NYILATKOZAT

Név: Ujszászi Zoltán

ELTE Természettudományi Kar, szak: Alkalmazott matematikus MSc

NEPTUN azonosító: OUNCGR

Szakdolgozat címe: Részbenrendezések és alkalmazásaik Hilbert-terek operátorain

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2020. május 31.

Ujszászi Zoltán

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Ujszászi Zoltán

Részbenrendezések és alkalmazásaik Hilbert-terek operátorain

MSc Szakdolgozat

Témavezető:

Titkos Tamás

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Belső konzulens:

Tarcsay Zsigmond

ELTE Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2020

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A szakdolgozatban két rendezést fogunk megvizsgálni. Az első a Hilbert-terek korlátos pozitív operátorainak Löwner-rendezése, a második a korlátos operátorok $\star$-rendezése. Mindkét esetben két természetes kérdést fogunk körüljárni:

I. előre megadott operátorok és alterek esetén létezik-e kitüntetett operátor, amely teljesít bizonyos képtérre és rendezésre vonatkozó feltételeket

II. hálószerűek-e a vizsgált rendezések.

Az I. kérdéskör motivációját egy elektronikai probléma adja, ezért az első fejezetben egy-egy alkalmazott matematikai kérdést fogunk ismertetni. Bemutatjuk az n-port hálózat fogalmát, és megvizsgálunk két operációt: n-port hálózatok rövidre zárását, és n-port hálózatok párhuzamos kapcsolását.

A második fejezetben a Löwner-rendezést vizsgáljuk. Ez a rendezés alkalmas az első fejezeben leírt problémák modellezésére. Az I. kérdést megválaszolandó, bevezetjük egy operátor zárt altérre vonatkozó zárlatának és két operátor párhuzamos összegének fogalmát, majd megvizsgáljuk ezek tulajdonságait. Ezek után rátérünk a II. kérdésre. A párhuzamos összegzés segítségével be lehet vezetni az operátor képtérre vonatkozó általánosított zárlat. fogalmát, amelynek segítségével szükséges és elégséges feltételt lehet adni arra, hogy mikor létezik két operátornak legnagyobb alsó korlátja.

A harmadik fejezetet a $\star$-rendezés vizsgálatának szenteljük. Ez a rendezés sokkal bonyolultabb a Löwner-rendezésnél, ezért külön bekezdést szánunk a legfontosabb tulajdonságok bemutatásának. Ezek után bemutatjuk a $\star$-rendezésre vonatkozó infimum és szuprémum problémákat. Látni fogjuk, hogy (a Löwner rendezéssel ellentétben) bármely két operátornak van $\star$-infimuma. A szakdolgozatot a $\star$-zárlat operáció bemutatásával zárjuk.

1. fejezet

Motiváció: kérdések az n-port hálózatok elméletéből

Ezen és a következő fejezet alapját az Érintő című elektronikus matematikai lapban megjelent [6], [7], [8] cikkek szolgáltatják, azonban a felépítés attól eltérő.

1.1. Port elmélet

A múlt században az elektronika rohamos fejlődése új problémákat nyitott meg, melyek kezeléséhez új eszközökre is volt szükség. Az áramkörök egyre komplexebbé váltak, mellyel egyidejűleg a hibák kezelése, valamint a teljes rendszer együttes elemzése nehézkessé vált. Az új kihívások új szemléletmódot is igényeltek, mely képes a komplex rendszerekre – távolról ránézve – általános megállapításokat tenni. Ezen motivációktól vezérelve – az áramkör analízis komplexitásának csökkentésére – jött létre a *port elmélet*.

A port elmélet alapötlete, hogy az áramkör belső működését nem veszi figyelembe, úgynevezett *fekete doboz*ként tekint rá, csupán a ki- és bemeneteken megjelenő jeleket: feszültséget, áramerősséget, stb vizsgálja. Egy ki- és bemenet párt portnak neveznek, ha a rajta ki- és befolyó áram azonos nagyságú és ellentétes irányú. Ezt nevezik port feltételnek. Az olyan rendszereket, melyeken n ilyen pár található, n-port hálózatoknak nevezik. Könnyen látható, hogy 1-port hálózatok esetén a port feltétel éppen az első Kirchhoff-törvénynek felel meg.

1.1. ábra. Egy 2-port hálózat sematikus rajza.

Egy n-port hálózatban minden porthoz tartozik egy feszültség és egy áramerősség érték, így ezek n-dimenziós, valós vektorokként reprezentálhatóak. Jelölje őket rendre $U, I \in \mathbb{R}^n$. Ohm-törvényéhez hasonlóan, itt is a feszültség és áramerősség kapcsolatát $U = Z \cdot I$ alakban lehet felírni, ahol $Z \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix, az úgynevezett impedancia mátrix. Ha a rendszert mint időben változó folyamatot szeretnénk vizsgálni, akkor n-dimenziós valós vektorok helyett $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ függvényekként reprezentálhatjuk a feszültséget és az áramerősséget. Később a definíciót kiterjesztették végtelen portszámú esetre is, ezt nevezik Hilbert-portnak [10]. A gyakorlatban az U és I vektorok mérésekkel előállíthatóak, melyekből Z kiszámítható.

A következőkben tekintsünk két konkrét problémát, melynek általános megválaszolása egy-egy önmagában is nagyon érdekes fogalomhoz vezet el minket.

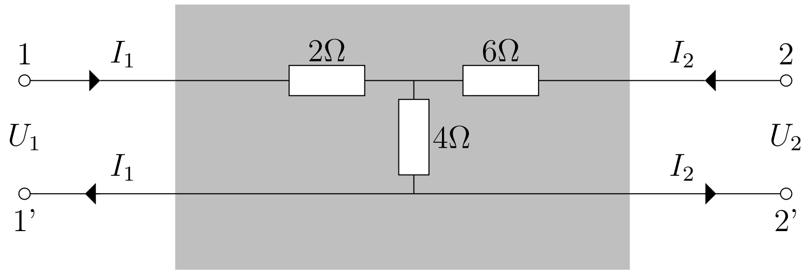
1.2. Rövidzárlat n-port hálózatokban

Tekintsünk egy tetszőleges n-port hálózatot. Tegyük fel, hogy $k \in \mathbb{N}^+$ portján rövidzárlat lép fel, ami alatt azt értjük, hogy ezeken a portokon a ki- és bemeneteket összekötjük, itt áram nem folyik.

1.2. ábra. Zárlat egy 2-port hálózaton.

A kérdés, ami első körben foglalkoztat minket; meg tudjuk-e kímélni magunkat a sok méréstől és számolástól, ha az így keletkezett $n-k$-port hálózat impedancia mátrixát szeretnénk meghatározni?

Első körben vegyünk egy egyszerű 2-port hálózatot és jelölje ennek impedancia mátrixát Z.



1.3. ábra. Példa egy 2-port hálózatra.

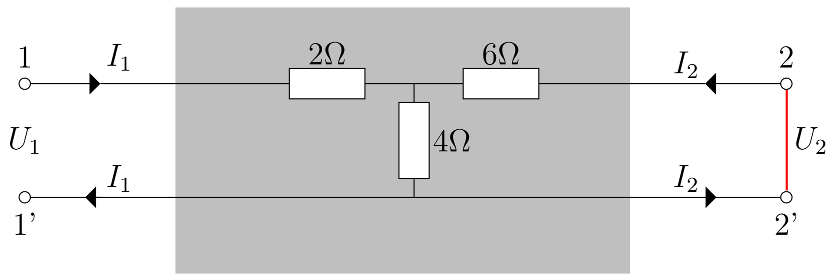
Az 1.3. ábrán látható hálózat impedancia mátrixának meghatározásához írjuk fel Kirchhoff első és második törvényét, melyből az

$$\begin{cases} U_1 = 6 \cdot I_1 + 4 \cdot I_2 \\ U_2 = 4 \cdot I_1 + 10 \cdot I_2 \end{cases}$$

egyenletrendszer adódik, ahonnan könnyen leolvasható, hogy a rendszer impedancia mátrixa:

$$Z = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Zárjuk most rövidre a hálózat második portját.



1.4. ábra. A fenti hálózat rövidre zárása.

Nyilvánvaló, hogy ezzel egy 1-port hálózathoz jutottunk, a kérdés pedig az, hogy mi ennek az új hálózatnak az impedancia mátrixa (jelen esetben egy 1×1-es mátrixról van szól) és ami még fontosabb, miként állíthatjuk ezt elő Z ismeretében?

Idézzük fel azt a fizikából jól ismert tényt, hogy ha egy R_1 és R_2 értékű ellenállást párhuzamosan kapcsolunk, akkor a kapott új ellenállás eredő ellenállása $\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$. Tartsuk ezt észben, ugyanis ez a formula a későbbiekben még vissza fog köszönni!
Az 1.4. ábrára ránézve azt látjuk, hogy a 6Ω-os és 4Ω-os ellenállások párhuzamos kapcsolásba kerültek, így ezek egy $\frac{1}{\frac{1}{6\Omega}+\frac{1}{4\Omega}} = 2.4\Omega$ eredő ellenállású ellenállással helyettesíthetőek. Kihasználva, hogy ez az új 2.4Ω-os ellenállás egy 2Ω-os ellenállással került soros kapcsolásba, megkapjuk, hogy az új eredő $4,4\Omega$.

Erre tekinthetünk úgy is, mint

$$Z' = \begin{bmatrix} 4,4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ezen jól látszik, hogy a zárlatos áramkör mátrixa olyan, amely az áram folyását bekényszeríti egy alacsonyabb dimenzió altérbe, a zárlatos portokon pedig nem lehet feszültség. Később látni fogjuk, hogy az így kapott impedancia valamilyen értelemben csökkent az eredetihez képest. Sőt, ez a felírás lehetőséget ad arra is, hogy az eredeti Z mátrix függvényében, mátrixművelet segítségével kifejezzük Z'-t. Ha kis ideig figyelmesen nézzük a két mátrixot, akkor észrevehetjük, hogy

$$Z' = \begin{bmatrix} Z_{1,1} - Z_{1,2}Z_{2,2}^{-1}Z_{2,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

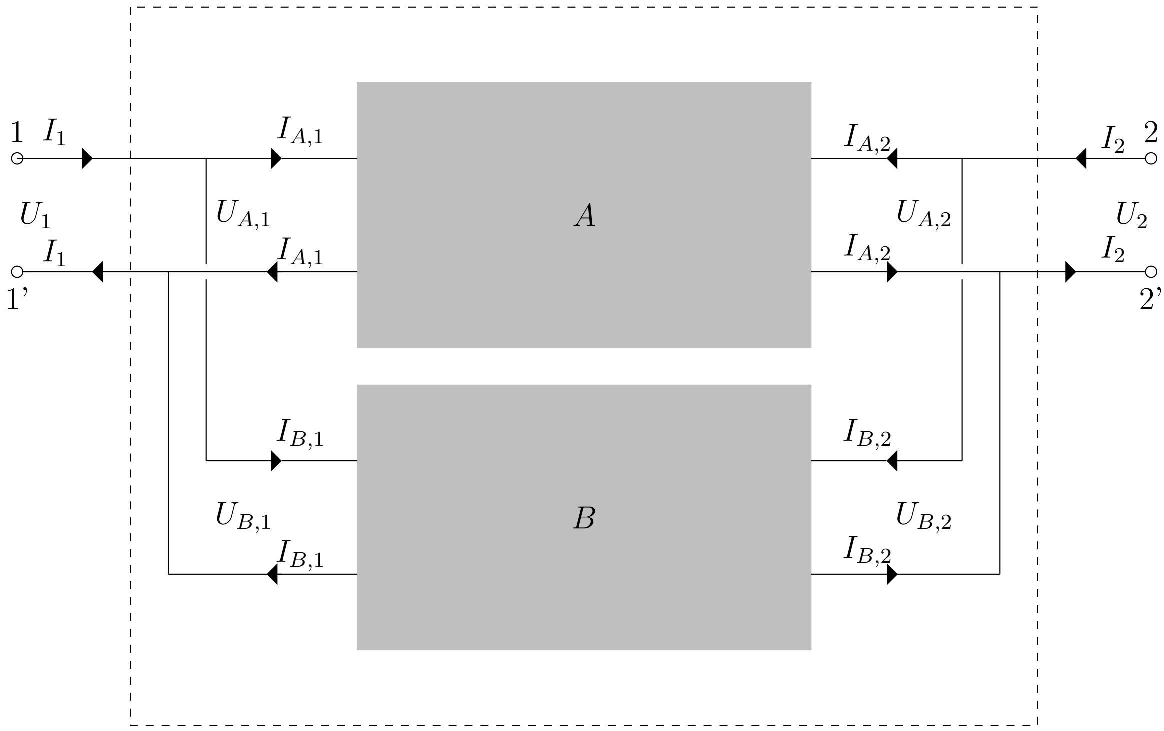
azaz tényleg elő tudtuk állítani Z'-t közvetlenül Z-ből. Az itt látható formula viszont nem csak 2-port hálózatok esetén érvényes. Ha $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy csak ohmos ellenállásokat tartalmazó n-port hálózat impedancia mátrixa, melyen $s \in \mathbb{N}^+$ darab port záródik rövidre, akkor a fenti formula úgy alkalmazható, hogy $\mathbb{R}^{n\times n}$-t felbontjuk a zárlatos portokat tartalmazó s dimenziós $\mathcal{S}$ altér és ortokomplementerének direkt összegére, amely megadja a 4 részből álló

$$Z_{11}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S},\ Z_{21}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}^\perp,\ Z_{12}\colon \mathcal{S}^\perp \to \mathcal{S},\ Z_{22}\colon \mathcal{S}^\perp \to \mathcal{S}^\perp$$

blokkmátrixos felbontást. Ezekkel a blokkmátrixokkal a Z' meghatározására használt formula ismét használható. Ez a formula igazolható fizikai megfontolásokat használva is, de a következő fejezetben látni fogjuk, hogy valójában itt egy sokkal általánosabb fogalom egy speciális esetével állunk szemben.

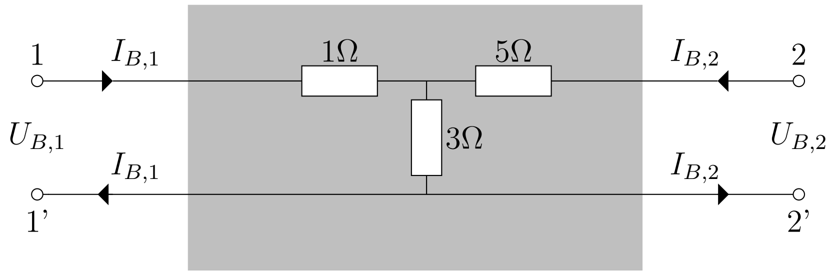
1.3. n-port hálózatok párhuzamos kapcsolása

A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy ha adott két n-port hálózat (jelölje őket A és B), akkor azokat összekapcsolva, miként tudjuk a kapcsolt hálózat impedancia mátrixát meghatározni, ha csak Z_A és Z_B ismert. Két klasszikus kapcsolási módszer az n-portok körében is a soros és párhuzamos kapcsolás. Soros kapcsolás alatt azt értjük, hogy az egyik hálózat bemenetére a másik hálózat kimenetét kötjük. Soros kapcsolás esetén – csakúgy mint 1-portoknál – az impedanciák egyszerűen összeadódnak. A párhuzamos kapcsolás itt azt jelenti, hogy a két hálózatban a bemenetet bemenettel, a kimenetet kimenettel kötjük össze.



