Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Diszjunktív vágások hálózati folyam modellje és szeparációja

Szakdolgozat

Dobrovoczki Péter

Alkalmazott Matematikus MSc
Operációkutatás szakirány

Témavezető:

Kis Tamás
Adjunktus
ELTE, Operációkutatási Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2020

NYILATKOZAT

Név: Dobrovoczki Péter

ELTE Természettudományi Kar, szak: Alkalmazott Matematikus MSc

NEPTUN azonosító: GQLZUF

Szakdolgozat címe:
Diszjunktív vágások hálózati folyam modellje és szeparációja

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2020. 12. 22.

Dobrovoczki Péter

a hallgató aláírása

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt szeretném kifejezni hálámat témavezetőm, Kis Tamás felé a szakdolgozati témáért és rengeteg segítségért, tanácsért, ötletért, javaslatért és általában a témavezetéssel járó munkájáért, amivel jelen dolgozat létrejöttét lehetővé tette.

Köszönet illeti meg barátnőmet, Nórát, családomat és barátaimat az egyetemről és azon kívülről is, amiért a tanulmányaim során végig türelemmel és támogatással viseltettek irántam.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Diszjunktív programozás alatt olyan lineáris (vagy akár egészértékű nemlineáris) programozási feladatokat értünk, ahol a feltételek néhány részhalmaza között diszjunktív kapcsolat áll fenn, azaz egy megoldás akkor megengedett, ha ezen feltétel-halmazok közül legalább az egyiket teljesíti. Ez tipikusan egy nem-konvex programozási feladatot ad, amelyet nem tudunk a lineáris optimalizálás hagyományos eszközeivel megoldani. Azonban lehetséges az így kapott feladatot konvexifikálni, mely művelet során nem veszítünk optimális megoldást, és az így kapott relaxált, már lineáris optimalizálási feladatnak minden optimális bázismegoldása az eredeti feladatnak is optimális megoldása. Az említett konvexifikálást általában nehéz elvégezni, a dolgozat célja mutatni egy korábbi eredményekre építkező, kombinatorikus megközelítést, amely segítségével diszjunktív programozási feladat-családok esetében a konvexifikálás megtehető.

1.1. Motiváció

A diszjunktív programozás segítségével a lineáris programozásban megszokott logikai konjunkció és negáció mellett modellezhető a diszjunkció is, és ezek segítségével például feltételek közötti implikációt is le tudunk írni, mivel az implikáció ekvivalens egy diszjunkcióval. Legyen A és B két logikai változó, ekkor

$$A \Rightarrow B \quad \equiv \quad \neg A \vee B. \tag{1.1}$$

Így természetesen le tudunk írni logikai ekvivalenciát is:

$$\begin{aligned} A \Leftrightarrow B &\equiv (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \\ &\equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)\,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Továbbá minden egészértékű program is tekinthető diszjunktív programnak. Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ az egyenlőtlenség-rendszert leíró mátrix és korlátozó vektor, $c \in \mathbb{R}^n$ célfüggvény. Ekkor a következő $0-1$ program

$$\begin{array}{rrcl} \text{minimize} & cx & & \\ \text{subjectto} & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \\ & x & \in & \{0,1\}^n \end{array} \tag{1.3}$$

egészértékűségi feltétele átírható az alábbi diszjunkciókra

$$(x_i = 0) \vee (x_i = 1) \quad \forall i = 1, \ldots, n,$$

vagy másként az alábbiakra:

$$(x_1 = 0, \ldots, x_n = 0) \vee (x_1 = 1, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0) \vee \cdots \vee (x_1 = 1, \ldots, x_n = 1)\,.$$

Ebben az esetben 2^n tagja van a diszjunkciónak. Hasonlóan bármely olyan egészértékű program, amelyben minden egészértékű változóra explicit adott egy alsó, és egy felső korlát, átírható diszjunktív programmá.

1.2. Áttekintés

Egy általános alakú diszjunktív program (DP) [Balas, 1979] alapján az alábbi formában áll elő:

$$\begin{array}{rrcl} \text{minimize} & cx & & \\ \text{subject to} & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \\ & x & \in & L, \end{array} \tag{1.4}$$

ahol L logikai feltételek egy halmaza. A logikai feltételekről azt mondjuk, hogy *diszjunktív normálformájúak* (DNF), ha olyanok, hogy a diszjunkció tagjai nem tartalmaznak további diszjunkciókat. Például az alábbi DP diszjunktív normálformájú

$$\begin{array}{rrcl} \text{minimize} & cx & & \\ \text{subject to} & Ax & \leq & b \\ \bigwedge_{j=1}^{k} \Bigg(\bigvee_{i=1}^{m} \Big(& D_i^j x & \leq & d_i^j \Big) \Bigg) \\ & x & \geq & 0. \end{array} \tag{1.5}$$

Abban az esetben, amikor olyan konjunkciók határozzák meg a DP-t, amik nem tartalmaznak további konjunkciókat, *konjunktív normálformájú* a program.

1. Definíció (Diszjunktív halmaz)**.** *Azon $x \in \mathbb{R}^n$ pontok halmazát, amelyek a diszjunkciót teljesítik, diszjunktív halmaznak fogjuk hívni.*

Jelen dolgozatban csak olyan diszjunktív halmazokkal foglalkozunk, amelyeket leíró diszjunkciók csak lineáris feltételeket tartalmaznak.

1.2.1. Poliéderes megközelítés

Egy geometriai szemléletű átfogalmazása a diszjunktív programnak az, hogy poliéderek uniója felett keressük az adott célfüggvényre nézve optimális megoldást. Legyen a diszjunkciót kielégítő halmaz az alábbi:

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \bigvee_{i=1}^{m} \left(D^i x \leq d^i \right), x \geq 0 \right\}.$$

Ekkor bármely lineáris célfüggvény felveszi az optimumát $\mathcal{D}$ valamely csúcsán (feltéve, hogy nincs más feltételünk x-re). Így ha vesszük a halmaz konvex burkát, azzal nem veszítünk el optimális megoldást, ugyanis a csúcsai az unióban szereplő poliéderek csúcsai közül kerülnek ki.

Legyen P^i az a poliéder, melynek elemei azok a pontok, amelyek a diszjunkció i. tagját kielégítik,

$$P^i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid D^i x \leq d^i,\ x \geq 0 \right\}.$$

Ekkor a diszjunktív halmaz átírható arra ezen poliéderek segítségével, hogy

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{m} P_i.$$

Így a konvex burok ezen poliéderek uniójának a konvex burka,

$$\operatorname{conv}(\mathcal{D}) = \operatorname{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{m} P_i\right).$$

A dolgozat célja ezen konvex burok lapjainak meghatározása bizonyos poliéder (politop) családoknál. Jelen dolgozatban kizárólag korlátos poliédereket fogunk tekinteni.

1.2.2. Diszjunktív vágások

Ebben a szakaszban egy, [Balas, 1979] által megállapított eredmény szerepel a diszjunktív vágások egy alapvető fogalmáról, az implikált egyenlőtlenségekről. Azt mondjuk, hogy az A feltétel implikálja a B feltételt, ha minden olyan megoldás, ami A-t kielégíti, az B-t is. Azokat a lineáris egyenlőtlenségeket hívjuk diszjunktív vágásoknak, amelyeket implikál a diszjunktív feltétel. Az összes diszjunktív vágást kielégítő pontok halmaza pedig pontosan a diszjunkciót kielégítő pontok halmazának a konvex burka.

A következő eredmény a diszjunktív vágások karakterizációjáról szól. Legyen $x \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n, b_0 \in \mathbb{R}, A^i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}, b^i \in \mathbb{R}^{m_i}$ $(\forall i = 1, \ldots, k)$. Jelölje a^i_j az A^i mátrix j. oszlopát.

1. Tétel ([Balas, 1979])**.** *Az $ax \geq b_0$ egyenlőtlenséget pontosan akkor implikálja a*

$$\bigvee_{i=1}^{k} \left(A^i x \geq b^i,\ x \geq 0\right)$$

diszjunkció, ha létezik $\theta^1 \in \mathbb{R}^{m_1}_+, \ldots, \theta^k \in \mathbb{R}^{m_k}_+$, amelyekre

$$a \geq \theta^i A^i,\ b_0 \leq \theta^i b^i \ \ (\forall i \in C),$$

ahol $C \subseteq \{1, \ldots, k\}$ azon indexek halmaza, amelyekre az $A^i x \geq b^i$ konzisztens.

2. fejezet

Kiterjesztett probléma és hálózati folyam reprezentáció

A diszjunktív halmaz konvex burkának meghatározása jellemzően bonyolult feladat, ha az eredeti változók terében szeretnénk maradni. Azonban ha ehhez nem ragaszkodunk, segíthet új változók bevezetésével kapott kiterjesztett problémafelírás, kiterjesztett formuláció vagy felemelés, beágyazás. Legyen ϵ_i az i-edik m-dimenziós egységvektor, és legyen $P_i^{\text{ext}} = P_i \times \epsilon_i$ az i-edik kiterjesztett poliéder, ez a poliéderek Cayley-beágyazása. Ettől eltérően a [Vielma, 2018] cikkben a szerző nem egységvektorokkal, hanem lineárisan független $\{0,1\}$ vektorokkal végzi el a beágyazást. Ekkor $\operatorname{conv}\left(\bigcup P_i^{\text{ext}}\right)$ konvex poliéder, és [Balas, 1998] alapján új változók bevezetésével könnyen adható rá egy kiterjesztett lineáris rendszer.

2.1. Felemelés és vetítés

Legyen a diszjunktív halmazunk $\mathcal{D}$ a $P_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_i x \le b_i\}$ politopokkal adott, a diszjunktív halmaz elemei azon $x \in \mathbb{R}^n$-ek, melyekre igaz

$$\bigvee_{i=1}^{m} (x \in P_i)\,. \tag{2.1}$$

Ennek új, $\lambda \in \mathbb{R}^m,\ x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}^n$ változók bevezetésével kapott kiterjesztett problémafelírása [Balas, 1998] alapján az alábbi:

$$
\begin{array}{rcll}
x^i & \in & \lambda_i P_i & \forall i \in [m] \\
x & = & \sum_{i=1}^{m} x^i & \\
\sum_{i=1}^{m} \lambda_i & = & 1 & \\
x^i & \geq & 0 & \forall i \in [m] \\
\lambda_i & \geq & 0 & \forall i \in [m]
\end{array}
\tag{2.2}
$$

Legyen Q azon $\left(x, \lambda, x^1, \ldots, x^m\right)$ vektorok halmaza, melyek kielégítik a (2.2). rendszert. Ahhoz, hogy a kiterjesztett poliéderek konvex burkát illetve az eredeti P_i poliéderek konvex burkát megkapjuk, a Q poliédert (λ, x) illetve (x) változók terére kell vetítenünk.

Legyen a Q poliéder azon $\left(x, \lambda, x^1, \ldots, x^m\right)$ vektorok halmaza, melyek kielégítik a (2.2) rendszert.

1. Állítás. *Ekkor*

$$\operatorname{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{m} P_i\right) = \operatorname{proj}_x(Q)$$

és

$$\operatorname{conv}(\bigcup_{i=1}^{m} P_i^{ext}) = \operatorname{proj}_{(\lambda,x)}(Q).$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy

$$\operatorname{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{m} P_i\right) = \left\{ x \,\middle|\, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \exists x^i \in P_i \colon x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i \right\}$$

illetve

$$\operatorname{proj}_x(Q) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} x^i \,\middle|\, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0, \exists x^1, \ldots, x^m \geq 0 \colon \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, A^i x^i \leq b^i \lambda_i \right\}$$

Könnyű észrevenni, hogy

$$
\begin{array}{lll}
x \in \operatorname{conv}\left(\bigcup_{i=1}^m P_i\right) & \Leftrightarrow & \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, x_i \geq 0 \\
& & A^i x_i \leq b^i \forall i \in [m], x = \sum_{i=1}^m x_i \lambda_i \\
& & \Updownarrow \\
& & \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, x_i \geq 0 \\
& & A^i x_i \lambda_i \leq b^i \lambda_i \forall i \in [m], x = \sum_{i=1}^m x_i \lambda_i \\
& & \Updownarrow \\
x \in \operatorname{proj}_x(Q) & \Leftrightarrow & \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, x^i \geq 0 \\
& & A^i x^i \leq b^i \lambda_i \forall i \in [m], x = \sum_{i=1}^m x^i
\end{array}
\tag{2.3}
$$

ami pontosan az, amit akartunk. A (λ, x) változók terére vonatkozó vetülethez tartozó azonosságot megkaphatjuk ebből úgy, hogy a konvex kombinációban az egyes x^i-khez tartozó λ_i együtthatókat hozzávesszük az $x \in \operatorname{proj}_x(Q)$ vektorhoz. □

Egy másik megfigyelés a Q poliéder csúcsairól az alábbi.

2. Állítás. *A Q poliéder csúcsai olyanok, hogy $\lambda_i = 1$ valamely i-re, minden $j \neq i$ -re pedig $\lambda_j = 0$.*

Bizonyítás. Ha valamelyik $\lambda_i = 1$, akkor a többinek 0-nak kell lennie, ezt tudjuk. Ekkor $A^j x^j \leq b^j \lambda_j = 0$ teljesül minden $j \neq i$-re. Mivel P_j politóp, a recessziós kúpja, azaz azon x vektorok halmaza, melyekre $Ax \leq 0$ teljesül, csak a 0 vektor lehet. Ekkor

$$
x = \sum_{j=1}^m x^j = x^i
$$

Legyen σ^i a $\lambda = e_i$-hez tartozó megoldás. Az állítás szerint ekkor minden $s = (x_s, \lambda_s, x_s^1, \ldots, x_s^m)$ előáll $\sum_{i=1}^m \vartheta_i \sigma^i$-ként, ahol $\vartheta_i \geq 0$ és $\sum_{i=1}^m \vartheta_i = 1$. Ekkor $\vartheta_i = \lambda_{s_i}$ választás jó lesz. Tudjuk, hogy

$$
\lambda_s = \sum_{i=1}^m \lambda_{s_i} e_i.
$$

Ekkor $\sigma^i = \left(\frac{x_s^i}{\lambda_{s_i}}, e_i, 0, \ldots, 0, \frac{x_s^i}{\lambda_{s_i}}, 0, \ldots, 0\right)$, feltéve, hogy $\lambda_{s_i} > 0$, tehát egyébként σ^i tetszőleges megoldás lehet.

$$
\sum_{i=1}^m \vartheta_i \sigma^i = s
$$

teljesül. Így minden megoldást elő tudunk állítani olyan megoldások konvex kombinációiból, melyekben $\lambda = e_i$, tehát pont ezek lesznek a csúcsok. □

2.1.1. Különböző korlátozóvektorok esete

Egy speciális esete a diszjunktív programoknak, amikor a diszjunkcióban szereplő egyenlőtlenség-rendszerek A együtthatómátrixa azonos, azonban a b korlátozó-vektorok különbözők. Legyen $P_i = \left\{x \mid Ax \leq b^i,\ x \geq 0\right\}$ és legyen P ezek uniója,

$$P = \bigcup_{i=1}^{m} P_i.$$

Legyen továbbá

$$Q = \mathrm{proj}_x \left\{ (x, \lambda) \;\middle|\; Ax \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i,\ x, \lambda \geq 0\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}$$

Azt a kérdést vizsgálja [Jeroslow, 1988], hogy milyen feltételek mellett lesz biztosan $P = Q$. Ezen alapulnak a [Blair, 1990] által adott, egyszerűbb elégséges feltételek. Azonban egy bonyolultsági eredmény sugallja, hogy nem lehetséges erre egyszerűen ellenőrizhető, elégséges feltételt adni.

2. Tétel ([Blair, 1990])**.** *Annak eldöntése, hogy $P = Q$, NP-nehéz.*

2.2. Hálózati folyam reprezentáció

A kiterjesztett formuláció egyik hátránya, hogy nagyon sok új változót vezet be a modellbe, m poliéder esetén egy n változós modellből egy $n + m + nm$ változós modellt kapunk. Azzal, ha az λ, x változók terére vetítjük a kiterjesztett formulációt kielégítő pontokat, azzal az nm változót elimináljuk. Ennek a vetítésnek az elvégzésére szolgál a hálózati folyam reprezentáció, amennyiben létezik.

