlés néhány ilyen fából és sok izolált pontból álló erdőket eredményez. Ugyanakkor, az előbb taglalt hipergeometrikus függvények segítségével a korábbi eredményeink könnyedén formalizálhatóak. Az öregedéssel ellátott Barabási-Albert fa szuperkritikusságának feltétele, hogy

$$\frac{1}{1+b} M\left(1, \frac{1+b}{c}+1, \frac{1}{c}\right) > 1$$

teljesüljön, míg a szuperkritikus gráf y kihalási valószínűsége előáll, mint az

$$\frac{1}{1+b} M\left(1, \frac{1+b}{c}+1, \frac{y}{c}\right) = 1$$

egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke. Érdemes megjegyezni, hogy egy él várható élettartama egybeesik az előbbi egyenlőtlenség bal oldalán található kifejezéssel. Hasonlóan, a gráf növekedését leíró α Malthus-paraméter megkapható, mint az

$$\frac{1}{\alpha+1+b} M\left(1, \frac{\alpha+1+b}{c}+1, \frac{1}{c}\right) = 1$$

egyenlet egyedüli pozitív gyöke. Sőt, az is könnyedén adódik, hogy a fokszámfolyamat szuperkritikussága megegyezik a

$$\frac{1}{1+b} M\left(1, \frac{1+b}{c}+1, \frac{1}{c}\right) > 2$$

feltétel teljesülésével, illetőleg, ha ez teljesül, akkor β-val jelölt Malthus-paramétere adódik, mint az alábbi egyenlet egyedüli pozitív gyöke:

$$\frac{1}{\beta+1+b} M\left(1, \frac{\beta+1+b}{c}+1, \frac{1}{c}\right) = 2.$$

Térjünk rá arra a másik extrém esetre, mikor az utódlást leíró valószínűségre $p = 1$ áll. Ekkor minden születési pillanatban a gráf egy korábbi éléhez egy 2 élű csillag, más néven cseresznye adódik. Amennyiben a halálozást megint csak elhagyjuk a modellből, a kapott gráfot a [5] cikk alapján szokás **véletlen cseresznye faként** is emlegetni (megjegyezve, hogy az a szokásos értelemben nem lesz fa). Ennek és általánosításainak vizsgálata megtalálható a [16] cikkben.

A Barabási-Albert fához hasonlóan, egy plusz $v = (1-u)^2$ változó helyettesítés után, az öregedéssel ellátott cseresznye fák esetén is használhatjuk a konfluens hipergeometrikus függvényeket a képleteink egyszerűsítésére. Azaz felírható, hogy a folyamat pontosan akkor szuperkritikus, ha

$$\frac{2}{1+b} M\left(1, \frac{1+b}{2c}+1, \frac{1}{2c}\right) > 1,$$

illetve ebben az esetben a kihalás y-nal jelölt valószínűsége megegyezik az

$$\frac{1+y}{1+b}\,M\left(1,\ \frac{1+b}{2c}+1,\ \frac{y^2}{2c}\right)=1$$

egyenlet legkisebb nemnegatív gyökével. A Malthus-paraméter előáll, mint a

$$\frac{2}{\alpha+1+b}\,M\left(1,\ \frac{\alpha+1+b}{2c}+1,\ \frac{1}{2c}\right)=1$$

egyedüli pozitív gyöke. Sőt, egy rögzített csúcs fokszámfolyamatára felírható, hogy pontosan akkor szuperkritikus, ha

$$\frac{1}{1+b}\,M\left(1,\ \frac{1+b}{2c}+1,\ \frac{1}{2c}\right)>1$$

teljesül, illetve a megfelelő β Malthus-paramétert megkaphatjuk, mint az alábbi egyenlet egyedüli pozitív gyökét:

$$\frac{1}{\beta+1+b}\,M\left(1,\ \frac{\beta+1+b}{2c}+1,\ \frac{1}{2c}\right)=1.$$

4. Összefoglalás

A dolgozat során bemutatásra került az általános elágazó folyamatok, időben fejlődő véletlen gráfok vizsgálatára vonatkozó újfajta megközelítése. Az alapötlet az volt, hogy az elágazó folyamatot a gráf élein értelmezzük, ezzel megengedve, hogy a gráf a speiális fa struktúrától eltérő összetettebb alakot öltsön. Az adódó modell nem a valóságtól teljesen elrugaszkodott, ugyanis extremális paraméterválasztással megmutatható, hogy tartalmazza a [5] cikkben taglalt t-cseresznye gráfot, illetve az nagy népszerűségnek örvendő fokszámarányos választással növekvő fa modellt (lásd [17]).

Természetesen ahhoz, hogy az analízis teljes legyen, szükségünk volt néhány, az általános elágazó folyamatokról ismert elméleti eredményre. Ezen konvergenciatételeket egy tömör bevezetés után a 2. fejezetben taglaltuk. Habár a későbbiekben nem alkalmaztuk, először megmutattuk, hogy a megfelelő feltételek mellett egy ilyen lenormált, leszámolt elágazó folyamat sztochasztikusan konvergens. Ugyanezen az úton, kicsivel több technikai lépést felhasználva beláttuk, hogy ha valamivel többet teszünk fel, akkor 1 valószínűségű konvergencia is teljesül. Nem meglepő, hogy mindkét bizonyítás során egy jól megválasztott, reprodukciós érték martingálnak nevezett martingál játszik központi szerepet, karöltve a nagy számok törvényeinek megfelelő alakjaival.