1.5. ábra. 2-port hálózatok párhuzamos kapcsolása.

Példaként tekintsük ismét az iménti, az 1.3. ábrán látható hálózatot és vegyük mellé az alábbit:



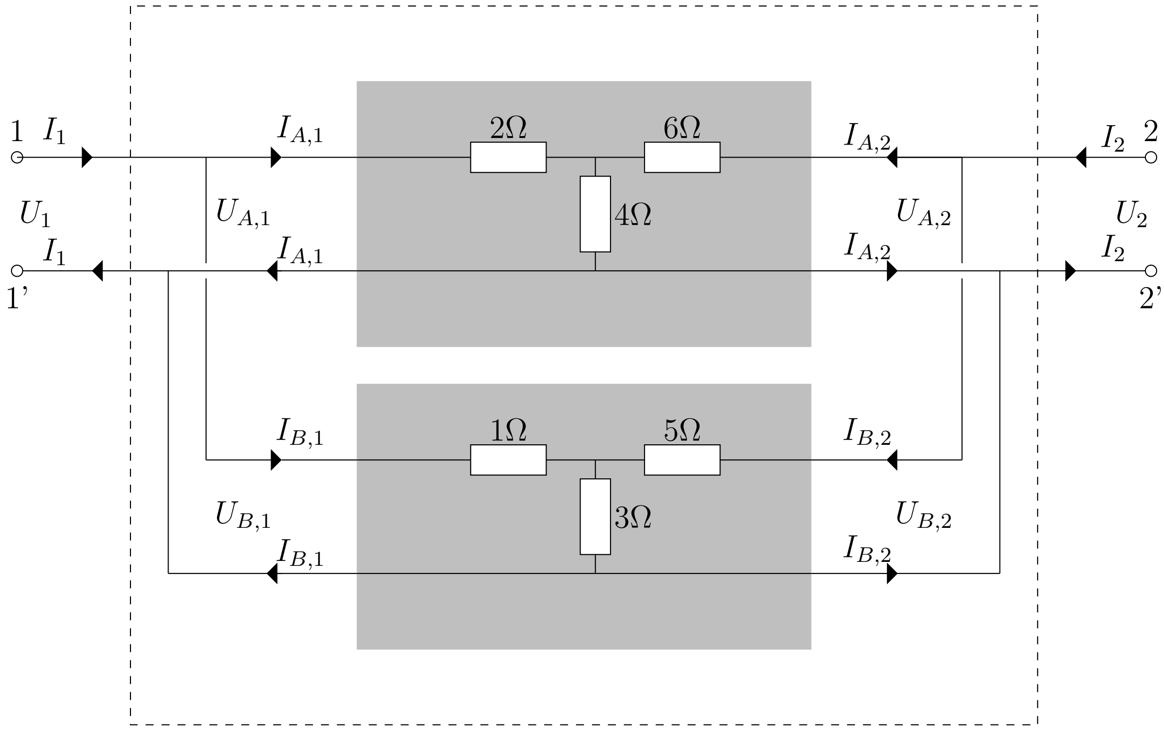
Jelölje őket A és B, impedancia mátrixaikat pedig rendre Z_A, Z_B. Az előbbiekhez hasonlóan adódik, hogy

$$Z_B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix},$$

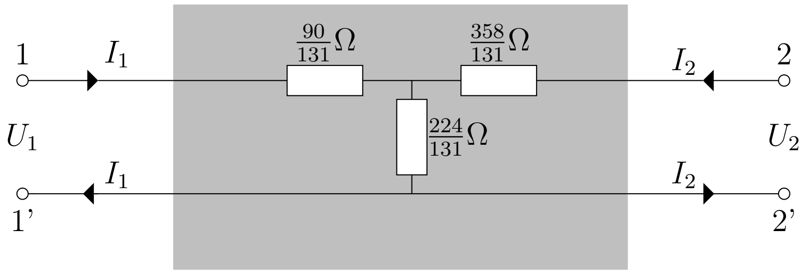
azt pedig már láttuk, hogy

$$Z_A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Ekkor ezek párhuzamos kapcsolása:



Ha szeretnénk meghatározni ennek az új 2-port hálózatnak az impedancia mátrixát, akkor a fizika eszközeihez nyúlva a következő egy lehetséges érvelés: mindkét hálózatban egy-egy csillag kapcsolás található. Alkalmazzuk ezekre a csillag-delta átalakítást, ekkor két párhuzamosan kapcsolt delta kapcsolásunk lesz. Ez azonos azzal a delta kapcsolással, melynek minden eleme a két delta megfelelő elemeinek párhuzamos kapcsoltja. Ezekre rendre alkalmazva a két ellenállás párhuzamos kapcsolására ismert képletet, majd az eredő ellenállásokból álló delta kapcsolásra használva a delta-csillag átalakítást, a következő, az eredetivel ekvivalens 2-port hálózathoz jutunk:



1.6. ábra. A kapott ekvivalens 2-port hálózat.

Erre a hálózatra alkalmazva a Kirchhoff-törvényeket, már könnyen kapjuk, hogy a párhuzamos hálózat eredő impedanciája

$$Z' = \begin{bmatrix} \frac{314}{131} & \frac{224}{131} \\ \frac{224}{131} & \frac{582}{131} \end{bmatrix}.$$

Láthatjuk, hogy a kiszámítás elég körülményes volt. Könnyen elképzelhető, hogy bonyolultabb rendszerek esetén a kiszámítás még nehézkesebbé válik. Látszólag nem elég tudni, a két rendszer impedanciáját, de ismernünk kell a rendszerek belső szerkezetét is, ami a fekete doboz tulajdonság feltételezése esetén nem lehetséges. Viszont erre az ismeretre csak látszólag van szükségünk, ha a fentitől egy eltérő megközelítést alkalmazunk, akkor igazolható, hogy

$$Z' = (Z_A^{-1} + Z_B^{-1})^{-1}.$$

A formula levezetésétől eltekintünk, ugyanis túl mély matematikai megfontolásokat nem igényel, fizikai érvelésekkel belátható. Azonban a formula által a problémát egy algoritmikusan kiszámítható feladatra vezettük vissza. A következő fejezetben látni fogjuk, hogy a zárlatos esethez hasonlóan, itt is egy sokkal általánosabb fogalom egy szép speciális esetével állunk csak szemben.

2. fejezet

Infimum probléma és zárlat operátor a Löwner-rendezésben

Az előző fejezetben láttuk, hogy sok nehézségtől kímélhetjük meg magunkat, ha az ott prezentált problémákra egy-egy mátrixműveleteket alkalmazó általános formulát származtatunk. Az ott adott formulák igazolhatóak fizikai okoskodásokkal, de ahhoz, hogy mélyebb értelmet adjunk nekik, hogy igazán rá tudjunk világítani, hogy a formulák miért pont ilyen alakúak, ahhoz jóval távolabbról kell indítanunk a vizsgálódásainkat.

Eddig csak mátrixokkal dolgoztunk, most azonban áttérünk általános esetre: Hilbert-terek operátoraira, így együtt kezelhetjük a véges és végtelen dimenziós eseteket. Legyen $(\mathscr{H}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ komplex Hilbert-tér. A továbbiakban jelölje $\mathbf{B}(\mathscr{H})$ a $\mathscr{H}$-ból $\mathscr{H}$-ba képező korlátos lineáris operátorok halmazát, $\mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ pedig ennek a csak pozitív szemidefinit operátorokat tartalmazó részhalmazát. A dolgozatban a következő terminológiát követjük: $\mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ elemeit pozitív, $\mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ invertálható elemeit szigorúan pozitív operátoroknak nevezzük. A $\mathbf{B}(\mathscr{H})$ operátoralgebra különböző részhalmazain több részbenrendezés is létezik. Először egy jól ismerttel, a csak $\mathbf{B}_+(\mathscr{H})$-n értelmezett Löwner-rendezéssel kezdjük.

2.0.1. Definíció: *Legyenek $A, B \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ operátorok. Azt mondjuk, hogy $A \leq B$ a Löwner-rendezésben, ha*

$$\forall x \in \mathscr{H}\colon \langle Ax \mid x \rangle \leq \langle Bx \mid x \rangle.$$

2.0.2. Megjegyzés: Könnyen belátható, hogy az így definiált reláció valóban részbenrendezés. Fontos azonban, hogy ez nem teljes rendezés, ugyanis nem teljesül a trichotómia. Könnyű találni olyan A, B mátrixokat és hozzájuk x, y vektorokat, melyekre $\langle Ax \mid x \rangle \leq$

$\langle Bx \mid x\rangle$ viszont $\langle Ay \mid y\rangle > \langle By \mid y\rangle$. Például

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

választással ez áll fenn.

2.1. Az operátor zárlat

A fejezet további részében Anderson és szerzőtársainak eredményeit dolgozzuk fel [2, 1]. A leírt állítások bizonyítását nem részletezzük, ezek megtalálhatók a BSc szakdolgozatban [11].

Most visszatérünk az előző fejezetben látott zárlatos n-port hálózatok problémájához, immár absztrakt matematikai irányból közelítve. Eddig az áramokat $\mathbb{R}^n$-ből vettük, tekintsünk most helyettük $x \in \mathscr{H}$ vektorokat. Legyen $C \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$. Ekkor a véges dimenziós analógia alapján $Cx \in \mathscr{H}$ elemek reprezentálják a feszültségeket. Vegyük észre, hogy ezek épp $\operatorname{ran}(C)$-t adják. Emiatt az a tulajdonság, hogy a zárlat után feszültség csak a nem zárlatos részben lehet, az formalizálható úgy, hogy $\operatorname{ran}(C) \subseteq \mathcal{S}$, ahol az $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{H}$ zárt altér játssza a nem zárlatos portok szerepét. Ha $A \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ az eredeti impedanciával analóg, akkor az impedancia csökkenése úgy formalizálható, hogy $C \leq A$. Ezek alapján értelmes ötlet a zárlatos hálózat hálózat márixát (vagy általánosan ebben a kontextusban azzal analóg operátort) az alábbi halmaz elemeként keresni:

2.1.1. Definíció: *Legyen $A \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ és $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{H}$ zárt altér.*

$$\mathcal{M}(A, \mathcal{S}) := \{C \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H}) \mid C \in [0, A];\ \operatorname{ran}(C) \subset \mathcal{S}\}.$$

Némi gondolkodással az is látható, hogy az impedancia a "szükségesnél" tovább nem csökken, így az $\mathcal{M}(A, \mathcal{S})$ elemei közül a legnagyobbat kellene vegyük. Viszont egy ilyen bonyolult szerkezetű halmaznak korántsem triviális, hogy létezik legnagyobb eleme. Erre ad pozitív választ a következő tétel. Itt a bizonyításnak csak a vázát adjuk meg, a részletek megtalálhatók [11]-ben.

2.1.2. Tétel: *Ha $A \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ és $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{H}$ zárt altér, akkor az $\mathcal{M}(A, \mathcal{S})$ halmaznak létezik legnagyobb eleme és ez egyértelmű. Ezt az egyértelműen legnagyobb elemet $\Sigma(A, \mathcal{S})$-sel jelöljük és az A operátor $\mathcal{S}$ altérre vett zárlatának nevezzük.*

Bizonyítás: A tételt csak vázlatosan igazoljuk, a részletes bizonyítás megtalálható a [11] szakdolgozatban. Az egyértelműség azonnal következik abból, hogy a zárlat operátor az $\mathcal{M}(A,\mathcal{S})$ halmaz legnagyobb eleme. A létezés igazolásához először feltesszük, hogy az A operátor invertálható. Az $\mathcal{S}$ altér zárt, így alkalmazhatjuk a Riesz-féle ortogonális felbontást, melyben $\mathscr{H} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp$. Ekkor az A operátor is felbontható aszerint, hogy a tér melyik részéből melyikbe képez, ezáltal az

$$A_{11}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S},\ A_{21}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}^\perp,\ A_{12}\colon \mathcal{S}^\perp \to \mathcal{S},\ A_{22}\colon \mathcal{S}^\perp \to \mathcal{S}^\perp$$

operátorokhoz jutunk. Definiáljuk a

$$\Sigma(A,\mathcal{S}) = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

operátort, melyről elég technikás számolások árán ugyan, de igazolható, hogy eleme az $\mathcal{M}(A,\mathcal{S})$ halmaznak. Ezután igazolnunk kell még, hogy $\Sigma(A,\mathcal{S})$ tényleg legnagyobb elem. Ehhez tekintsünk egy tetszőleges $D \in \mathcal{M}(A,\mathcal{S})$ elemet, megmutatjuk, hogy $D \le \Sigma(A,\mathcal{S})$. Mivel $\operatorname{ran}(D) \subset \mathcal{S}$, ezért D a felbontás szerint

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alakban írható fel. Emiatt tetszőleges $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \in \mathscr{H}$ esetén $\langle D\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mid \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]\rangle = \langle D_{11}x \mid x\rangle$, így D kvadratikus alakja független y választásától. Felhasználva, hogy $D \le A$, kapjuk hogy

$$\left\langle D\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\rangle = \left\langle D\begin{bmatrix} x \\ -A_{22}^{-1}A_{21}x \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ -A_{22}^{-1}A_{21}x \end{bmatrix}\right\rangle \le$$
$$\left\langle A\begin{bmatrix} x \\ -A_{22}^{-1}A_{21}x \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ -A_{22}^{-1}A_{21}x \end{bmatrix}\right\rangle = \left\langle \Sigma(A,\mathcal{S})\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\rangle,$$

tehát valóban $D \le \Sigma(A,\mathcal{S})$. Azaz valóban $\Sigma(A,\mathcal{S})$ az $\mathcal{M}(A,\mathcal{S})$ halmaz legnagyobb eleme, mellyel az állítást invertálható operátorok esetére igazoltuk. Nem invertálható esetben az a bizonyítás ötlete, hogy veszünk egy, a nulla operátorhoz erősen konvergáló pozitív operátor sorozatot, melyet A-hoz hozzáadva egy invertálható, A-hoz erősen konvergáló operátorsorozatot kapunk. A nem invertálható eset innen már határátmenettel adódik. ■

Lényeges megemlíteni, hogy a fenti tétel nagyon erős dolgot állít, nem maximális elemről beszél, hanem legnagyobb elemet garantál. Tekintve, hogy a Löwner-rendezés csak részbenrendezés, emiatt a kettő lényegesen eltérő fogalom. Ha egy elem legnagyobb, az jóval erősebb tulajdonság, ugyanis legnagyobb elemből csak egy létezhet és a legnagyobb elem minden más elemmel össze is hasonlítható.

Külön kiemeljük az invertálható operátorok esetét, mert az előző tételben megkaptuk a $\Sigma(A,\mathcal{S})$ operátornak egy blokkmátrix előaállítását.