2. Definíció (Hálózati folyam reprezentáció)**.** *Egy diszjunktív halmaz konvex burkának a hálózati folyam reprezentációja egy olyan $(G, c_{\lambda,x}, s, t)$ hálózat, amelyben az $s, t \in V(G)$ a forrás és a nyelő, $c_{\lambda,x} \colon A(G) \to \mathbb{R}^+$ olyan kapacitásfüggvény, amely a λ és x változóknak is a lineáris függvénye, és amely hálózatra igaz, hogy pontosan akkor van benne $\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i$ értékű folyam a kapacitásfüggvény egy $\hat{\lambda}, \hat{x}$ paraméterezése mellett, ha $\hat{\lambda}, \hat{x}$ benne van a diszjunktív halmaz konvex burkában.*

Ebben a dolgozatban csak olyan speciális alakú hálózati folyam reprezentációval foglalkozunk, amelyben a nyelő be-élein a kapacitás-függvény csak az x változóktól függ, olyan módon, hogy minden be-él kapacitása pontosan az egyik x_i változó. Minden egyéb él kapacitása pedig pontosan egy λ_i változónak egy nem-negatív lineáris függvénye.

A megfigyelések csak erre az esetre vonatkoznak, azonban releváns kérdés, hogy milyen egyéb hálózati reprezentációkat volna érdemes számításba venni, illetve hogy az általunk vizsgált reprezentáció kifejezőerejének mik a határai, mik azok a problémák, amiknek létezik ilyen fajta hálózati reprezentációja.

A hálózat egyik további tulajdonsága, hogy hány szintes, azaz hogy az s és t csúcsok között a leghosszabb irányított úton hány s-től és t-től különböző csúcs fekszik.

A hálózati reprezentáció egyik kulcs tulajdonsága, hogy ha felírnánk az összes, csúcsaira és éleire vonatkozó folyamfeltételt, akkor megkapnánk a kapacitás-függvény azon paraméterezéseit, amely mellett van az x-ek összegével egyenértékű folyam a hálózatban. Ezzel az az egy probléma volna, hogy minden élre kellene egy folyam-változó, amivel potenciálisan visszakaphatjuk azt az nm változót, amelyet eliminálni akartunk.

Ennek kiküszöbölése érdekében felhasználjuk a folyamok és $s-t$-vágások kapcsolatáról szóló egyik alapvető tételt.

3. Tétel (Maximális folyam, minimális vágás (MFMC), Ford & Fulkerson, 1962)**.** *Egy hálózatban a maximálisan elérhető folyamérték egyenlő a minimális kapacitású $s-t$-vágás értékével.*

Ez alapján ahhoz, hogy egy λ, x paraméterezés mellett a hálózatban legyen az x-ek összegével egyenértékű folyam, az kell, hogy a minimális $s-t$-vágás értéke legalább ennyi legyen, azaz pontosan az x-ek összege legyen.

Másik kulcs-megfigyelés, hogy ha veszünk egy tetszőleges $s-t$-vágást, és felírjuk azt az egyenlőtlenséget, hogy az elvágott éleken a kapacitások összege legyen legalább annyi, mint az x-ek összege, akkor az konvex burokra érvényes egyenlőtlenséget kapunk. Továbbá ezt a megfigyelést szeparációhoz is fel tudjuk használni.

3. fejezet

A változókra vonatkozó felső korlátok modellezése

Ebben a fejezetben a diszjunktív programoknak azt az egyszerű esetét tárgyaljuk, amikor a diszjunkció tagjai a nem-negatív változókra vonatkozó, különböző felső korlátok. Ezt olyan egyenlőtlenség-rendszerekkel fogjuk kifejezni, amelyek együtthatómátrixai elemenként pozitív diagonális mátrixok, korlátozóvektora pedig elemenként nem-negatív valós vektor. A diszjunkcióban $m \in \mathbb{Z}_+$ darab különböző, fent definiált alakú egyenlőtlenség-rendszer szerepel:

$$\begin{array}{rrcl} \max & cx & & \\ \text{s.t.} & \bigvee_{i=1}^{m} \left(A^i x \right. & \leq & \left. b^i \right) \\ & x & \geq & 0 \end{array} \tag{3.1}$$

Ezzel ekvivalens az alábbi:

$$\begin{array}{rrcl} \max & cx & & \\ \text{s.t.} & \bigvee_{i=1}^{m} \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \left(x_j \right. \right. & \leq & \left. \left. \frac{b^i_j}{a^i_{jj}} \right) \right) \\ & x & \geq & 0 \end{array} \tag{3.2}$$

Ez speciális esete az olyan diszjunktív programoknak, amikor csak a korlátozó vektort változtatjuk, az egyenlőtlenség-rendszer együttható mátrixa a diszjunkció minden ágán azonos.

3.1. Hálózati folyam reprezentáció

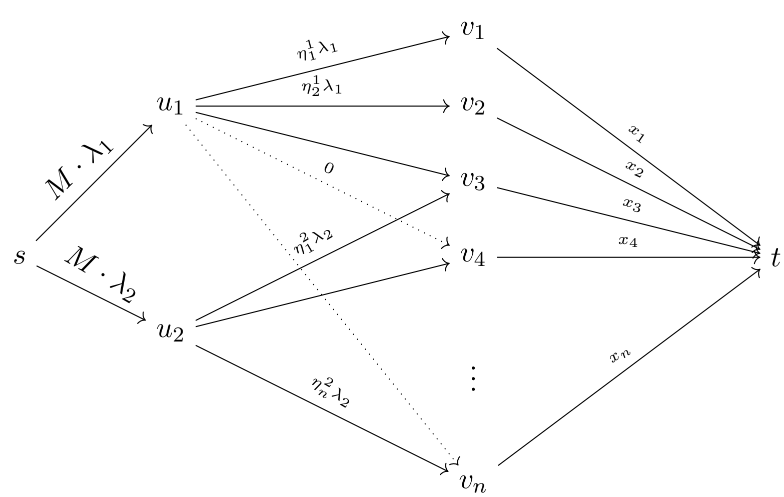
Ennek a hálózati reprezentációját felírhatjuk a következőféleképpen. Legyen M olyan, hogy

$$M > \max_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j^i}{a_{jj}^i} \right).$$

Legyenek az s ki-élein a kapacitások $M \cdot \lambda_i$ értékűek, $u_i, \ldots, u_m$ az s ki-szomszédai, $v_1, \ldots, v_n$ a t be-szomszédai. Legyen továbbá

$$\eta_j^i = \frac{b_j^i}{a_{jj}^i} \cdot \chi_{a_{jj}^i > 0}.$$

Az u_i-ből v_j-be mutató él kapacitása legyen $\eta_j^i \lambda_i$. Az alábbi ábrán látható az így előállított hálózati folyam reprezentáció.



Azokat az éleket, amelyeken $\eta_j^i = 0$, nem szükséges behúznunk, az ábrán ezek a pontozott élek. Azok az élek, amelyeken $M \cdot \lambda_i$ a kapacitás, gyakorlatilag végtelen kapacitásúnak is tekinthetjük, néha így fogunk hivatkozni rá a dolgozatban.

3.2. Indukált egyenlőtlenségek

A konvex burok egy minimális felírását szeretnénk megkapni, amin már tudunk a hagyományos módszerekkel optimumot keresni. Ehhez a korábban leírt hálózati folyamot használjuk fel, annak is az $s-t$ vágásait. Ilyen vágásokból a csúcsok számában exponenciálisan sok lehet, amik között azonban lehetnek olyanok, amik *dominálnak* más vágásokat, erősebbek más vágásoknál, így erősebb felső korlátot adnak a minimális vágásra. Az ilyen vágásokra van szükségünk, és ezek meg is találhatók.

A domináns vágások közül is elsősorban azokra a vágásokra van szükségünk, amik *lap*ot indukálnak, azaz ha egyenlőséggel teljesülnek, akkor minden egyéb feltétel szigorú egyenlőtlenséggel teljesül. Ezeknek az egyenlőtlenségeknek a megtalálása, jellemzése a cél az $s-t$ vágásokon keresztül.

Felmerül a kérdés, hogy mi történik, ha van egy ∞ kapacitású élünk. Ebben az esetben nem érdemes azokat a vágásokat számításba venni, amelyek tartalmazzák ezt az élt, ugyanis az össz-kapacitása minden ilyennek ∞ lesz.

Mivel jelen esetben minden $\forall i : c(s, u_i) = \infty$, a kérdés arra egyszerűsödik, hogy mely v_j-k kerüljenek S-be, ahol $\left[S, \bar{S}\right] : s \in S$ egy $s-t$ vágás. Az ilyen vágások szerkezete tehát az alábbi:

$$S = \{s\} \cup \{u_i | i \in [m]\} \cup \{v_j | j \in J \subseteq [n]\}.$$

Jelölje $\mathcal{S}$ az összes ilyen S halmazok halmazát, továbbá jelölje $\tilde{c}(S)$ egy $\left[S, \bar{S}\right]$ vágás értékét:

$$\tilde{c}(S) = \sum_{e \in \delta(S)} c(e).$$

Ekkor az S által indukált egyenlőtlenség az alábbi:

$$\tilde{c}(S) \geq \sum_{i=1}^{n} c\left(v_i t\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \forall S \in \mathcal{S}. \tag{3.3}$$

3.3. Domináns vágások

Mivel $|\mathcal{S}| = 2^n$, nem akarjuk leellenőrizni az összes feltétel teljesülését, hanem csak a dominánsokét, vagy még inkább a lap-indukálókét. Egy vágás kapacitását megkaphatjuk az alábbi módon: legyen

$$S_J \in \mathcal{S}, J \in [n], S_J = \Big\{s, u_1, \ldots, u_m, (v_j)_{j\in J}\Big\}.$$

Ekkor az $[S_J, \bar{S}_J]$ vágás értéke:

$$\begin{aligned} \tilde{c}(S_J) &= \sum_{j\in J} x_j + \sum_{\substack{i=1 \\ j\notin J}}^{m} c(u_i v_j) \\ &= \sum_{j\in J} x_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j\notin J} \frac{b_j^i \lambda_i}{a_{jj}^i} \\ &= \sum_{j\in J} x_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j\notin J} \eta_j^i \lambda_i. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Megfigyelhető, hogy ha $j \notin J$

$$x_j \le \sum_{i=1}^{m} \eta_j^i \lambda_i \implies \tilde{c}(S_J) \ge \tilde{c}(S_{J\cup\{j\}}).$$

Így kiszűrhetjük az olyan j indexeket, amikhez tartozó v_j semmiképp nem kerülhet domináns vágásba. Legyen $J^* \subseteq [n]$,

$$J^* = \left\{ j \,\middle|\, x_j \le \sum_{i=1}^{m} \eta_j^i \lambda_i \right\}$$

ekkor $\tilde{c}(S_{J^*}) \le \tilde{c}(S_J)\ \forall J \ne J^*$. Az is látszik, hogy a minimális vágás értéke

$$\tilde{c}(S^*) = \sum_{i=1}^{m} \min\left\{ x_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j^i \lambda_i \right\} = \tilde{c}(S_{J^*}).$$

Tehát a (3.3) alapján

$$\begin{aligned} \tilde{c}\,(S_{J^*}) \;=\; \sum_{j\in J^*} x_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j\notin J^*} \eta_j^i\lambda_i &\ge \sum_{i=1}^{n} x_i \\ &\Updownarrow \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j\notin J^*} \eta_j^i\lambda_i &\ge \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j\in J^*} x_j \\ &= \sum_{j\notin J^*} x_j. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Következésképpen, egy megoldás akkor érvényes, ha a hozzá tartozó minimális vágást reprezentáló J^*-ra teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j \notin J^*} \eta_j^i \lambda_i - \sum_{j \notin J^*} x_j = \sum_{j \notin J^*} \left(\sum_{i=1}^{m} \eta_j^i \lambda_i - x_j \right) \geq 0. \tag{3.6}$$

Azonban tudjuk, hogy

$$\forall j \in J^* \colon \sum_{i=1}^{m} \eta_j^i \lambda_i - x_j \geq 0, \tag{3.7}$$

$$\forall j \notin J^* \colon \sum_{i=1}^{m} \eta_j^i \lambda_i - x_j < 0 \tag{3.8}$$

tehát ahhoz, hogy (3.6) teljesüljön, az kell, hogy $J^* = [n]$ legyen. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} \eta_j^i \lambda_i \geq x_j \quad \forall j \in [n]$$

kell, hogy teljesüljön.

3.4. Lap-indukáló vágások

A fenti gondolatmenet alapján már meg tudjuk mondani, hogy milyen a lap-indukáló vágások szerkezete.

3. Állítás. *A lap-indukáló vágások*

$$\sum_{i=1}^{m} \eta_j^i \lambda_i \geq x_j \quad \forall j \in [n].$$

Bizonyítás. Ez pontosan azt jelenti, hogy a lapot indukáló J^* halmazok az egyelemű halmazok komplementerei, azaz csak egyetlen v_j van rajtuk kívül. Indirekt tegyük fel, hogy van olyan $J \subseteq [n]$, hogy $|J| \leq n - 2$. Legyen $[S_J, \bar{S}_J]$ a hozzá tartozó vágás. Ekkor

$$\tilde{c}\,(S_J) = \sum_{j \notin J} \sum_{i=1}^{m} \eta_j^i \lambda_i + \sum_{j \in J} x_j.$$

Ha $\tilde{c}(S_J) = \sum_{j=1}^{n} x_j$, akkor

$$\sum_{j\in[n]\setminus J} \left(\left(\sum_{i=1}^{m} \eta_j^i \lambda_i \right) - x_j \right) = 0.$$

Azt tudjuk, hogy $\left(\sum_{i=1}^{m} \eta_j^i \lambda_i\right) - x_j \geq 0$ minden j esetén, így azt kell látnunk, hogy ez csak akkor teljesülhet, ha $\forall j \in [n] \setminus J$ $\sum_{i=1}^{m} \eta_j^i \lambda_i = x_j$. Ezzel ekvivalens, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} \eta_j^i \lambda_i + \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} x_l = \sum_{l=1}^{n} x_l.$$

Ez pedig pont egy olyan $[S_{\hat{J}}, \bar{S}_{\hat{J}}]$ vágáshoz tartozó egyenlőtlenségnek az egyenlőséggel teljesülése, ahol $\hat{J} = [n] \setminus \{j\}$. Ez pontosan azt jelenti, hogy ekkor J nem lehet lapja a poliédernek. $\square$

3.5. Alkalmazások

3.5.1. Nem-negatív diagonális mátrixokkal és nem-negatív korlátozó vektorral adott politópok uniója

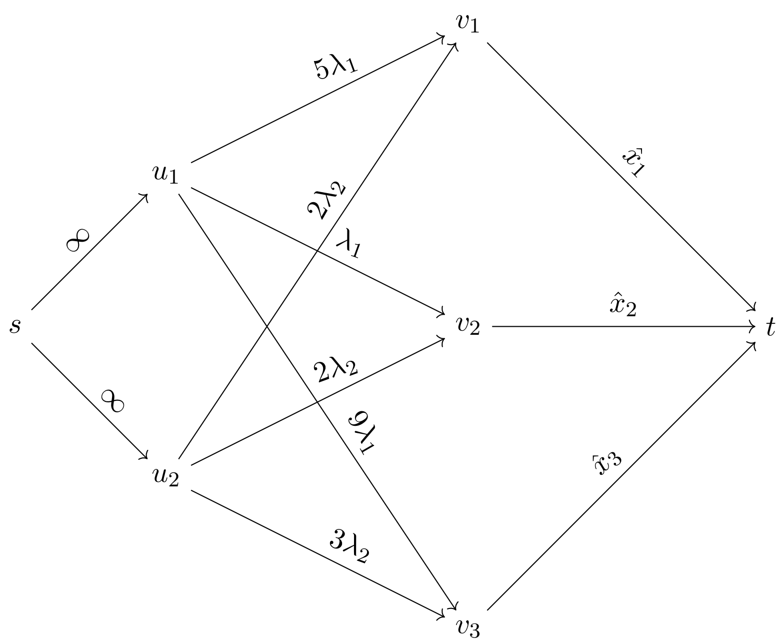
1. Példa. Legyen

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b^1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