A megfelelő apparátus taglalása után, a 3. fejezetben rátértünk a kollaborációs modell precíz definiálására, illetve vizsgálatára. Néhány olyan technikaibb lépés elvégzése után, mint például az élettartam túlélésfüggvényének kiszámolása, vagy az egy él utódainak számát leíró valószínűségi változó generátorfüggvényének meghatározása, a korábbi módszereket könnyen tudtuk kamatoztatni. Például megmutattuk, hogy a növekedéssel lenormálva, milyen határváltozó írja le a gráfmodell éleinek számát, hogyan alakul a véletlen gráf csúcsainak és éleinek aránya. Egy új, de az eredetivel szoros kapcsolatban álló általános elágazó folyamat segítségével megvizsgáltuk azt is, hogy mi mondható el egy rögzített csúcs fokszámának alakulásáról. Végezetül a megfelelő normáló tényező meghatározásával, a korábbi eredményeinket átemeltük az eredeti kollaborációs modell egy diszkrét idejű verziójára is.

Habár mindezeket összevetve egy teljes képet kaptunk a kollaborációs modellről, illetve az általános elágazó folyamatok újszerű felhasználási módjáról, a dolgozatot mégis érdemes néhány további megjegyzéssel lezárni. Visszatekintve a modell definíciójára világos, hogy abban szerepel pár, a számolásokat megkönnyítő, de nem szükségszerű feltétel. Az első ilyen nagyon speciális feltétel az élek biológiai kor lineáris függvényével megegyező hazárdrátával való halálozása. Könnyen látható, hogy a lineáris függvény általános monoton növő függvényre cserélése során a kihalás taglalásához szükséges utódlás generátorfüggvényének meghatározása már nem működik a differenciálegyenletre való visszavezetés módszerével. Sőt, ezen az általánosság miatt az élettartam túlélésfüggvényének számolásánál korábban alkalmazott felcserélhetőség elvész, aminek következtében egy zárt alak megadása reménytelenné válik.

Egy újabb feltétel gyengítést eredményez, ha az utódlást meghatározó p paramétert a fizikai kortól függővé tesszük, vagyis formailag p helyett $p(t)$ valószínűségfüggvényt írunk. Meglepő módon az élettartam túlélésfüggvényére vonatkozó számolásunk átemelhető ebbe az általánosabb modellbe is, amely az alábbi formulát eredményezi:

$$1 - L(t) = \exp\Big\{ -(1+b)t + \int_0^1 \Big(p(tu)e^{2ct(u-1)} + q(tu)e^{ct(u-1)}\Big)du\Big\}.$$

(Ennek bizonyítása megtalálható a [18] cikk záró megjegyzésében.) Habár ez azt a látszatot keltheti, hogy így a korábbi kollaborációs modell aszimptotikus viselkedésére vonatkozó összefüggéseink, kis módosítástól eltekintve egyszerűen átemelhetőek erre az általános modellre, ez nincs így. Ennek oka az, hogy az utódok számának, az utódlási valószínűség fizikai kortól való függése által okozott, fizikai időtől való függése miatt, azokban a képletekben, melyekben eddig zárt alakot tudtunk adni (például a $(\pi(\lambda), \xi(\lambda)$ együttes eloszlás generátorfüggvénye), ennek lehetősége elvész.

Mindezek mellett a modell több irányban általánosítható. Például érdemes lehet megvizsgálni azt, hogy a szükséges feltételek mellett hogyan módosulnak az eredmények ha egy születési esemény során nem csak egy, hanem véletlen számú új csúcs adódik a gráfhoz, a korábbi mechanizmus szerint. Ennél egy fokkal érdekesebb modellt eredményez ha véletlenszerű csúcsszám mellett elfelejtjük a kollaborációs dinamika által adódó gráf struktúrát és az éleket hiperélekre cseréljük. Ekkor egy olyan véletlen hipergráfot kapunk, melyet az eredeti kollaborációs modell dinamikája vezérel, ugyanakkor mindig csak egy utód születik. Tehát a kihalás valószínűségére korábban adódott összefüggést itt is használhatjuk, sőt jelen esetben ez még egyszerűbb alakra redukálódik, hiszen itt a $p = 0$ is fennáll. Vagyis a szuperkritikus esetben a kapott k-kollaborációs modell kihalásának valószínűsége a

$$1 = \frac{1}{c}\int_0^1 (1-u)^{\frac{1+b}{c}-1} e^{\frac{y}{c}u}\, du$$

y-ra felírt egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke. Érdemes megjegyezni, hogy a hiperélek aszimptotikus viselkedésének vizsgálatához már, a többtípusos általános elágazó folyamatok elméletében való elmélyedés szükséges.