2.1.3. Következmény: Legyen $A \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ invertálható operátor és $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{H}$ zárt altér. Tekintsük a tér $\mathscr{H} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp$ alakú felbontását és az operátor ezáltali

$$A_{11}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S},\ A_{21}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}^\perp,\ A_{12}\colon \mathcal{S}^\perp \to \mathcal{S},\ A_{22}\colon \mathcal{S}^\perp \to \mathcal{S}^\perp$$

particionálását. Ekkor

$$\Sigma(A,\mathcal{S}) = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A nem invertálható esetben is van mihez nyúlnunk, ugyanis a zárlat operátor kvadratikus alakja formulával megadható, ez pedig komplex Hilbert-terekben egyértelműen meghatározza magát az operátort is. A kvadratikus alak által generált sesquilineáris forma ugyanis a Riesz-reprezentáció által egyértelműen megad egy korlátos lineáris operátort.

2.1.4. Tétel: *Legyen $A \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ operátor és $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{H}$ zárt altér, $x \in \mathcal{S}$ pedig tetszőleges. Ekkor*

$$\langle \Sigma(A,\mathcal{S})x \mid x\rangle = \inf\{\langle A(x-y) \mid x-y\rangle \mid y \in \mathcal{S}^\perp\}.$$

Bizonyítás: Nyilvánvaló, hogy a formula ekvivalens azzal, ha y helyére $-y$-t helyettesítünk. Ekkor az igazolandó, hogy

$$\langle \Sigma(A,\mathcal{S})x \mid x\rangle = \inf\left\{\left\langle A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\rangle \,\middle|\, y \in \mathcal{S}^\perp\right\}.$$

Az $\langle \Sigma(A,\mathcal{S})x \mid x\rangle$ alsó korlátja a halmaznak, ugyanis $\Sigma(A,\mathcal{S}) \leq A$. Ha A invertálható operátor, akkor $y = -A_{22}^{-1}A_{21}x \in \mathcal{S}^\perp$ választással az adódik, hogy

$$\langle \Sigma(A,\mathcal{S})x \mid x\rangle = \left\langle A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\rangle,$$

így $\langle \Sigma(A,\mathcal{S})x \mid x\rangle$ a halmaz legkisebb eleme, mellyel a formulát invertálható esetben igazoltuk. A nem invertálható eset bizonyításához tekintsünk a halmaznak egy tetszőleges

α alsó korlátját, továbbá legyen $\varepsilon > 0$ szintén tetszőleges. Ekkor felhasználva, hogy $A \leq A + \varepsilon I$ és α alsó korlát, adódik, hogy minden $x \in \mathcal{S}$ és $y \in \mathcal{S}^\perp$ esetén

$$\alpha \leq \left\langle A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle \leq \left\langle (A + \varepsilon I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Ekkor viszont $A + \varepsilon I$ már invertálható operátor, így az előző esetben látottak szerint y választható úgy, hogy $A + \varepsilon I$ kvadratikus alakja megegyezzen $\Sigma(A + \varepsilon I, \mathcal{S})$ kvadratikus alakjával. Ebből viszont adódik, hogy minden pozitív ε esetén

$$\alpha \leq \langle \Sigma(A + \varepsilon I, \mathcal{S})x \mid x \rangle,$$

melyből nyilván adódik, hogy $\alpha \leq \langle \Sigma(A, \mathcal{S})x \mid x \rangle$. Ezzel igazoltuk, hogy $\langle \Sigma(A, \mathcal{S})x \mid x \rangle$ nemcsak alsó korlát, de minden más alsó korlátnál nagyobb is, így valóban ő az infimum. Így a formula valóban teljesül tetszőleges $A \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ operátorra. ■

2.1.5. Tétel: *Legyen $A \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ operátor és $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{H}$ zárt altér, továbbá*

$$\mathcal{N}(A, \mathcal{S}) := \{PAP^* \mid P^2 = P,\ \mathrm{ran}(P) = \mathcal{S}\}.$$

Ekkor $\Sigma(A, \mathcal{S}) = \inf \mathcal{N}(A, \mathcal{S})$.

Bizonyítás: Először invertálható operátorokra bizonyítunk. Ha A invertálható, akkor a

$$P := \begin{bmatrix} I & Q - A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

definíció értelmes tetszőleges Q esetén. Ekkor ezzel a P operátorral

$$PAP^* = \begin{bmatrix} \Sigma(A, \mathcal{S}) + QA_{22}Q^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel Q tetszőleges, így $Q = 0$ választással PAP^* a halmaz minimuma, így ebben az esetben az állítás teljesül. Nem invertálható esetben tekintsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. Ekkor bármely P esetén

$$\Sigma(A, \mathcal{S}) \leq \Sigma(A + \varepsilon I, \mathcal{S}) \leq P(A + \varepsilon I)P^* = PAP^* + \varepsilon PP^*,$$

így $\Sigma(A, \mathcal{S})$ alsó korlátja az $\mathcal{N}(A, \mathcal{S})$ halmaznak. Vegyünk egy tetszőleges B alsó korlátot, megmutatjuk, hogy $B \leq \Sigma(A, \mathcal{S})$. Mivel B alsó korlát, így minden P-re

$$B \leq PAP^* \leq P(A + \varepsilon I)P^*.$$

Ekkor $A + \varepsilon I$ már invertálható, így

$$P(A + \varepsilon I)P^* = \Sigma(A + \varepsilon I, \mathcal{S}),$$

tehát $B \leq \Sigma(A + \varepsilon I, \mathcal{S})$ minden $\varepsilon > 0$ esetén. Ebből pedig következik, hogy $B \leq \Sigma(A, \mathcal{S})$, azaz $\Sigma(A, \mathcal{S})$ olyan alsó korlát, mely nagyobb tetszőleges másik alsó korlátnál, így legnagyobb alsó korlát. ∎

Most megvizsgáljuk, hogy mi történik akkor, ha egy pozitív operátornak egymás után két zárt altérre nézve is vesszük a zárlatát.

2.1.6. Állítás: *Legyen $A \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ operátor és $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subseteq \mathscr{H}$ zárt alterek. Ekkor $\Sigma(\Sigma(A, \mathcal{T}), \mathcal{S}) = \Sigma(A, \mathcal{S} \cap \mathcal{T})$.*

Bizonyítás: Tekintsük az

$$\mathcal{M}_1 := \mathcal{M}(A, \mathcal{S} \cap \mathcal{T}) = \{D \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H}) \mid D \leq A,\ \mathrm{ran}(D) \subseteq \mathcal{S} \cap \mathcal{T}\}$$
$$\mathcal{M}_2 := \mathcal{M}(\Sigma(A, \mathcal{T}), \mathcal{S}) = \{D \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H}) \mid D \leq \Sigma(A, \mathcal{T}),\ \mathrm{ran}(D) \subseteq \mathcal{S}\}$$

halmazokat. A bizonyítás ötlete, hogy megmutatjuk, hogy $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$, így szükségszerűen a legnagyobb elemeik is megegyeznek. Tegyük fel, hogy $D \in \mathcal{M}_1$, így ekkor $D \leq A$ és $\mathrm{ran}(D) \subseteq \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$, melyből nyilván $\mathrm{ran}(D) \subseteq \mathcal{T}$ is következik. Ez épp azt jelenti, hogy $D \in \mathcal{M}(A, \mathcal{T})$, melynek viszont $\Sigma(A, \mathcal{T})$ a legnagyobb eleme, így $D \leq \Sigma(A, \mathcal{T})$. Másrészt $\mathrm{ran}(D) \subseteq \mathcal{T}$, így $D \in \mathcal{M}_2$.

Most tegyük fel, hogy $D \in \mathcal{M}_2$, megmutatjuk hogy $D \in \mathcal{M}_1$ is fennáll. A $D \in \mathcal{M}_2$ feltételezés miatt $\mathrm{ran}(D) \subseteq \mathcal{S}$ és $D \leq \Sigma(A, \mathcal{T})$ definíció szerint, ez utóbbi miatt pedig $\mathrm{ran}(D) \subseteq \mathcal{T}$ is fennáll. Összességében tehát $\mathrm{ran}(D) \subseteq \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$. Továbbá $\Sigma(A, \mathcal{T}) \leq A$ miatt $D \leq A$ is teljesül, így valóban $D \in \mathcal{M}_1$. Ezzel igazoltuk a halmazokra nézve a kölcsönös tartalmazást, ezzel pedig az állítást beláttuk. ∎

Az állításnak van két nyilvánvaló következménye, ha az $\mathcal{S}$ és $\mathcal{T}$ altereket speciálisan választjuk meg. Ezeket szemlélteti a következő két állítás.

2.1.7. Következmény: Legyen $A \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ operátor és $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{H}$ zárt altért. Ekkor $\Sigma(\Sigma(A, \mathcal{S}), \mathcal{S}) = \Sigma(A, \mathcal{S})$.

2.1.8. Következmény: Tekintsünk egy $A \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ operátort és $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subset \mathscr{H}$ zárt altereket és tegyük fel, hogy $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. Ekkor $\Sigma(\Sigma(A, \mathcal{T}), \mathcal{S}) = \Sigma(A, \mathcal{T})$.

Nem csak az alterek megfelelő megválasztásával, de speciális operátorok esetén is könnyebben kiszámíthatjuk az operátor zárlatot. Korábban láttuk ezt az invertálható operátorok esetére. Most megmutatjuk, hogy mi a helyzet, ha az operátorunk ortogonális projekció.

2.1.9. Következmény: Tegyük fel, hogy $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subseteq \mathscr{H}$ zárt alterek és A ortogonális projekció $\mathcal{T}$-re. Ekkor $\Sigma(A, \mathcal{S})$ ortogonális projekció $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$-re.

Bizonyítás: Jelölje Q az $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$-re vett ortogonális projekciót. Mivel $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}$, ezért $Q \leq A$ és hasonlóan $\operatorname{ran}(Q) \subseteq \mathcal{S}$. Ez azt jelenti, hogy $Q \in \mathcal{M}(A, \mathcal{S})$, most megmutatjuk, hogy Q a legnagyobb elem. Legyen $D \in \mathcal{M}(A, \mathcal{S})$ tetszőleges. Mivel $Q = A$ az $\mathcal{S}$ altéren, így $D \leq Q$. Ekkor viszont Q legnagyobb elem, azaz $Q = \Sigma(A, \mathcal{S})$ valóban fennáll. ■

Általánosságban elmondható, hogy ha két operátor összegének vesszük a zárlatát egy zárt altérre, akkor az nem egyezik meg a zárlatok összegével. Erre ad magyarázatot a következő állítás.

2.1.10. Állítás: *Legyenek $A, B \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ operátorok és $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{H}$ zárt altér. Ekkor a*

$$\Sigma(A, \mathcal{S}) + \Sigma(B, \mathcal{S}) \leq \Sigma(A + B, \mathcal{S})$$

egyenlőtlenség áll fenn.

Bizonyítás: Definíció szerint $\Sigma(A, \mathcal{S}) \leq A$ és $\Sigma(B, \mathcal{S}) \leq B$, melyből

$$\Sigma(A, \mathcal{S}) + \Sigma(B, \mathcal{S}) \leq A + B$$

következik. Másrészt $\operatorname{ran}(\Sigma(A, \mathcal{S})) \subseteq \mathcal{S}$ és $\operatorname{ran}(\Sigma(B, \mathcal{S})) \subseteq \mathcal{S}$, így $\operatorname{ran}(\Sigma(A, \mathcal{S}) + \Sigma(B, \mathcal{S})) \subseteq \mathcal{S}$. Ezek épp azt jelentik, hogy $\Sigma(A, \mathcal{S}) + \Sigma(B, \mathcal{S}) \in \mathcal{M}(A + B, \mathcal{S})$. Ennek a halmaznak viszont $\Sigma(A + B, \mathcal{S})$ a legnagyobb eleme, így valóban $\Sigma(A, \mathcal{S}) + \Sigma(B, \mathcal{S}) \leq \Sigma(A + B, \mathcal{S})$ teljesül. ■

Végezetül igazoljuk, hogy az operátor zárlat egy monoton operátorfüggvény.

2.1.11. Állítás: *Legyenek $A, B \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ operátorok és tegyük fel, hogy $A \leq B$, továbbá $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{H}$ zárt altér. Ekkor $\Sigma(A, \mathcal{S}) \leq \Sigma(B, \mathcal{S})$.*

Bizonyítás: Mivel $A \leq B$, így $\mathcal{M}(A, \mathcal{S}) \subseteq \mathcal{M}(B, \mathcal{S})$. Ekkor $\Sigma(A, \mathcal{S}), \Sigma(B, \mathcal{S}) \in \mathcal{M}(B, \mathcal{S})$, azonban mivel $\Sigma(B, \mathcal{S})$ ennnek a legnagyobb eleme, így ő biztos összehasonlítható a $\Sigma(A, \mathcal{S})$ operátorral és $\Sigma(A, \mathcal{S}) \leq \Sigma(B, \mathcal{S})$ fennáll. ■

2.2. Párhuzamos összeg

Most ismét visszatérünk az n-port hálózatok párhuzamos kapcsolásának kérdésére, azonban ismét az absztrakt megközelítést választjuk a fizikai okoskodással szemben. Ahogy két hálózat mátrixából a hálózatok párhuzamos kapcsolásával kaptunk egy új mátrixot, úgy szeretnénk ezt a műveletet két tetszőleges $\mathbf{B}_+(\mathscr{H})$-beli operátorra is definiálni. Ezután látni fogjuk, hogy a kapott fogalom speciális esetének visszakapjuk az n-port hálózatok kapcsolásánál látott formulát.

2.2.1. Definíció: *Legyenek $A, B \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ operátorok és $\mathcal{S} := \mathscr{H} \oplus \varnothing \subset \mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$ altér. Ekkor az A és B operátorok párhuzamos összegének nevezzük és $A : B$-vel jelöljük a következő formula által definiált operátort:*

$$\begin{bmatrix} A : B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} := \Sigma\left(\begin{bmatrix} A & A \\ A & A + B \end{bmatrix}, \mathcal{S} \right).$$

Azaz azt láthatjuk, hogy operátorok párhuzamos összege egy zárlat operátorként értelmezhető, amely a végesdimenziós esetre nézve azt is jelenti, hogy képezhető olyan $2n$-port hálózat, aminek a zárlata ekvivalens a hálózatok párhuzamos kapcsoltjával. Ha erre alkalmazzuk a 2.1.4 tételt, akkor kapunk egy formulát a párhuzamos összeg kvadratikus alakjára is.

2.2.2. Tétel: *Legyenek $A, B \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ operátorok és $x \in \mathscr{H}$. Ekkor*

$$\langle (A : B)x \mid x \rangle = \inf\{\langle A(x - y) \mid x - y \rangle + \langle By \mid y \rangle \mid y \in \mathscr{H}\}.$$

Ez a formula sokkal szemléletesebb mint maga a definíció, ha a portelméletre szeretnénk vonatkoztatni. Láttuk, hogy ha a Hilbert-tér elemeit áramoknak feleltetjük meg, akkor az

Ax alakú kifejezések feszültségeket reprezentálnak, ha $x \in \mathscr{H}$ és $A \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$. Így ezek skalárszorzata a hálózat által felvett teljesítményt adja meg. Ha például egyszerű ohmos ellenállásokból álló rendszereket nézünk, akkor az ellenállásokon hő formájában veszteség keletkezik. Ez a veszteség négyzetesen arányos az áram nagyságával. A fenti formulában az infimumom belül azt látjuk, hogy a bemenő x áramot két részre osztja, egy része, $x - y$ megy az A hálózat felé, a maradék y pedig a B felé. Azzal, hogy y befutja $\mathscr{H}$-t, azzal az x áram összes lehetséges két részre bontását tekintjük. Az infimum tehát azt csinálja, hogy az áramnak azt a felbontását veszi, melyben a két hálózaton eső együttes veszteség a lehető legkisebb. Azaz a párhuzamos kapcsolás egy olyan hálózat, amelyben úgy folynak az áramok a két alhálózat felé, hogy ez teljesüljön. Ez az analógia nagyon jól rávilágít arra, hogy miért olyan szemléletes és szép ez a formula.