és

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Legyen továbbá $P^1 = \{x | A^1 x \leq b^1, x \geq 0\}$, $P^2 = \{x | A^2 x \leq b^2, x \geq 0\}$. Keressük $\operatorname{conv}\left(P^1 \cup P^2\right)$-t. Ehhez definiálhatjuk az alábbi hálózatot:



Ebben szeretnénk, ha a minimális vágás értéke legalább akkora lenne, mint $\sum_{i=1}^{3} x_i$. Felírhatjuk hozzá a Q kiterjesztett poliédert az alábbi módon:

$$
\begin{array}{rcll}
\lambda_1 + \lambda_2 & = & 1 & \\
x_1^1 & \leq & 5\lambda_1 & \\
x_2^1 & \leq & \lambda_1 & \\
x_3^1 & \leq & 9\lambda_1 & \\
x_1^2 & \leq & 2\lambda_2 & \\
x_2^2 & \leq & 2\lambda_2 & \\
x_3^2 & \leq & 3\lambda_2 & \\
\hat{x}_1 & \leq & x_1^1 + x_1^2 & \\
\hat{x}_2 & \leq & x_2^1 + x_2^2 & \\
\hat{x}_3 & \leq & x_3^1 + x_3^2 & \\
x_j^i & \geq & 0 & \forall i \in \{1,2\},\ \forall j \in \{1,2,3\} \\
\hat{x}_j & \geq & 0 & \forall j \in \{1,2,3\} \\
\lambda_i & \geq & 0 &
\end{array}
\tag{3.9}
$$

ahol x_j^i a folyamváltozó az $(u_i v_j)$ élen. Ekkor ha elimináljuk az x_j^i változókat, azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{rcll} \lambda_1+\lambda_2 & = & 1 & \\ \hat{x}_1 & \leq & 5\lambda_1+2\lambda_2 & \\ \hat{x}_2 & \leq & \lambda_1+2\lambda_2 & \\ \hat{x}_3 & \leq & 9\lambda_1+3\lambda_2 & \\ \hat{x}_j & \geq & 0 & \forall j\in\{1,2,3\} \\ \lambda_i & \geq & 0 & \forall i\in\{1,2\}, \end{array} \tag{3.10}$$

ami a Q poliédernek a $(\lambda,\hat{x})$ változók terére vett vetülete. Ha a lapoknak a (3) állításban megfogalmazott jellemzését használjuk fel, azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{rcccl} \sum_{i=1}^{2}\frac{b_1^i}{a_{11}^i}\lambda_i & = & 5\lambda_1+2\lambda_2 & \geq & \hat{x}_1 \\ \sum_{i=1}^{2}\frac{b_2^i}{a_{22}^i}\lambda_i & = & \lambda_1+2\lambda_2 & \geq & \hat{x}_2 \\ \sum_{i=1}^{2}\frac{b_3^i}{a_{33}^i}\lambda_i & = & 9\lambda_1+3\lambda_2 & \geq & \hat{x}_3 \end{array} \tag{3.11}$$

a poliéder lapjai, ez egyezik az x_j^i-k eliminálásával kapott egyenlőtlenségekkel. •

3.5.2. Téglák uniója

A következő példa és megoldása szerepel [Jeroslow, 1988]-ban, azonban mi más úton jutottunk el hozzá.

2. Példa. Az előző példában leírt politópok olyanok, hogy egyik csúcsuk a 0, és minden oldaluk merőleges a többi oldalra, például 3 dimenzióban kanonikus elhelyezkedésű téglatestek. Több dimenzióban is tégláknak fogjuk hívni őket, vagy többdimenziós intervallumnak.

3. Definíció (Tégla)**.** *A $P=\{x\in\mathbb{R}^n \mid l_i\leq x_i\leq u_i\ \forall i=1,\dots,n\}$ politópot az $(l,u)\,,(l,u\in\mathbb{R}^n)$ vektorok által határolt téglának hívjuk.*

Az előző állításban szereplő téglákat határoló vektorok közül $l=0$ volt mindig. Hogyan tudjuk megadni általános vektorokkal határolt téglák uniójának a konvex burkát? A megoldandó probléma az alábbi:

$$\begin{array}{lrcl} \max & cx & & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & b \\ & \bigvee_{i=1}^{m} (x & \in & P_i) \\ & x & \in & \mathbb{R}^n, \end{array} \tag{3.12}$$

ahol P_i az $\left(l^i, u^i\right)$ vektorok által határolt tégla. A hálózati modellt erre közvetlenül sajnos nem tudjuk alkalmazni, ezért bevezetünk n darab új $y_1, \ldots, y_n$ változót. Legyen $L = \left[l^1, \ldots, l^m\right]$ az alsó határoló vektorokból készített mátrix. Legyen

$$Q_i = \left\{y \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq y_j \leq u^i_j - l^i_j,\ \forall j = 1, \ldots, n\right\},$$

ez a P_i tégla eltoltja. Ezeknek a politópoknak az uniójának konvex burkát már meg tudjuk határozni a hálózatra vonatkozó állítás segítségével. Legyen most

$$\eta^i_j = u^i_j - l^i_j,$$

ekkor a lapjaival definiált $\operatorname{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{m} Q_i\right)$ poliéder az alábbi:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i & = & 1 \\ \sum_{i=1}^{m} \left(u^i_j - l^i_j\right) \lambda_i & \geq & y_j \quad \forall j = 1, \ldots, n \\ y_j & \geq & 0. \end{array} \tag{3.13}$$

Az kellene még, hogy ezt vissza transzformáljuk az eredeti változók terébe, ami lényegében egy eltolást jelent, viszont az eltolásvektor függ a λ változóktól. Úgy kaphatjuk meg tehát a megoldást, hogy

$$x_j = y_j + \sum_{i=1}^{m} l^i_j \lambda_i.$$

Az így kapott lineáris program az alábbi:

$$\begin{aligned}
\max \quad & cx && && (3.14a)\\
\text{s.t.} \quad & Ax && \leq b && (3.14b)\\
& \sum_{i=1}^{m} \lambda_j && = 1 && (3.14c)\\
& x_j && = y_j + \sum_{i=1}^{m} l_j^i \lambda_i \quad \forall j = 1, \ldots, n && (3.14d)\\
& y_j && \leq \sum_{i=1}^{m} \left(u_j^i - l_j^i\right) \lambda_i \quad \forall j = 1, \ldots, n && (3.14e)\\
& y_j && \geq 0. && (3.14f)
\end{aligned}$$

Ezt tovább lehet alakítani az y_j változók eliminálásával, így kaphatunk egy formulációt, ami csak az eredeti x_j változókat és diszjunkciók leírásához szükséges változókat használja. Ezt úgy tudjuk megcsinálni, hogy (3.14d)-ből következik, hogy

$$y_j = x_j - \sum_{i=1}^{m} l_j^i \lambda_i, \tag{3.15}$$

továbbá (3.14e)-ből következik, hogy

$$y_j + \sum_{i=1}^{m} l_j^i \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{m} u_j^i \lambda_i. \tag{3.16}$$

Ezek után (3.14d)-ből és (3.16)-ból azt kapjuk, hogy

$$x_j \leq \sum_{i=1}^{m} u_j^i \lambda_i, \tag{3.17}$$

illetve (3.15)-ből és (3.14f)-ből azt kapjuk, hogy

$$x_j \geq \sum_{i=1}^{m} l_j^i \lambda_i. \tag{3.18}$$

Így elimináltuk az összes y_j változót, és felírhatjuk a modellt csak az x, λ

változók segítségével az alábbi módon:

$$\begin{array}{rrcll} \max & cx & & & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & b & \\ & \sum_{i=1}^{m} \lambda_j & = & 1 & \\ & x_j & \leq & \sum_{i=1}^{m} u_j^i \lambda_i & \forall j = 1, \ldots, n \\ & x_j & \geq & \sum_{i=1}^{m} l_j^i \lambda_i & \forall j = 1, \ldots, n. \end{array} \tag{3.19}$$

Ezzel visszakaptuk [Jeroslow, 1988] által talált formulációt. •

4. fejezet

A változók részhalmazainak összegeire vonatkozó felső korlátok modellezése

Mit tudunk abban az esetben mondani, ha az $s - u_i$ éleken nem ∞ a kapacitás? Általánosan úgy írható fel a feladat, hogy az előző hálózatot úgy módosítjuk, hogy az $s-u_i$ élekre $c_i\lambda_i$ kapacitást írunk. Most jelöljük továbbá az u_iv_j él kapacitásának együtthatóját β_j^i-vel, vagyis $c\,(u_iv_j) = \beta_j^i\lambda_i$. Az esetleges közbenső szintek számozatlan csúcsaihoz legyen $c\,(pq) = \beta_q\lambda_i$. Ha minden i-re

$$c_i \geq \sum_{v\in\delta(u_i)} \beta_v^i,$$

akkor vehetjük az összes c_i-t ∞-nek, ezzel visszavezetve az előző esetre. Továbbá feltehetjük, hogy a hálózat a nyelő és annak be-szomszédai nélkül egy s gyökerű fenyő, azaz minden csúcshoz pontosan egy út vezet s-ből, és minden ilyen úton a kapacitások összege pontosan egy λ_i-től függ. Éppen ezért az s, t és $\rho\,(t)$ elhagyásával olyan u_i gyökerű F_i fenyőkre esik szét, ahol az F_i összes élének a kapacitása már csak λ_i-nek a függvénye. Ez alapján egy köztes csúcshoz egyetlen be-él vezet, így ezen az élen az együtthatót tudjuk azonosítani a köztes csúccsal, tehát egy v csúcs be-élén például lehet β_v, a $v \in \rho\,(t)$ csúcsok esetében pedig elég tudni, hogy melyik F_i fenyőből érkezik a be-él, így ezeken az éleken lehet az együttható β_v^i. Az egységes jelölés kedvéért a köztes csúcsok együtthatóin is jelölni fogjuk a továbbiakban, hogy melyik F_i fenyőhöz tartozik.

4.1. Hálózat egyszerűsítési szabályok

Élhetünk néhány feltételezéssel a hálózatról, amelyekkel kizárhatjuk az olyan kapacitásokat, amelyek esetén problémát okozna megállapítani a domináns vágásokat. Feltehető tehát, hogy minden $u \in V \setminus \rho(t)$ csúcsra $\beta_u^i < \sum_{v\in\delta(u)} \beta_v^i$, illetve hogy $\beta_u^i \geq \max_{v\in\delta(u)} \beta_v^i$.

Ha ezen két feltételezés közül nem felel meg valamelyiknek a hálózat, akkor módosíthatjuk az alábbi módon megoldások elvesztése nélkül:

- $\beta_u^i > \sum_{v\in\delta(u)} \beta_v^i \rightarrow \beta_u^i = \sum_{v\in\delta(u)} \beta_v^i$
- $\beta_v^i > \beta_u^i \;\; (v \in \delta(u)) \rightarrow \beta_v^i = \beta_u^i$.

Az első esetben azért nem veszítünk megoldást, mivel a β_u^i kapacitású élt nem lehetne semmiképp telíteni, mivel a végpontjából kimenő éleken a kapacitások összege kevés. A második esetben azért nem veszítünk megoldást, mert az uv élt nem lehetne telíteni, ugyanis az u-ba bemenő élen lenne túl kevés a kapacitás.

4. Definíció (Redukált hálózat)**.** *A fenti transzformációk elvégzése után kapott hálózatot redukált hálózatnak, a transzformációkat hálózat-egyszerűsítési szabályoknak hívjuk.*

Innentől az állításokat kétszintes hálózatokra fogalmazzuk meg, könnyen általánosíthatók többszintes hálózatokra, hasonló bizonyításokkal. Kétszintes hálózat esetén csak az $s, u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n, t$ csúcsok alkotják a csúcshalmazt, így jelölésben áttértünk arra, hogy az éleken az együtthatókban már nem csúcsok lesznek megjelölve, csak az indexük. Legyen az su_i él kapacitásának együtthatója α_i, az u_iv_j élnek pedig β_{ij}.

4.2. Domináns vágások

Egy domináns vágásban ebben az esetben nem feltétlenül van benne az összes u_j csúcs, sem az összes v_i csúcs. Tegyük fel, hogy egy vágásban benne van valamely $J \subseteq [n]$ halmazra minden v_j, ha $j \in J$. Ekkor egy u_i csúcs nem lehet benne, ha a belőle a J-n kívüli v_k csúcsokba vezető éleken az $\beta_{ik}\lambda_i$-k összege kisebb, mint α_i. Azaz, ha $[S_J, T_J]$ vágás, akkor

$$\tilde{c}\,(S_J) = \sum_{j \in J} x_j + \sum_{i=1}^{m} \left(\min \left\{ \alpha_i, \sum_{j \notin J} \beta_{ij} \right\} \lambda_i \right) \geq \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Jelölje μ_J^i a fenti minimumot,

$$\mu_J^i = \min \left\{ \alpha_i, \sum_{j \notin J} \beta_{ij} \right\}.$$

Az előzőt átrendezve kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_J^i \lambda_i \geq \sum_{j \notin J} x_j.$$

1. Megfigyelés. Egy pont akkor van rajta a polliédernek egy vágásból kapott oldalán, ha a vágásból kapott egyenlőtlenséget egyenlőséggel teljesíti, ezzel ekvivalens, hogy a paraméterezés után van olyan folyam, amit telíti a vágás éleit.

2. Megfigyelés. Megfigyelhetjük, hogy egy vágás akkor lap-indukáló, ha a paraméterezés után van a poliédernek $n+m-1$ affin független pontja, ami vágás éleit telíti.

4. Állítás. *Minden lap-indukáló vágás domináns.*

Bizonyítás. Legyen $J \subseteq [n]$, $\mu_J^i = \min \left\{ \alpha_i, \sum_{j \notin J} \beta_{ij} \right\}$, $\pi_J^i = \max \left\{ \alpha_i, \sum_{j \notin J} \beta_{ij} \right\}$, és tegyük fel, hogy létezik olyan i_0, amelyre $\mu_J^{i_0} < \pi_J^{i_0}$. Ekkor a J-hez tartozó domináns vágásból származó egyenlőtlenség

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_J^i \lambda_i \geq \sum_{j \notin J} x_j.$$

Legyen $\emptyset \neq M \subseteq [m]$ olyan, hogy $i_0 \in M$, ekkor

$$\sum_{i \notin M} \mu_J^i \lambda_i + \sum_{i \in M} \pi_J^i \lambda_i \geq \sum_{j \notin J} x_j$$

egy J-hez tartozó dominált vágásból származó egyenlőtlenség, ugyanis tudjuk, hogy

$$\sum_{i \in M} \mu_J^i < \sum_{i \in M} \pi_J^i.$$

Indirekt tegyük fel, hogy egy dominált vágás is lap-indukáló, azaz létezik hozzá $n+m-1$ affin független pont $\left(\bar{\lambda}^k, \bar{x}^k\right)_{k=1}^{n+m-1}$, amire

$$\sum_{i \notin M} \mu_J^i \bar{\lambda}_i^k + \sum_{i \in M} \pi_J^i \bar{\lambda}_i^k - \sum_{j \notin J} \bar{x}_j^k = 0 \quad \forall k \in [n+m-1] .$$

Ekkor azonban

$$0 \leq \sum_{i=1}^{m} \mu_J^i \bar{\lambda}_i^k - \sum_{j \notin J} \bar{x}_j^k \leq \sum_{i \notin M} \mu_J^i \bar{\lambda}_i^k + \sum_{i \in M} \pi_J^i \bar{\lambda}_i^k - \sum_{j \notin J} \bar{x}_j^k = 0 \quad \forall k \in [n+m-1] .$$

Itt végig egyenlőségnek kell állnia, azonban tudjuk, hogy

$$\sum_{i \in M} \mu_J^i < \sum_{i \in M} \pi_J^i,$$

tehát csak akkor teljesülhet egyenlőséggel, ha $\bar{\lambda}_i^k = 0$ minden $i \in M$ indexre. Ez azt jelentené, hogy $n+m-1$ affin független megoldásnak egy $n+m-1-|M|$ dimenziós hipersíkon kell elhelyezkednie, ami csak akkor lehetséges, ha $|M| = 0$, de feltettük, hogy $i_0 \in M$. Ezzel ellentmondásra jutottunk. □

4.3. Minimális és maximális domináns vágások

Tehát elég a domináns vágásokat vizsgálnunk amikor lap-indukáló egyenlőtlenségeket keresünk. Tartalmazásra nézve domináns vágásnak nevezünk egy $\left(S, \bar{S}\right)$ vágást egy U halmazra nézve, ahol az U a nyelő (t) szomszédainak részhalmaza, ha domináns és S tartalmazza az összes Z halmazt, ahol Z szintén domináns vágás U-ra nézve. Maximális domináns vágásról akkor van értelme beszélni, ha egy adott U halmazhoz több domináns vágás is létezik. Ez pedig akkor fordulhat elő, ha van olyan csúcs a hozzá tartozó domináns vágásban, amibe a bemenő élen és belőle kimenő éleken a kapacitásösszeg egyenlő, azaz

$$\tilde{c}\left(\rho\left(v\right)\right) = \tilde{c}\left(\delta\left(v\right)\right)$$

ekkor ugyanis a vágás értéke nem változik ha bevesszük a v csúcsot vagy kihagyjuk.

