

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

Ulveczki Balázs

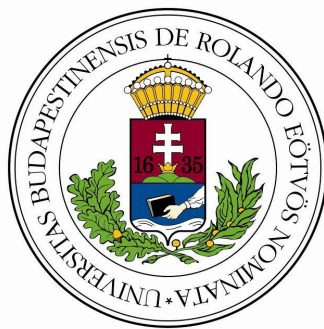
**Geometriai hipergráfok színezése**

Szakdolgozat

Témavezető: Pálvölgyi Dömötör

Számítástudományi Tanszék

Készült az EFOP-3.6.3-VEKOP-16-2017-00002 Integrált kutatói  
utánpótlás-képzési program az informatika és számítástudomány  
diszciplináris területein projekt keretében.



Budapest, 2019

## Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>3</b>
1.1. A hipergráfokról . . . . .	3
1.2. Színezési problémák . . . . .	4
1.3. Alkalmazások . . . . .	5
<b>2. Tengelypárhuzamos téglalapok és posetek</b>	<b>6</b>
2.1. Hasse diagramok függetlenségi száma . . . . .	6
2.2. Delaunay gráfok függetlenségi száma . . . . .	7
2.3. Chen, Pach, Szegedy és Tardos általánosítása . . . . .	9
2.4. $d$ -monoton részhalmazok . . . . .	10
2.5. Következmények posetekre . . . . .	16
2.6. Konstruktív példa egy gyengébb posetes állításra . . . . .	17
2.7. Egy speciális eset tengelypárhuzamos téglalapokra . . . . .	20
2.8. Ekvivalens feladat magasabb dimenzióban . . . . .	21
<b>3. Dinamikus pontthalmazok és feneketlen téglalapok</b>	<b>21</b>
3.1. Dinamikus pontthalmazok . . . . .	21
3.2. Feneketlen téglalapok . . . . .	25
3.3. Ekvivalencia oktánsokkal . . . . .	25
3.4. Speciális esetek . . . . .	26
<b>4. Nyitott kérdések</b>	<b>28</b>
<b>5. Köszönetnyilvánítás</b>	<b>30</b>

# 1. Bevezetés

Jelen szakdolgozatban az Alkalmazott matematikus mesterszak elvégzése során szerzett tudásomat és kutatási eredményeimet foglalom össze, a geometriai hipergráfok témájában.

## 1.1. A hipergráfokról

A szakdolgozat fő témája a hipergráfok, így kezdjük is rögtön a definícióval.

**1. Definíció.** *Legyen  $V$  egy véges halmaz, és  $E \subset 2^V \setminus \{\emptyset\}$ , ahol  $2^V$   $V$  részhalmazainak halmazát jelöli. Ekkor a  $(V, E)$  párt hipergráfnak nevezzük.*

Ha  $E$  csak kételemű részhalmazokat tartalmaz, akkor egy egyszerű, irányítatlan gráfot kapunk vissza. Így a hipergráfok a gráfok egy természetes kiterjesztését adják, ahol az élek nem csak két, hanem több csúcs között is futhatnak.

Tekintve, hogy a definícióban csak halmazok és részhalmazok szerepelnek, a hipergráf-fogalom rendkívül tág. Ennek köszönhető az is, hogy gyakorlatilag minden, halmazelméleti alapokkal rendelkező matematikai ágban előfordulnak hipergráfok, még ha gyakran nem is mondjuk ezt ki.

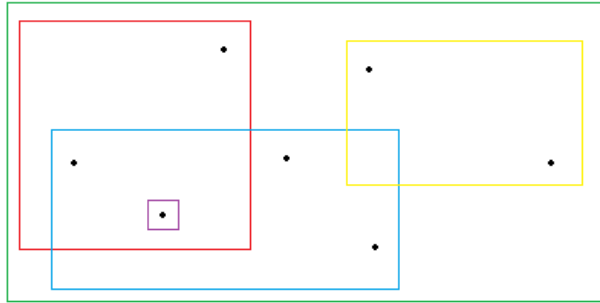
Ennek megfelelően nehéz róluk általánosságban beszélni, tételeket megfogalmazni, éppen ezért mi a hipergráfok egy speciális típusaival fogunk foglalkozni, a geometriai hipergráfokkal.

**2. Definíció.** *Geometriai hipergráfnak nevezzük azokat a  $G(P, A)$  hipergráfokat, melyek a következő módon jönnek létre: Legyen  $P$  a tér egy pont-halmaza, a későbbi gráf csúcsai. Legyen adott egy  $A$  család, mely a tér valamely részhalmazait tartalmazza. Ekkor az élek  $A$  elemeinek és  $P$ -nek a metszetei, egyszeresen tekintve a kombinatorikailag azonos éleket.*

**1. Megjegyzés.** *Általában  $A$  elemei valamilyen tekintetben „szép”, geometriailag leírható halmazok: félterek, alterek, körlemezek, poliéderek; vagy mint később látjuk, tengelypárhuzamos téglalapok a síkon.*

Az általános hipergráfokkal szemben tehát egyrészt konkrét geometriai jelentése van egy-egy geometriai hipergráfnak, másrészt ez a geometriai kapcsolat megkötést és többlet információt is jelenthet arra vonatkozóan, hogy milyen lehet egy adott  $A$  halmaz esetében, különböző  $P$  ponthalmazokra.

Különösen érdekes geometriai hipergráfok esetén a duális fogalma, amikor a csúcsok és élek szerepének megcserélésével kapunk egy új hipergráfot.



1. ábra. Egy síkbeli ponthalmaz és néhány tengelypárhuzamos téglalapok által indukált hiperél

**3. Definíció.** Egy  $H(V, E)$  hipergráf duálisának nevezzük azt a  $H'(V', E')$  hipergráfot, ahol  $V' = E$ , és  $E' = \{v_i\}, v_i = \{e_j | v_i \in e_j\}$

Ennek a geometriai jelentése szemléletesen az, hogy az új hipergráfnak a csúcsai lesznek az  $A$  család elemei, az éleket pedig a sík pontjai indukálják.

## 1.2. Színezési problémák

Csakúgy, mint a hagyományos gráfelméletben, hipergráfok esetén is tudunk színezési feladatokról beszélni. Azonban a tágabb definíció több különböző kérdést enged meg. Alapvetően ezeket a problémákat két módon csoportosíthatjuk. Első körben aszerint, hogy mit színezzük, és mire vonatkoznak a feltételek:

1. A csúcsokat színezzük, a hiperélekre adunk feltételt.
2. A hiperéleket színezzük, a csúcsokra adunk feltételt.

**2. Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy az egyik probléma visszavezethető a másikra, ha duális hipergráfot vizsgálunk.

A másik, talán mondhatjuk, fontosabb szempont az, hogy milyen feltételrendszert kell a színezésnek teljesítenie? Itt a lehetősége tárháza gyakorlatilag végtelen, mi 3 gyakori, tipikus feladatot említünk meg.

1. Monokromatikusság. Itt azt vizsgáljuk, hogy vannak-e olyan élek, melyek csak azonos színű pontot tartalmaznak.

2.  $k$ -színes színezés. Itt azt várjuk el, hogy minden él tartalmazzon legalább  $k$  különböző színű pontot.
3. Konfliktusmentesség. Itt azt szeretnénk, ha minden él esetén lenne olyan szín, melyből pontosan egy pontot tartalmaz.

**3. Megjegyzés.** *Ezek valójában csak feltétel vázlatok. A gyakorlat során általában olyan megszorításokkal is élünk, hogy a feltételt csak bizonyos méretű hiperéleknek kell teljesíteniük.*

Jelen dolgozatban a fő szempont a monokromatikusság és a  $k$ -színes színezés kérdése lesz. Ennek eszköze azonban sokszor a színezéstől eltekintve is értelmes, legnagyobb független halmaz méretére történő tételek belátása, ami gyakran eszköze a konfliktusmentes színezés keresésének, illetve sok egyéb feltételnek is.

### 1.3. Alkalmazások

Kissé rendhagyó módon a bevezetésben lesz szó az alkalmazásokról. Ennek oka, hogy bár a szakdolgozat Alkalmazott matematikus mesterszakra készül, és maga a geometriai hipergráfok színezése sok gyakorlati problémának az alapja, a saját eredmények elméletiek, egyelőre nem ismert közvetlen gyakorlati alkalmazás. Ennek megfelelően inkább az egész témakör alkalmazhatóságát emelném itt ki néhány mondatban.

Mint korábban említettem, a hipergráfok nagyon gyakoriak, a legtöbb területen, legyen szó alkalmazásról vagy elméletről, megtalálhatóak, így minden, velük kapcsolatos eredmény bizonyos gyakorlati relevanciával azonnal rendelkezik.

Ezen belül a színezési feladatok felfoghatóak csoportosításként, vagy éppen fedési feladatként is, miközben a független halmazok keresése szintén univerzálisan hasznos lehet.

Két konkrét példát említenénk meg, az első a mobiltelefon hálózatok frekvenciakiosztásához tartozik. Adott a tornyok egy fix rendszere, őket tekintetjük a síkbeli ponthalmazunknak. A felhasználói mobiltelefonokat adott méretű körlapoknak fogjuk tekinteni, ahol a körlap azt a területet jelenti, amin belüli tornyokkal a telefon képes kommunikálni. A feladat az, hogy adott néhány frekvencia, amit hozzá kell rendelni a tornyokhoz, mint kommunikációs csatornát. Azonban mindezt úgy kell megtenni, hogy az interferencia elkerülése érdekében minden lehetséges mobiltelefon-pozícióhoz tartozzon egy olyan frekvencia, amely frekvenciával üzemelő tornyok közül csak egy van a hatósugarán belül, az interferencia elkerülése érdekében. Ez feladat nem más, mint a sík

egy ponthalmazának konfliktusmentes színezése, adott sugarú körlapokra való tekintettel.