Ha az operátoraink invertálhatóak, akkor ismét van egy közvetlen módunk a párhuzamos összeg meghatározására. Ahogy az előző fejezetben láttuk speciálisan mátrixokra, úgy általánosan is igaz, hogy ebben az esetben kifejezhető a párhuzamos összeg az operátorok inverzeinek segítségével.

2.2.3. Állítás: *Tegyük fel, hogy $A, B \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ invertálható operátorok. A párhuzamos összegük ilyenkor előáll*

$$A : B = (A^{-1} + B^{-1})^{-1}$$

alakban.

Bizonyítás: Definíció alapján az $A : B$ egy operátor zárlat formájában áll elő. Az invertálhatóságra vonatkozó feltételeink miatt alkalmazható az invertálható operátor zárlatára vonatkozó 2.1.3 formula. Ez alapján kapjuk, hogy

$$A : B = A - A(A + B)^{-1}A.$$

Azt kell igazolnunk, hogy

$$A - A(A + B)^{-1}A = (A^{-1} + B^{-1})^{-1}.$$

. Ehhez ezt az egyenlőséget fogjuk érvényes algebrai átalakítások segítségével nullára rendezni. Először mindkét oldalt $A^{-1} + B^{-1}$-zel jobbról megszorozzuk:

$$\begin{aligned} A - A(A + B)^{-1}A &= (A^{-1} + B^{-1})^{-1} \\ A(A^{-1} + B^{-1}) - A(A + B)^{-1}A(A^{-1} + B^{-1}) &= I \\ I + AB^{-1} - A(A + B)^{-1} - A(A + B)^{-1}AB^{-1} &= I \end{aligned}$$

Majd egyszerűsítés után A^{-1}-zel balról szorzunk:

$$\begin{gathered} AB^{-1} - A(A+B)^{-1} - A(A+B)^{-1}AB^{-1} = 0 \\ AB^{-1} - A(A+B)^{-1}[I + AB^{-1}] = 0 \\ B^{-1} - (A+B)^{-1}[I + AB^{-1}] = 0 \\ B^{-1} = (A+B)^{-1}[I + AB^{-1}] \end{gathered}$$

Mindkét oldalt invertálva, majd B^{-1}-zel balról szorozva kapjuk, hogy:

$$\begin{gathered} B = [I + AB^{-1}](A+B) \\ I = B^{-1}[I + AB^{-1}](A+B) \\ I = [(A+B)^{-1}(I + AB^{-1})B]^{-1} \end{gathered}$$

Végezetül ismét mindkét oldalt invertálva, adódik az egyenlőség:

$$\begin{gathered} I = (A+B)^{-1}(I + AB^{-1})B \\ I = (A+B)^{-1}(B+A) \end{gathered}$$

Sikeresen nullára rendeztük az egyenlőséget, ezzel a formulát igazoltuk. ■

2.2.4. Tétel: *Legyenek $A, B, C, D \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ operátorok. Ekkor a párhuzamos összegre a következő tulajdonságok teljesülnek:*

1. $A : B \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$
2. $A : B = B : A$
3. $A : (B : C) = (A : B) : C$
4. $A : B \leq A$ *és* $A : B \leq B$
5. $(A + B) : (C + D) \geq A : C + B : D$
6. *ha* $A \leq B$, *akkor* $A : C \leq B : C$
7. $\forall \alpha, \beta > 0$: $(\alpha A) : (\beta A) = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} A$

8. ha $A \leq B$ és $C \leq D$, akkor $A : C \leq B : D$

Bizonyítás: Az első állítás csupán annyin múlik, hogy a párhuzamos összeg egy operátor zárlatként van definiálva, pozitív operátorok zárlata pedig mindig pozitív.

Most tegyük fel, hogy A, B, C invertálható operátorok. Ekkor a 2.2.3 miatt $A : B = (A^{-1} + B^{-1})^{-1}$ és

$$A : (B : C) = (A : B) : C = (A^{-1} + B^{-1} + C^{-1})^{-1}.$$

Ha az operátorok nem invertálhatóak, akkor tekintsünk egy szigorúan monoton csökkenő módon nullához konvergáló $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot és vegyük az $A+\varepsilon_n I$, $B+\varepsilon_n I$, $C+\varepsilon_n I$ operátorsorozatokat, melyek ekkor már pozitív operátorok, így alkalmazható rájuk a formula. Ekkor $n \to \infty$ határátmenettel kapjuk az állítást a nem invertálható esetben, mellyel a második és harmadik állításokat igazoltuk.

A negyedik állítás igazolása ismét a párhuzamos összeg operátor zárlatként való definiálásán múlik. Nyilván $A : B \leq A$ teljesül az operátor zárlat tulajdonságai alapján. A másik egyenlőség igazolásához cseréljük fel A és B szerepét, ekkor az első egyenlőséget felhasználva $B : A \leq B$, amely pedig a második állítás felhasználásával épp azt jelenti, hogy $A : B \leq B$.

Az ötödik állítás azonnal adódik, ha felírjuk mindhárom párhuzamos összeg definícióját és alkalmazzuk az operátor zárlat azon tulajdonságát, miszerint összeg zárlata nagyobb mint a zárlatok összege. Nevezetesen:

$$\begin{bmatrix} (A+B):(C+D) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \Sigma\left(\begin{bmatrix} A+B & A+B \\ A+B & A+B+C+D \end{bmatrix}, \mathscr{H} \oplus \varnothing\right) =$$
$$= \Sigma\left(\begin{bmatrix} A & A \\ A & A+C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & B \\ B & B+D \end{bmatrix}, \mathscr{H} \oplus \varnothing\right) \geq$$
$$\geq \Sigma\left(\begin{bmatrix} A & A \\ A & A+C \end{bmatrix}, \mathscr{H} \oplus \varnothing\right) + \Sigma\left(\begin{bmatrix} B & B \\ B & B+D \end{bmatrix}, \mathscr{H} \oplus \varnothing\right) =$$
$$= \begin{bmatrix} A:C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B:D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A hatodik állítás igazolásához vegyük észre, hogy ha $A, B \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$, akkor $B - A \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$, majd használjuk az ötödik állítást:

$$B : C = (A + (B - A)) : (C + 0) \geq A : C + (B - A) : 0.$$

A hetedik állítás bizonyításához tegyük fel először, hogy A invertálható operátor és $\alpha, \beta > 0$, majd írjuk fel az $(\alpha A) : (\beta A)$ párhuzamos összeget definíció szerint:

$$(\alpha A) : (\beta A) = \Sigma\left(\begin{bmatrix} \alpha A & \alpha A \\ \alpha A & \alpha A + \beta B \end{bmatrix}, \mathscr{H} \oplus \varnothing\right).$$

Az invertálhatóság miatt a 2.1.3 állítás felhasználásával kapjuk, hogy az operátor zárlat felírható

$$\alpha A - \alpha A \left[(\alpha + \beta) A\right]^{-1} \alpha A$$

alakban. A konstansok kiemelésével, egyszerűsítéssel és közös nevezőre hozással az következőhöz jutunk:

$$\alpha A - \frac{\alpha^2}{\alpha + \beta} A A^{-1} A = \left(\alpha - \frac{\alpha^2}{\alpha + \beta}\right) A = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} A.$$

Így az azonosság invertálhatóság esetén tényleg fennáll. Általános esetben vegyünk egy $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ nullához szigorúan monoton módon konvergáló sorozatot, melyet A-hoz hozzáadva egy $A + \varepsilon_n I$ operátorsorozatot kapunk, mely immár invertálható és erősen tart A-hoz. Erre alkalmazva az előző esetet és határátmenetet véve, az állítást általános esetben is igazoltuk.

Végezetül tegyük fel, hogy $A \leq B$ és $C \leq D$. Ekkor

$$\begin{bmatrix} A & A \\ A & A + C \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} B & B \\ B & B + D \end{bmatrix}$$

teljesül, melyre ha kihasználjuk, hogy az operátor zárlat monoton operátorfüggvény akkor a

$$\Sigma\left(\begin{bmatrix} A & A \\ A & A + C \end{bmatrix}, \mathscr{H} \oplus \varnothing\right) \leq \Sigma\left(\begin{bmatrix} B & B \\ B & B + D \end{bmatrix}, \mathscr{H} \oplus \varnothing\right)$$

egyenlőtlenség adódik. Ez a párhuzamos összeg definíciója szerint pontosan azt jelenti, hogy $A : C \leq B : D$, mellyel az utolsó állítást is igazoltuk.

■

2.3. Infimum probléma

Ezzel elérkeztünk a fejezet fő kérdéséhez, ahol is a Löwner-rendezés háló tulajdonságait fogjuk megvizsgálni. Korábban már részleteztük, hogy a Löwner-rendezés csak részbenrendezés. Azaz léteznek olyan elemek melyek össze nem hasonlíthatóak. Ahogy az operátor zárlatnál láttuk, hogy milyen speciális és nem nyilvánvaló dolog az, hogy operátorok egy halmazának létezik legnagyobb eleme, úgy itt azt fogjuk látni, hogy milyen bonyolult kérdés is az, hogy két operátornak létezik-e infimuma, azaz legnagyobb közös alsó korlátja.

2.3.1. Definíció: *Legyenek $A, B \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ operátorok. Az A és B infimumának nevezzük és $A \wedge B$-vel jelöljük a*

$$\{C \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H}) \mid 0 \leq C \leq A, \quad 0 \leq C \leq B\}$$

halmaz legnagyobb elemét.

2.3.2. Megjegyzés: Az egyszerűség kedvéért az ilyen halmazokat, az operátor intervallum jelölés bevezetésével írhatjuk $[0, A] \cap [0, B]$ alakban.

Annak szemléltetésére, hogy ez mennyire nem triviális kérdés, tekintsünk egy egyszerű példát véges dimenzióban, 2×2-es mátrixokra. Legyenek

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Első ránézésre nehéz lenne kézenfekvőbb jelöltet találni, mint az identitás mátrix. Könnyen látható, hogy $I \leq A$ és $I \leq B$, tehát benne van a $[0, A] \cap [0, B]$ halmazban. Vegyük a következő mátrixot:

$$C := \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Egyszerű számolással igazolható, hogy $A - C, B - C \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ fennáll, tehát

$$C \in [0, A] \cap [0, B].$$

Azaz C egy újabb jelölt lehet az infimum szerepére. Azonban $I - C$ sajátértékeit nézve azt látjuk, hogy ellenkező előjelűek, így a két mátrix nem áll egymással relációban.
Tehát I és C hiába vannak benne a metszetben, egymással nem összehasonlíthatóak, tehát egyik sem legnagyobb elem, így pedig infimum sem lehet egyik sem. Persze ez még nem jelenti azt, hogy ne lehetne egy más, bonyolultabb szerkezetű mátrix az infimum. Később azonban látni fogjuk, hogy valójában $A \wedge B$ nem is létezik.

Látjuk tehát, hogy az infimum létezése nem magától értetődő. Jó volna tehát szükséges és elégséges feltételt találni erre. A kérdésünkre a választ ismét az operátor zárlat fogja megadni, vagy legalábbis annak egy általánosítása.

Az operátor zárlat definiálásánál láttuk, hogy az altér, amelyre nézve a zárlatot vesszük, annak zártnak kell lennie. Ez viszont elég erős korlátozás, ugyanis végtelen dimenziós Hilbert-terek alterei tipikusan nem zártak, így lényegében nagyon sok esetben nem tudunk zárlatot képezni. A következőkben a párhuzamos összeg –és ezáltal a hagyományos zárlat– segítségével definiálunk egy operátorműveletet.

2.3.3. Definíció: *Legyenek A, B tetszőleges pozitív operátorok a $\mathscr{H}$ Hilbert-téren. Az A operátor* $\operatorname{ran}(B)$*-re vett általánosított zárlatának nevezzük az*

$$[B]A \coloneqq \lim_{n\to\infty} A : (nB)$$

határértéket, ahol a limesz a pontonkénti konvergenciában értendő.

Lehet, hogy elsőre nem látszik, hogy ez a fogalom miért egy általánosítása a korábbinak. Azonban ha veszünk egy $\mathcal{S} \subset \mathscr{H}$ zárt alteret és $P_{\mathcal{S}}$ jelöli az $\mathcal{S}$-re való projekciós operátort, akkor igazolható, hogy

$$[P_{\mathcal{S}}]A = \Sigma(A, \mathcal{S}).$$

Így tehát joggal tekinthetjük az operátor zárlat általánosításának. Mitöbb, ezzel tovább bővítettük az operátor zárlat kiszámítására vonatkozó módszereink listáját.

2.3.4. Állítás: *Legyenek $A, B, C, D \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ operátorok. Ekkor a következő tulajdonságok teljesülnek az általánosított zárlatra:*

1. *minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A : (nB) \leq [B]A$*
2. *ha létezik $\mathbb{R} \ni c > 0$, melyre $A \leq cB$, akkor $[B]A = B$*
3. *ha $A \leq B$ és $C \leq D$, akkor $[C]A \leq [D]B$*
4. *$[C]A + [C]B \leq [C](A + B)$*

Bizonyítás: A második állításban leírtak kivételével mindegyik tulajdonság triviálisan igazolható a párhuzamos összeg korábban bemutatott tulajdonságainak segítségével, így csak a másodikat bizonyítjuk. A párhuzamos összegre látottak alapján $A \geq A : (nB)$. Az $A \leq cB$ feltétel miatt B-t alulról becsülhetjük $\frac{A}{c}$-vel, az alsó becslés pedig a párhuzamos összeg monotonitása miatt megőrződik az iménti egyenlőtlenségben is:

$$A \geq A : (nB) \geq A : \frac{n}{c}B.$$

Erre alkalmazva az önmagával vett párhuzamos összegre látott formulát, kapjuk, hogy

$$A \geq A : (nB) \geq A : \frac{n}{c}B = \frac{n}{n+c}A.$$

Végül n-nel végtelenhez tartva $\frac{n}{n+c}A \to A$ adódik, így valóban $[B]A = A$. ■

Na de mi köze is van mindennek az infimum problémához? – kérdezhetnénk jogosan. A probléma hosszú ideig megoldhatatlannak tűnt, csupán 1999-ben sikerült Tsuyoshi Ando japán matematikusnak megadnia a választ [3]. A megoldáshoz felhasznált eszközt pedig az általánosított zárlat jelentette.

2.3.5. Tétel: (Ando-tétel) *Legyenek A, B tetszőleges operátorok a $\mathscr{H}$ Hilbert-téren. Az A és B operátoroknak pontosan akkor létezik infimuma, ha az*

$$[B]A \leq [A]B, \qquad [A]B \leq [B]A$$

egyenlőtlenségek közül az egyik teljesül. Ekkor $A \wedge B$ éppen $[B]A$ és $[A]B$ közül a kisebbik.

Ezzel a probléma feloldásra talált és azt is szemléltettük, hogy az operátor zárlat egy mennyire erős eszköz. A továbbiakban még találkozni fogunk az operátor zárlat fogalmával, de már nem a Löwner-rendezésben.