5. Állítás. *A vágás-függvény szub-moduláris:*

$$\tilde{c}\left(X\right) + \tilde{c}\left(Y\right) \geq \tilde{c}\left(X \cap Y\right) + \tilde{c}\left(X \cup Y\right) .$$

Bizonyítás. Jelölje $\tilde{c}\,(X,Y)$ az X-ből Y-ba menő éleken a kapacitások összegét, azaz

$$\tilde{c}\,(X,Y) = \sum_{e\in\delta(X)\cap\rho(Y)} c\,(e)\,.$$

Átírhatjuk az egyenlőtlenség bal oldalát az alábbi módon:

$$\tilde{c}\,(X) + \tilde{c}\,(Y) = \tilde{c}\,(X \setminus Y) + \tilde{c}\,(Y \setminus X) + 2\tilde{c}\,(X \cap Y)\,,$$

a jobb oldalát szintén:

$$\tilde{c}\,(X \cap Y)+\tilde{c}\,(X \cup Y) = \tilde{c}\,(X \setminus Y)+\tilde{c}\,(Y \setminus X)+2\tilde{c}\,(X \cap Y)-\tilde{c}\,(X,Y)-\tilde{c}\,(Y,X)\,.$$

A kapacitásfüggvény nem-negativitásából következik már az állítás. □

6. Állítás. *Létezik tartalmazásra nézve maximális domináns vágás.*

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy adott U halmazra, ahol U a nyelő szomszédai, ha van több domináns vágás, akkor ezek uniója is domináns. Rögzítsük U-t, és legyen hozzá tartozó domináns vágás X és Y, $X \neq Y$, $\tilde{c}\,(X) = \tilde{c}\,(X)$. Ekkor $U \subseteq X \cap Y$. Tegyük fel indirekt, hogy $X \cup Y$ nem domináns vágás, azaz

$$\tilde{c}\,(X \cup Y) > \tilde{c}\,(X)\,.$$

Felhasználva ezt és a szub-moduláris egyenlőtlenséget, azt kapjuk, hogy

$$\tilde{c}\,(X) + \tilde{c}\,(Y) \geq \tilde{c}\,(X \cup Y) + \tilde{c}\,(X \cap Y) > \tilde{c}\,(X) + \tilde{c}\,(X \cap Y)\,.$$

Ez azt jelentené, hogy $\tilde{c}\,(Y) > \tilde{c}\,(X \cap Y)$, ami ellentmondana annak, hogy Y domináns vágás volt.

Ebből következik, hogy az összes domináns vágás uniója is domináns, és ez lesz a maximális domináns vágás. □

Ez egyben azt is jelenti, hogy domináns vágások metszete is domináns vágás.

5. Definíció (Maximális (minimális) domináns vágás)**.** *Legyen $J \subseteq [n]$ indexhalmaz, $\mathcal{S}_J$ az összes, J-hez tartozó domináns vágás forrás felőli oldalának halmaza. Ekkor $S^+ = \bigcup_{S\in\mathcal{S}_J} S$ esetén $[S^+, V \setminus S^+]$ maximális domináns $s-t$-vágás, $S^- = \bigcap_{S\in\mathcal{S}_J} S$ mellett $[S^-, V \setminus S^-]$ pedig a minimális domináns vágás.*

4.4. Lap-indukáló vágások karakterizációja

Ebben a szakaszban megállapítjuk és bebizonyítjuk annak szükséges és elégséges feltételét, hogy egy $s-t$-vágás lap-indukáló legyen. Ezt kétszintes hálózatokra fogjuk bebizonyítani, hasonlóan lehetne többszintesre is. Jelölje mostantól egy $V_J \subset \rho(t)$ csúcshalmazhoz tartozó maximális domináns vágás forrás felőli oldalát S_J^+, nyelő felőli oldalát a nyelő nélkül T_J^+, a minimális domináns vágás forrás felőli oldalát S_J^- és nyelő felőli oldalát a nyelő kihagyásával T_J^-.

4.4.1. Szükséges feltételek

Ahhoz, hogy egy V_J csúcshalmazhoz tartozó tetszőleges domináns vágás lap-indukáló legyen, két, gráf-összefüggőséggel kapcsolatos feltételt fogunk megállapítani, felhasználva a maximális és minimális domináns vágást.

7. Állítás. *Ha a V_J halmazhoz tartozó maximális domináns vágás olyan, hogy T_J^+ nem összefüggő, akkor a vágás nem lap-indukáló.*

Bizonyítás. Legyen $I \subseteq [m]$ azon i indexek halmaza, melyekre $u_i \in \delta(s)$ csúcsok S_J^+-hez tartoznak a vágásban. Ekkor a vágás által indukált egyenlőtlenség

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \notin J} \beta_{ij} \lambda_i + \sum_{i \notin I} \alpha_i \lambda_i \geq \sum_{j \in J} x_j. \tag{4.1}$$

Tegyük fel, hogy T_J^+ nem összefüggő, legyen két összefüggő komponense C_1 és C_2, és legyen

$$J_i = ([n] \setminus J) \cap \{k \mid v_k \in C_i \cap \rho(t)\} \quad i = 1, 2,$$

hasonlóan

$$I_i = ([m] \setminus I) \cap \{k \mid v_k \in C_i \cap \delta(s)\} \quad i = 1, 2,$$

azaz J_i a nyelő azon beszomszédaihoz tartozó indexek halmaza, amelyek C_i-ben vannak, I_i pedig a forrás azon ki-szomszédainak halmaza, amelyek C_i-ben vannak. Ez alapján (4.1) átírható az alábbi módon:

$$\sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J_1} \beta_{ij} \lambda_i + \sum_{j \in J_2} \beta_{ij} \lambda_i \right) + \sum_{i \in I_1} \alpha_i \lambda_i + \sum_{i \in I_2} \alpha_i \lambda_i \geq \sum_{j \in J_1} x_j + \sum_{j \in J_2} x_j. \tag{4.2}$$

Azt kell itt észrevennünk, hogy a $J \cup J_1$-hez tartozó vágásból származó egyenlőtlenség

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_2}\beta_{ij}\lambda_i + \sum_{i\in I_2}\alpha_i\lambda_i \geq \sum_{j\in J_2} x_j, \tag{4.3}$$

illetve a $J \cup J_2$-höz tartozó egyenlőtlenség

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_1}\beta_{ij}\lambda_i + \sum_{i\in I_1}\alpha_i\lambda_i \geq \sum_{j\in J_1} x_j. \tag{4.4}$$

Ekkor összeadva a (4.3) és (4.4) egyenlőtlenségeket megkapjuk (4.2)-t. Ebből következik, hogy azok a pontjai a poliédernek, amelyek egyenlőséggel teljesítik (4.2)-t, azok egyenlőséggel teljesítik (4.3)-t és (4.4)-et is, tehát (4.2) nem lehet lap-vágás. □

A másik szükséges feltétel a minimális domináns vágás forrás felőli oldalának összefüggőségére vonatkozik.

8. Állítás. *Ha a $V_J \subseteq \rho(t)$-hez tartozó minimális domináns vágás olyan, hogy S_J^- nem összefüggő, akkor a vágás nem lehet lap-indukáló.*

Bizonyítás. Ha S_J^- nem összefüggő, az csak akkor lehet, ha van olyan $v_j \in \rho(t)$ csúcs, amelynek az összes be-szomszédja T_J^--beli. Ez azt jelenti, hogy minden be-szomszédjából a vágásbeli kimenő éleken a kapacitások összege nagyobb, mint bemenő élen a kapacitás. Mivel bármely érvényes megoldásból kapott paraméterezés olyan, hogy a vágásbeli élek és a nyelőbe bemenő élek telíthetők egyszerre, v_jt élet csak akkor lehet telíteni, ha 0 kapacitású, azaz ha $x_j = 0$. Ez viszont azt jelenti, hogy azok a pontok, amelyek egyenlőséggel teljesítik a J-hez tartozó egyenlőtlenséget, egy $n+m-2$ dimenziós hipersíkon helyezkednek el, így nem lehet köztük $n+m-1$ affin független, tehát a vágás nem lap-indukáló. □

4.4.2. Elégséges feltételek

Megmutatjuk, hogy a megállapított szükséges feltételek elégségesek is.

9. Állítás. *Ha a $J \subseteq [n]$ indexhalmazhoz tartozó minimális domináns vágásban S_J^- összefüggő és a maximális domináns vágásban T_J^+ is összefüggő, akkor a J-hez tartozó tetszőleges domináns vágás lap-indukáló.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy ha ez a két feltétel teljesül, akkor tudunk találni $n+m-1$ affin független pontot a poliéderben, amelyek egyenlőséggel teljesítik a vágásból kapott egyenlőtlenséget.

Jelölje $I^-, I^+ \subseteq [n]$ azon i indexeket, melyekre $u_i \in S_J^- \cap \delta(s)$ illetve $u_i \in S_J^+ \cap \delta(s)$, továbbá jelölje $e(X)$ az X csúcshalmaz által feszített élek halmazát, azaz

$$e(X) = \{uv \in E | u, v \in X\}$$

Ekkor $I^- \subseteq I^+$, és ha van olyan u_i csúcs, melyre igaz, hogy $c(su_i) = \sum_{v \in \delta_{u_i}} c(u_i v)$, akkor $I^- \subset I^+$. Ha az állítás feltételei teljesülnek, akkor

$$e\left(S_J^-\right) \geq |I^-| + |J|,$$

illetve

$$e\left(T_J^+\right) \geq |\bar{I}^+| + |\bar{J}| - 1$$

az összefüggőség miatt.

Először azt látjuk be, hogy ekkor tudunk mutatni $|I^-| + |J|$ darab, affin független pontnak megfelelő paraméterézését a hálózatnak, amely paraméterezések mellett létezik olyan megengedett folyam a hálózatban, mely telíti a vágásbeli éleket és minden $v_i t$ élt. Ez azt jelenti, hogy ekkor létezik az adott paraméterezés mellett olyan folyam, amelynek az értéke $\sum_{i=1}^n x_i$. Először elkészítünk $|I^-|$ független paraméterezést, és megmutatjuk, hogy ezek mellett létezik megfelelő értékű folyam. Vegyünk egy $i \in I^-$ indexet, és állítsuk 1-re λ_i-t, minden más λ_l legyen 0. Tudjuk, hogy a vágásbeli éleket telítenünk kell, így hát legyen minden $k \in [n] \setminus J$-re

$$x_k = c(u_i v_k) = \beta_{ik} \lambda_i$$

(ha $u_i v_k$ él nincs a gráfban, akkor vegyük úgy hogy van, és 0 a kapacitása). Továbbá legyen $x_j = 0$ minden $j \in J$-re. Ekkor egy megengedett, $\sum_{i=1}^n x_i$ értékű f folyam olyan, hogy az

$$f(su_i) = \sum_{j \in \bar{J}} \beta_{ij} \lambda_i = \sum_{i=1}^n x_i,$$

az $u_i v_j$ és $v_j t$ éleken $c(u_i v_j)$ minden $j \in \bar{J}$-re, és minden más e élen $f(e) = 0$. Ez megengedett folyam, és a paraméterezés egyenlőséggel teljesíti a vágásból kapott egyenlőtlenséget. Ezt minden $i \in I^-$-ra meg tudjuk csinálni, és ezek a paraméterezések függetlenek lesznek, mivel mindegyikben másik λ_i kap nem-nulla értéket. Jelölje az így kapott $|I^-|$ darab paraméterezést F_0^-.

Most elkészítjük a maradék $|J|$ paraméterezést. Legyen τ^- egy feszítőfája S_J^--nak. Ekkor τ^--nak $|I^-|+|J|$ éle van, melyek közül $|I^-|$ vezet s-ből az $(u_i)_{i\in I}$ csúcsokba és $|J|$ vezet az $(u_i)_{i\in I^-}$ csúcsokból a $(v_j)_{j\in J}$ csúcsokba. Legyen $i \in I^-$, és vegyük alapul azt a paraméterezést F_0^--ból, melyben $\lambda_i = 1$. Vegyük u_i egy τ^--beli v_j szomszédját, és módosítsuk x_j-t (eddig 0 volt) az alábbi módon:

$$x_j = \min\left\{\beta_{ij}\lambda_i,\ \left(\alpha_i - \sum_{k\in\bar{J}}\beta_{ik}\right)\cdot\lambda_i\right\}$$

Ekkor x_j mindenképpen pozitív értéket kap, ugyanis $\alpha_i - \sum_{k\in\bar{J}}\beta_{ik}$ nem lehet nulla amiatt, hogy minimális domináns vágást néztünk. Ez a paraméterezés egyenlőséggel teljesíti a J indexhalmazból kapott egyenlőtlenséget, és létezik hozzá megengedett $\sum_{i=1}^n x_i$ értékű folyam. Ezt végezzük el külön-külön minden olyan u_iv_j párra, melyek közt megy él τ^--ban. Ez ad újabb $|J|$ paraméterezést. Jelölje az így kapott paraméterezések halmazát F_1^-. Az F_1^- halmaz elemei affin függetlenek, mivel mindegyikben más x_j kapott pozitív értéket, illetve függetlenek F_0^- elemeitől is, mert azokban pedig az összes $(x_j)_{j\in J}$ értéke 0.

Meg kell még mutatni, hogy tudunk konstruálni még $|\bar{I}^+|+|\bar{J}|-1$ affin független pontot, mely egyenlőséggel teljesíti a vágásból származó egyenlőtlenséget és független F_0^- és F_1^- elemeitől, ha teljesül az T_J^+-re vonatkozó összefüggőségi feltétel. Legyen τ^+ egy feszítőfája T_J^+-nek. Ekkor τ^+-nak $|\bar{I}^+|+|\bar{J}|-1$ éle van. Tudjuk továbbá, hogy egy olyan paraméterezés mellett, mely valamelyik λ_k $\left(k\in\bar{I}^+\right)$ változón vesz fel 1 értéket, nem tudjuk telíteni az összes u_kv_l élet ahol $l\in\bar{J}$ és v_l szomszédos u_k-val, mivel most a maximális domináns vágást tekintjük, így

$$\alpha_k > \sum_{l\in\bar{J}}\beta_{kl}$$

Azt viszont megtehetjük, hogy csak az egyik u_k-ból kimenő élt telítjük, a maradék a kapacitást pedig szétosztjuk a többi él között úgy, hogy egyik se legyen telített. Válasszunk egy u_kv_l élt a τ^+ fából. Legyen a paraméterezés olyan, hogy $\lambda_k = 1, x_l = \beta_{kl}$, a maradék $\alpha_k - \sum_{j\in\bar{J}\setminus\{l\}}\beta_{kj}$ kapacitást pedig osszuk szét az $(x_j)_{j\in\bar{J}\setminus l}$ változó között úgy, hogy mindre teljesül, hogy $0 < x_j < \beta_{kj}$. Végezzük el ezt a τ^+ fa összes élével, így kapunk $e\left(\tau^+\right) = |\bar{I}^+|+|\bar{J}|-1$ olyan paraméterezését a hálózatnak, melyek mellett mindig más fa-élt telíthetünk folyammal. Jelölje ezek halmazát F^+. Megfigyelhető, hogy F^+ elemei affin függetlenek, illetve függetlenek F_0^- és F_1^- elemeitől, mivel más λ_k változók pozitívak bennük.