A másik gyakorlati példa az alkalmazhatóságra a szenzorfedési probléma. Itt adott néhány szenzor helyzete, néhány műszak, illetve néhány megfigyelendő tartománya a síknak. A feladat az, hogy osszuk be a szenzorokat a műszakokra úgy, hogy minden területet minden műszakban legalább 1 szenzor megfigyeljen. Ez nem más, mint egy  $k$ -színes színezési feladat, ahol a műszakoknak a színek felelnek meg, a megfigyelendő területek pedig a generáló síkbeli részhalmazok, az alaphalmaz pedig a szenzorok helyzete.

## 2. Tengelypárhuzamos téglalapok és posetek

Véleményem szerint az egyik legfontosabb a kutatás során a jó, érdekes kérdéseket fölteni. Éppen ezért ezt a szakaszt kezdjük Matousek és Privativy problémafelvető írásával. [8]

### 2.1. Hasse diagramok függetlenségi száma

**4. Definíció.** *Adott egy  $P$  véges részbenrendezett halmaz.  $P$  Hasse diagramja az az irányítatlan  $H(P)$  gráf, melynek csúcsai  $P$  alaphalmaza, és  $(x, y)$  él akkor és csak akkor, ha  $x < y$  és  $\nexists z \in P, x < z < y$ , vagy  $y < x$  és  $\nexists z \in P, y < z < x$ .*

**4. Megjegyzés.**  *$x < y$  és  $\nexists z \in P, x < z < y$  esetében szokás azt mondani, hogy  $y$  közvetlen rákövetkezője  $x$ -nek.*

**5. Definíció.** *Egy  $P$  poset dimenziója az a legkisebb  $d \in \mathbb{N}$ , amire  $P$  izomorf egy  $\mathbb{R}^d$ -beli ponthalmazzal, melyben  $a \leq b \Leftrightarrow \forall i \in [1..d] a_i \leq b_i$ . [3]*

Most, hogy ismerjük a szükséges definíciókat, jöjjön a két felvetett probléma.

1. Adjuk meg a  $f(n) = \min \alpha(H(P))$  értéket, ha a minimumot az összes  $|P| = n$  posetre értjük.
2. Adjuk meg a  $f_2(n) = \min \alpha(H(P))$  értéket, ha a minimumot az összes  $|P| = n, \dim(P) = 2$  posetre értjük.

**5. Megjegyzés.** *Az  $\alpha$  függvény a szokásos jelölés szerint a legnagyobb független halmaz méretét jelöli.*

Egyik kérdésre sem ismert jelenleg pontos válasz, csupán korlátaink vannak. Az alsó korlát mindkét esetben  $O(\sqrt{n \log n})$ , mivel  $H(P)$  triviálisan háromszögmentes, azt pedig tudjuk, hogy minden háromszögmentes gráfban van ekkora független halmaz. [9]

Az első esetben a legjobb ismert felső korlát  $(\frac{n \log \log \log n}{\log n})$ . Ez egy valószínűségi konstrukcióból adódik, melyet Brightwell és Neseřil [7] adott meg először.

A problémafelvető cikk írásakor a második problémára nem volt ismert érdemi felső korlát, azonban a következőkben látni fogunk bizonyos eredményeket a témában.

## 2.2. Delaunay gráfok függetlenségi száma

Egy másik, látszólag kevés hasonlóságot mutató kérdés a Delaunay gráfok függetlenség száma.

**6. Definíció.** *Adott a sík egy  $P$  véges ponthalmaza, valamint a sík részhalmazainak egy  $A$  családja. Ekkor a  $P$  ponthalmaz  $A$  családra vett Delaunay gráfja az az irányítatlan  $D_A(P)$  gráf, melynek csúcshalmaza  $P$ , és  $p, q \in P$  esetén  $(p, q)$  él akkor és csak akkor, ha  $\exists S \in A$ , amire  $S \cup P = p, q$ .*

**6. Megjegyzés.** *Az előző definíció valójában az általánosított Delaunay gráfok definíciója. Az eredeti definícióban nem egy tetszőleges  $A$  család szerepel, hanem a sík körlapjai. Az így kapott háromszögelt síkgráf a Voronoi diagram duálisa.*

Minket most az az eset fog érdekelni, ha az  $A$  család a sík tengelypárhuzamos téglalapjai, ekkor ugyanis szoros kapcsolat van az előbb említett posetes feladattal.

**7. Megjegyzés.** *A továbbiakban, ha nem írunk mást, akkor mindig tengelypárhuzamos téglalapokra értjük a Delaunay gráfokat, és a jelölésből is elhagyjuk a családot.*

Legyen  $R_1$  és  $R_2$  két részbenrendezett halmaz,  $P$  elemein. Legyen  $p, q \in P$  olyan, hogy  $x(p) \leq x(q)$ . Ekkor  $(p, q) \in R_1 \Leftrightarrow y(p) \leq y(q)$  és  $(p, q) \in R_2 \Leftrightarrow y(p) \geq y(q)$ .

**1. Tétel.**  $D(P) = H(R_1) \cup H(R_2)$  [8]

*Bizonyítás.* Az világos, hogy a csúcshalmaz mindkét esetben  $P$ , tehát csak azt kell megmutatnunk, hogy a két elhalmaz azonos.

1. eset:  $(p, q) \in E(D(P)) \Rightarrow (p, q) \in E(H(R_1) \cup H(R_2))$

Tegyük föl, hogy  $x(p) \leq x(q)$  és  $y(p) \leq y(q)$ . A gráf irányítatlansága miatt az első feltételt nyugodtan megtehetjük. A második kicserélése esetén egyszerűen  $R_1$  helyett  $R_2$ -vel számolunk, de teljesen azonos módon. Ekkor

$$(p, q) \notin E(H(R_1) \cup H(R_2)) \Rightarrow (p, q) \notin E(H(R_1))$$

$$\Rightarrow \exists r \in P, x(p) \leq x(r) \leq x(q) \wedge y(p) \leq y(r) \leq y(q).$$

Ez viszont ellentmondás, mert ekkor minden,  $p$ -t és  $q$ -t tartalmazó téglalap tartalmazza  $r$ -t is, tehát  $(p, q) \notin E(D(P))$ .

2. eset:  $(p, q) \in E(H(R_1) \cup H(R_2)) \Rightarrow (p, q) \in E(D(P))$

Ismét föltehetjük, hogy  $(p, q) \in E(H(R_1))$  a másik eset is teljesen azonosan működik. Ekkor tehát  $x(p) \leq x(q)$ ,  $y(p) \leq y(q)$  és  $\nexists r \in P, x(p) \leq x(r) \leq x(q) \wedge y(p) \leq y(r) \leq y(q)$ . Ez viszont azt jelenti, hogy a  $p$ , mint bal alsó,  $q$ , mint jobb felső pontok által feszített tengelypárhuzamos téglalap nem tartalmaz más pontot  $P$ -ből, így  $(p, q) \in E(D(P))$ . □

Ez a kapcsolat egyben némi motivációval is szolgál az előző részben feltett második kérdésre, hiszen  $R_1$  és  $R_2$  egyaránt 2 dimenziós poset.

Most már rátérhetünk, hogy mit is tudunk mondani a Delaunay gráfok függetlenségi számáról, vagyis  $\alpha D(P)$ -ről?

Alsó korlátra a legjobb ismert tétel:

**2. Tétel.** Minden  $|P| = n$  síkbeli ponthalmazhoz létezik  $Q \subseteq P$ , melyre  $|Q| \geq \lfloor \frac{\sqrt{n}}{2} \rfloor$ , és  $Q$  független  $D(P)$ -ben. [2]

*Bizonyítás.* Az Erdős - Szekeres tétel szerint  $n$  pont között létezik  $\sqrt{n}$  monoton. Ekkor ezek közül minden másodikat kiválasztva  $Q$ -ba a kapott halmaz biztosan független, hiszen bármely két pontot tartalmazó téglalap tartalmazza a köztük lévőt is, vagyis nincs él  $D(P)$ -ben két  $Q$ -beli elem között. □

Mint látható, itt egy „logaritmussal” gyengébbek vagyunk, mint posetek esetében.

Felső korlátra pedig a következő tétel ismert: [1]

**3. Tétel.** Léteznek olyan  $n$  elemű ponthalmazok a síkon, melyekre

$$\alpha(D(P)) \leq O\left(n \frac{\log^2 \log n}{\log n}\right).$$



A tétel még úgy is igaz, hogy egy véletlenszerűen az egységnégyzetből kiválasztott ponthalmaz 1 valószínűséggel teljesíti ezt a korlátot, ha  $n$ -el végtelenhez tartunk.

Mivel a tétel bizonyítása lényegében megegyezik egy későbbi, erősebb tétel bizonyításával, ezért itt csak annyit említünk meg, hogy ismét valószínűségi alapon nyugszik a bizonyítás, mint posetek esetében.

### 2.3. Chen, Pach, Szegedy és Tardos általánosítása

A legutóbbi tételt tartalmazó cikkben [1] a szerzők felvetnek egy igen érdekes általánosítást, amit aztán meg is válaszolnak. Ehhez először tekintsünk egy általánosított függetlenség definíciót.