A fejezet lezárásaként megmutatjuk az Ando-tétel segítségével, hogy a nemrég látott 2×2-es mátrixokra vonatkozó példánkban tényleg nem létezik az infimum. Emlékeztetésképp a mátrixaink

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

voltak. Nyilván $A \leq 2B$ és $B \leq 2A$. Ekkor viszont a 2.3.4 alapján $[A]B = B$, valamint $[B]A = A$. De A és B nem összehasonlíthatóak a Löwner-rendezésben, így nem teljesül az Ando-tétel feltétele. Azaz $A \wedge B$ valóban nem létezik.

3. fejezet

Infimum probléma és zárlat operátor a $\star$-rendezésben

Ebben a fejezetben bevezetünk egy új részbenrendezést $\mathbf{B}(\mathscr{H})$-n és megvizsgáljuk benne az operátor zárlat és az infimum probléma kérdéskörét. A fejezet alapjául a [4] cikk szolgált.

3.1. A $\star$-rendezés és tulajdonságai

Az ebben a fejezetben vizsgált részbenrendezésünk az úgynevezett $\star$-rendezés lesz.

3.1.1. Definíció: *Legyenek $A, B \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ operátorok. Azt mondjuk, hogy A kisebb vagy egyenlő mint B a $\star$-rendezés szerint és az $A \overset{*}{\leq} B$ szimbólummal jelöljük, ha teljesülnek az alábbiak:*

$$A^*A = A^*B = B^*A \tag{3.1}$$

$$AA^* = BA^* = AB^* \tag{3.2}$$

Bizonyítani fogjuk, hogy $\left(\mathbf{B}(\mathscr{H}), \overset{*}{\leq}\right)$ egy részbenrendezett struktúra. A reflexivitás és az antiszimmetria közvetlenül a definícióból könnyen igazolhatóak, a tranzitivitást viszont csak a $\star$-rendezésnek egy ekvivalens jellemzését adó 3.1.6 állítás után látjuk be.

3.1.2. Állítás: *$A \overset{*}{\leq}$ reláció valóban részbenrendezést definiál $\mathbf{B}(\mathscr{H})$-n.*

Bizonyítás: Ahhoz, hogy igazoljuk, hogy $\overset{*}{\leq}$ egy részbenrendezés, meg kell mutassuk, hogy reflexív, ansztiszimmetrikus és tranzitív. Legyenek $A, B, C \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ operátorok.

A reflexivitás igazolása a legkönnyebb, ehhez csak annyi kell, hogy $A \overset{*}{\leq} A$, ami pedig triviálisan teljesül, ha a definícióba B helyére A-t helyettesítünk. Az antiszimmetria azt jelenti, hogy ha egyszerre teljesül $A \overset{*}{\leq} B$ és $B \overset{*}{\leq} A$, akkor $A = B$, azaz különböző elemek mindkét irányban nem állhatnak egymással relációban. Tegyük fel, hogy mindkét egyenlőtlenség igaz, ekkor definíció alapján az alábbi egyenlőségeket kapjuk:

$$A^*A = A^*B = B^*A$$
$$AA^* = BA^* = AB^*$$
$$B^*B = B^*A = A^*B$$
$$BB^* = AB^* = BA^*$$

A második és negyedik alapján adódik, hogy $AA^* - AB^* = 0$ és $BB^* - BA^*$, így pedig persze

$$AA^* - AB^* + BB^* - BA^* = 0$$

is teljesül. Azonban az $(A - B)(A^* - B^*)$ szorzatot kifejtve éppen ezzel egyenlő, azaz $(A-B)(A^* - B^*) = 0$ szintén fennáll. Ekkor viszont ennek kvadratikus alakja is azonosan nulla, azaz

$$\forall x \in \mathscr{H}: \quad \langle (A-B)(A-B)^* x \mid x \rangle = 0,$$

mely az adjungált definíciója alapján azt jelenti, hogy

$$\forall x \in \mathscr{H}: \quad 0 = \langle (A-B)x \mid (A-B)x \rangle = ||(A-B)x||^2,$$

azaz $A - B = 0$, mellyel az antiszimmetriát igazoltuk.
A tranzitivitást csak a 3.1.6 állítás után fogjuk igazolni. ■

Érdekes tulajdonsága a $\star$-rendezésnek, hogy az operátorok és adjungáltjaik rendezettsége ekvivalens egymással.

3.1.3. Állítás: *Legyenek* $A, B \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ *operátorok. Ekkor*

$$A \overset{*}{\leq} B \Longleftrightarrow A^* \overset{*}{\leq} B^*.$$

Bizonyítás: Írjuk fel az $A^* \overset{*}{\leq} B^*$ egyenlőtlenségre a definíciót:

$$A^{**}A^* = A^{**}B^* = B^{**}A^*$$
$$A^*A^{**} = B^*A^{**} = A^*B^{**}.$$

Azt kell igazoljuk, hogy ezek az egyenlőségek pontosan akkor teljesülnek, amikor az $A \overset{*}{\leq} B$-t definiáló egyenlőségek. A kétszeres adjungálásokkal egyszerűsítve viszont épp azt kapjuk, hogy a két egyenlőség rendszer ugyanaz. Így az operátorok és adjungáltjaik rendezettsége valóban ekvivalens. ■

3.1.4. Állítás: *Legyenek $A, B \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ operátorok és tegyük fel, hogy $A \overset{*}{\leq} B$. Ekkor*

$$AA^* \overset{*}{\leq} BB^* \quad \textit{és} \quad A^*A \overset{*}{\leq} B^*B$$

szintén teljesülnek.

Bizonyítás: Csak az első egyenlőtlenséget igazoljuk, a másik teljesen analóg módon, szerepcserével belátható. Ha mindkét definiáló egyenletbe behelyettesítjük AA^*-t és BB^*-t és kihasználjuk, hogy mindketten egyaránt önadjungáltak, akkor mindkét egyenlet az $AA^*AA^* = AA^*BB^*$ alakot ölti. Ezt kellene előállítanunk a két ismert egyenletünk segítségével. Ha (3.2)-t önmagával megszorozzuk, akkor az $AA^*AA^* = AB^*AB^*$ egyenlethez jutunk, melynek a bal oldala már rendben is van. Ha a jobb oldalon B^*A-t (3.1) alapján A^*B-re cseréljük, akkor az $AA^*AA^* = AA^*BB^*$ alakra jutunk, mellyel az állítást igazoltuk is. ■

Ha a valós számok rendezésére gondolunk, akkor nyilvánvalóan igaz, hogy ha egy szám kisebb egy másik számnál, azaz $a \leq b$, akkor a különbségük $b - a$ szintén kisebb a nagyobb számnál, b-nél. Korántsem biztos azonban egy akármilyen részbenrendezés esetén, hogy ez a tulajdonság fennáll. Ugyanis könnyen előfordulhat, hogy a különbség nem is összehasonlítható a nagyobb elemmel. A $\star$-rendezés esetén azonban ez a tulajdonság fennáll.

3.1.5. Állítás: *Tegyük fel, hogy $A, B \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ olyanok, hogy $A \overset{*}{\leq} B$. Ekkor $B - A \overset{*}{\leq} B$ is teljesül.*

Bizonyítás: Az állítás bizonyításához a

$$B - A^*(B - A) = B^*(B - A)$$
$$(B - A)B - A^* = (B - A)B^*$$

egyenlőségeket kell igazolnunk. Az első egyenlet kifejtése, egyszerűsítése, átrendezése után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} B^*B - A^*B - B^*A + A^*A &= B^*B - B^*A \\ -A^*B + A^*A &= 0 \\ A^*A &= A^*B, \end{aligned}$$

amely épp az $A \overset{*}{\leq} B$-t definiáló első egyenlet, így teljesül. A második egyenlettel hasonlóan eljárva adódik, hogy

$$\begin{aligned} BB^* - AB^* - BA^* + AA^* &= BB^* - AB^* \\ -BA^* + AA^* &= 0 \\ AA^* &= BA^*. \end{aligned}$$

Ezzel az állítást bizonyítottuk. ■

A következőkben arra fogunk rávilágítani, hogy a $\star$-rendezés erős kapcsolatban van bizonyos projekciókkal, sőt még a Löwner-rendezéssel is kapcsolatba hozható. Jelölje a továbbiakban

$$\mathcal{P}(\mathscr{H}) := \{P \in \mathbf{B}(\mathscr{H}) \mid P = P^* = P^2\}$$

az ortogonális projekciók halmazát $\mathbf{B}(\mathscr{H})$-ban, valamint $A \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ esetén P_A jelenti az A képének lezártjára vett projekciót és az adjungált képének lezártjára vett projekcióra vezessük be a $Q_A := P_{A^*}$ jelölést.

A most következő állításban a 3.1 és a 3.2 egyenlőségeket vesszük közelebbről szemügyre a definícióban.

3.1.6. Állítás: *Legyenek $A, B \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$. Ekkor a $\star$-rendezést definiáló egyenlőségek a következő ekvivalens alakban fogalmazhatók meg:*

$$BA^* = AA^* \iff A = BQ_A \iff A = BQ, \text{ ahol } Q \in \mathcal{P}(\mathscr{H})$$

és

$$B^*A = A^*A \iff A = P_AB \iff A = PB, \text{ ahol } P \in \mathcal{P}(\mathscr{H}).$$

Bizonyítás: Csak az első ekvivalencia láncot igazoljuk, a második teljesen hasonló technikával belátható, vagy közvetlenül az elsőből is bizonyítható. Legyen $x \in \overline{\operatorname{ran}(A^*)}$ tetszőleges. Ekkor létezik $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\operatorname{ran}(A^*)}$ sorozat, mely normában tart x-hez. Tegyük fel, hogy $BA^* = AA^*$, azaz

$$Bx = \lim_{n\to\infty} Bu_n = \lim_{n\to\infty} Au_n = Ax.$$

Emiatt ha $x \in \overline{\operatorname{ran}(A^*)}$, akkor $A = BQ_A$ teljesül, hiszen $Q_A x = x$ és $Ax = Bx$ a fenti alapján igaz. Most megmutatjuk $x \in \overline{\operatorname{ran}(A^*)}^{\perp}$ esetén is. Ha $x \in \overline{\operatorname{ran}(A^*)}^{\perp}$, akkor $Q_A x = 0$, így $BQ_A x = 0$. Másrészt $\overline{\operatorname{ran}(A^*)}^{\perp} = \ker(A)$, emiatt $Ax = 0$. Tehát $Ax = BQ_A x$ teljesül ilyen x-ekre is, azaz összefoglalva,

$$\forall x \in \mathscr{H}\colon Ax = BQ_A x,$$

így valóban $A = BQ_A$.

Most tegyük fel, hogy $A = BQ$ valamely $Q \in \mathcal{P}(\mathscr{H})$ esetén. Felhasználva, hogy Q projekció így teljesíti a $Q^2 = Q = Q^*$ egyenlőségeket, kapjuk hogy

$$BA^* = B(BQ)^* = BQ^*B^* = BQQB^* =$$
$$= (BQ)(QB^*) = (BQ)(Q^*B^*) = (BQ)(BQ)^* = AA^*.$$

Mivel az első egyenlőségből beláttuk a másodikat, a harmadik pedig a másodikból nyilvánvalóan következik, majd végül igazoltuk, hogy a harmadik implikálja az elsőt, ezzel a teljes ekvivalencia láncolatot bebizonyítottuk. ■

A fejezet során többször fogunk hivatkozni a Douglas faktorizációs lemmára, amelyet most bizonyítás nélkül kimondunk [5].

3.1.7. Lemma: (Douglas) *Legyenek $A, B \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ operátorok. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

- *létezik $C \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ operátor, hogy $A = BC$*
- *létezik olyan $\lambda \geq 0$ konstans, melyre*

$$\forall x \in \mathscr{H}: \quad \|A^*x\| \leq \lambda \|B^*x\|$$

- $\operatorname{ran}(A) \subseteq \operatorname{ran}(B)$

A 3.1.6 állítás több további fontos eredmény kiinduló alapja, amelyek jobban rávilágítanak a ⋆-rendezés természetére. Most megmutatjuk a segítségével, hogy ha $A \overset{*}{\leq} B$, akkor a két operátor a képtereken keresztül nagyon szoros kapcsolatban áll egymással.

3.1.8. Következmény: Legyenek $A, B \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ operátorok olyanok, melyekre $A \overset{*}{\leq} B$ teljesül. Ekkor szükszégszerűen $\operatorname{ran}(A) \subseteq \operatorname{ran}(B)$ és $\operatorname{ran}(A^*) \subseteq \operatorname{ran}(B^*)$ fennáll.

Bizonyítás: Az előző állítás alapján $A = BQ$, ahol $Q \in \mathcal{P}(\mathscr{H})$. Ez a Douglas-féle faktorizációs lemma alapján éppen azt jelenti, hogy $\operatorname{ran}(A) \subseteq \operatorname{ran}(B)$.

Hasonlóan $A = PB$ teljesül, melyet adjungálva $A^* = B^*P^*$ adódik, melyből az iménti érvelés szerint $\operatorname{ran}(A^*) \subseteq \operatorname{ran}(B^*)$. ■

3.1.9. Következmény: A 3.1.6 állítás segítségével immár könnyen igazolhatjuk az eddig elmaradt tranzitivitását a ⋆-rendezésnek. Tegyük fel, hogy $A \overset{*}{\leq} B$ és $B \overset{*}{\leq} C$, ekkor meg kell mutatni, hogy $A \overset{*}{\leq} C$. Az előző állítás segítségével átfogalmazva, azt kell bizonyítani, hogy az $A = P_A B$ és $B = P_B C$ egyenlőségekből következik $A = P_A C$.

Az első két egyenlőtlenség kombinálásával $A = P_A P_B C$ adódik, így elég látni, hogy $P_A = P_A P_B$. Viszont $P_A P_B$ nem más, mint épp $P_{\overline{\operatorname{ran}(A)} \cap \overline{\operatorname{ran}(B)}}$, ami pedig pontosan $P_{\overline{\operatorname{ran}(A)}}$, hiszen $\operatorname{ran}(A) \subseteq \operatorname{ran}(B)$ a 3.1.8 alapján, és így a $\overline{\operatorname{ran}(A)} \subseteq \overline{\operatorname{ran}(B)}$ tartalmazás ugyancsak fennáll. Ezzel a tranzitivitást igazoltuk.

Szintén egy érdekes következménye a fenti állításnak az alábbi, az operátorok idempotenciájára vonatkozó állítás.

3.1.10. Következmény: Legyenek $A, B \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ operátorok és tegyük fel, hogy $A \overset{*}{\leq} B$ és $B^2 = B$. Ekkor teljesül $A^2 = A$ is.