Ekkor már van $|I^-| + |J| + |\bar{I}^+| + |\bar{J}| - 1$ affin független pont. Ha $I^+ \setminus I^- = \emptyset$, akkor kész vagyunk. Ha nem, akkor hiányzik még $|I^+ \setminus I^-|$ paraméterezés ahhoz, hogy meglegyen az $n+m-1$ függetlenünk. Vegyük hát azokat az i indexeket, melyek az $I^+ \setminus I^-$ indexhalmazban vannak. Ezekről tudjuk, hogy

$$\alpha_i = \sum_{j \in \bar{J}: v_j \in \delta(u_i)} \beta_{ij},$$

azaz egyetlen jó paraméterezés létezik hozzá, ahol $\lambda_i = 1$ és minden $j \in \bar{J}$-re ahol $u_i v_j$ szomszédos, $x_j = \beta_{ij}$. Ezt ha megcsináljuk az összes $i \in I^+ \setminus I^-$ indexre, kapunk még $|I^+ \setminus I^-|$ független paraméterezést, és kész vagyunk az $n + m - 1$ affin független ponttal, amely illeszkedik a vágásból kapott oldalra, tehát a vágásból kapott oldal a poliéder lapja. $\square$

Ennek segítségével tudunk készíteni egy szeparációs algoritmust, amely lap-vágásokkal szeparál.

4.5. Alkalmazások

Ezzel az eszközzel már sokkal több problémát tudunk modellezni, mint a végtelen kapacitásos esetével.

4.5.1. A relaxált *SOS2* politóp

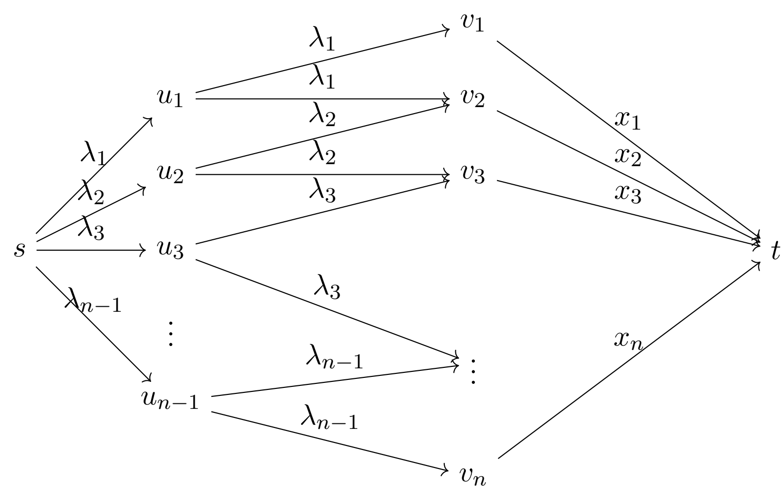
1. Alkalmazás. Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 1]$ változók, és legyen az i. poliéder

$$P_i = \{x_1, \ldots, x_n \mid x_i + x_{i+1} \leq 1,\ x_k = 0\ (k \neq i, i+1)\}\ \forall i = 1 \ldots n-1$$

Legyen $\mathcal{P}$ ezen poliéderek uniója,

$$\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{n-1} P_i$$

Ekkor azt a rendszert keressük, ami leírja $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$-t. Tudunk konstruálni egy hálózatot ehhez, melyben megtalálhatjuk a lap-indukáló vágásokat az előző állítás segítségével. Legyen tehát a hálózat csúcshalmaza $V = \{s, t, u_1, \ldots, u_{n-1}, v_1, \ldots, v_n\}$, az élei legyenek $A = \{su_i \mid i = 1 \dots n-1\} \cup \{u_i v_j \mid i = 1 \dots n-1, j = i, i+1\} \cup \{v_j t \mid j = 1 \dots n\}$. Legyen a kapacitás az éleken c a következő: $c(su_i) = c(u_i v_i) = c(u_i v_{i+1}) = \lambda_i$, $c(v_i t) = x_i$.



Ebben a hálózatban a 9. állítás alapján azok a részhalmazai t szomszédainak, melyekhez tartozó domináns vágások a poliéder lapjait adják, az alábbi módon állnak elő. Legyen $J \subseteq [n]$ azon $v \in N(t)$ csúcsok indexeinek a halmaza, melyek a vágásban az s-sel azonos halmazba kerülnek, $\bar{J} = [n] \setminus J$.

10. Állítás. *A lap-indukáló vágások mind olyanok, hogy $\bar{J}$ összefüggő abban az értelemben, hogy a benne szereplő legkisebb és legnagyobb index közötti összes index benne van.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\bar{J} = \{i, i+1, \dots, k-1, \dots, l+1, \dots, j-1, j\}$. Ekkor $\bar{S}_J^+$ nem összefüggő, mivel $u_k \in S_J^+$, így nincs irányítatlan értelemben vett út v_k és v_l között $\bar{S}_J^+$-on belül (ha lenne, annak érintenie kellene $u_k, \dots, u_{l-1}$-et). Így a (7). állítás szerint nem lehet lap-indukáló vágás. □

11. Állítás. *Azon vágások közül, ahol $\bar{J} = \{i, i+1, \dots, j-1, j\}$ összefüggő, azok nem lehetnek lap-indukálóak, ahol $i = 2$ vagy $j = n-1$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\bar{J}$ az állításban leírtaknak megfelelő, azaz $\bar{J} = \{2, 3, \dots, j\}$ (szimmetria miatt ugyanígy belátható $j = n-1$ esetre is). Ekkor $u_1 \notin S_J^-$, viszont $v_1 \in S_J^-$, így nem megy irányítatlan út S_J^--on belül v_1-be. Azonban ekkor a (8). állítás szerint nem lehet lap-indukáló vágás. □

12. Állítás. *Azok a vágások, melyek teljesítik az előző két állítás feltételét, lap-indukáló vágások.*

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy egy ilyen vágás teljesíti a (9). állítás feltételeit. Legyen tehát $\bar{J} = \{i, \ldots, j\}$ olyan összefüggő indexhalmaz, hogy $i \neq 2,\ j \neq n-1$. Ekkor

$$S_J^- = \{v_k \mid k < i \vee k > j\} \cup \{u_l \mid l < i-1 \vee l > j\} \cup \{s\}$$

Elég belátni, hogy minden v_k-ba megy $e\left(S_J^-\right)$-beli él. Ez azt jelenti, hogy minden $k \in J$-hez u_k és u_{k-1} közül legalább az egyik S_J^--beli, és S_J^- pontosan ilyen. □

Ezek alapján az alábbi egyenlőtlenség-rendszert kapjuk a $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$ poliéder leírására:

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i & = & 1 & \\
\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i & \geq & \sum_{i=1}^{n} x_j & \\
\sum_{i=1}^{l} \lambda_i & \geq & \sum_{j=1}^{l} x_j & 1 \leq l \leq n-2 \\
\sum_{i=l-1}^{n-1} \lambda_i & \geq & \sum_{j=l}^{n} x_j & 3 \leq l \leq n \\
\sum_{i=k-1}^{l} \lambda_i & \geq & \sum_{j=k}^{l} x_j & 3 \leq k \leq l \leq n-3 \\
\lambda_i & \geq & 0 & 1 \leq i \leq n-1 \\
x_j & \geq & 0 & 1 \leq j \leq n
\end{array} \tag{4.5}$$

4.5.2. A relaxált negatív *SOS2* politóp

Az előző alkalmazásban szereplő poliédert könnyedén tudtuk modellezni a hálózati folyam reprezentáció segítségével. Ha kicsit módosítjuk a feltételrendszert, amelyet a poliéder leír, újabb érdekes alkalmazást kaphatunk, amelynél van remény arra, hogy eredményesen adhatunk hozzá hálózati reprezentációt.

2. Alkalmazás. Vegyük az *SOS2* politópnak azt a változatát, amelyben a változók összege legfeljebb 1, a változók nem-negatívak, legfeljebb 2 változó lehet egyszerre pozitív, és ha pontosan 2 pozitív, akkor ellentétben a relaxált *SOS2*-vel, nem lehetnek szomszédosak. Ezzel például azt lehet modellezni, hogy van egy szabadidős tevékenység, amelyet a következő héten legfeljebb 1 órában végezhetünk, és legfeljebb két napon szakíthatunk rá időt, azonban ez a két nap nem lehet egymást követő.

Ez felírható nem-lineáris feltételekkel, az alábbi formában:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{i=1}^{n} x_i & \leq & 1 & \\ x_i x_{i+1} & = & 0 & i = 1, \ldots, n-1 \\ x_i x_j x_k & = & 0 & i \neq j \neq k \\ x_i & \geq & 0 & i = 1, \ldots, n. \end{array} \tag{4.6}$$

Azonban a mi célunk ezt lineáris feltételekkel felírni, ezért a hálózati reprezentációját próbáljuk meghatározni. Legyen a P_{ij} poliéder az alábbi:

$$P_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ x_j \geq 0,\ x_i + x_j \leq 1,\ x_k = 0\ \ (k \notin \{i, j\})\}$$

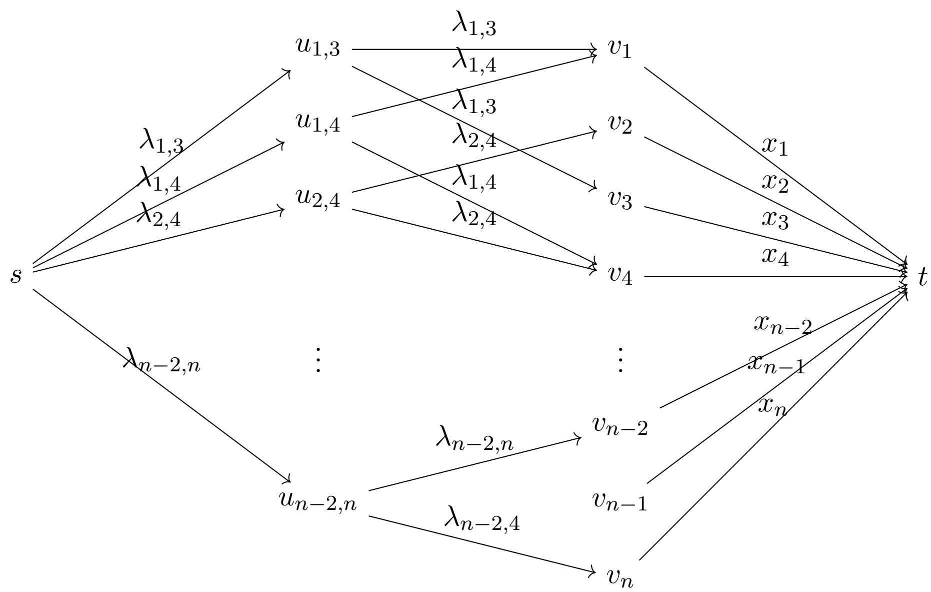
Amit ekkor keresünk, az azon P_{ij} poliéderek uniója, ahol $|i - j| \geq 2$. Ez formálisan az alábbi módon áll elő:

$$\bigcup_{i=1}^{n-2} \left(\bigcup_{j=i+2}^{n} P_{ij} \right).$$

Ekkor a poliéderek száma $\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1$, így egy lehetséges hálózati modellben a λ változók száma is ennyi. Legyen az a hálózati modell, hogy a csúcshalmaz

$$V = \{s, t\} \cup \{u_{ij} \mid i = 1, \ldots, n-2,\ j = i+2, \ldots, n\} \cup \{v_j \mid j = 1, \ldots, n\},$$

az élhalmaz pedig olyan, hogy s-ből minden u_{ij} csúcsba megy λ_{ij} kapacitású él, u_{ij}-ből v_i-be és v_j-be megy egy-egy λ_{ij} kapacitású él, és v_j-ből t-be x_j kapacitású él megy.



13. Állítás. *A leírt hálózatban bármely j-re $\rho(v_j) \cap \rho(v_{j+1}) = \emptyset$.*

Bizonyítás. Figyeljük meg, hogy v_j beszomszédai azon u_{jk} csúcsok, ahol $k \geq j+2$ és azon u_{ij} csúcsok, ahol $i \leq j-2$. Ez diszjunkt azoktól az $u_{j+1,k}$ csúcsoktól, ahol $k \geq j+3$, illetve azon $u_{i,j+1}$ csúcsoktól, ahol $i \leq j-1$. □

14. Állítás. *Egy lap-indukáló vágás nem lehet olyan, hogy valamely j-re j és $j+1$ is $\bar{J}$-ben van.*

Bizonyítás. Ekkor a maximális domináns vágásban nyelő felőli oldala nem összefüggő, mivel $v_j, v_{j+1} \in T^+$, azonban nincsen közös be-szomszédjuk, így T^+ nem lehet összefüggő. □

15. Állítás. *Lap-indukáló vágásban ha $|J| < n-1$, akkor olyannak kell lennie, hogy minden $j \in J$-hez kell, hogy legyen egy olyan $k \in J$, hogy $|k-j| \geq 2$.*

Bizonyítás. Különben sérül a minimális domináns vágás forrás oldalára vonatkozó összefüggőségi feltétel, ekkor ugyanis a v_j csúcsnak az összes beszomszédjának a másik ki-szomszédja T^--ban lenne, így az összes be-szomszédja is. □

4.5.3. Általánosított implikáció

3. Alkalmazás. Egy másik fontos alkalmazása lehet, hogy implikációkat írhatunk le diszjunkciók segítségével. Emlékeztetőül, legyen A, B logikai változók, ekkor igaz, hogy

$$A \Rightarrow B \quad \equiv \quad \neg A \vee B.$$

3. Példa. Próbáljuk meg leírni azt a rendszert, hogy

$$x_1 \wedge x_2 \Rightarrow x_3$$

Ezzel egyenértékű, hogy

$$\neg (x_1 \wedge x_2) \vee x_3.$$

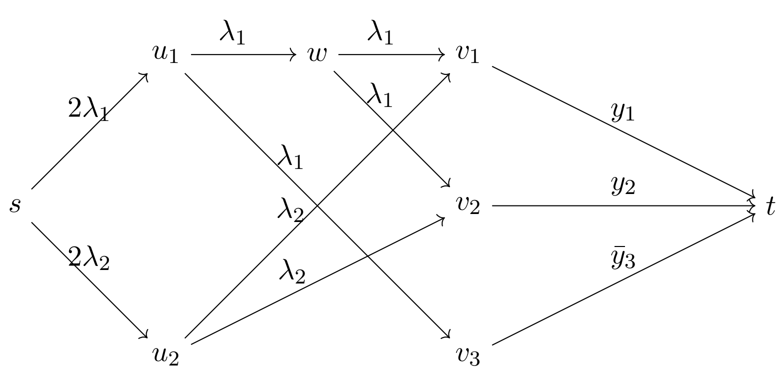
Legyenek $y_1, y_2, y_3 \in [0,1]$ változók az x_1, x_2, x_3 változóknak megfelelő egészértékű változók, $\bar{y}_3 = 1 - y_3$, és szeretnénk azt a poliédert leírni, aminek a csúcsai pont a logikai kifejezés megoldásai. Legyenek P_1, P_2 poliéderek,

$$P_1 = \{y_1, y_2, \bar{y}_3 \mid y_1 + y_2 \leq 1\}$$

és

$$P_2 = \{y_1, y_2, \bar{y}_3 \mid \bar{y}_3 \leq 0\}.$$

Amit keresünk ebben az esetben, az $\operatorname{conv}((P_1 \cup P_2) \cap \mathbb{Z})$. Ehhez tudunk konstruálni egy hálózatot, az alábbi módon. Legyen $V = \{s, t, u_1, u_2, w, v_1, v_2, v_3\}$ csúcshalmaz, $A = \{su_i \mid i = 1,2\} \cup \{u_1w, wv_1, wv_2, u_1v_3, u_2v_1, u_2v_2\} \cup \{v_it \mid i = 1,2,3\}$ irányított élhalmaz, és legyen c kapacitásfüggvény az élhalmazon úgy, hogy $c(su_1) = \lambda_1,\ c(su_2) = 2\lambda_2,\ c(u_1w) = \lambda_1\ c(u_iv_j) = \lambda_i,\ c(v_jt) = y_j\ \forall j = 1,2,\ c(v_3t) = \bar{y}_3$. Figyeljük meg, hogy be kellett hozni a hálózatba egy új szintet a w csúccsal annak érdekében, hogy az $y_1 + y_2 \leq 1$ feltételt leírhassuk. Az alábbi ábra szemlélteti a hálózatot.