**7. Definíció.** *Adott  $d \in \mathbb{N}$  és  $P$  síkbeli ponthalmaz. Egy  $Q \subseteq P$  részhalmazt  $d$ -függetlennek nevezünk, ha nincs olyan  $R$  tengelypárhuzamos téglalap, melyre  $|R \cap P| = d$  és  $R \cap P \subseteq Q$ . Legyen  $\alpha_d(P)$  a legnagyobb  $P$ -beli  $d$ -független részhalmaz mérete.*

Világos, hogy ez eddig tárgyalt függetlenség éppen a  $d=2$  eset, tehát valóban egy értelmes, bővebb definícióval van dolgunk.

Vegyük észre azt is, hogy ha egy részhalmaz  $d$ -független, akkor minden  $d' < d$  értékre is  $d'$  független, vagyis  $\alpha_d(P)$   $d$ -ben monoton növekvő.

Erre az  $\alpha_d$  függvényre pedig, az előző tétel bizonyítását kissé megjavítva adódik a következő tétel:

**4. Tétel.** *Legyen  $P$  egy  $n$  elemű ponthalmaz, melynek elemeit egyenletesen véletlenül választottuk a koordinátarendszerünk  $[0, 1]^2$  egységnégyzetéből. Ekkor 1 valószínűséggel*

$$\alpha_d(P) = O\left(\frac{n \cdot d \cdot \log^2 \log n}{\log^{\frac{1}{d-1}} n}\right).$$

Mivel ugyan ezzel a bizonyítással lesz még erősebb tétel is, így ennek közlése továbbra is várat még magára.

Ebből a tételből azonnal következik egy igen erős, színezési tétel.

**1. Következmény.** *Minden  $c, d \in \mathbb{N}$  konstanshoz létezik egy  $P$  ponthalmaz, hogy  $P$  elemeinek tetszőleges  $c$  színnel színezése esetén lesz egy  $d$  pontot tartalmazó, monokromatikus tengelypárhuzamos téglalap.*

*Bizonyítás.* Tekintsünk egy színosztályt, legyen ez  $Q$ ! Ekkor ha  $Q$  nem  $d$ -független, akkor definíció szerint tartalmaz egy tengelypárhuzamos téglalapot,

mely tartalmaz  $d$   $Q$ -beli elemet, és egyetlen másik pontot sem, vagyis monokromatikus lesz a  $Q$ -val jelölt színben.

Ekkor a tétel állítását felhasználva  $\exists |P| = n$ , amire

$$|Q| \leq O\left(\frac{n \cdot d \cdot \log^2 \log n}{\log^{\frac{1}{d-1}} n}\right),$$

ha nem akarunk monokromatikus,  $d$  méretű téglalapot.

Viszont ekkor a  $c$  szín segítségével legfeljebb  $cO\left(\frac{n \cdot d \cdot \log^2 \log n}{\log^{\frac{1}{d-1}} n}\right)$  pontot tudunk kiszínezni, és mivel

$$\frac{n}{\frac{n \cdot d \cdot \log^2 \log n}{\log^{\frac{1}{d-1}} n}} \rightarrow \infty,$$

ezért lesz olyan  $n$ , amire a kiszínezhető pontok száma kevesebb, mint a tényleges pontok száma. Tehát nincs olyan színezés, mely ne tartalmazna monokromatikus, legalább  $d$  méretű tengelypárhuzamos téglalapot.  $\square$

Alsó korlátra ismét nem tudunk jobbat, mint  $O(\sqrt{n})$ , amit ismét az Erdős-Szekeres tételből kapunk, azonos bizonyítással.

## 2.4. $d$ -monoton részhalmazok

Ebben a szakaszban a saját eredményeim következnek, tovább erősítve az előbbi tételeket.

**8. Definíció.** *Adott egy  $P$  síkbeli pontthalmaz. Azt mondjuk, hogy egy  $R$  tengelypárhuzamos téglalap rögzített  $P$  elemein, ha a téglalap bal alsó és jobb felső csúcsai elemei  $P$  halmaznak.*

**8. Megjegyzés.** *A továbbiakban egyszerűen rögzítettnek fogjuk nevezni az ilyen téglalapokat, ha az alaphalmaz egyértelmű.*

**5. Tétel.** *Minden  $c, d \in \mathbb{N}$  konstanshoz létezik egy  $P$  pontthalmaz, hogy  $P$  elemeinek tetszőleges  $c$  színnel színezése esetén lesz egy  $d$  pontot tartalmazó, monokromatikus rögzített tengelypárhuzamos téglalap.*

Ez egy erősebb állítás, mint amivel korábban találkoztunk, mivel szűkítettük a figyelembe vehető téglalapok számát.

Azonban ennél még többet állíthatunk.

**9. Definíció.** Adott a síkon egy  $P$  ponthalmaz és egy  $D \subset P$ , ahol  $|D| = d$ . Rendezzük  $D$  elemeit  $x$  koordinátáik szerint, legyenek az így kapott pontok rendre  $p_1, p_2, \dots, p_d$ . Legyen  $R_D$  az a rögzített tengelypárhuzamos téglalap, melynek a bal alsó és jobb felső pontjai a  $p_1$  és a  $p_d$ . Azt mondjuk, hogy  $D$  egy  $d$ -monoton részthalmaz  $P$ -ben, ha  $p_1, p_2, \dots, p_d$  pontok  $y$  koordinátái monoton nőnek, valamint a  $R_D \cap P = D$ .

**6. Tétel.** Minden  $c, d \in \mathbb{N}$  konstanshoz létezik egy  $P$  ponthalmaz, hogy  $P$  elemeinek tetszőleges  $c$  színnel színezése esetén lesz egy monokromatikus  $d$ -monoton részthalmaz  $P$ -ben.

A tétel bizonyításához ismét a színsztályok méretére fogunk felső korlátot adni.

**10. Definíció.** Legyen  $P$  egy ponthalmaz a síkon,  $Q \subseteq P$  egy véges részthalmaza. Azt mondjuk, hogy  $Q$   $d$ -monoton mentes, ha  $\nexists D \subseteq Q$ , amire  $|D| = d$ , és  $D$  egy  $d$ -monoton részthalmaz  $P$ -ben. Jelöljük  $a_d(P)$ -vel a legnagyobb részthalmaz méretét  $P$ -ben, amelyik  $d$ -monoton mentes.

Ekkor

**7. Tétel.** Legyen  $P$  egy  $n$  elemű ponthalmaz, melynek elemeit egyenletesen véletlenül választottuk a koordinátarendszerünk  $[0, 1]^2$  egységnyezetéből. Ekkor 1 valószínűséggel

$$a_d(P) = O\left(\frac{n \cdot d \cdot \log^{1/d} \log n}{\log^{1/d} n}\right).$$

Világos, hogy a korábbihoz hasonló módon az 5. tételből következik a 4. tétel, amiből pedig a 3. Következzen tehát az 5. tétel bizonyítása. Alapul a Chen, Pach, Szegedy, Tardos cikk [1] bizonyítása szolgál, csupán a szükséges módosításokat kell végrehajtani, hogy az erősebb állítás kijöjjön.

*Bizonyítás.* A  $p_i \in P$  pontokat válasszuk a következő algoritmus szerint:

Először válasszunk  $x_i$  értékeket a  $[0; 1]$  intervallumból egyenletesen véletlenül. 1 valószínűséggel minden érték egyedi, nem 0 és nem 1. Legyenek ezek

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1.$$

**9. Megjegyzés.** Most, hogy rögzítettük az  $x$  koordinátákat, egy részthalmaz  $d$ -monotonitása csak a szerepet játszó pontok  $y$  koordinátáinak egymáshoz képesti relatív helyzete határozza meg, a köztük lévő abszolút eltérés nem játszik szerepet.

Az  $y_i$  koordinátákat lépésenként fogjuk generálni. Ehhez szükségünk lesz egy  $L \in \mathbb{N}$  értékre, amit később adunk meg pontosan,  $n$  függvényében. Mostantól az  $y_i \in [0; 1]$  értékeket  $L$ -edes törtekben fogjuk használni,

$$y_i = (0, d_i^{(1)} d_i^{(2)} \dots)_L$$

jelölésekkel.

Minden  $d_i^{(k)}$  értéket a  $\{0, 1, \dots, L-1\}$  halmazból választunk, egyenletes eloszlás szerint.

Használjuk a következő jelölést a csonkokra:

$$y_i^{(t)} = (0, d_i^{(1)} \dots d_i^{(t-1)})_L$$

A  $t$ . szinten minden pont  $t$ . jegyét fogjuk meghatározni. Ezáltal a  $t$ . lépés után a  $[0; 1]$  intervallumot  $L^{-t}$  szélességű diszjunkt sávokra bontottuk, és minden  $y_i$  értékről tudjuk, hogy melyik sávban van. Tehát ha a  $t$ . szint után  $y_i^{(t+1)} < y_j^{(t+1)}$ , akkor  $y_i < y_j$  is áll a pontok végső helyzetére, ha viszont  $y_i^{(t+1)} = y_j^{(t+1)}$ , akkor még nem ismerjük a két pont végső helyzetét egymáshoz képest.

Rögzítsünk egy  $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  indexhalmazt, és vele a

$$Q = \{p_i \in P \mid i \in I\} \subseteq P$$

halmazt.

A továbbiakban rögzítsünk le egy  $t$  értéket, és vizsgáljuk a  $t$ . szint eseményeit.