Bizonyítás: Az állítás azonnal látszik, csupán a fenti állítást, a B idempotenciájára vonatkozó feltevést és azt az egyszerű tényt kell felhasználnunk, hogy $P_A A = A$. Ez utóbbi azért teljesül, mert $Ax \in \operatorname{ran}(A)$, P_A pedig épp $\operatorname{ran}(A)$ lezártjára vetít, így $P_A(Ax) = Ax$de lévén hogy Ax már épp ebben az altérben van. Ezek alapján:

$$A^2 = P_A B B Q_A = P_A B Q_A = P_A A = A.$$

$\blacksquare$

A 3.1.6 tételben láttuk, hogy az $A \overset{*}{\leq} B$ jelentése legjobban a projekciók nyelvén fogható meg. Összefoglalva azt kaptuk, hogy

$$A \overset{*}{\leq} B \Longleftrightarrow A = P_A B = B Q_A.$$

Az A operátornak ez a fajta kapcsolata a B operátorral azt sugallja, hogy A valamilyen módon "része" B-nek. Azt viszont ebből még egyáltalán nem látjuk, hogy mely P, Q projekciók azok, melyekkel $PB = BQ$ teljesíti, hogy kisebb mint B a $\star$-rendezésben. A következőkben ezeket a projekciókat igyekszünk karakterizálni.

3.1.11. Lemma: *Legyen $B \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ operátor.*

1. *Ha $P \in \mathcal{P}(\mathscr{H})$ és $\operatorname{ran}(P) \subset \overline{\operatorname{ran}(B)}$, akkor $PB \overset{*}{\leq} B \Longleftrightarrow PBB^* = BB^*P$*
2. *Ha $Q \in \mathcal{P}(\mathscr{H})$ és $\operatorname{ran}(Q) \subset \overline{\operatorname{ran}(B^*)}$, akkor $BQ \overset{*}{\leq} B \Longleftrightarrow QB^*B = B^*BQ$*

Bizonyítás: Csak az első állítást igazoljuk, a második teljesen hasonló. Legyen $A := PB$. Tegyük fel, hogy $A \overset{*}{\leq} B$, megmutatjuk, hogy ekkor $PBB^* = BB^*P$. A 3.2 felhasználásával adódik, hogy

$$PBB^* = AB^* = BA^* = BB^*P.$$

A visszafelé irányhoz tegyük fel, hogy $PBB^* = BB^*P$. A 3.1.6 állítás szerint $A = PB$-ből következik, hogy $B^*A = A^*A$. A feltevésünkből pedig kapjuk, hogy

$$BA^* = BB^*P = PBB^*P = AA^*.$$

Azaz a két definiáló egyenlőség teljesül, így $A \overset{*}{\leq} B$ valóban fennáll, mellyel a lemmát igazoltuk. $\blacksquare$

Érdemes megjegyezni, hogy a $\star$-rendezés tulajdonságaiból fakadóan minden operátor nagyobb a nulla operátornál és nem létezik olyan I-től különböző B operátor, melyre $I \overset{*}{\leq} B$ teljesülne. Ezek könnyen adódnak a definícióba való behelyettesítéssel. Először tegyük fel, hogy $A = 0$ és legyen $B \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ tetszőleges. Ekkor

$$A^*A = A^*B = B^*A$$
$$0 = 0B = B^*0 = 0$$
$$AA^* = BA^* = AB^*$$
$$0 = B0 = 0B^* = 0,$$

azaz valóban B választásától függetlenül az egyenlőségek teljesülnek, így $0 \overset{*}{\leq} B$. Most tegyük fel, hogy $A = I$. Ebből

$$A^*A = A^*B = B^*A$$
$$I = B = B^*$$
$$AA^* = BA^* = AB^*$$
$$I = B = B^*$$

adódik, tehát valóban $I \overset{*}{\leq} B \Longrightarrow B = I$. Fontos azonban, hogy ez nem jelenti azt, hogy minden operátor kisebb lenne az identitásnál!

A következő tételben megadjuk a $\star$-rendezésnek egy olyan karakterizációját, mely az imént látott kommutációs tulajdonság és a projekciók Löwner-rendezésének segítségével fogja meg a rendezés lényegét.

3.1.12. Tétel: *Legyenek $A, B \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ operátorok. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

1. $A \overset{*}{\leq} B$
2. $A = P_A B, \qquad P_A \leq P_B, \qquad P_A B B^* = B B^* P_A$
3. $A = B Q_A, \qquad Q_A \leq Q_B, \qquad Q_A B^* B = B^* B Q_A$

Bizonyítás: Először az 1. $\Longrightarrow$ 2. és 1. $\Longrightarrow$ 3. implikációkat igazoljuk. Tegyük fel, hogy $A \overset{*}{\leq} B$. A 3.1.6 állítás alapján

$$A = P_A B \text{ és } A = B Q_A.$$

Hasonlóan 3.1.8 garantálja nekünk, hogy a megfelelő képterek tartalmazzák egymás, így emiatt

$$P_A \leq P_B \text{ és } Q_A \leq Q_B$$

is teljesül. Végül pedig

$$P_A BB^* = BB^* P_A \text{ és } Q_A B^* B = B^* B Q_A$$

az előző lemma miatt igazak. Ezzel az implikáció ezen irányát igazoltuk. A visszafelé irányú implikációk pedig azonnal következnek az előző lemmából. Egyedül a lemma

$$\operatorname{ran}(P) \subset \overline{\operatorname{ran}(B)} \text{ és } \operatorname{ran}(Q) \subset \overline{\operatorname{ran}(B^*)}$$

feltételeit kell biztosítanunk. Viszont 3.1.8 miatt $\operatorname{ran}(A) \subseteq \operatorname{ran}(B)$ és $\operatorname{ran}(A^*) \subseteq \operatorname{ran}(B^*)$ fennállnak. Másrészt $\operatorname{ran}(P_A) \subset \operatorname{ran}(A)$ és $\operatorname{ran}(Q_A) \subset \operatorname{ran}(A^*)$, így nyilván ezek a feltételek is teljesülnek. Ezzel igazoltuk, hogy 1. $\Longleftrightarrow$ 2. és 1. $\Longleftrightarrow$ 3., így a tételben szereplő állítások valóban ekvivalensek. ■

Ebben a tételben lényegében összesítettük minden ismeretünket, amelyet eddig a $\star$-rendezés projekciókkal való kapcsolatáról tudtunk. Mielőtt tovább mennénk, még megvizsgáljuk, hogy mi történik akkor akkor, ha egy operátor két másik közös felső korlátja.

3.1.13. Tétel: *Legyenek $A, B, C \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ operátorok és tegyük fel, hogy $A \overset{*}{\leq} B$ és $C \overset{*}{\leq} B$ egyaránt teljesülnek. Ekkor a következők ekvivalensek:*

1. $A \overset{*}{\leq} C$
2. $P_A \overset{*}{\leq} P_C$
3. $Q_A \overset{*}{\leq} Q_C$
4. $\operatorname{ran}(A) \subseteq \operatorname{ran}(C)$
5. $\ker(C) \subseteq \ker(A)$

Bizonyítás: A feltevésünk miatt 3.1.6 alapján $A = P_A B$ és $C = P_C B$. Ha $A \overset{*}{\leq} C$, akkor a 3.1.8 felhasználásával kapjuk, hogy $\operatorname{ran}(A) \subseteq \operatorname{ran}(C)$ és $\operatorname{ran}(A^*) \subseteq \operatorname{ran}(C^*)$, valamint a 3.1.12 miatt $P_A \overset{*}{\leq} P_C$ és $Q_A \overset{*}{\leq} Q_C$ is teljesül, azaz az első állítás implikálja az összes többit.

Most tegyük fel, hogy $P_A \overset{*}{\leq} P_C$, belátjuk, hogy $A \overset{*}{\leq} C$. A 3.1.12 miatt elég megmutatnunk, hogy $A = P_A C$ és $P_A CC^* = CC^* P_A$. A $P_A \overset{*}{\leq} P_C$ egyenlőtlenségből következik, hogy $P_A = P_{\overline{\mathrm{ran}(P_A)}} P_C = P_A P_C$. Mivel $A \overset{*}{\leq} B$ a feltevés miatt, így $A = P_A B$. Helyettesítsük P_A helyére az iménti számítás eredményét, így adódik, hogy $P_A P_C B = A$. A $C \overset{*}{\leq} B$ feltételezés révén pedig $C = P_C B$ fennáll. Ezt $P_A P_C B = A$-ba helyettesítve kapjuk, hogy $P_A C = A$, mellyel az egyik szükséges részt igazoltuk is. Most igazoljuk, hogy $P_A \in \{CC^*\}'$. A $C \overset{*}{\leq} B$ feltevésből definíció szerint következik, hogy $CC^* = CB^*$. Ha ennek mindkét oldalát P_A-val szorozzuk, akkor az előbb belátott $P_A C = P_A B$ egyenlőség alapján kapjuk, hogy $P_A CC^* = P_A BB^*$. Ennek mindkét oldalát adjungálva a $CC^* P_A = BB^* P_A$ azonossághoz jutunk, melyet az előző egyenlettel az $A \overset{*}{\leq} B$ miatt fenálló $P_A BB^* = BB^* P_A$ segítségével összekapcsolhatunk. Ekkor teljesül a $P_A CC^* = CC^* P_A$, mellyel az implikáció ezen részét igazoltuk.

Teljesen hasonló logika mentén igazolható az is, hogy a harmadik állításból következik az első. A teljes ekvivalencialánc igazolásához még szükséges megmutatnunk, hogy a negyedik és ötödik állítások is implikálják a többit. Ehhez elég azt belátni, hogy $\mathrm{ran}(A) \subseteq \mathrm{ran}(C) \Longrightarrow P_A \overset{*}{\leq} P_C$ és $\ker(C) \subseteq \ker(A) \Longrightarrow Q_A \overset{*}{\leq} Q_C$. A $P_A \overset{*}{\leq} P_C$ relációra ha felírjuk a definíciót, akkor a projekciók tulajdonságai alapján az oda redukálódik, hogy csupán már a $P_A = P_C P_A$ egyenlőség is ekvivelens vele. Ez viszont a $\mathrm{ran}(A) \subseteq \mathrm{ran}(C)$ miatt nyilvánvalóan teljesül. Hasonló gondolatmenettel látszik, hogy a másik implikáció is igaz, mellyel az állítást igazoltuk.

■

3.1.14. Állítás: *Legyenek $A \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ és $B \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ operátorok. Ha $A \overset{*}{\leq} B$, akkor $A \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$.*

Bizonyítás: Mivel feltételezésünk szerint B pozitív operátor, így önadjungált is, emiatt $BB^* = B^2$. Vegyük észre, hogy ekkor $\{BB^*\}' = \{B\}'$. Ugyanis nyilván ha C felcserélhető B-vel, akkor

$$CBB = BCB = BBC,$$

így $C \in \{BB^*\}'$ is teljesül. Másrészt ha $C \in \{BB^*\}'$, akkor $C \in \{B\}'$ is teljesül, mely azon a tényen alapul, hogy ha C és D felcserélhetőek, akkor $CD^{\frac{1}{2}} = D^{\frac{1}{2}}C$ szintén fennáll.

Az $A \overset{*}{\leq} B$ feltevés miatt a 3.1.12 alapján $P_A BB^* = BB^* P_A$, melyre az előző észrevételt alkalmazva kapjuk, hogy $P_A B = BP_A$. Most tekintjük az A kvadratikus alakját és megmutatjuk, hogy $\langle Ax \mid x\rangle \geq 0$ minden $x \in \mathscr{H}$ esetén. Mivel P_A projekció, így $P_A^2 = P_A = P_A{}^*$, ezt a 3.1.12 tételből adódó $A = P_AB$ azonossággal kombinálva az

$$\langle Ax \mid x\rangle = \langle P_ABx \mid x\rangle = \langle P_A^2Bx \mid x\rangle = \langle P_ABx \mid P_Ax\rangle$$

egyenlőségekhez jutunk. Kihasználva, hogy $P_A \in \{B\}'$ és B pozitív, az állítást

$$\langle P_ABx \mid P_Ax\rangle = \langle BP_Ax \mid P_Ax\rangle \geq 0$$

által igazoltuk is.

■

3.2. Infimum probléma

Ebben a szakaszban ismét az infimum probléma felé fordítjuk a figyelmünket, most a $\star$-rendezésben fogjuk megvizsgálni, hogy mikor létezhet két operátornak legnagyobb közös alsó korlátja. A $\star$-rendezésben A és B infimumát az $A \overset{*}{\wedge} B$ szimbólummal fogjuk jelölni. Formálisan tehát, keresendő a

$$\left\{C \in \mathbf{B}(\mathscr{H}) \mid C \overset{*}{\leq} A, \quad C \overset{*}{\leq} B\right\}$$

halmaz legnagyobb eleme.

Látni fogjuk, hogy az infimum probléma megoldása jóval egyszerűbbnek fog bizonyulni, mint a Löwner-rendezés esetében. A vizsgálatunk alapját a következő tétel fogja adni, amely lényegében a 3.1.12 tétel egy átfogalmazása.

3.2.1. Tétel: *Legyen $B \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ operátor. Definiáljuk az*

$$\mathcal{L}_B := \left\{A \in \mathbf{B}(\mathscr{H}) \mid A \overset{*}{\leq} B\right\}$$

és

$$\mathcal{P}_B := \{P \in \mathcal{P}(\mathscr{H}) \mid \operatorname{ran}(P) \subseteq \overline{\operatorname{ran}(B)},\ PBB^* = BB^*P\}$$

halmazokat. Ekkor létezik rendezéstartó bijekció az $(\mathcal{L}_B, \overset{*}{\leq})$ és $(\mathcal{P}_B, \leq)$ rendezett struktúrák között. A bijekciót az $\mathcal{L}_B \ni A \mapsto P_A$ és $\mathcal{P}_B \ni P \mapsto PB$ hozzárendelések határozzák meg.

A $\mathcal{P}_B$ elemeire felírva a $\star$-rendezettség feltételeit, azonnal látszik, hogy ezen a halmazon a $\star$-rendezés és a Löwner-rendezés egybeesik. A tételben szereplő $(\mathcal{P}_B, \leq)$ struktúra háló, ugyanis $\mathcal{P}_B$ nem más, mint az

$$\mathcal{M}_B = \{A \in \mathbf{B}(\mathscr{H}) \mid A = P_B C P_B,\ C \in \{BB^*\}'\}$$

von Neumann algebra projektorhálója.

3.2.2. Tétel: *Minden $B \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ operátor esetén $(\mathcal{L}_B, \overset{*}{\leq})$ háló, továbbá a $(\mathbf{B}(\mathscr{H}), \overset{*}{\leq})$ stuktúra alsó félháló, azaz minden $A, B \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ esetén az*

$$\mathcal{L}(A,B) := \mathcal{L}_A \cap \mathcal{L}_B = \left\{C \in \mathbf{B}(\mathscr{H}) \mid C \overset{*}{\leq} A,\ C \overset{*}{\leq} B\right\}$$

halmaznak létezik a $\star$-rendezés szerinti legnagyobb eleme.