A lap-indukáló vágásokat meghatározó index-halmazok az alábbiak:

$$\mathcal{J} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{3\}\}$$

Először azt látjuk be, hogy ezek valóban lap-indukálóak, azaz teljesítik a (9). állítás feltételeit. Az $\{1,2\}$ indexhalmaz esetén a minimális domináns vágás szerint $S^- = \{s, u_1, w, u_2, v_1, v_2\}$, ez összefüggő, a maximális domináns vágás szerint pedig $\bar{S}^+ = \{v_3\}$, ez is összefüggő.

Az $\{1,3\}$ indexek esetén a minimális domináns vágás szerint $S^- = \{s, u_1, u_2, v_1, v_3\}$, ez összefügg. A maximális domináns vágásban ekkor az s-et nem tartalmazó rész egyelemű, v_2, ami szintén összefüggő.

A $\{2,3\}$ indexhalmaz esetében a minimális domináns vágásban a forrással azonos részbe tartozó csúcsok az $S^- = \{s, u_1, u_2, v_2, v_3\}$, összefüggő részgráfot feszítenek. A nyelővel azonos komponensbe csak a v_2 tartozik, ez is összefüggő.

A $\{3\}$ halmazhoz tartozó minimális domináns vágás szerinti $S^- = \{s, u_1, v_3\}$, összefüggő, a maximális domináns vágás nyelő oldali része pedig $\bar{S}^+ = \{u_2, w, v_1, v_2\}$, ez is összefüggő.

Azt kell még belátni, hogy a maradék két indexhalmaz nem lap-indukáló. Megfigyelhető, hogy az $\{1\}$ és a $\{2\}$ esetben is a minimális domináns vágásra vonatkozó összefüggőségi feltétel teljesül, azonban a maximális domináns vágásra vonatkozó nem (egyik esetben az $\bar{S}_1^+ = \{w, v_2, v_3\}$, a másodikban pedig $\bar{S}_2^+ = \{w, v_1, v_3\}$, egyik sem összefüggő).

Az ebből kapott egyenlőtlenség-rendszer az alábbi:

$$\begin{array}{rcll} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 1 & \\ y_1 & \leq & \lambda_1 + \lambda_2 & \\ y_2 & \leq & \lambda_1 + \lambda_2 & \\ 1 - y_3 & \leq & \lambda_1 & \\ y_1 + y_2 & \leq & \lambda_1 + 2\lambda_2 & \\ \lambda_i & \geq & 0 & i = 1,2 \\ y_j & \geq & 0 & j = 1,2,3 \end{array} \tag{4.7}$$

•

Tekintsük ennek a példának egy általánosabb változatát. Legyen n darab folytonos változónk a $[0,1]$ tartományból $x_1, \ldots, x_n$ és legyen m poliéderünk,

$$P_k = \left\{ x_1, \ldots, x_n \middle| \sum_{i \in \mathcal{E}_k} x_i \leq c_k \right\} \quad (\forall k \in [m])$$

ahol $\mathcal{E}_i \subseteq [n]$ és $\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j = \emptyset$ ha $i \neq j$, továbbá c_k nem-negatív egész. Ekkor a P_k poliéderek unióját úgy is felírhatjuk, hogy

$$\bigcup_{k=1}^{m} P_k = \bigvee_{k=1}^{m} \left(\sum_{i \in \mathcal{E}_k} x_i \leq c_k \right).$$

A példánk ennek valóban speciális esete, ugyanis legyen $m = 2$, $\mathcal{E}_1 = \{1, 2\}$, $c_1 = 1$, és legyen $\mathcal{E}_2 = \{3\}$, $c_2 = 0$. Legyen továbbá $x_1 = y_1, x_2 = y_2$ és $x_3 = \bar{y}_3$. Ezeket behelyettesítve visszakapjuk a példában szereplő problémát.

Hogyan néz ki az ehhez tartozó hálózat? A példához hasonlóan itt is szükségünk lesz egy közbülső szintre, amely csúcsai sem a forrásnak, sem a nyelőnek nem szomszédai. A hálózat csúcsai tehát $s, u_1, \ldots, u_m$, ezt követi az említett közbülső szint, $w_1, \ldots, w_m$, majd $v_1, \ldots, v_n, t$. Az su_i él kapacitása

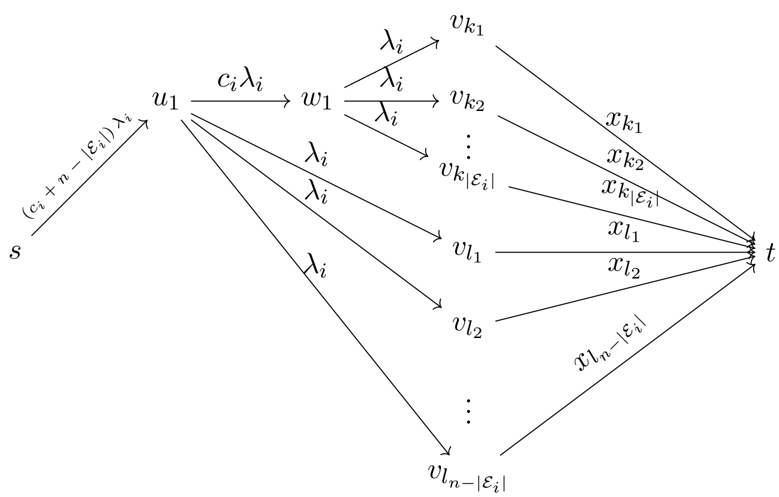
$$c(su_i) = (c_i + n - |\mathcal{E}_i|)\, \lambda_i$$

minden i-re. Az u_i csúcsból vezet él a w_i csúcsba, ennek kapacitása

$$c(u_i w_i) = c_i \lambda_i$$

illetve minden $(v_k)_{k \notin \mathcal{E}_i}$ csúcsba λ_i kapacitású él vezet. A w_i csúcsból az összes $(v_j)_{j \in \mathcal{E}_i}$ csúcsba λ_i kapacitású élt húzunk. A v_j csúcsból x_i kapacitású él megy t-be. A példához tartozó hálózatnál megfigyelhető, hogy az u_2 csúcshoz nem tartozik w_2 csúcs, de igazából hozzávehetnénk a leírtaknak megfelelően egy $0 = c_2 \lambda_2$ kapacitású éllel. Ehhez hasonlóan, azokra a w_i csúcsokra nincsen szükség, melyekre $c_i = 0$.

Az átláthatóság kedvéért az alábbi ábra a hálózatnak csak egyetlen s-ből kilépő élét tartalmazza. Jelölje $k_1, \ldots, k_{|\mathcal{E}_i|}$ az $\mathcal{E}_i$-beli indexeket, $l_1, \ldots, l_{n-|\mathcal{E}_i|}$ az $\mathcal{E}_i$-en kívülieket.



Jól látszik, hogy az u_i csúcsoknál a bemenő és kilépő éleken a kapacitásösszegek egyeznek. Ez azt jelenti, hogy a $v_{l_1}, \dots, v_{l_{n-|\mathcal{E}_i|}}, w_i$ csúcsokba eljuttatható akkora folyam, mint ami az s-ből kilép, viszont a $v_{k_1}, \dots, v_{k_{|\mathcal{E}_i|}}$ csúcsokba legfeljebb c_i értékű folyam folyhat be.

3. Megfigyelés. Feltehetjük, hogy a hálózategyszerűsítési szabályokat alkalmazva minden $i \in [m]$-re $c_i \leq |\mathcal{E}_i|$, sőt, feltehetjük hogy az egyenlőtlenség szigorú, különben a $\sum_{j \in \mathcal{E}_i} x_j \leq c_i$ egyenlőtlenség semmitmondó.

4. Megfigyelés. Tetszőleges domináns vágás olyan, hogy csak w_i és v_j csúcsokat tartalmazhat a nyelő felőli oldala. Éppen ezért a vágás forrás felőli oldala mindig összefüggő lesz, elég csak a nyelő felőli oldalának összefüggőségét vizsgálnunk.

Mik lesznek azok az indexhalmazok, amelyekhez tartozó egyenlőtlenségek a poliéder lapját írják le? Figyeljük meg inkább a komplementer halmazaikat.

16. Állítás. *Azok a J indexhalmazok, amelyek olyanok, hogy a komplementerük, $\bar{J}$ valamely $\mathcal{E}_i$-nek több, mint c_i elemű részhalmaza, lap-indukálók.*

Bizonyítás. A (4). megfigyelés alapján elég az $\bar{S}_J^+ \setminus \{J\}$ halmazt vizsgálnunk. Ez a részgráf ekkor tartalmazza a w_i csúcsot, mivel $\sum_{j \in \bar{J}} c(w_i v_j) > c_i$ és a $(v_j)_{j \in \bar{J}}$ csúcsokat. Ezek összefüggő gráfot alkotnak, így a J-hez tartozó tetszőleges domináns vágás lap-indukáló. □

17. Állítás. *Azok a $J \subset [n]$ indexhalmazok, amelyek úgy állnak elő, hogy $J = [n] \setminus j$ valamely $j \in [n]$-re, lap-indukálók.*

Bizonyítás. Mivel (4). megfigyelés alapján csak maximális domináns vágás nyelő felőli oldalával kell törődnünk, és ez egyetlen, v_j csúcsból áll, ami összefüggő részgráf, teljesül (9). állítás feltétel, így J lap-indukáló. □

Ezzel kaptunk két vágás típust, amely lap-indukáló az adott poliéder családnál. Azt kell belátnunk még, hogy minden lap-indukáló halmaz így áll elő.

18. Állítás. *Minden lap-indukáló halmaz az előző két állításban megfogalmazott módon áll elő.*

Bizonyítás. Először azt fogjuk belátni, hogy lap-indukáló halmaz nem lehet olyan, hogy a komplementere egynél több $\mathcal{E}_i$ halmazból is tartalmaz indexet. Legyen $j \in \mathcal{E}_i$ és $k \in \mathcal{E}_l$, és tegyük fel, hogy $j, k \in \bar{J}$, illetve hogy a w_i és a w_l csúcs is $\bar{S}_J^+$-ben van. Tudjuk, hogy $\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_l = \emptyset$. Ekkor, a (4). megfigyelés alapján, semelyik u csúcs nincs $\bar{S}_J^+$-ben, így nincs w_i és w_l között irányítatlan út $\bar{S}_J^+ \setminus \{t\}$-n belül, azaz ez a részgráf nem összefüggő, így nem lehet lap-indukáló.

Azt kell még belátnunk, hogy ha J olyan, hogy a komplementere csak egy $\mathcal{E}_i$ indexhalmazból tartalmaz indexeket, de nem többet, mint c_i, akkor sem lehet lap-indukáló. Mivel ekkor w_i nincs $\bar{S}_J^+$-ben, az csak v_j csúcsokból áll, amelyek között nem vezet él. Ez nem összefüggő részgráf.

Minden olyan J halmaz, amely az előző állítás feltételeit nem teljesíti, az itt felsorolt két kategória valamelyikébe (vagy mindkettőbe) sorolható, így nem lehet lap-indukáló. □

Tehát tekintsünk egy olyan J halmazt, ami lap-indukáló. Legyen $\mathcal{E}_i$ az a halmaz, melynek legalább c_i eleme van $\bar{J}$-ben. Legyen ennek a legalább c_i elemnek a halmaza X. Ekkor a J-hez tartozó domináns vágáson átmenő élek valamely u_l $(l \neq i)$ csúcsból mennek minden $(v_j)_{j \in X}$ csúcsba, ezek összkapacitása $|X| \cdot \lambda_l$. Mivel minden ilyen u_l csúcsból megy minden $(v_j)_{j \in X}$ csúcsba, ezért ezeken az összkapacitás

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{m} |X| \cdot \lambda_l = |X| \cdot \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{m} \lambda_l.$$

Ehhez még hozzájön az $u_i w_i$ él kapacitása, $c_i \lambda_i$ mivel ezt az élet is elvágja tetszőleges domináns vágás, így a vágásból kapott egyenlőtlenség az alábbi:

$$c_i \lambda_i + |X| \cdot \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{m} \lambda_l \geq \sum_{j \in X} x_j.$$

Ezek alapján a poliéder leírható az alábbi egyenlőtlenség-rendszerrel:

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i & = & 1 & \\ c_i\lambda_i + |X|\cdot\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\lambda_j & \geq & \sum\limits_{j\in X} x_j & \forall X\subseteq\mathcal{E}_i : |X|>c_i,\ \forall i=1,\ldots,m \\ \lambda_i & \geq & 0 & \forall i=1,\ldots,m \\ x_j & \leq & 1 & \forall j=1,\ldots,n \\ x_j & \geq & 0 & \forall j=1,\ldots,n \end{array} \tag{4.8}$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből összesen

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{|\mathcal{E}_i|-c_i}\binom{m}{j}+2n+m$$

darab van.

További általánosítás lehet, ha a korábban leírt diszjunkcióknak a konjunkcióját tekintjük. Legyen tehát $\mathcal{E}_1^1,\ldots,\mathcal{E}_{m_1}^1,\ldots,\mathcal{E}_{m_k}^k$ olyan részhalmazai $[n]$-nek, hogy $\mathcal{E}_j^i\cap\mathcal{E}_l^i=\emptyset$. Legyen a P_k^i poliéder

$$P_k^i=\left\{x_1,\ldots,x_n\middle|\sum_{j\in\mathcal{E}_k^i}x_j\leq c_k^i\right\}.$$

Ekkor a poliéder, amit keresünk

$$\bigcap_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{m_i}P_j^i=\bigwedge_{i=1}^{k}\bigvee_{j=1}^{m_i}\left(\sum_{l\in\mathcal{E}_j^i}x_l\leq c_j^i\right)$$

Ennek leírásához k darab hálózatra lesz szükségünk, a konjunkció minden tagjához egyre, amely a korábban tárgyalt módon áll elő. A hozzá tartozó egyenlőtlenség-rendszer úgy módosul, hogy minden hálózatra fel kell írnunk az egyenlőtlenség-rendszerét.

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i & = & 1 & \\ c_i^l\lambda_i + |X|\cdot\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\lambda_j & \geq & \sum\limits_{j\in X} x_j & \forall X\subseteq\mathcal{E}_i^l : |X|>c_i^l,\ \forall i=1,\ldots,m_l,\ l=1,\ldots,k \\ \lambda_i & \geq & 0 & \forall i=1,\ldots,m \\ x_j & \leq & 1 & \forall j=1,\ldots,n \\ x_j & \geq & 0 & \forall j=1,\ldots,n \end{array} \tag{4.9}$$

4.6. Szeparáció

A szeparáció fő kérdése, hogy egy megoldásról hogyan döntjük el, hogy megengedett-e, abban az esetben, ha még nem ismerjük a poliédert leíró összes egyenlőtlenséget. Ha a megoldás nem megengedett, azaz nincs a poliéderben, akkor pedig mutatnunk kell egyenlőtlenséget, amelyet sért. Éppen ezért van szükségünk a poliéder lapjainak leírására, melyek a legerősebb ilyen egyenlőtlenségek. A feladat tehát adott megoldásról eldönteni, hogy teljesül-e rá az összes feltétel, és ha nem, akkor találni egy lap-indukáló egyenlőtlenséget, amit nem teljesít.

Tegyük fel tehát, hogy már ismerjük a poliéder néhány lapját leíró egyenlőtlenséget, és van egy ezekre nézve megengedett $\hat{p} = \left(\hat{\lambda}, \hat{x}\right)$ megoldásunk. Helyettesítsük be a hálózatba az $\hat{p}$ paraméterezést, legyen $c_{\hat{p}}$ az így kapott kapacitásfüggvény, ha teljesül mellette, hogy az $\left[S, \bar{S}\right]$ minimális $s-t$-vágás értéke legalább akkora, mint $\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i$, akkor a poliéderben van $\hat{p}$, különben nincs. Egy $J \subseteq [n]$ halmazt *sértőnek* nevezünk, ha igaz rá, hogy a $(v_j t)_{j\in J}$ éleket nem tudjuk egyszerre telíteni (a $\hat{p}$ paraméterezés szerint). Egy J halmazról eldönthetjük, hogy sértő-e úgy, hogy a gráfból elhagyjuk a $(v_j)_{j\notin J}$ csúcsokat és hozzájuk tartozó éleket, és megnézzük, hogy az így kapott $(G', c_{\hat{p}})$ hálózatban vett minimális $s-t$-vágás értéke nagyobb-e mint $\sum_{j\in J} \hat{x}_j$.