Definiáljuk erre a  $t$  szintre vonatkozóan a következő halmazt:

$$H_i = \{k \in \{1, 2, \dots, n\} \mid y_k^{(t)} = y_i^{(t)}\}$$

Most azon  $i, j \in I$  indexpárokra, melyekre teljesül  $i < j$  és  $y_i^{(t)} = y_j^{(t)}$ , definiáljuk a következő halmazokat:

$$T_{i,j} = \{k \in I \cap H_i \mid i \leq k \leq j\}$$

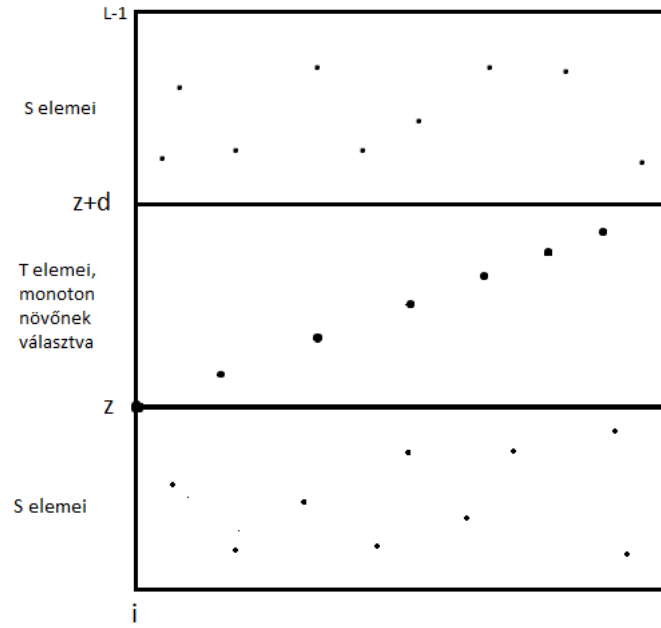
$$S_{i,j} = \{k \in H_i \setminus I \mid i < k < j\}$$

Mivel a feltételek teljesülésekor nyilván  $H_i = H_j$ , ez egy jó definíció.

Az  $i$  és  $j$  indexeket  $d$ -szomszédoknak nevezzük, ha  $|T_{i,j}| = d$ , és közeli  $d$ -szomszédoknak, ha  $|S_{i,j}| \leq L$ , miközben  $i$  és  $j$   $d$ -szomszédok.

Azt mondjuk, hogy egy  $\{i, j\}$  pár elbukik a  $t$ . szinten, ha közeli  $d$ -szomszédok, és teljesülnek a következő feltételek:

1. A  $T_{i,j}$  halmaz elemeinek növekvő sorrendjében a  $k$ . elemhez a  $t$ . szinten a  $k - 1 + z$  számjegyet választjuk a  $\{0, 1, \dots, L - 1\}$  halmazból, valamely tetszőleges  $z \in \{0, 1, \dots, L - d\}$  esetén
2. Az  $S_{i,j}$  halmaz minden eleméhez a  $t$ . szinten a  $T_{i,j}$  elemeihez fel nem használt jegyek közül választunk tetszőlegeset.



2. ábra. Így tud az  $(i, j)$  pár elbukni.

**11. Definíció.** Ha találunk  $Q$ -ban egy  $d$ -monoton halmazzt, akkor azt mondjuk, hogy  $Q$  elbukik.

**10. Megjegyzés.**  $Q$   $d$ -monoton mentességének szükséges, de nem elégséges feltétele, hogy  $Q$  nem bukik el a teljes folyamat során.

Ha  $\{i, j\}$  pár elbukik, akkor a  $T_{i,j}$  halmaz  $d$ -monoton, tehát  $Q$  elbukik a  $t$ . szinten. Mekkora ennek az esélye egy adott  $\{i, j\}$  közeli  $d$ -szomszéd pár esetében? Pontosan

$$\frac{L-d}{L} L^{-(d-1)} \cdot \left(1 - \frac{d}{L}\right)^{|S_{i,j}|},$$

mivel a  $t$ . számjegyek kiválasztása mindentől függetlenül, egyenletes eloszlásból történik.

Használjuk ki, hogy közeli  $d$ -szomszédokról van szó, így ezt a valószínűséget alulról becsülhetjük

$$L^{-(d-1)} \cdot \left(1 - \frac{d}{L}\right)^L$$

értékkel. Az első törtet elhagyhattuk, mivel  $d$  konstans, és később látni fogjuk, hogy  $n$  függvényében  $L \rightarrow \infty$ .

Vegyük észre, hogy a második tényezőre alkalmazható az  $(1 + x) \leq e^x$  egyenlőtlenség, így nyugodtan becsülhetjük a teljes kifejezést

$$\frac{1}{L^{d-1} \cdot 4^d}$$

értékkel alulról.

Itt mutatkozik meg a választott kacifántos véletlen-generálási módszer haszna, hiszen a különböző szintek közeli  $d$ -szomszéd párjainak elbukásai független események.

Nem feltétlenül független azonban az adott szinten lévő párok elbukása, mivel előfordulhatna, hogy egy adott számjegy véletlen generálására kétszer hagyatkozunk, ami valamilyen formában függővé tenné a párok bukását. Ezt kiküszöbölendő, egy adott szint közeli  $d$ -szomszéd párjai közül csak egymástól páronként diszjunktakat vizsgálunk, mivel akkor a megfelelő T és S halmazok is páronként diszjunktak lesznek.

Legyen  $m_t$  a  $t$ . szinten előforduló páronként diszjunkt közeli  $d$ -szomszédos párok maximális száma. Ekkor

$$P(Q \text{ nem bukik el a } t. \text{ szinten}) \leq \left(1 - \frac{1}{4^d \cdot L^{(d-1)}}\right)^{m_t} \leq e^{-\frac{m_t}{4^d \cdot L^{(d-1)}}},$$

ha ismét kihasználjuk az ismert egyenlőtlenséget.

Továbbra is egy adott  $t$  szinten maradván, számoljuk össze a  $d$ -szomszédos párokat, ezáltal becslést adva  $m_t$  értékre! Ehhez definiáljunk a korábbiakhoz nagyon hasonló  $H$  halmazokat,

$$H_A = \{k \in \{1, 2, \dots, n\} | y_k^{(t)} = A\},$$

ahol  $A \in [0; 1]$ , és  $L$ -edes tört alakban legfeljebb az első  $t-1$  jegye nem 0. Azaz  $A$  felveheti az összes lehetséges  $y_i^{(t)}$  értéket, és mindegyik egy sávot reprezentál, melyek páronként diszjunktak.

Minden rögzített  $A$  értékhez az adott sávban legalább  $\frac{|H_A \cap I|}{d} - 1$  diszjunkt  $d$ -szomszéd pár van, tehát az összes  $L^{t-1}$  szinten összesen  $I$  mérete miatt legalább

$$\frac{|I|}{d} - L^{t-1}$$

a párok száma.

Mivel összesen  $n$  darab pontunk van, és  $(i, j)$  párokhoz tartozó  $S_{i,j}$  halmazok is diszjunktak, ezek közül legfeljebb  $\frac{n}{L}$  nem közeli szomszéd. Így a diszjunkt közeli  $d$ -szomszédok számára az alsó becslésünk

$$m_t \geq \frac{|I|}{d} - L^{t-1} - \frac{n}{L}.$$

Ha  $|I| \geq \frac{3 \cdot d \cdot n}{L}$ , és  $t \leq \frac{\log n}{\log L}$ , akkor

$$m_t \geq \frac{|I|}{d} - L^{t-1} - \frac{n}{L} \geq \frac{n}{L}.$$

Ekkor

$$P(Q \text{ nem bukik el a } t. \text{ szinten}) \leq e^{-\frac{n}{4^d \cdot L^d}}.$$

Mivel ez az esemény a korábban tárgyaltak miatt független minden korábbi szint kimenetelétől, így attól is, hogy  $Q$  nem bukik el a korábbi szinteken. Felhasználva a szintek számára vonatkozó  $t < \frac{\log n}{\log L}$  feltételt kapjuk, hogy

$$P(Q \text{ nem bukik el egyik szinten sem}) \leq \exp\left(-\frac{n}{4^d \cdot L^d} \cdot \left(\frac{\log n}{\log L} - 1\right)\right).$$

Legyen  $L = \lfloor \left(\frac{\log n}{\log \log n}\right)^{1/d} \rfloor$ , és  $b = \lceil \frac{3 \cdot d \cdot n}{L} \rceil$ . Ekkor az összes megfelelő méretű halmazra:

$$\begin{aligned} P(a(P) > b) &\leq \sum_{Q \subseteq P, |Q|=b} P(Q \text{ nem bukik el egyik szinten sem}) \\ &\leq \binom{n}{b} \cdot \exp\left(-\frac{n}{4^d \cdot L^d} \cdot \left(\frac{\log n}{\log L} - 1\right)\right). \end{aligned}$$

Most használjuk ki az

$$\binom{n}{b} \leq \left(\frac{e \cdot n}{b}\right)^b$$

becslést. Így

$$P(a(P) > b) \leq \left(\frac{e \cdot n}{b}\right)^b \cdot \exp\left(-\frac{n}{4^d \cdot L^d} \cdot \left(\frac{\log n}{\log L} - 1\right)\right).$$

Azt akarjuk belátni, hogy a jobboldal 0-hoz tart. Mivel szigorúan pozitív, ez akkor és csak akkor igaz, ha

$$\frac{n}{4^d \cdot L^d} \cdot \left(\frac{\log n}{\log L} - 1\right) - \frac{3dn \log(eL)}{L} + \frac{3dn \log(3d)}{L} \rightarrow \infty$$

$b$  behelyettesítése és logaritmizálás után. A továbbiakban a többi által dominált tagokat, konstans szorzókat elhagyunk, mert nem befolyásolják a határértéket, amennyiben az valóban végtelen. Helyettesítsünk be  $L$  helyére is. Így a következő sor továbbra is ekvivalens:

$$\frac{n \log \log n}{\log n} \left(\frac{\log n}{\log \log n} - 1\right) - \frac{n \log^{(d+1)/d} \log n}{\log n} \rightarrow \infty$$

Végezzük el a lehetséges egyszerűsítéseket, és emeljünk ki. Így ekvivalensnek kapjuk a

$$n \left(1 - \frac{\log^{(d+1)/d} \log n}{\log n}\right) \rightarrow \infty$$

határértéket. Ez viszont igaz, mert  $n$  végtelenhez tart, a  $\frac{\log^{(d+1)/d} \log n}{\log n}$  viszont 0-hoz, így a zárójeles második tényező 1-hez. Így az első sor is igaz, vagyis

$$P(a(P) > b) \rightarrow 0.$$

□

**11. Megjegyzés.** *Ha figyelmesen megnézzük az eredményeket, akkor látható, hogy nem csak általánosabb az általam adott korlát, de értékében is kisebb. Ez viszont csak annak köszönhető, hogy az utolsó számítások során precízebb voltam, mint a cikk [1] írói, elvi különbség nincs a bizonyítások között.*

Alsó korlátra ismét nem tudunk jobbat, mint  $O(\sqrt{n})$ , amit ismét az Erdős-Szekeres tételből kapunk, azonos bizonyítással.