Bizonyítás: Az az állítás, hogy $(\mathcal{L}_B, \overset{*}{\leq})$ háló, az azonnal következik abból, hogy $\mathcal{P}_B$ háló és a két halmaz között létezik rendezéstartó bijekció. Ezután tekintsük a

$$\mathcal{P}(A,B) := \left\{Q \in \mathcal{P}(\mathscr{H}) \cap \{A^*A, B^*B\}' \mid \operatorname{ran}(Q) \subseteq \overline{\operatorname{ran}(A)} \cap \overline{\operatorname{ran}(B)} \cap \ker(A^* - B^*)\right\}$$

halmazt, ahol $\{A^*A, B^*B\}'$ jelöli az $\{A^*A, B^*B\}$ kommutátorát, azaz az A^*A-val és B^*B-vel is felcserélhető operátorok halmazát. Könnyen látszik, hogy $\mathcal{P}(A,B) \subseteq \mathcal{P}_A \cap \mathcal{P}_B$, hiszen egyrészt

$$Q \in \mathcal{P}(\mathscr{H}) \cap \{A^*A, B^*B\}'$$

olyan projekció, ami felcserélhető A^*A-val és B^*B-vel is, így a $\mathcal{P}_A$ és $\mathcal{P}_B$ definíciójában lévő

$$QAA^* = AA^*Q \quad \text{és} \quad QBB^* = BB^*Q$$

egyenlőségek teljesülnek, hiszen Q, AA^* és BB^* egyaránt önadjungáltak. Másrészt nyilvánvaló, hogy

$$\operatorname{ran}(Q) \subseteq \overline{\operatorname{ran}(A)} \cap \overline{\operatorname{ran}(B)} \cap \ker(A^* - B^*)$$

miatt $\operatorname{ran}(Q) \subseteq \overline{\operatorname{ran}(A)}$ és $\operatorname{ran}(Q) \subseteq \overline{\operatorname{ran}(B)}$ külön-külön is teljesülnek, így a

$$\mathcal{P}(A,B) \subseteq \mathcal{P}_A \cap \mathcal{P}_B$$

tartalmazás valóban fennáll, tehát $\mathcal{P}(A,B)$ szintén háló. Ezek alapján viszont a 3.1.11 lemma feltételei is teljesülnek, így A-ra és B-re alkalmazva adódik, hogy

$$QA \overset{*}{\leq} A \quad \text{és} \quad QB \overset{*}{\leq} B.$$

Ha $Q \in \mathcal{P}(A,B)$, akkor a $\operatorname{ran}(Q) \subseteq \ker(A^* - B^*)$ feltétel azzal ekvivalens, hogy $(A^* - B^*)Q = 0$, mely pedig ekvivalens $QA = QB$ egyenlőséggel Q önadjungáltsága miatt. Ez viszont épp azt jelenti, hogy $QA = QB \in \mathcal{L}(A,B)$, azaz közös alsó korlátot találtunk A-nak és B-nek. Másrészt ha veszünk egy tetszőleges $C \in \mathcal{L}(A,B)$ elemet, akkor a 3.1.6 tétel alapján

$$C = P_C A = P_C B.$$

Ez viszont épp azt jelenti, hogy $P_C \in \mathcal{P}(A,B)$, ugyanis a $P_C A = P_C B$ egyenlőség miatt $P_C \in \ker(A^* - B^*)$, másrészt a 3.1.12 implikálja, hogy $P_C \in \{AA^*, BB^*\}'$ és $\operatorname{ran}(P_C) \subseteq \operatorname{ran}(A)$, továbbá $\operatorname{ran}(P_C) \subseteq \operatorname{ran}(B)$, így valóban $P_C \in \mathcal{P}(A,B)$.

Összefoglalva tehát, ha $Q \in \mathcal{P}(A,B)$, akkor

$$QA = QB \in \mathcal{L}(A,B)$$

és ha $C \in \mathcal{L}(A,B)$, akkor $P_C \in \mathcal{P}(A,B)$. Ezáltal viszont a 3.1.12 tétel értelmében egy rendezéstartó bijekciónk van $\mathcal{L}(A,B)$ és $\mathcal{P}(A,B)$ között. Így szükségszerűen az $\mathcal{L}(A,B)$ legnagyobb eleme $PA = PB$ alakban áll elő, ahol $P \in \mathcal{P}(A,B)$. Ez épp azt is jelenti, hogy

$$A \overset{*}{\wedge} B = P_{A \overset{*}{\wedge} B} A = P_{A \overset{*}{\wedge} B} B,$$

ahol a rendezéstartás miatt ez a projekció éppen

$$P_{A \overset{*}{\wedge} B} = \max \mathcal{P}(A,B)$$

alakban kapható meg. Az pedig nyilvánvaló, hogy $\mathcal{P}(A,B)$-nek létezik legnagyobb eleme, így az állítást igazoltuk. ∎

Ezzel azt láttuk tehát, hogy a $\star$-rendezés nagyon érdekesen viselkedik az infimum probléma tekintetében, ugyanis tetszőleges $A, B \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ esetén $A \overset{*}{\wedge} B$ minden további feltétel nélkül létezik. A következő állításban ismertetjük a $\star$-rendezésben vett infimum néhány tulajdonságát.

3.2.3. Állítás: *Legyenek $A, B, C \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ operátorok. Ekkor az infimumra az alábbi tulajdonságok teljesülnek:*

1. $A \overset{*}{\wedge} B = B \overset{*}{\wedge} A$

2. $(A \overset{*}{\wedge} B) \overset{*}{\wedge} C = A \overset{*}{\wedge} (B \overset{*}{\wedge} C)$

3. $(A \overset{*}{\wedge} B)^* = A^* \overset{*}{\wedge} B^*$

4. Ha $A, B \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$*, akkor* $A \overset{*}{\wedge} B \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$.

Bizonyítás: A tulajdonságok bizonyításai magától értetődőek, így csak utalunk rá, hogy melyik miből következik.

Az első kettő tulajdonság rendezéstől függetlenül teljesül az infimumra. A harmadik állítás azonnali következménye az $A \overset{*}{\leq} B \iff A^* \overset{*}{\leq} B^*$ ekvivalenciának, amit már igazoltunk.

Mivel $A \overset{*}{\wedge} B \overset{*}{\leq} B$, így a 3.1.14 miatt $A \overset{*}{\wedge} B$ pozitív operátor, így a négyes állítás szintén teljesül. ■

3.3. Szuprémum probléma

Az előző szakaszban az infimum probléma vizsgálata során nagyon kedvező eredményre jutottunk. Ennek apropóján joggal kérdezi az ember, hogy vajon a szuprémum problémára is ilyen szép eredményt kapunk-e? Formálisan tehát keressük a

$$\left\{ C \in \mathbf{B}(\mathscr{H}) \mid A \overset{*}{\leq} C, \quad B \overset{*}{\leq} C \right\}$$

halmaz legkisebb elemét. Már most az elején előrevetítjük, hogy a vizsgálódásunk ezúttal nem lesz ilyen kedvező kimenetelű. A cáfolat alapját a $\star$-rendezésre vonatkozó alábbi ekvivalancia lánc adja [9].

3.3.1. Állítás: *Legyenek* $A, B \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ *operátorok és tekintsük a Hilbert-tér*

$$\mathscr{H} = \overline{\operatorname{ran}(A)} \oplus \ker(A^*) = \overline{\operatorname{ran}(A^*)} \oplus \ker(A)$$

ortogonális dekompozícióit. Tegyük fel, hogy az operátorokra teljesül, hogy $A, B \in \mathbf{B}(\overline{\operatorname{ran}(A^*)} \oplus \ker(A), \overline{\operatorname{ran}(A)} \oplus \ker(A^*))$ *és*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

alakúak. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

1. $A \overset{*}{\leq} B$

2. $A^*(B-A)=0, \qquad (B-A)A^*=0$

3. $P_A(B-A)=0, \qquad (B-A)Q_A=0$

4. A fenti térfelbontásban B alakja

$$B=\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$$

Bizonyítás: Az első állításból triviálisan következik a második, hiszen az csak a definíció átrendezése. Tegyük fel, hogy $A^*(B-A)=0$ és $(B-A)A^*=0$. Ekkor $(B-A)A^*=0$ miatt nyilván $(B-A)Q_A=0$ teljesül. A $A^*(B-A)=0$ feltevés miatt pedig

$$\overline{\operatorname{ran}(B-A)} \subseteq \ker(A^*),$$

így tehát $P_A(B-A)=0$ fennáll. Ezzel beláttuk, hogy a második állítás implikálja a harmadikat. Most tegyük fel, hogy a harmadik állítás teljesül. Ekkor $P_A(B-A)=0$ miatt $P_ABQ_A=P_AAQ_A$ és hasonlóan

$$P_ABP_{\ker(A)}=P_AAP_{\ker(A)}=0.$$

Az első épp azt jelenti, hogy $A_{11}=B_{11}$, a másodikból pedig következik, hogy $B_{12}=B_{21}=0$, így a B operátor tényleg szükségszerűen olyan alakú, mint a negyedik állítás által megfogalmazott. Végezetül könnyen látszik, hogy a negyedik állításból következik, hogy $A \overset{*}{\leq} B$, ugyanis csak az operátorok megadott alakját felhasználva kell az $A^*A=A^*B$ és $AA^*=BA^*$ egyenlőségeket ellenőriznünk, ami direkt számolással azonnal adódik. ■

Ebből az állításból könnyen látszik, hogy már egészen egyszerű esetekben sem feltétlenül létezik a szuprémum. Ennek szemléltetésére tekintsük a következő mátrixokat:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}.$$

Világos, hogy $A \overset{*}{\leq} A \overset{*}{\vee} B$, így az állítás miatt $A \overset{*}{\vee} B$ szükségszerűen $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ alakú. Másrészt viszont szintén az állítás miatt

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}=0$$

kellene hogy teljesüljön, ami viszont nyilvánvalóan nem áll fenn, így $A \overset{*}{\vee} B$ nem létezhet.

3.4. A $\star$-zárlat operátor

A korábbiakban láttuk, hogy az operátor zárlat milyen fontos szerepet játszott mind fizikai, mind pedig hálóelméleti szinten. Az előzőekhez hasonlóan, most ismét megvizsgáljuk ezt a fogalmat, immár a $\star$-rendezésben. Korábban – a Löwner-rendezés esetén– a zárlat operátort a legnagyobb olyan B pozitív operátor formájában kaptuk, melyre igaz volt, hogy $B \leq A$ és $\operatorname{ran}(B) \subset \mathcal{S}$. Hasonló módon szeretnénk a fogalmat a $\star$-rendezésre is általánosítani.

Világos azonban, hogy itt nem elég egy altérrel operálni, ugyanis az $A \overset{*}{\leq} B$ reláció teljesüléséhez nemcsak az operátorokról, de az adjungáltjukról is feltételezünk valamit. Így nem meglepő, hogy a fogalom megfelelő definiálásához nem csak azt kell megkövetelnünk, hogy az A-nál kisebb operátorok képtere egy altérbe essen, hanem azt is, hogy ezen operátorok adjungáltjának képe szintén benne legyen egy altérben. Mindezt formalizálva, keressük a következő halmaz legnagyobb elemét:

3.4.1. Definíció: *Legyenek $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subseteq \mathscr{H}$ zárt altereket és $A \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ operátor.*

$$\overset{*}{\mathcal{M}}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) := \{D \in \mathbf{B}(\mathscr{H}) \mid D \overset{*}{\leq} A,\ \operatorname{ran}(D) \subseteq \mathcal{T},\ \operatorname{ran}(D^*) \subseteq \mathcal{S}\}$$

A halmaz legnagyobb elemét az $\overset{*}{\Sigma}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ szimbólummal fogjuk jelölni. Ha $\mathcal{S} = \mathcal{T}$, akkor a $\overset{*}{\Sigma}(A, \mathcal{S})$ rövidítést használjuk.

A legnagyobb elem létezésének igazolásához szükségünk lesz a következő, önmagában is érdekes lemmára.

3.4.2. Lemma: *Legyenek $A, B \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ operátorok olyanok, hogy $A \overset{*}{\leq} B$. Továbbá válasszunk olyan $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subseteq \mathscr{H}$ zárt altereket, melyekre fennáll, hogy*

$$\operatorname{ran}(A) \subseteq \mathcal{T} \quad \text{és} \quad \operatorname{ran}(A^*) \subseteq \mathcal{S}.$$

Ekkor $A \overset{*}{\leq} P_{\mathcal{T}} B P_{\mathcal{S}}$.

Bizonyítás: A $\operatorname{ran}(A) \subseteq \mathcal{T}$ feltételezés miatt $P_A P_{\mathcal{T}} = P_A$, így $P_A(P_{\mathcal{T}} B P_{\mathcal{S}}) = P_A B P_{\mathcal{S}}$. Felhasználva hogy $A \overset{*}{\leq} B$ miatt $P_A B = A$, adódik, hogy

$$P_A(P_{\mathcal{T}} B P_{\mathcal{S}}) = P_A B P_{\mathcal{S}} = A P_{\mathcal{S}},$$

ami pedig $\mathrm{ran}(A^*) \subseteq \mathcal{S}$ miatt éppen A-val egyenlő. Így tehát $P_A(P_\mathcal{T} B P_\mathcal{S}) = A$. Teljesen analóg érveléssel adódik az is, hogy $(P_\mathcal{T} B P_\mathcal{S})Q_A = A$. Ez a két egyenlőség viszont a 3.1.12 miatt pont azt jelenti, hogy $A \overset{*}{\leq} P_\mathcal{T} B P_\mathcal{S}$, mellyel az állítást igazoltuk. ■

A lemma a segítségével most rátérhetünk a legnagyobb elem létezésének igazolására.

3.4.3. Tétel: *Legyenek $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subset \mathscr{H}$ zárt altereket és egy $A \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ operátor. Ekkor az $\overset{*}{\mathcal{M}}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ halmaznak létezik a $\star$-rendezés szerinti legnagyobb eleme és*

$$\overset{*}{\Sigma}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = A \overset{*}{\wedge} (P_\mathcal{T} A P_\mathcal{S}).$$

Bizonyítás: Meg kell mutatnunk, hogy

$$\overset{*}{\Sigma}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = A \overset{*}{\wedge} (P_\mathcal{T} A P_\mathcal{S})$$

valóban a halmaz legnagyobb eleme. Ez két részből áll, igazolnunk kell hogy $\overset{*}{\Sigma}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \in \overset{*}{\mathcal{M}}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ és minden $D \in \overset{*}{\mathcal{M}}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ esetén $D \overset{*}{\leq} \overset{*}{\Sigma}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$. A második résszel kezdünk, ehhez vegyünk egy $D \in \overset{*}{\mathcal{M}}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ operátort. Ekkor $\overset{*}{\mathcal{M}}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$ definíciója miatt $D \overset{*}{\leq} A$ és a képterekre

$$\mathrm{ran}(D) \subseteq \mathcal{T} \text{ és } \mathrm{ran}(D^*) \subseteq \mathcal{S}$$

teljesül. Emiatt alkalmazható az előző lemma, amelyből következően $D \overset{*}{\leq} P_\mathcal{T} A P_\mathcal{S}$. Ez épp azt jelenti, hogy D közös alsó korlátja A-nak és $P_\mathcal{T} A P_\mathcal{S}$-nek, viszont $\overset{*}{\Sigma}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = A \overset{*}{\wedge} (P_\mathcal{T} A P_\mathcal{S})$ a legnagyobb közös alsó korlát, így $D \overset{*}{\leq} \overset{*}{\Sigma}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$, azaz $\overset{*}{\Sigma}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = A \overset{*}{\wedge} (P_\mathcal{T} A P_\mathcal{S})$ tényleg minden más $\overset{*}{\mathcal{M}}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$-beli operátornál nagyobb. Végül igazolnunk kell még, hogy $\overset{*}{\Sigma}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \in \overset{*}{\mathcal{M}}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$. Mivel $\overset{*}{\Sigma}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \overset{*}{\leq} P_\mathcal{T} A P_\mathcal{S}$, így a

$$\mathrm{ran}\Big(\overset{*}{\Sigma}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})\Big) \subseteq \mathrm{ran}(P_\mathcal{T} A P_\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{T} \quad \text{és} \quad \mathrm{ran}\Big(\overset{*}{\Sigma}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})^*\Big) \subseteq \mathrm{ran}(P_\mathcal{S} A P_\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{S}$$

tartalmazások fennálnak. Másrészt $\overset{*}{\Sigma}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \overset{*}{\leq} A$, így valóban $\overset{*}{\Sigma}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T}) \in \overset{*}{\mathcal{M}}(A, \mathcal{S}, \mathcal{T})$, ezzel pedig az állítást igazoltuk. ■

A következő állításban összegezzük a zárlat operátor néhány alapvető tulajdonságát.