Legyen $J_0 = \{j \in [n] \,|\, v_j \in S\}$, és legyen $\bar{J}_0$ a komplementere. Ekkor sajnos nem biztos, hogy $S^-_{J_0}$ és $\bar{S}^+_{J_0} \setminus \{t\}$ összefüggők. Először tegyük fel, hogy $S^-_{J_0}$ összefüggő, de $\bar{S}^+_{J_0} \setminus \{t\}$ nem az. Ekkor az utóbbi szétesik $V_1, \ldots, V_k$ partícióra, és legyen $(A_i)_{i=1\ldots k}$ a $\bar{J}_0$ partíciója,

$$A_i = \left\{j \in \bar{J}_0 | v_j \in V_i\right\}.$$

5. Megfigyelés. Vegyük a $\bar{J}_0$ szerinti maximális domináns vágást a $(G, c_{\hat{p}})$ hálózatban. Ez is egy minimális $s-t$-vágás.

19. Állítás. *Ekkor az $A_1, \ldots, A_k$ indexhalmazok közül legalább az egyik sértő.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy egyik sem sértő. Jelölje $\delta^{\text{in}}(X) = \{uv \in A \mid u \notin X,\ v \in X\}$ az $X \subset V$ csúcshalmaz be-éleit. Tudjuk, hogy $\cup_{i=1}^{k} A_i$ sértő, azaz az $V_1, \ldots, V_k$ komponenseket a forrástól elválasztó minimális vágás értéke kisebb, mint az őket a nyelőtől elválasztó minimális vágás értéke, tehát

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{e\in\delta^{\text{in}}(V_i)} c_{\hat{p}}(e) < \sum_{i=1}^{k} \sum_{j\in A_i} c_{\hat{p}}(v_j t)\,.$$

Az egyenlőtlenség bal és jobb oldalán is nem-negatív tagokat adunk össze, így kell lennie legalább egynek az $i = 1 \dots k$ indexek közül, amelyikre

$$\sum_{e\in\delta^{\text{in}}(V_i)} c_{\hat{p}}(e) < \sum_{j\in A_i} c_{\hat{p}}(v_j t)\,.$$

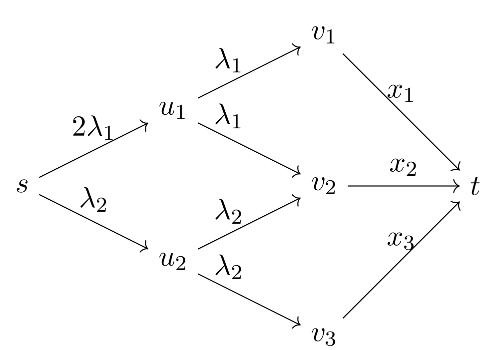
Ez pontosan azt jelenti, hogy a $(v_j)_{j\in A_i}$ éleket nem tudjuk egyszerre telíteni, azaz A_i sértő. □

Azt, hogy pontosan melyik A_i-k sértők, megállapíthatjuk úgy, hogy vesszük a $\bar{J}_0$-ra vonatkozó maximális domináns vágást, majd minden V_i komponensre összeadjuk a bele lépő éleken a $c_{\hat{p}}$ kapacitásokat. Amelyikre ez az összeg kisebb, mint $\sum_{j\in A_i} \hat{x}_j$, az sértő. Továbbá mivel feltettük, hogy esetünkben $S^-_{J_0}$ összefüggő, megfigyelhetjük, hogy $S^-_{J_i}$ is összefüggő, ahol

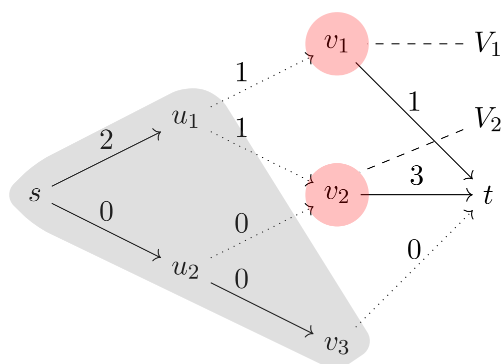
$$J_i = J_0 \cup \left(\bigcup_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} A_j \right).$$

Ekkor ugyanis olyan komponenseket csatolunk még $S^-_{J_0}$-hoz, amik az $S^+_{J_0} \setminus \{t\}$-ban összefüggők, ezek a minimális domináns vágás szerint is összefüggők maradnak, mivel nem csökkenhet a számosságuk. Tehát ekkor találtunk legalább egy lap-indukáló vágást.

4. Példa. Tekintsük a következő egyszerű hálózatot.



Legyen $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 0$. Ezen paraméterezés mellett egy $[S, T]$ minimális $s-t$-vágás olyan, hogy $S = \{s, u_1, u_2, v_3\}, T = V \setminus S$, egy sértő halmaz pedig $J = \{1, 2\}$. A J-hez tartozó maximális domináns vágásban az $\bar{S}_J^+ \setminus \{t\}$ nem összefüggő, $V_1 = \{v_1\}, V_2 = \{v_2\}$. Ekkor $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}$.



4.1. ábra. Sértő A_2 halmaz

Ezek közül A_1 nem sértő, ugyanis a V_2-be belépő élen a kapacitás legalább akkora, mint a kilépő élen, viszont A_2 sértő, mivel a V_2-be belépő élen a kapacitás 1, míg a kilépő élen 3. •

Másik fontos eset, amikor $S_{J_0}^+ \setminus \{t\}$ összefüggő, de $S_{J_0}^-$ nem az. Ekkor van az $S_{J_0}^-$-nak olyan komponense, amely a forrással nem szomszédos, és minden be-szomszédja $\bar{S}_{J_0}^-$-ban van. Legyenek $W_0, W_1, \ldots, W_l$ az $S_{J_0}^-$ komponensei, úgy, hogy $s \in W_0$, B_i a J_0 indexhalmaznak azon része, mely indexekhez tartozó csúcsok W_i-ben vannak.

20. Állítás. *Ekkor tetszőleges $i \in \{1, \ldots, l\}$-re $\bar{J}_i = \bar{J}_0 \cup B_i$ sértő halmaz.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy W_i minden be-szomszédja $\bar{S}_{J_0}^-$-beli. Ha hozzávesszük B_i-t $\bar{J}_0$-hoz, akkor azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j \in \bar{J}_i} \hat{x}_j = \sum_{j \in \bar{J}_0} \hat{x}_j + \sum_{j \in B_i} \hat{x}_j \geq \sum_{j \in \bar{J}_0} \hat{x}_j,$$

mivel minden $j \in B_i$-re $\hat{x}_j \geq 0$. Legyen $J_i = J_0 \setminus B_i$. Tekintsük a J_i-hez tartozó minimális domináns vágást. Ennek nyelő felőli oldal $\bar{S}_{J_0}^- \cup W_i$-ből áll. Ahhoz, hogy ezt belássuk, elég a W_i be-szomszédairól megmutatni, hogy nem kerülhetnek a J_i-hez tartozó minimális domináns vágásnak a forrás felőli oldalára. Ez azért igaz, mert a J_0-hoz tartozó minimális domináns vágásban a W_i összes be-szomszédja a nyelő felőli oldalon volt, azaz

$$\forall v \in \rho\left(W_i\right): \quad \sum_{u \in \rho(v) \cap S_{J_0}^-} c\left(uv\right) \ \leq \sum_{w \in \delta(v) \cap \bar{S}_{J_0}^-} c\left(vw\right),$$

és W_i minden be-szomszédjának a vágás nyelő felőli oldalán lévő ki-szomszédainak a halmaza nőtt, tehát

$$\forall v \in \rho\left(W_i\right): \quad \sum_{w \in \delta(v) \cap \bar{S}_{J_0}^-} c\left(vw\right) \ < \sum_{w \in \delta(v) \cap \left(\bar{S}_{J_0}^- \cup W_i\right)} c\left(vw\right),$$

ebből következik, hogy W_i minden be-szomszédja a J_i-hez tartozó minimális domináns vágásban is a nyelő oldalán van.

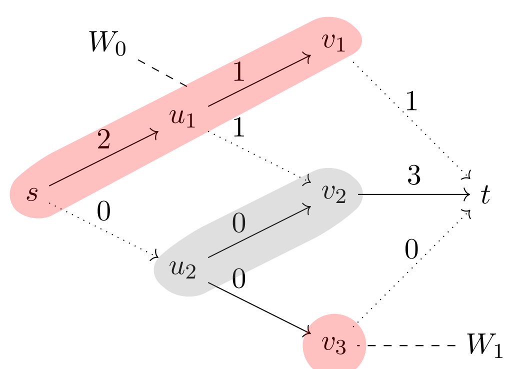
És végül, mivel $\bar{J}_0$ sértő volt, tudjuk, hogy

$$\sum_{u \in S_{J_0}^-} \sum_{v \in \bar{S}_{J_0}^-} c_{\hat{p}}\left(uv\right) < \sum_{j \in \bar{J}_0} \hat{x}_j \leq \sum_{j \in \bar{J}_i} \hat{x}_j,$$

és ez pont azt jelenti, hogy $\bar{J}_i$ sértő. □

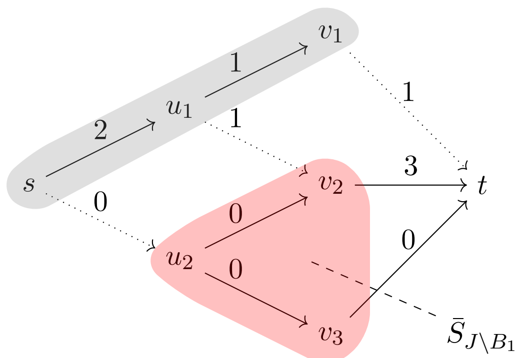
Ez természetesen azt jelenti, hogy akár az összes, a forrással nem összefüggő komponenst hozzávehetjük $\bar{S}_{J_0}^-$-hoz, úgy is sértő halmazt kapunk.

5. Példa. Tekintsük ismét a (4). példa hálózatát és a példa paraméterezését. A $V_2 = \{v_2\}$ halmaz sértő, nézzük a $J = \{1, 3\}$-hoz tarozó minimális domináns vágást.



4.2. ábra. S_J^- összefüggő komponensei

Ekkor $S_J^- = \{s, u_1, v_1, v_3\}$ nem összefüggő, egyik komponense $W_0 = \{s, u_1, v_1\}$, másik $W_1 = \{v_3\}$. Ekkor ha $B_1 = \{3\}$, ezt hozzávéve $\bar{J}$-hez a (20). állítás alapján sértő halmazt kapunk. Ebben az esetben a minimális és maximális domináns vágás egybeesik.



4.3. ábra. Sértő $\bar{J} \cup B_1$ halmaz

Valóban, $\bar{S}_{J\setminus B_1}$-be bemenő éleken a kapacitások összege 1, a belőle kimenőkön 3, azaz $\bar{J} \cup B_1$ sértő.

•

Legyen

$$J = J_0 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{l} B_i \right), \ \bar{J} = \bar{J_0} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{l} B_i \right)$$

21. Állítás. *Ekkor a J halmazhoz tartozó domináns vágás lap-indukáló.*

Bizonyítás. Azt könnyű látni, hogy ekkor S_J^- összefüggő, az a része $S_{J_0}^-$-nak, amely összefüggő volt. Ebből csúcsot nem veszítettünk el, így összefüggő lesz S_J^- is.

Azt kell még belátnunk, hogy $\bar{S}_J^+ \setminus \{t\}$ is összefüggő lesz. Azt feltettük, hogy $\bar{S}_{J_0}^+$ összefüggő volt, és olyan összefüggő komponenseket vettünk hozzá, amiknek az összes be-szomszédja szintén $\bar{S}_{J_0}^-$-ban van. Akkor történhetne megy, hogy $\bar{S}_J^+$ nem összefüggő, ha volna olyan W_i, aminek az összes be-szomszédja $\bar{S}_{J_0}^-$-ban van, ám ezek nincsenek benne $\bar{S}_J^+$-ben. Tegyük fel indirekt, hogy W_i ilyen. Legyen u egy be-szomszédja. Azonos indexhalmazhoz tartozó tetszőleges domináns vágásban ugyanakkora adott csúcsra nézve a vágás forrás felőli oldalából a beleérkező éleken a kapacitások összege és a belőle a forrás nyelő felőli oldalába menő éleken a kapacitások összege.

Jelölje hát $\rho(J,u)$ a J-hez tartozó tetszőleges domináns vágásban az u-ba S_J-ből beérkező élek kapacitásösszegét, $\delta(J,u)$ pedig az u-ból $\bar{S}_J$-be lépő éleken a kapacitások összegét. Ekkor u benne van $\bar{S}^-_{J_0}$-ban, azaz

$$\rho(J_0,u) \leq \delta(J_0,u)$$

Tudjuk továbbá, hogy

$$\delta(J_0,u) < \delta(J,u)$$

mivel legalább egy szomszédja van W_i-ben. Az indirekt feltevés szerint ekkor u nincs benne $\bar{S}^+_J$-ben, azaz

$$\delta(J,u) \leq \rho(J,u).$$

Viszont mivel amikor J_0-ból megkaptuk J-t, az u beszomszédai nem változtattak helyet, így

$$\rho(J_0,u) = \rho(J,u),$$

és ez ellentmondás. Tehát W_i minden be-szomszédja benne van $\bar{S}^+_J$-ben, így $\bar{S}^+_J \setminus \{t\}$ is összefüggő, és pontosan ezt akartuk belátni. $\square$

Következésképpen, ebben az esetben az $S^-_{J_0}$ összes olyan komponensét, ami a forrásból nem érhető el, hozzávehetjük a vágás másik oldalához, és kapunk egy sértett egyenlőtlenséget, ami ráadásul lap-indukáló.

Az utolsó eset, amikor sem $S^-_{J_0}$, sem $\bar{S}^+_{J_0}$ nem összefüggő. Ezt azonban könnyen vissza tudjuk vezetni arra, amikor csak $S^-_{J_0}$ nem összefüggő. Vegyük az $\bar{S}^+_{J_0}$-nak egy olyan összefüggő komponensét, amely sértő. Erre végezzük el a második esetnél tárgyalt módszert. A végén kapunk egy lap-indukáló vágást.

A vágósíkos algoritmushoz jó indítás lehet az alábbi egyenlőtlenség-rendszer:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i & = & 1 & \\ \lambda_i & \geq & 0 & \forall i \in [m] \\ x_j & \geq & 0 & \forall j \in [n] \\ \sum_{i=1}^{m} f(\lambda_i) & \geq & \sum_{i=1}^{n} x_i & \end{array} \tag{4.10}$$

Így az x változók is korlátosak, felülről $\max f(\lambda_i)$ korlátoz minden x_i-t.

4.7. Implementáció

Ha az előző szakaszban tárgyalt szeparációs módszert szeretnénk felhasználni egy vágósíkos algoritmusban, meg kell fontolni néhány dolgot. Például hogyan számítsuk ki egy adott indexhalmazra a hozzá tartozó (minimális és maximális) domináns vágást? Hogyan döntsük el egy indexhalmazról, hogy a hozzá tartozó maximális domináns vágásnak mely összefüggő komponensei sértők adott nem-megengedett megoldás mellett? Mik az összefüggő komponensek? Többek között ezekre a kérdésekre próbálunk meg választ adni ebben a szakaszban.

4.7.1. Domináns vágás meghatározása

Adott J indexhalmaz, a feladat a hozzá tartozó domináns vágás meghatározása. Legyen $\tau \in \mathbb{N}^V$ szintvektor. Azt fogja τ_v jelölni, hogy a v csúcsból milyen hosszú a leghosszabb irányított út hossza a nyelőbe. Nyilván $\tau_t = 0$. Egy lehetőség a τ értékek meghatározására, ha vesszük G' gráfot, ami G fordítottja, abban az értelemben, hogy minden irányított élét megfordítjuk, minden élének -1 súlyt adunk, és lefuttatjuk rajta a Bellman–Ford algoritmust. Ez megadja a t-ből induló és adott csúcsban véget érő legrövidebb irányított út hosszát. Ha ennek a hossznak a -1-szeresét vesszük, megkapjuk, hogy adott csúcsból a t-be érkező leghosszabb irányított út hány élből áll.