## 2.5. Következmények posetekre

Vegyük észre, hogy bár nem tűnik jelentősnek a különbség a  $d$ -függetlenség és  $d$ -monoton mentesség között, ha ismét posetekben kezdünk gondolkodni, akkor jelentős eredményeket kapunk.



Ugyanis azt láttuk, hogy  $D(P) = H(R_1) \cup H(R_2)$ . Tehát hiába volt felső korlátunk  $\alpha(D(P)) = \alpha_2(P)$  értékre, az nem adott közvetlen korlátot az  $f_2(n)$  függvényre, mely az egyik fő kérdésünk volt a fejezet elején. Nézzük most  $a_2(P)$  függvényt! Itt továbbra is 2 pontot tartalmazó tengelypárhuzamos téglalapokról van szó, azonban elvetettük azokat az eseteket, amikor a két pont helyzete „bal felső - jobb alsó”, nem pedig „bal alsó - jobb felső”. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy  $D_M(P) = H(R_1)$ , ha  $M$  a 2-monoton tengelypárhuzamos téglalapokat jelenti, vagyis  $a_2(P) = \alpha H(R_1)$ .

**2. Következmény.**  $f_2 \leq O\left(\frac{2n \cdot \log^2 \log n}{\log n}\right)$

Ezzel sikerült legalább részben választ adni a fejezet elején feltett kérdésekre.

Azonban most csak a  $d = 2$  esetét használtuk föl posetekre az előbbi eredményeknek. Mit kapunk, ha általános  $d$ -re tekintjük a posetes verzióját a síkbeli ponthalmazoknak?

**12. Definíció.** Egy  $P$  poset esetében intervallumnak nevezzük az  $a, b \in P$ ,  $[a, b] = \{x \mid x \in P, a \leq x \leq b\}$  halmazokat.

**13. Definíció.** Egy  $P$  poset azon intervallumait, melyeknek bármely két eleme összemérhető, láncoknak nevezzük.

**12. Megjegyzés.** Figyeljünk arra, hogy itt a láncokat egy speciális intervallumnak tekintjük. Ez szigorúbb definíció, mint a megszokott, ahol csak a láncban belüli elemek összemérhetőségét követeljük meg.

Tekintsünk egy legfeljebb 2 dimenziós  $P$  posetet! Legyen az ő síkbeli reprezentációja a  $P'$  ponthalmaz. Ekkor egy  $[a, b] \subseteq P$  intervallumnak az  $R_{a',b'} \subseteq P'$  rögzített tengelypárhuzamos téglalap felel meg, és ha az intervallum egy lánc volt, akkor neki megfelelő téglalapban a pontok monotonok is.

Ennek megfelelően a korábbi téglalapos tétel átfogalmazható posetekre:

**8. Tétel.** Minden  $c, d \in \mathbb{N}$  esetén  $\exists P$ , melyre  $\dim(P) \leq 2$ , és  $P$  elemeinek  $c$  színnel való tetszőleges színezése esetén létezik monokromatikus,  $d$  méretű lánc  $P$ -ben.

**13. Megjegyzés.** A téglalapos esetben kissé talán mesterkéltnek tűnő  $d$ -monoton halmazok posetek esetén érzésre is sokkal erősebb és természetes tételt adnak, a láncoknak köszönhetően.

## 2.6. Konstruktív példa egy gyengébb posetes állításra

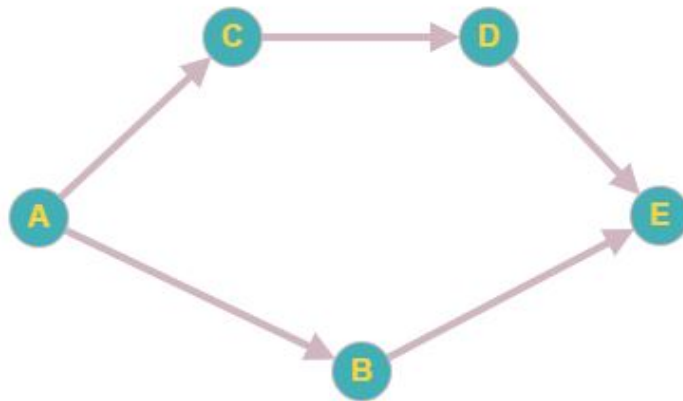
Eddig csupán valószínűségi módszerrel mutattuk meg, hogy létezik valamilyen ellenpélda, melyet nem lehet megfelelően színezni. Most a posetek esetében egy gyengébb állítást konstruktív ellenpéldával bizonyítunk.

**9. Tétel.** Minden  $d \in \mathbb{N}$  számhoz létezik egy  $P$  poset, hogy  $P$  nem színezhető  $2 \leq c \in \mathbb{N}$  színnel úgy, hogy minden,  $d$  elemet tartalmazó lánc tartalmazza mindkét színt.

**14. Megjegyzés.** Az állítás ekvivalens azzal, hogy a poset 2 színnel színezése esetén létezik  $d$  méretű monokromatikus lánc. Ekkor ez a lánc nem tartalmazza az összes mind a 2 színt, így ha az eredeti  $c$  színt két csoportra osztjuk, akkor az egyik csoportból nem fog színt tartalmazni az adott lánc.

*Bizonyítás.* A  $d = 1$  eset triviális. Indukciót fogok alkalmazni, amelyet  $d = 2$ -től indítok.

A posetek szemléltetésére irányított gráfokat fogok használni melynek csúcsai a poset elemei. Egy  $a \rightarrow b$  él akkor eleme a gráfnak, ha  $a \leq b$ , de  $\nexists c \in P, a \leq c \leq b$ . Tehát  $x \leq y \Leftrightarrow \exists x \rightarrow y$  út a gráfban. Tekintsük azt a



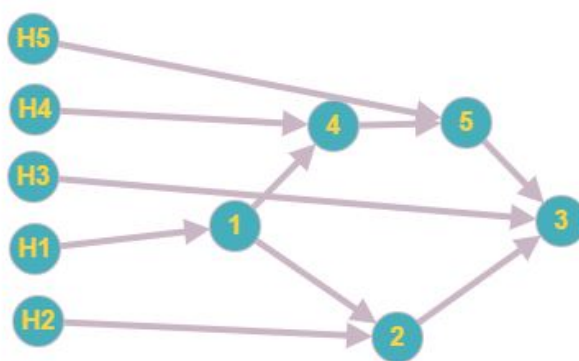
3. ábra. A  $d = 2$  ellenpélda

posetet, amit a fenti gráf határoz meg.

Ez nem színezhető két színnel,  $d = 2$  feltétellel, mivel ha a felső,  $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$  utat nézzük, akkor  $A$  és  $D$  csúcsokat kell 1-es színnel színezni,  $C$  és  $E$  csúcsokat 2-es színnel, míg az alsó,  $A \rightarrow B \rightarrow E$  út szerint  $A$  és  $E$  1-es színű,  $B$  pedig 2-es, azaz  $E$  egyszerre 1-es és 2-es színű, ami ellentmondás.

Indukciós lépésként tegyük föl, hogy valamely  $d$ -re már tudjuk, hogy van poset, ami nem színezhető  $d$  színnel. Legyen ez a poset  $P$ .

Most  $P$ -t kibővítve létrehozok egy  $P'$  posetet, amiben már  $d+1$  méretű monokromatikus lánc is biztosan van.  $P'$  a következő: tekintsük  $P$  egy példányát, legyen ez  $P_1$ , és rendeljünk minden eleméhez egy halmazt, legyenek ezek a  $P_1^j$  halmazok. Ilyen egységből hozzunk létre  $2d+1$  darabot, így kapjuk a  $P_i^j$  halmazokat, ahol  $i \in [1..2d+1]$  és  $j \in [1..|P|]$ . Ezeknek a halmazoknak a következő fontos tulajdonsága legyen: mindegyik tartalmazzon  $N$  pontot, melyek mindegyikéből menjen pontosan egy él, még hozzá a halmazt meghatározó  $P_i^j$  pontba.



4. ábra. A  $d = 3$  esethez a  $d = 2$  ellenpéldát kibővíttem  $H$  halmazokkal. Ebből kell 7 példányt venni.