3.4.4. Állítás: *Legyenek $A, B \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ operátorok és $\mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathscr{H}$ zárt alterek. Ekkor a következő tulajdonságok teljesülnek.*

1. $\overset{*}{\Sigma}\left(\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T}),\mathcal{S},\mathcal{T}\right)=\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})$

2. $\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})=\overset{*}{\Sigma}\left(A,\mathcal{S}\cap\overline{\operatorname{ran}(A^*)},\mathcal{T}\cap\overline{\operatorname{ran}(A)}\right)$

3. $\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})^*=\overset{*}{\Sigma}(A^*,\mathcal{T},\mathcal{S})$

4. *Ha A önadjungált, akkor $\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S})$ is önadjungált.*

5. *Ha $A\in\mathbf{B}_+(\mathscr{H})$, akkor $\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})\in\mathbf{B}_+(\mathscr{H})$.*

6. *Ha $A\overset{*}{\leq}B$, $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{U}$ és $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{V}$, akkor $\overset{*}{\Sigma}(B,\mathcal{U},\mathcal{V})\overset{*}{\leq}\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})$.*

Bizonyítás: Az első állítás bizonyításához vizsgáljuk meg, hogy mit jelent definíció szerint a $\overset{*}{\Sigma}\left(\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T}),\mathcal{S},\mathcal{T}\right)$ operátor. Ez egy olyan operátor, melyre teljesül $\overset{*}{\Sigma}\left(\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T}),\mathcal{S},\mathcal{T}\right)\overset{*}{\leq}\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})$ és fennállnak a definícióban szereplő, képterekre vonatkozó tartalmazások. Az $\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})$ definicója miatt viszont $\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})$-ra nyilván fennállnak a tartalmazások, másrészt a $\star$-rendezés reflexivitása miatt teljesül a $\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})\overset{*}{\leq}\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})$ egyenlőtlenség is, így biztosan

$$\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})\in\overset{*}{\mathcal{M}}\left(\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T}),\mathcal{T},\mathcal{S}\right).$$

Azonban nyilvánvaló, ha egy adott operátor alsó korlátai közül az egyik egyenlő az operátorral, akkor ő a legnagyobb alsó korlát. Így valóban

$$\overset{*}{\Sigma}\left(\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T}),\mathcal{S},\mathcal{T}\right)=\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T}).$$

A második egyenlőség igazolásához vessük össze, hogy mit jelent a két oldal definíció szerint. A bal oldal a

$$\{D\in\mathbf{B}(\mathscr{H})\mid D\overset{*}{\leq}A,\ \operatorname{ran}(D)\subseteq\mathcal{T},\ \operatorname{ran}(D^*)\subseteq\mathcal{S}\}$$

halmaz legnagyobb eleme, míg a jobb oldal a

$$\{D\in\mathbf{B}(\mathscr{H})\mid D\overset{*}{\leq}A,\ \operatorname{ran}(D)\subseteq\mathcal{T}\cap\overline{\operatorname{ran}(A)},\ \operatorname{ran}(D^*)\subseteq\mathcal{S}\cap\overline{\operatorname{ran}(A^*)}\}$$

halmaz legnagyobb eleme. Vegyük azonban észre, hogy az első halmazban lévő $D\overset{*}{\leq}A$ elemek 3.1.8 miatt implikálják, hogy $\operatorname{ran}(D)\subseteq\overline{\operatorname{ran}(A)}$ és $\operatorname{ran}(D^*)\subseteq\overline{\operatorname{ran}(A^*)}$, azaz a második halmazdefiníció semmilyen megszorítást nem jelent az elsőhöz képest, így ugyanazok az elemeik, következésképp a legnagyobb elemük is ugyanaz.

A harmadik állítás igazolásához felhasználjuk az előző tételben kapott formulát és az infimum korábban megismert tulajdonságait. A formula szerint $\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})^*$ éppen az $(A \overset{*}{\wedge} (P_\mathcal{T} A P_\mathcal{S}))^*$ operátorral egyenlő. Erre alkalmazva az infimum adjungáltjára vonatkozó állítást, adódik, hogy

$$\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})^* = A^* \overset{*}{\wedge} (P_\mathcal{T} A P_\mathcal{S})^*.$$

Az adjungálás tulajdonságai és a projekciók önadjungáltsága miatt kapjuk, hogy

$$A^* \overset{*}{\wedge} (P_\mathcal{T} A P_\mathcal{S})^* = A^* \overset{*}{\wedge} (P_\mathcal{S} A^* P_\mathcal{T}),$$

mely az előző tétel miatt igazolja, hogy $\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})^* = \overset{*}{\Sigma}(A^*,\mathcal{T},\mathcal{S})$.

Ha A önadjungált, akkor ismét a tételt használva, a következő számolás adódik:

$$\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S})^* = (A \overset{*}{\wedge} (P_\mathcal{S} A P_\mathcal{S}))^* = A^* \overset{*}{\wedge} (P_\mathcal{S} A P_\mathcal{S})^* = A^* \overset{*}{\wedge} (P_\mathcal{S} A^* P_\mathcal{S}) = A \overset{*}{\wedge} (P_\mathcal{S} A P_\mathcal{S}).$$

Ezzel pedig az állítást bebizonyítottuk.

Az ötödik állítás igazolásához tegyük fel, hogy A pozitív operátor. Mivel a 3.1.14 miatt minden A-nál kisebb D operátor pozitív, így a zárlat operátor is, hiszen nyilvánvalóan $\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T}) \overset{*}{\leq} A$.

Az utolsó állításban szereplő egyenlőtlenség igazolásához tegyük fel, hogy $A \overset{*}{\leq} B$, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$ és $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{V}$. Ezeket felhasználva a következő tartalmazások adódnak:

$$\overset{*}{\mathcal{M}}(A,\mathcal{S},\mathcal{T}) \subseteq \overset{*}{\mathcal{M}}(B,\mathcal{S},\mathcal{T}) \subseteq \overset{*}{\mathcal{M}}(B,\mathcal{U},\mathcal{V}).$$

Mivel bővebb halmaz infimuma kisebb, így ebből azonnal következik, hogy

$$\overset{*}{\Sigma}(B,\mathcal{U},\mathcal{V}) \overset{*}{\leq} \overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T}),$$

azaz az utolsó állítást is igazoltuk. ■

A következő állításban arra adunk választ, hogy mi történik, ha egymás után két altérpárra vesszük egy operátor zárlatát.

3.4.5. Állítás: *Legyenek $A,B \in \mathbf{B}(\mathscr{H})$ operátorok és $\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{U},\mathcal{V} \subseteq \mathscr{H}$ zárt alterek. Ekkor*

$$\overset{*}{\Sigma}\left(\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T}),\mathcal{U},\mathcal{V}\right) = \overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S}\cap\mathcal{U},\mathcal{T}\cap\mathcal{V}).$$

Bizonyítás: Az állítás igazolásához megmutatjuk, hogy az

$$\mathcal{M}_1 := \overset{*}{\mathcal{M}}\left(\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T}),\mathcal{U},\mathcal{V}\right) \quad \text{és} \quad \mathcal{M}_2 := \overset{*}{\mathcal{M}}(A,\mathcal{S}\cap\mathcal{U},\mathcal{T}\cap\mathcal{V})$$

halmazok egyenlőek, így a legnagyobb elemeik is azonosak. Tegyük fel, hogy $D \in \mathcal{M}_1$, ekkor definíció szerint $D \overset{*}{\leq} \overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})$. Emiatt viszont $\operatorname{ran}(D) \subseteq \mathcal{T}$ teljesül, hiszen a 3.1.8 miatt

$$\operatorname{ran}(D) \subseteq \operatorname{ran}\Big(\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})\Big) \subseteq \mathcal{T}.$$

Hasonlóan $\operatorname{ran}(D^*) \subseteq \mathcal{S}$. Másrészt, ha D benne van $\mathcal{M}_1$-ben, akkor

$$\operatorname{ran}(D) \subseteq \mathcal{V} \text{ és } \operatorname{ran}(D^*) \subseteq \mathcal{U}.$$

Összesítve tehát $\operatorname{ran}(D) \subseteq \mathcal{T}\cap\mathcal{V}$ és $\operatorname{ran}(D^*) \subseteq \mathcal{S}\cap\mathcal{U}$. Kihasználva hogy $\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T}) \overset{*}{\leq} A$ és összevetve a $D \overset{*}{\leq} \overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})$ egyenlőtlenséggel, kapjuk hogy $D \overset{*}{\leq} A$, mely a metszetekre vonatkozó tartalmazással együtt pont azt jelenti, hogy $D \in \mathcal{M}_2$.

Most tegyük fel azt, hogy $D \in \mathcal{M}_2$. Emiatt $D \overset{*}{\leq} A$ teljesül és fennállnak a

$$\operatorname{ran}(D) \subseteq \mathcal{T}\cap\mathcal{V} \text{ és } \operatorname{ran}(D^*) \subseteq \mathcal{S}\cap\mathcal{U}$$

tartalmazások, mely nyilván maga után vonja, hogy a metszet elemeire egyenként is fennáll. Azaz nyilván $\operatorname{ran}(D) \subseteq \mathcal{T}$ és $\operatorname{ran}(D^*) \subseteq \mathcal{S}$ is teljesül, emiatt $D \in \overset{*}{\mathcal{M}}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})$, melynek viszont $\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})$ a legnagyobb eleme, így $D \overset{*}{\leq} \overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})$. A metszetekre vonatkozó tartalmazások másik felét kihasználva kapjuk, hogy $\operatorname{ran}(D) \subseteq \mathcal{V}$ és $\operatorname{ran}(D^*) \subseteq \mathcal{U}$. Ez az iménti egyenlőtlenséggel együtt maga után vonja, hogy $D \in \mathcal{M}_1$. Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$, mellyel az állítást igazoltuk. ■

Végezetül megmutatjuk, hogy ha A pozitív operátor, akkor a zárlata másképp is kiszámolható.

3.4.6. Következmény: Legyen $A \in \mathbf{B}_+(\mathscr{H})$ operátor és $\mathcal{S},\mathcal{T} \subseteq \mathscr{H}$ zárt alterek. Ekkor $\overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T}) = \overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S}\cap\mathcal{T})$.

Bizonyítás: Mivel A pozitív, így $B := \overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T})$ szintén pozitív operátor, így tehát $A = A^*$ és $B = B^*$. Az előző állítás miatt $B = \overset{*}{\Sigma}(B,\mathcal{S},\mathcal{T})$, hiszen

$$\overset{*}{\Sigma}(B,\mathcal{S},\mathcal{T}) = \overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S}\cap\mathcal{S},\mathcal{T}\cap\mathcal{T}) = \overset{*}{\Sigma}(A,\mathcal{S},\mathcal{T}).$$

A B operátor önadjungáltsága miatt adódik, hogy

$$B = \overset{*}{\Sigma}(B,\mathcal{S},\mathcal{T}) = \overset{*}{\Sigma}(B^*,\mathcal{S},\mathcal{T}),$$

melyre a zárlat adjungáltjára vonatkozó formulát alkalmazva kapjuk a

$$\overset{*}{\Sigma}(B^*, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \overset{*}{\Sigma}\left(\overset{*}{\Sigma}(A^*, \mathcal{T}, \mathcal{S}), \mathcal{S}, \mathcal{T}\right)$$

egyenlőséget. Végezetül az A önadjungáltságát és a zárlat zárlatára vonatkozó állítást kihasználva a következő egyenlőségeket kapjuk:

$$\overset{*}{\Sigma}\left(\overset{*}{\Sigma}(A^*, \mathcal{T}, \mathcal{S}), \mathcal{S}, \mathcal{T}\right) = \overset{*}{\Sigma}\left(\overset{*}{\Sigma}(A, \mathcal{T}, \mathcal{S}), \mathcal{S}, \mathcal{T}\right) = \overset{*}{\Sigma}(A, \mathcal{S} \cap \mathcal{T}, \mathcal{S} \cap \mathcal{T}).$$

$\blacksquare$

Irodalom

[1] W. N. Anderson Jr. és G. E. Trapp. „Shorted operators. II". *SIAM J. Appl. Math.* 28 (1975), 60–71. old. ISSN: 0036-1399. DOI: 10.1137/0128007. URL: https://doi.org/10.1137/0128007.

[2] William N. Anderson Jr. „Shorted operators". *SIAM J. Appl. Math.* 20 (1971), 520–525. old. ISSN: 0036-1399. DOI: 10.1137/0120053. URL: https://doi.org/10.1137/0120053.

[3] Tsuyoshi Ando. „Problem of Infimum in the Positive Cone". *Analytic and Geometric Inequalities and Applications* (1999), 1–12. old. DOI: 10.1007/978-94-011-4577-0_1.

[4] J. Antezana és tsai. „A note on the star order in Hilbert spaces". *Linear and Multilinear Algebra* 58.8 (2010), 1037–1051. old. DOI: 10.1080/03081080903227104.

[5] R. G. Douglas. „On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space". *Proceedings of the American Mathematical Society* 17.2 (1966. jan.), 413–413. old. DOI: 10.1090/s0002-9939-1966-0203464-1.

[6] Zoltán Ujszászi és Tamás Titkos. *Egyszerű kérdések, bonyolult válaszok – I. Modellezés*. 2019. márc. URL: http://www.ematlap.hu/index.php/tudomany-tortenet-2019-03/853-ujszaszi-titkos-egyszeru-take-1.

[7] Zoltán Ujszászi és Tamás Titkos. *Egyszerű kérdések, bonyolult válaszok – II. Az infimum-probléma*. 2019. jún. URL: http://www.ematlap.hu/index.php/tudomany-tortenet-2019-6/869-ujszaszi-titkos-egyszeru-take-2.

[8] Zoltán Ujszászi és Tamás Titkos. *Egyszerű kérdések, bonyolult válaszok – III. A Lebesgue-felbontás*. 2019. szept. URL: http://www.ematlap.hu/index.php/tudomany-tortenet-2019-7/900-ujszaszi-titkos-iii-take-3.

[9] Xiao-Ming Xu és tsai. „The supremum of linear operators for the $*$-order”. *Linear Algebra and its Applications* 433.11-12 (2010), 2198–2207. old. DOI: 10.1016/j.laa.2010.07.026.

[10] A. Zemanian. „The Hilbert Port-An Extension of the Concept of the n-Port”. *IEEE Transactions on Circuit Theory* 16.3 (1969), 381–382. old. DOI: 10.1109/TCT.1969.1082976.

[11] Ujszászi Zoltán. „A Lebesgue-felbontás egy operátorelméleti megközelítése”. Dipl. Eötvös Loránd Tudományegyetem, 2018.