Erre azért van szükségünk, hogy amikor adott indexhalmazhoz meghatározzuk a domináns vágást, akkor megfelelő sorrendben döntsük el a csúcsokról, hogy a vágás forrás vagy nyelő felőli oldalán legyen.

A csúcsok feldolgozása tehát úgy történik, hogy először minden olyan csúcsot, amely nem $(v_j)_{j\in\bar{J}}$-beli (és nem a nyelő), S-hez soroljuk. Ezután τ szerinti növekvő sorrendben végigmegyünk rajtuk, és ha az épp feldolgozás alatt álló csúcs S-beli szomszédaiból érkező be-élein a kapacitás-összeg kisebb, mint a belőle S-en kívüli csúcsokba menő éleken a kapacitás-összeg, akkor $\bar{S}$-be átrajuk. Ha egyenlőség van, akkor az alapján rakjuk át vagy tartjuk meg, hogy minimális vagy maximális domináns vágást keresünk-e.

Algorithm 1: Domináns vágás keresése

Input: $J \subseteq [n]$
Output: $[S_J, \bar{S}_J]$ domináns $s-t$-vágás
$G' \colon V(G') \leftarrow V(G),\ A(G') \leftarrow \{vu | \forall uv \in A(G)\}$;
$c'(a) \leftarrow -1\ \forall a \in A(G')$;
$\tau_v \leftarrow$ Bellman–Ford$(G', c', t')_v$;
sort $v \in V$ by τ_v (asc);
$\bar{S}_J \leftarrow \{v_j | j \in [n] \setminus J\} \cup \{t\}$;
for $v \in V(G) \setminus \{v_j | j \in [n] \setminus J\} \cup \{t\}$ **do**
    if $\sum_{u \in \rho_v \cap S} c(uv) > \sum_{w \in \delta_v \cap \bar{S}} c(vw)$ **then**
        $S_J \leftarrow S + v$;
    else
        $\bar{S}_J \leftarrow \bar{S} + v$;
return $[S_J, \bar{S}_J]$;

4.7.2. Összefüggő komponensek meghatározása

Adott maximális vagy minimális domináns vágás során el kell döntenünk, hogy összefüggő-e, és ha nem, mik az összefüggő komponensek. Erre a BFS (breadth-first search) algoritmust fogjuk használni.

Minimális domináns vágás esetén a forrás felőli oldal összefüggőségét szeretnénk eldönteni, jelölje ezt a részgráfot S. Indítsunk el egy BFS-t az s forrásból, és amelyik csúcsokat el tudja érni, azok lesznek s-sel azonos komponensben, az összes többi pedig hozzávehető a vágás másik oldalához. Ha az összes csúcsot el tudtuk érni s-ből, akkor S összefüggő.

Algorithm 2: Minimális domináns vágás forrás-oldalának az összefüggő komponenseinek meghatározása

Input: $S \subset V(G) : s \in S$
Output: $z \in (0,1)^S : z_v = 1 \Leftrightarrow v$ a forrással azonos komponensben van

$z_v \leftarrow 0 \ \forall v \in S$;
Feldolgoz(s);
while $\exists v \in S$: *v elért, de nem feldolgozott* **do**
    $v \leftarrow$ következő feldolgozandó csúcs;
    $z_v \leftarrow 1$;
    Feldolgoz(v);
return z;

Hasonlóan, ha a maximális domináns vágás nyelő felőli oldaláról szeretnénk eldönteni, hogy a nyelő nélkül összefüggő-e, akkor is egy BFS-t kell futtatnunk. Legyen T tehát a nyelő felőli oldal a nyelő nélkül, és legyen $\gamma \in \mathbb{N}^{V(T)}$ az a vektor, mely azonos komponensbe eső csúcsokhoz azonos számot rendel. Legyen $c = 1$ a komponens-számláló. Kezdjük el tetszőleges csúcsból a BFS-t, és amíg van elért csúcs, a soron következő v csúcs feldolgozásakor állítsuk γ_v-t c-re. Ha még nincs minden csúcs feldolgozva T-ből, de nincs több elért csúcsunk egy csúcs feldolgozása után, akkor növeljük eggyel c értékét és indítsuk el a BFS-t egy még fel nem dolgozott csúcsból. Így a végén c megadja az összefüggő komponensek számát, míg a γ vektor megadja az összefüggő komponenseket.

Algorithm 3: Maximális domináns vágás nyelő-oldalának az összefüggő komponenseinek meghatározása

Input: $T \subset V(G) : t \in T$
Output: $c \in \mathbb{N}, \gamma \in [c]^T : \gamma_u = \gamma_v \Leftrightarrow u$ és v a $T \setminus \{t\}$-nek azonos összefüggő komponensében van

$c \leftarrow 0$;
for $v \in T \setminus \{t\}$ **do**
  if v *nem elért* **then**
    $c \leftarrow c + 1$;
    Feldolgoz(v);
    $\gamma_v \leftarrow c$;
    while $\exists u \in T \setminus \{t\} : u$ *elért de nem feldolgozott* **do**
      $\gamma_u \leftarrow c$;
      Feldolgoz(u);
return (c, γ);

4.7.3. Megengedettség eldöntése és sértő halmaz keresése

Adott egy $\hat{p} = \left(\hat{\lambda}, \hat{x}\right)$ megoldás jelölt, a feladat eldönteni róla, hogy megengedett-e, és ha nem, megmutatni, mely $\hat{x}_j$ változók által paraméterezett részgráf nem teljesíti a minimális vágásra vonatkozó feltételeket. Ezt úgy tudjuk megoldani, hogy megkeressük a $(G, \hat{p})$ hálózatban a minimális vágást, és ha ennek értéke kisebb, mint az $\hat{x}$ változók összértéke, akkor a minimális vágás nyelő felőli oldalán lévő v_j csúcsokhoz tartozó $\hat{x}_j$-k sértik azt az egyenlőtlenséget, amelyet a vágás forrás felőli oldalán lévő v_j csúcsokhoz tartozó domináns vágásból kaptunk.

4.7.4. Sértő halmaz keresése nem lap-indukáló domináns vágás esetén

Tegyük fel, hogy már meghatároztuk a maximális domináns vágás nyelő felőli oldalának összefüggő komponenseit. Ekkor a (19). állítás alapján ezek közül legalább az egyik sértő, azaz a halmazba belépő éleken kisebb a kapacitások összege, mint a halmazból a nyelőbe menő éleken. Meg tudjuk határozni adott halmazhoz a belőle t-be vezető élek kapacitás-összegét, és meg tudjuk mondani azt is, hogy mennyi a belépő éleken a kapacitások összege. Ha ez utóbbi a kisebb, akkor a halmaz sértő. Tehát annyi csak a teendő, hogy végig kell menni az összefüggő komponenseken, és amint találtunk egy sértőt, elég már csak azzal foglalkozni.

Ezen lehet fejleszteni úgy, hogy nem állunk meg az első sértőnél, hanem megkeressük az összeset, és hozzáadjuk az összes egyenlőtlenséget, ami hozzájuk tartozik.

4.7.5. Domináns vágás transzformációja lap-indukáló vágássá

Tegyük fel, hogy már megkaptunk egy sérő halmazhoz tartozó maximális és minimális domináns vágást, azonban azok nem lap-indukálók. Ez úgy fordulhat elő, hogy az S^- és T^+ közül legalább az egyik sérti az összefüggőségi feltételt. Ha így van, akkor csúcsok hozzávételével vagy kihagyásával mindkettőt polinomiális időn belül összefüggővé alakíthatjuk.

Algorithm 4: Domináns vágás transzformációja lap-indukáló vágássá

Input: $(G, c_{x,\lambda})$, $[S_0, T_0]$ domináns $s-t$-vágás
Output: Λ lap-indukáló $s-t$-vágások halmaza

```
Λ ← ∅;
T⁺ ← T₀ ∩ ρ(t)-hez tartozó maximális domináns vágás nyelő felőli
   oldala;
!V₁, ..., V_r a T⁺ összefügggő komponensei;
for i = 1, ..., r do
    if V_i sértő then
        J ← {j ∈ [n] | v_j ∈ V_i ∩ ρ(t)};
        S_i ← V_i ∩ ρ(t)-hez tartozó minimális domináns vágás forrás
           felőli oldala;
        if S_i nem összefüggő then
            !S_i^0, ..., S_i^q az S_i összefüggő komponensei, s ∈ S_i^0;
            J+ = {j ∈ [n] | v_j ∈ (⋃_{l=1}^q S_i^l) ∩ ρ(t)};
        [S, T] ← J-hez tartozó domináns vágás;
        Λ+ = [S, T];
return Λ;
```

4.7.6. Vágósíkos algoritmus

A fenti szubrutinokkal már le tudjuk írni a vágósíkos algoritmust, amit a szeparációs módszerből nyertünk. Az algoritmus egy egyenlőtlenség-rendszerből indul ki, és annak egy megengedett megoldásából. Egy iteráció abból áll, hogy az aktuális optimális megoldásról eldöntjük, hogy a teljes egyenlőtlenség-rendszernek megoldása-e, és ha nem, akkor egy olyan egyenlőtlenséget veszünk hozzá a rendszerhez, amelyet a megoldásunk sért, és a teljes poliédernek egy lapját reprezentálja. Jelölje $A_0 p \leq b_0$ a (4.10) egyenlőtlenség-rendszert.

Algorithm 5: Vágósíkos algoritmus

Input: $(G, c_{x,\lambda})$ x és λ változókkal paraméterezett hálózat, c célfüggvény

Output: $p^* = (x^*, \lambda^*)$ megoldás, melyben $\lambda^* \in \{0,1\}^m$ és c-re nézve optimális

1 $A \leftarrow A_0,\ b \leftarrow b_0$;
2 $p^* = (x_0^*, \lambda_0^*) \leftarrow \max\{cp \mid A_0 p \leq b_0\}$;
3 $MC \leftarrow \text{MaxFlow}\,(G, p^*)$;
4 $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^*$;
5 **while** $MC < \tilde{x}$ **do**
6 $\quad [S_0, T_0] = \text{MinCut}\,(G, c_{p^*}, s, t)$;
7 $\quad \Lambda \leftarrow$ az $[S_0, T_0]$-hoz tartozó lap-indukáló vágások;
8 $\quad A, b \leftarrow$ A-hoz és b-hez hozzávesszük a Λ-beli vágásokból származó egyenlőtlenségeket;
9 $\quad p^* \leftarrow \max\{cp\ Ap \leq b\}$;
10 $\quad MC \leftarrow \text{MaxFlow}\,(G, p^*)$;
11 $\quad \tilde{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^*$;
12 **return** p^*;

Abban az esetben, ha az algoritmusban a 7. lépés után nem transzformáljuk tovább a domináns vágást, hanem az abból származó egyenlőtlenséget adjuk hozzá a már meglévő rendszerhez, attól függetlenül, hogy lap-e, olyan vágósíkos algoritmust kapunk, amely domináns vágásokkal szeparál.

4.8. Teszteredmények

A vágósíkos algoritmust C++ nyelven implementáltuk, LP solvernek Gurobit [Gurobi Optimization, 2020] választva, a hálózat modellezéséhez pedig a LEMON C++ [Dezső et al., 2011] könyvtárat használtuk. Az algoritmus teszteléséhez a teszt-eseteket véletlenszerűen generáltuk, a diszjunkciók, változók és szintek számának megadása mellett. A vágósíkos algorimusnak azt verzióját, amelyben domináns vágással szeparálunk (DC), hasonlítottuk össze azzal, amikor egy iterációban több lap-vágást adunk a modellhez (MFC). A teszt-eseteknek három típusán próbáltuk ki a két algoritmust, két-szintes hálózatokon, több-szintes hálózatokon, és a 2. alkalmazásban definiált logikai problémákhoz konstruált hálózatokon. Az eredmények alapján arra a következtetésre jutottunk, hogy a lap-vágásokkal operáló algoritmus minden esetben legalább annyira hatékony (legfeljebb annyi iteráció alatt megtalálja az optimumot), mint a domináns vágásokat használó, azonban létezhet olyan eset, amikor jelentősen kevesebb iterációra van szüksége. Ez azért is fontos, mert ahogy nő a hozzáadott vágósíkok száma, úgy nő az aktuális LP megoldásához szükséges simplex-iterációk száma is.

A több-szintes hálózatokat leíró feladatpéldányokon elvégzett összehasonlítás ereménye az Appendix-beli 1. táblázaton látható. A táblázat oszlopai: példány a teszt-esetre, diszjunkció a diszjunkciók (unióban szereplő poliéderek) számára, a változó a változók számára, a szint a hálózat nyelő és forrás közötti szintjeinek számára utal. Az iteráció oszlopban az szerepel, hogy hányszor adunk új vágósíkot (vágósíkokat) a modellhez, míg egy megengedett megoldást kapunk. Ennek al-oszlopai a két algoritmus (MFC - Multiple Facet Cut, DC - Dominant Cut) iteráció számát tartalmazzák. A lap-vágás oszlopban az szerepel, hogy a hozzáadott egyenlőtlenségek közül hány adja a poliéder lapját. A lap generálás oszlop azt mutatja, hogy a lapokat adó szeparációs algoritmus hány egyenlőtlenséget adott a modellhez. Ez a DC algoritmus esetén nyilvánvalóan 0, mivel nem használja ezt a szeparációs módszert. A simplex iteráció oszlop azt mutatja, hogy a két algoritmus esetén az LP-k megoldásához hány simplex iterációt végzett el a solver. Itt látszik legjobban, hogy a `multilevel14` feladatpéldány esetén a domináns vágásokkal működő algoritmus több, mint 20-szor annyi simplex iterációt használt, mint a lap-vágásokat használó.

Irodalomjegyzék

[Balas, 1979] Balas, E. (1979). Disjunctive programming. In *Discrete Optimization II*, volume 5 of *Annals of Discrete Mathematics*, pages 3 – 51. Elsevier.

[Balas, 1998] Balas, E. (1998). Disjunctive programming: Properties of the convex hull of feasible points. *Discrete Applied Mathematics*, 89(1):3 – 44.

[Blair, 1990] Blair, C. (1990). Representation for multiple right-hand sides. *Math. Program.*, 49(1–3):1–5.

[Dezső et al., 2011] Dezső, B., Jüttner, A., and Kovács, P. (2011). Lemon - an open source c++ graph template library. *Electron. Notes Theor. Comput. Sci.*, 264(5):23–45.

[Gurobi Optimization, 2020] Gurobi Optimization, L. (2020). Gurobi optimizer reference manual.

[Jeroslow, 1988] Jeroslow, R. (1988). A simplification for some disjunctive formulations. *European Journal of Operational Research*, 36:116–121.

[Vielma, 2018] Vielma, J. P. (2018). Embedding formulations and complexity for unions of polyhedra. *Manag. Sci.*, 64:4721–4734.

Appendix

1. táblázat. Teszteredmények

Példány	Diszjunkció	Változó	Szint	Iteráció		Lap-vágás		Lap generálás		Simplex iteráció	
				MFC	DC	MFC	DC	MFC	DC	MFC	DC
`multilevel1`	5	30	3	26	83	32	1	31	0	70	642
`multilevel2`	5	30	3	18	40	22	1	21	0	20	84
`multilevel3`	10	40	3	42	66	68	9	64	0	141	611
`multilevel4`	10	40	3	95	173	96	42	66	0	415	1018
`multilevel5`	10	40	3	4	5	4	2	2	0	7	8
`multilevel6`	2	7	3	4	6	4	5	1	0	5	8
`multilevel7`	2	7	3	5	5	5	4	1	0	8	8
`multilevel8`	5	20	3	7	10	8	6	5	0	12	23
`multilevel9`	5	20	4	7	7	7	7	0	0	9	9
`multilevel10`	5	40	4	30	97	38	5	35	0	43	464
`multilevel11`	5	40	4	27	71	40	2	39	0	81	372
`multilevel12`	5	50	5	44	114	45	14	32	0	143	331
`multilevel13`	5	50	5	122	159	137	22	115	0	523	835
`multilevel14`	5	100	5	104	487	107	12	95	0	584	10798
`multilevel15`	5	100	5	94	221	101	1	100	0	391	1713
`multilevel16`	10	200	5	5	5	5	1	4	0	13	13
`multilevel17`	10	40	3	11	13	12	11	4	0	15	16
`multilevel18`	10	80	3	27	71	27	12	19	0	61	325