**15. Megjegyzés.**  $N$  pontos értékét nem fogom meghatározni, csupán azt kell föltennünk, hogy elég nagy ahhoz, hogy a későbbiekben ez ne okozzon problémát.

Tegyük föl, hogy ebben a  $P'$  posetben nincs  $d+1$  méretű, monokromatikus lánc!

Ekkor vegyük észre, hogy minden rögzített  $i$ -re  $P_i^j$  halmazok között legalább egy monokromatikus van, mivel az indukciós feltétel szerint  $P$ -ben van  $n$  méretű monokromatikus lánc, és ezen lánc kezdőpontjához rendelt halmazban csak eltérő színű csúcsok lehetnek, hiszen a kezdőpontot rájuk kicserélve  $d+1$  méretű láncot kapunk, amiből az utolsó  $d$  csúcs azonos színű.

Ezt a monokromatikusságot kihasználva, extra éleket fogunk adni a gráfunkhoz, melyek  $d+1$  hosszú, monokromatikus láncokhoz fognak vezetni. Ezt a következő módon tehetjük meg:

1. Az extra él csak az utólag hozzáadott halmazok pontjai között futnak,  $P_i^j$  csúcsai nem érintettek.

2. Nem adunk hozzá olyan éleket, aminek a végpontjai azonos  $P_i$ -hez tartozó halmazokban vannak.
3. Egy csúcs legfeljebb egy hozzáadott láncban szerepelhet.
4. Egy lépésben  $d$  éleket adunk a gráfhoz, amik  $d + 1$  hosszú láncot alkotnak.
5. Az összes lehetséges különböző (különböző  $P_i^j$  halmazokon halad át) láncot hozzáadjuk a gráfhoz, ami nem sérti az első két pontot.

Mivel  $N$ -et elég nagyra választottuk, ezek a lépések megtehetőek.

Az első két pont biztosítja, hogy a monokromatikus halmazok továbbra is azok maradnak, az új élek nem változtatják meg az ezt kikényszerítő láncokat, valamint a  $P_i$  halmazokat.

A harmadik pont garantálja, hogy a hozzáadott láncok diszjunktak, így valóban láncok, és pontosan  $d + 1$  eleműek.

Mivel van  $2d + 1$  monokromatikus halmazunk, ezért biztosan lesz köztük  $d + 1$ , ami azonos színben monokromatikus. Az 5. pont biztosítja, hogy lesz egy lánc, ami pontosan ezen a  $d + 1$  halmazon halad át, mindegyikből egy csúcsot választva, így  $d + 1$  elemű, monokromatikus láncot adva.

Ezzel ellentmondásra jutottunk, azaz az így megadott  $P'$ -ben tetszőleges 2 színezése esetén van monokromatikus,  $d + 1$  méretű lánc.  $\square$

## 2.7. Egy speciális eset tengelypárhuzamos téglalapokra

Az láttuk már, hogy tengelypárhuzamos téglalapok esetében nincs jó globális konstansok a tartalmazott pontok számára ( $d$ ) és a színek számára ( $c$ ), amikre ne lenne ellenpélda, mely mindenképpen tartalmaz monokromatikus téglalapot. Azonban mint paraméterek, mindenképpen érdemes foglalkozni színezhetőségi kérdésekkel. Ackerman és Pinchasi [6] a Chen-féle eredmények ismeretében a következőt látta be:

**10. Tétel.** *Minden  $k$  pozitív egész esetén minden  $P$   $n$  elemű síkbeli pontthalmalmaz színezhető  $O(k^4 \log n)$  színnel úgy, hogy minden, legalább  $2k - 1$  pontot tartalmazó téglalap tartalmaz legalább  $k$  különböző színt.*

Már maga a tény, hogy ismerünk ilyen tétéleket, figyelemre méltó. Azonban ha  $k = 2$  értéket rögzítünk, akkor egy ismerős feladatra kapunk javított korlátot.

**3. Következmény.** *Minden  $n$  pontú síkbeli  $P$  pontthalmazra  $\alpha_3(P) \geq O\left(n^{\frac{\log \log n}{\log n}}\right)$*

Ez a korlát természetesen minden  $d > 3$  esetén is igaz, azonban  $d$  értékétől független. Azonban a  $d = 3$  konkrét esetre így azt tudjuk, hogy

$$O\left(n \frac{\log \log n}{\log n}\right) \leq \alpha_3(P) \leq O\left(n \frac{\log^2 \log n}{\sqrt{\log n}}\right),$$

ami már elég szűk tartomány a korábban említett, általános  $O(\sqrt{n})$  alsó korláthoz képest.

## 2.8. Ekvivalens feladat magasabb dimenzióban

Helyezzük el a síkunkat, amin a tengelypárhuzamos téglalapokat vizsgáltuk a  $\mathbb{R}^4$  tér  $\Pi = \{(x, y, z, w) \mid x + y = 0, z + w = 0\}$  síkjára.

**14. Definíció.** Az  $\mathbb{R}^4$  tér egy  $C(x_0, y_0, z_0, w_0)$  pontjához, mint csúcshoz tartozó hextánsnak nevezzük a tér  $x < x_0 \cap y < y_0 \cap z < z_0 \cap w < w_0$  részhalmazát.

Ekkor egy  $C(x_0, y_0, z_0, w_0)$  ponthoz tartozó hextáns és  $\Pi$  metszete éppen  $\{(x, y, z, w) \mid x_0 < x = -y < y_0, z_0 < z = -w < w_0\}$ . Ez pedig éppen egy téglalap, melynek oldalai párhuzamosak a  $\{x + y = 0, z = w = 0\}$  és  $\{x = y = 0, z + w = 0\}$  egyenesekkel. Így ezeket választva tengelynek, a téglalapunk tengelypárhuzamos lesz. [4]

Ezzel a síkbeli tengelypárhuzamos téglalapok által generált hipergráfot vissza tudjuk vezetni 4 dimenziós hextánsok egy speciális esetére.

## 3. Dinamikus ponthalmazok és feneketlen téglalapok

Ebben a fejezetben a geometriai hipergráfok egy másik osztályával fogunk megismerkedni, amikor az éleket generáló halmazcsalád a sík feneketlen téglalapjai. Az előző fejezethez hasonlóan ismét találhatunk egy ekvivalens feladatot, még hozzá dinamikus ponthalmazok színezését.

### 3.1. Dinamikus ponthalmazok

Induljunk ki a lehető legegyszerűbb, geometriai hipergráfok színezésével foglalkozó feladattól: szeretnénk egy egyenesen fekvő pontokat  $k$  színnel úgy színezni, hogy bármely  $k$  szomszédos között minden szín előforduljon. Erre persze a triviális (és egyetlen helyes) megoldás, hogy egy tetszőleges pontból kiindulva ciklikusan színezzük őket, sorban haladva.

Ez egy statikus feladat (csakúgy, mint az eddigi összes említett kérdés), hiszen a se a feladat, se a megoldás nem változik időben. De mi történik, ha a pontok nem állandóan vannak jelen az egyenesen, hanem csak bizonyos időintervallumokban? Az világos, hogy ekkor nem megoldható, hogy minden pillanatban  $k$  szomszédos között  $k$  szín legyen. Így most egy olyan  $m(k)$  értéket keresünk, hogy tetszőleges ponthalmaz (beleértve a megjelenéseket és eltűnéseket) esetén minden pillanatban bármely  $m(k)$  szomszédos pont között megtalálható legyen a  $k$  szín.

**15. Definíció.** A  $P = \{p_i(a_i, b_i, x_i) | a_i, b_i, x_i \in \mathfrak{R}; a_i < b_i\}$  halmazokat *dinamikus pontrendszernek* nevezzük, ahol az egyenes  $x_i$  pontja  $a_i$  pillanatban megjelenik, és  $b_i$  időpontban eltűnik. Legyen  $P(t) = \{x_i | a_i < t < b_i\}$ .

**16. Megjegyzés.** Bár a definíció akár kontinuum sok pontra is értelmes, a korábbiakhoz hasonlóan ismét csak véges sok ponttal fogunk foglalkozni.

**17. Megjegyzés.** Ha csak véges sok pont van, akkor ez a definíció ekvivalens azzal, ha megengedünk többszöri elő- és eltűnést is. Ez abból következik, hogy minden pontnak van üres környezete, ahol a többszöri előfordulásait szétbonthatjuk különböző alappontok egyszerű előfordulására.

**18. Megjegyzés.** Szintén a véges sok pont következménye, hogy ekvivalens a nyílt és zárt intervallumokra való megkötés. Kényelmi okokból nyílt intervallumokkal dolgozunk.

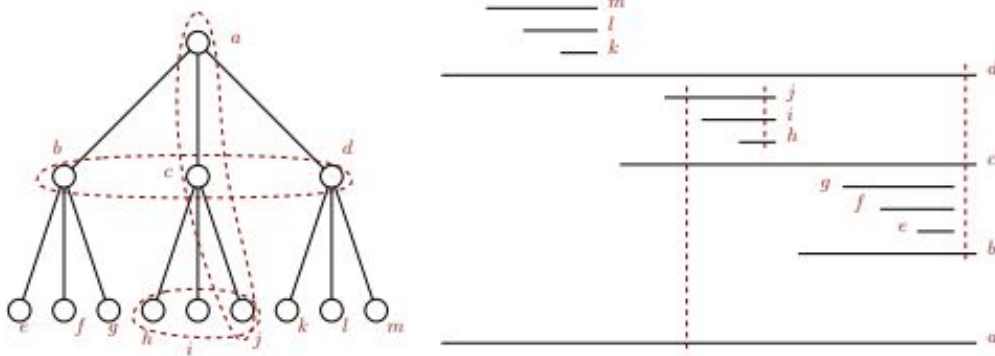
A következő tétel azt mutatja, hogy ezek a feltételek a dinamikus pontrendszerre túl megengedőek, nem létezik megfelelő  $m(k)$  függvény.