Magától értetődő, hogy nem csak feltétel gyengítés, illetve általánosítás lehetséges, az eredeti kollaborációs modellre is vonatkozik néhány további megválaszolatlan kérdés. Az egyik ilyen, véletlen gráfok során gyakorta felbukkanó probléma, hogy mi mondható el az aszimptotikus fokszámeloszlásról. Ezzel kapcsolatban azt érdemes megjegyezni, hogy bár a Crump-Mode-Jagers folyamat az általánosságának köszönhetően nagyon sok információt hordoz magában, mivel a modellben az éleken van definiálva, így a csúcsok egy kalap alatt való kezelése nem adódik egy jól választott véletlen karakterisztika használatával. Ezen felül, ahogyan az már sokszor felbukkant a véletlen gráfok témakörben (például a Barabási-Albert modell különböző változatai esetén), egy fix csúcs fokszámának viselkedéséből nem lehet következtetni az összes csúcsra együttesen. Tehát az aszimptotikus fokszámeloszlás vizsgálatához másfajta megközelítésre van szükségünk.

Ennél talán könnyebb (de egyelőre nem megoldott) probléma a maximális fokszám aszimptotikus viselkedésének kérdése. Ennek megválaszolásához nem feltétlenül kell más módszerekhez folyamodnunk, ugyanakkor megmutatható, hogy ez nagyban támaszkodik az általános elágazó folyamatok esetén a momentumok végességére adható feltételekre, mely típusú eredmények a szakirodalomban kevésbé vannak jelen. Ennek következményeképp ez az önmagában is izgalmas kérdés az elágazó folyamatok elméletét is bővítheti, amely jóval nagyobb érdeklődésre adhat okot, mint egy konkrét véletlen gráf modell teljes körű analízise.

Irodalomjegyzék

[1] Athreya, K. B.; Ghosh, A. P.; Sethuraman, S. Growth of preferential attachment random graphs via continuous-time branching processes. *Proceedings Mathematical Sciences*, **118/3** (2008), 473–494.

[2] Athreya, K. B.; Kaplan, N. Convergence of the age distribution in the one-dimensional supercritical age-dependent branching process. *The Annals of Probability*, **4/1** (1976), 38–50.

[3] Barabási, A.-L.; Albert, R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, **286/5439** (1999), 509–512.

[4] Breiman, L. Probability, 1968. *Reprint ed., SIAM, Philadelphia* (1992).

[5] Bukszár, J.; Prékopa, A. Probability bounds with cherry trees. *Mathematics of Operations Research*, **26/1** (2001), 174–192.

[6] Devroye, L. Branching processes in the analysis of the heights of trees. *Acta Informatica*, **24/3** (1987), 277–298.

[7] Dodds, P. S.; Dewhurst, D. R.; Hazlehurst, F. F. Van Oort, C. M.; Mitchell, L.; Reagan, A. J.; Williams, J. R.; Danforth, C. M. Simon's fundamental rich-gets-richer model entails a dominant first-mover advantage. *Physical Review E.*, **95/5** (2017), 052301.

[8] Doney, R. A limit theorem for a class of supercritical branching processes. *Journal of Applied Probability*, **9/4** (1972), 707–724.

[9] Doney, R. On single-and multi-type general age-dependent branching processes. *Journal of Applied Probability*, **13/2** (1976), 239–246.

[10] Durrett, R.; Schweinsberg, J. Power laws for family sizes in a duplication model. *The Annals of Probability*, **33/6** (2005), 2094–2126.

[11] Erdős, P.; Rényi, A. On random graphs. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, **6** (1959), 290–297.

[12] Holmgren, C.; Janson, S. Fringe trees, Crump–Mode–Jagers branching processes and m-ary search trees. *Probability Surveys*, **14** (2017), 53–154.

[13] Jagers, P. *Branching processes with biological applications.* Wiley, New York, 1975.

[14] Meyer, P.-A. *Martingales and Stochastic Integrals I.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1972.

[15] Móri, T. F. On random trees. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, **39/1-2** (2002), 143–155.

[16] Móri, T. F. Random multitrees. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, **47/1** (2009), 59–80.

[17] Móri, T. F. The maximum degree of the Barabási–Albert random tree. *Combinatorics, Probability and Computing*, **14/3** (2005), 339–348.

[18] Móri, T. F.; Rokob, S. A random graph model driven by time-dependent branching dynamics. *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.*, **46** (2017), 191–213.

[19] Nerman, O. On the convergence of supercritical general (C-M-J) branching processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **57/3** (1981), 365–395.

[20] Neveu, J. *Discrete-parameter martingales*, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[21] Pittel, B. Note on the heights of random recursive trees and random m-ary search trees. *Random Structures and Algorithms*, **5/2** (1994), 337–347.

[22] Rudas, A.; Tóth, B. Random tree growth with branching processes – a survey. *Bolyai Society Mathematical Studies 18, Springer, Berlin 2008*, 171–202.

[23] Rudas, A.; Tóth, B.; Valkó, B. Random trees and general branching processes. *Random Structures and Algorithms*, **31/2** (2007), 186–202.