**11. Tétel.**  $\forall l \in \mathbb{N}$  létezik  $P_l$  dinamikus pontrendszer, hogy tetszőleges 2-színezése tartalmaz valamely  $P_l(t)$  időpontban  $l$  szomszédos, azonos színű csúcsot. [5]

*Bizonyítás.* Először tekintsük azt a  $G$  fát, mely  $l$  szintből áll, és minden nem levél csúcsnak  $l$  gyereke van. Ezen csúcsokon legyen  $T_l$  az az  $l$  reguláris hipergráf, melynek élei a

1. testvérek (azaz azon csúcsok, melyeknek közös a szülője),
2. gyökérből a levelekbe vezető utak.

Ekkor  $T_l$  minden 2-színezése tartalmaz monokromatikus élt, mert ha a testvéreket tartalmazó élekre teljesül a többszínűség, akkor a gyökérből mohó módon találunk egy egyszínű utat egy levélig.



5. ábra.  $T_3$  és a neki megfelelő dinamikus pontthalmaz. [5]

Most mutatunk egy  $P_l$  dinamikus pontthalmazt, mely éppen  $|T_l|$  pontot tartalmaz, és az intervallumok (az időpontokat figyelembe véve) tartalmazzák  $T_l$  éleit.

Feleltessük meg a  $p_i$  pontokat a  $G$  gráf  $v_i$  csúcsainak. Ekkor legyen  $x_i$  a  $G$  gráfon futtatott keresés során  $v_i$  elérési száma.

A megjelenési és eltűnési időpontokat is természetesnek választjuk, mindet különbözőnek, a következő sorrend szerint:

1. Ismét mélységi keresést hajtunk végre a csúcsokon, ez alapján határozzuk meg a sorrendet.
2. Amint egy csúcsot elérünk, ő és a testvérei megjelennek (ha már jelen vannak, nem teszünk semmit).
3. Amint egy csúcsot befejezünk, eltűnik.

Ekkor a testvéreknek megfelelő hiperélek valóban jelen lesznek, mivel a testvérek egyszerre jelennek meg és értéket tekintve csak az ő leszármazottjaik lehetnek közöttük, akik még nem jelentek meg ebben a pillanatban.

Utak vizsgálatához válasszunk egy tetszőleges  $p_i$  levelet.

**1. Lemma.** *A hozzá vezető út pontjai jelen vannak és szomszédosak a  $P(b_i - \epsilon)$  pontok között.*

*Bizonyítás.* 1. Az út pontjait már biztosan elértük, de még egyiket sem zártuk le a  $b_i - \epsilon$  pillanatban, a mélységi keresés tulajdonságai alapján.

2. Egy gyökér-leveél út a gyökértől tekintve monoton növvő. Azaz a pontok akkor és csak akkor szomszédosak, ha minden csúcsot, ami nincs az

útban, és az elérési száma kisebb, mint a levélé, már le is zártunk. Ez viszont megint teljesül a mélységi keresés tulajdonságai alapján.  $\square$

Tehát van olyan időpont és intervallum, mely kizárólag  $l$  darab azonos színű pontot tartalmaz  $P_l$  közül.<sup>[1]</sup>  $\square$

**19. Megjegyzés.** *A mélységi keresések során, ha választási lehetőségünk van, mindig az index alapján legkisebbet választottuk. Így mindig azonos sorrendben érjük el a csúcsokat.*

Mivel ez az eredmény lezárja az általános dinamikus pontrendszerek kérdését, tegyünk egy megszorítást: ha egy pont egyszer megjelent, többet nem tűnik el.

Ekkor van színezési algoritmus, mely  $m(k) = 3k - 2$  felső korlátot ad. [5]

Az algoritmus szemi-online, azaz úgy is működik, ha előre nem tudjuk az összes pontot és megjelenési idejét, csupán a megjelenés pillanatában kapja meg az algoritmus. Azonban nem azonnal színezi ki (ekkor online-nek neveznénk), hanem fenntart egy még színtelen pontokból álló halmazt, melyeket később színezhethet ki.

**16. Definíció.** *Résnek nevezzük egy adott szín két pontja közötti pontokat; az adott színű legszélső pontok és a sor vége közötti pontokat; illetve amennyiben az adott szín még nincs jelen, akkor a teljes sort.*

Az algoritmus két tulajdonságot tart fent:

1. Minden szín esetében egy részben legfeljebb  $3k - 3$  pont van.
2. Ha egy adott szín már jelen van, akkor minden rész legalább  $k - 1$  pontot tartalmaz

Kézetben, amikor 0 pontunk van, mindkét feltétel teljesül.

Ha valamely köztes állapotban megjelenik egy pont, akkor az ő színtelenként való beillesztése a 2. feltételt nem sértheti. Amennyiben az elsőt sérti, akkor haladjunk sorban a színeken, melyeknél lesz egy  $3k - 2$  pontot tartalmazó rész. Egy adott  $i$  szín esetében biztosak lehetünk benne, hogy a rész középső  $k$  pontja tartalmaz színtelen pontot, a 2. feltétel miatt. Az egyik ilyen színtelen pontot színezzük ki  $i$  színűre. Ezzel az  $i$  színre mindkét feltétel helyreállt, a többi szín esetében pedig semmi nem változott. Ismételgessük ezt, ameddig minden színt helyre nem állítottunk, majd haladjunk tovább az új pontra.



Az algoritmus végén, amikor elfogynak a pontok, a színtelen pontokat szabadon színezzük, ez az 1. feltételt nem zavarja meg. Így tetszőleges egymást követő  $3k - 2$  pont között minden szint megtalálunk.<sup>[1]</sup>

**20. Megjegyzés.** *Online algoritmus nem létezhet, semmilyen korláttal. Tekintsük a  $k = 2$  esetet. Ha van egy online algoritmus, akkor a pontok érkehetnek úgy, hogy a mindenkori állapot 1. színű pontok egy sorozata, majd a 2. színű pontok egy sorozata. Amennyiben az új pont mindig a két sor közé érkezik, az állapot megmarad, és nem kaphatunk jó színezést.*

## 3.2. Feneketlen téglalapok

**17. Definíció.** *Feneketlen téglalaprak nevezzük a sík egy  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b; y < c\}$  ponthalmazát.*

**21. Megjegyzés.** *Bár a definícióból következik, ki kell emelnünk, hogy a feneketlen téglalapokat is tengelypárhuzamosnak tekintjük.*

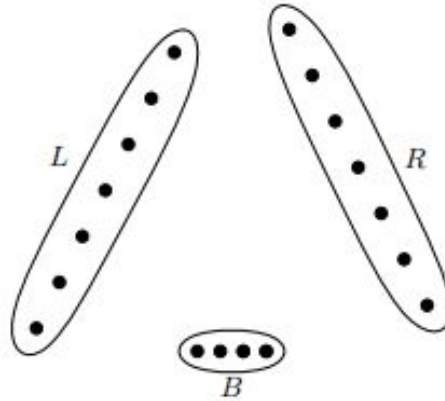
**12. Tétel.** *Amennyiben a bevezetésben megfogalmazott általános problémában  $A$  halmaz elemeinek a feneketlen téglalapokat választjuk, akkor a színezési probléma ekvivalens az előbb vizsgált, egyenesen fekvő, el nem tűnő dinamikus pontrendszerek színezésével. [5]*

*Bizonyítás.* Egy  $(x, y)$  pár és egy  $(a, b, c)$  hármas felfogható egy síkbeli pontnak és egy feneketlen téglalaprak, melyek tartalmazási viszonyban vannak akkor és csak akkor, ha  $a < x < b$  és  $y < c$ ; illetve egy  $y$  pillanatban megjelenő,  $x$  pontnak egy egyenesen, mely benne van az  $(a; b)$  intervallumban a  $c$  időpillanatban akkor és csak akkor, ha  $a < x < b$  és  $y < c$ .<sup>[2]</sup> □

Miután van színezési algoritmusunk  $3k - 2$ -re, felmerül a kérdés, hogy mi lehet az általános alsó korlát? A jelenlegi legjobb, amit ismerünk, a következő tétel:

**13. Tétel.** *Minden elég nagy  $k$  értékre létezik egy  $P$  ponthalmaz, hogy minden  $k$ -színezéshez létezik egy feneketlen téglalap, mely  $1,677k - 2,5$  pontot tartalmaz, és nem tartalmaz minden színt. [5]*

A bizonyítás hosszú számolás útján jut el a közölt eredményig, ami számunkra nem túl érdekes. Azt azonban mindenképpen meg kell jegyeznünk, hogy konstruktív példával dolgoznak a szerzők.



6. ábra. Ez a konstrukció, melyből az alsó korlát kijön. [5]

### 3.3. Ekvivalencia oktánsokkal

Ha kilépünk az eddig használt síkból, és térből szemléljük a síkbeli problémánkat, akkor a újabb ekvivalens, már ismert feladatra vezethetjük vissza a feneketlen téglalapokat.

**18. Definíció.** *A tér egy  $C(x_0, z_0, y_0)$  pontjához, mint csúcshoz tartozó oktánsnak nevezzük a tér  $x < x_0 \cap y < y_0 \cap z < z_0$  részhalmazát.*

**22. Megjegyzés.** *Mivel a téglalapjaink tengelypárhuzamosak, ezért az oktánsokat is annak definiáljuk.*

Ágyazzuk be a síkunkat a tér  $x = y$  síkjába, úgy, hogy a sík  $y$  tengelye a tér  $z$  tengelye, a sík  $x$  tengelye pedig a tér  $x = y, z = 0$  egyenese legyen.

**14. Tétel.** *A sík pontjain a feneketlen téglalapok és oktánsok által generált hipergráfok megegyeznek. [4]*

*Bizonyítás.* Először vegyük észre, hogy ha az oktáns csúcsa a  $y \leq x$  feltérben van, akkor a síkkal való metszete üres, így ezeket elhagyhatjuk.

Most nézzük meg, hogy mi  $C(x_0, y_0, z_0)$  csúcsú oktáns és a sík metszete. A definíciókból adódó  $x = y \cap x < x_0 \cap y < y_0 \cap z < z_0$  alakot informatívabb formára hozva:  $(x = y \cap x < x_0) \cap (x = y \cap y < y_0) \cap (x = y \cap z < z_0)$ . Ez nem más, mint a síkon 3 félsík metszete, méghozzá a sík koordinátarendszerében felírva rendre  $x < \sqrt{2}x_0$ ,  $x > -\sqrt{2}y_0$  és  $y < z_0$ . Ez pedig definíció szerint éppen a  $(-\sqrt{2}y_0, \sqrt{2}x_0, z_0)$  hármassal jellemzett feneketlen téglalap. Mivel pedig a feneketlen téglalapokat jellemző hármassokra éppen ennyi volt a kikötés,

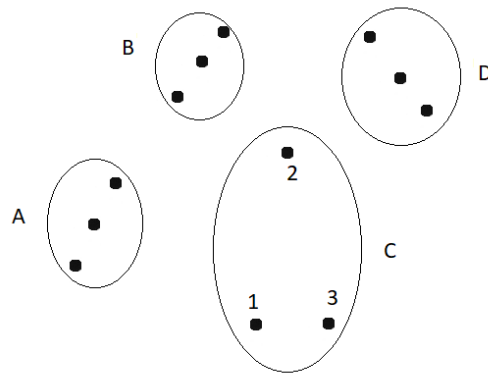
hogy  $x < y$ , így a feneketlen téglalapok és a megmaradt oktánok kölcsönösen megfeleltethetőek egymásnak.  $\square$

**23. Megjegyzés.** Természetesen az oktánok felírhatóak úgy, mint egy heptáns és a megfelelő altér metszete. Ezáltal csakúgy, mint a tengelypárhuzamos téglalapok problémája, a feneketlen téglalapok is visszavezethetőek egy speciális, heptánsok által generált hipergráf színezési feladatára.

### 3.4. Speciális esetek

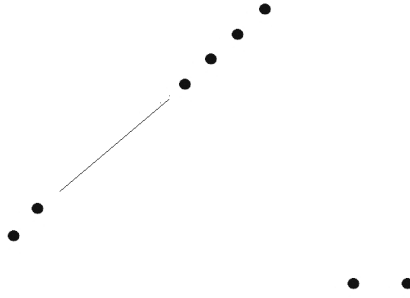
Végezetül lássunk két példát,  $k = 2$  és  $k = 3$  esetekben.

$k = 2$  esetén a színezési algoritmus szerint 4-es tartalmazásra tudunk algoritmust. A következő ponthalmaz pedig 3-as tartalmazásra ad ellenpéldát:



Mivel a C halmazt tartalmazza egy feneketlen téglalap, ami semmi mást nem tartalmaz, ezért a benne lévő 3 pont színezése biztosan a, a, b valamilyen sorrendben. Amennyiben az 1-es pont a b színű, akkor a D halmaz mindhárom eleme is b színű, mivel egyesével hozzá lehet őket metszeni a 2-es és 3-as ponthoz egy feneketlen téglalappal. Ez viszont ellentmondás, mert a D önmagában lehet egy feneketlen téglalap tartalma. Ugyanez a gondolatmenet igaz a B halmazra, amennyiben a 3-as pont színe b; illetve az A halmazra, ha a 3-as pont színe b.<sup>[2]</sup>

$k = 3$  esetén az algoritmusunk 7 tartalmazásra tud színezést, az alsó korlátra viszont a tétel nem mond semmi hasznosat. 4-es tartalmazásra a következő ellenpéldát találtam, önálló eredményként:



Itt a ferde sorban lévő pontok közül bármely két szomszédosat össze tudjuk metszeni a két különállóval egy feneketlen téglalapban, illetve bármely három szomszédosat a különállók közül a közelebbivel. Ezen felül 4 szomszédost is mindig ki tudunk metszeni.

Két eset van a különálló pontok színezése szerint: ha egyformák, akkor a  $2+2$  típusú téglalapok miatt a ferde sorban csak a másik két szín fordulhat elő, felváltva. Ekkor viszont a  $4+0$  típusú téglalapok csak két színt tartalmaznak. Ha a különálló pontok színezése  $a, b$ ; akkor a ferdékre három feltételünk van: minden 4 szomszédos között van  $a$ , minden 3 szomszédos között van  $b$ , és minden 2 szomszédos között van  $c$  színű. Ez viszont 12 egymást követő pontra 13 megkövetelt szín, ami ellentmondás.

## 4. Nyitott kérdések

Mindenképpen az egyik legfontosabb nyitott kérdés, hogy milyen további alkalmazási lehetőségek rejlenek a geometriai hipergráfokban. Én személyesen úgy érzem, hogy sok való életből származó problémát lehetne találni, ami geometriai hipergráfokra vezethető vissza.

Természetesen adódik a kérdés, hogy a jelenleg ismert, itt közölt alsó és felső korlátokon lehet-e javítani, illetve a köztük lévő nagy távolság miatt felmerül a kérdés, hogy a pontos eredmény vajon melyikhez áll közelebb? Itt ismét személyes véleményem, hogy az alsó korlátot jelentő Erdős-Szekeres féle  $O(\sqrt{n})$  és egyszerűen háromszögmentes gráfokból kapott  $O(\sqrt{n \log n})$  túl általánosak, nem használnak ki minden feltételt, ami a problémával adott.

Feneketlen téglalapok esetében az alsó és felső korlát is lineáris, azonban itt is van lehetőség javításra. Az alsó korlát esetében talán ügyesebb konstrukcióval, pontosabb számítással lehetne tizedeket nyerni, míg felső korlát esetén az adott algoritmus szemi-online, ezt a kitélt elhagyva lehet lehetőség

javításra.

Végül természetesen adódik a kérdés, hogy milyen rokon feladatokat lehet találni posetek, téglalapok, oktánsok vagy hextánsok segítségével.

Egy konkrét sejtés, amivel foglalkoztam, de nem jutottam megoldásra, hogy ha minden tengelypárhuzamos téglalap helyett csak az azonos területűeket tekintjük, akkor is igazak lesznek-e a 2.4 szakasz tételei.

## Hivatkozások

- [1] Xiaomin Chen, Janos Pach, Mario Szegedy, Gabor Tardos. *Delaunay graphs of point sets in the plane with respect to axis-parallel rectangles*, Random Structures and Algorithms 34 (2009), 11-23.
- [2] S. Har-Peled, S. Smorodinsky. *Conflict-free coloring of points and simple regions in the plane*, Discrete Comput. Geom., 34:47-70, 2005.
- [3] W. T. Trotter. *Combinatorics and Partially Ordered Sets: Dimension Theory*, Johns Hopkins University Press, 1992.
- [4] Balázs Keszegh, Dömötör Pálvölgyi. *Balázs Keszegh, Dömötör Pálvölgyi* arXiv:1612.02158
- [5] Andrei Asinowski, Jean Cardinal, Nathann Cohen, Sébastien Collette, Thomas Hackl, Michael Hoffmann, Kolja Knauer, Stefan Langerman, Michał Lasoń, Piotr Micek, Günter Rote, Torsten Ueckerdt. *Coloring Hypergraphs Induced by Dynamic Point Sets and Bottomless Rectangles* Dehne F., Solis-Oba R., Sack JR. (eds) Algorithms and Data Structures. WADS 2013. Lecture Notes in Computer Science, vol 8037. Springer, Berlin, Heidelberg
- [6] Eyal Ackerman, Rom Pinchasi. *On coloring points with respect to rectangles* Journal of Combinatorial Theory, Series A 120 (2013) 811-815
- [7] G. Brightwell and J. Nešetřil. *Reorientations of covering graphs* Discrete Math. 87 (1991), 129-132
- [8] J. Matousek, A. Privetivy. *The Minimum Independence Number of a Hasse Diagram* Combinatorics, Probability and Computing (2006) 15, 473-475
- [9] M. Ajtai, J. Komlós and E. Szemerédi. *A note on Ramsey number* J. Combin. Theory Ser. A 29 (1980), 354-360

## 5. Köszönetnyilvánítás

Óriási köszönettel tartozom témavezetőmnek, Pálvölgyi Dömötörnek, hogy tolerálta a késéseimet, el-eltűnéseimet, hektikus munkamorálomat. Természetesen szakmailag is óriási hatással volt rám, rengeteget segített, sokadjára is elmagyarázta a számításokat.

Nem jöhetett volna létre ez a dolgozat barátnőm, Zsófi nélkül, aki elviselte, ha éppen éjjel, vagy közös programok helyett is a kutatással, vagy írással töltöttem az időt.

Végül, de nem utolsó sorban a családom maradt, akik egész egyetemi pályafutásom során feltétel nélkül támogattak, olyan háttérrel adtak, aminél jobbat nem is kívánhattam volna.