Eötvös Loránd Tudományegyetem

Operációkutatási Tanszék

Szakdolgozat

Szimmetrikus szubmoduláris függvények és alkalmazásaik

Szerző:
Csaba Ákos

Témavezető:
Frank András

2013. május 29.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Kombinatorikus optimalizálási tételek során rengetegszer alkalmazunk halmazfüggvényeket. A bizonyításokban sokszor használunk szubmoduláris, szupermoduláris, pozimoduláris, ferdén szupermoduláris függvényeket. Bizonyos gráfokra vonatkozó állításokat, algoritmusokat lehet általánosítani halmazfüggvényekre is. Queyranne [5] a gráf minimális vágásának meghatározására szolgáló Nagamochi Ibaraki algoritmust [14] [15] általánosította szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvényekre. Goemans észrevette, hogy a Gomory-Hu fa nem csak gráfokra, hanem szimmetrikus szubmoduláris függvényekre is létezik [11]. Néha, ha meg akarunk oldani egy gráfokra, hipergráfokra vonatkozó problémát, akkor kiderül, hogy egy halmazfüggvényről szóló tételt kell belátnunk, mint ahogy azt Szigeti Zoltán tette hipergráfok lokális összefüggőségének a vizsgálatakor [9].
A szakdolgozatomban szeretném a szimmetrikus halmazfüggvényekről szóló eredményeket egy önálló területként bemutatni, aminek számos alkalmazása van klasszikus optimalizálási feladatokban. Kiemelt szerep jut majd a szimmetrikus szubmoduláris függvényeknek, de lesz olyan fejezet ahol ferdén szupermoduláris függvényekről lesz szó, illetve olyan is ahol a pozimodularitás lesz döntő tulajdonságú.
A témáról Fehér Borbála írt egy szakdolgozatot Szubmoduláris függvények és alkalmazásaik címmel. Ez a szakdolgozat részletesen tárgyalja, hogy mi a kapcsolat a gráf minimális vágását meghatározó Nagamochi Ibaraki algoritmus és a szimmetrikus szubmoduláris minimalizálás között. Ebben a szakdolgozatban általánosabban szerepel Queyranne algoritmusa: kiderül hogy hogyan lehet minimalizálni szimmetrikus és keresztező szubmoduláris, illetve szubmoduláris és pozimoduláris halmazfüggvényeket, sőt meg lehet adni az összes tartalmazásra nézve minimális optimális halmazt is. A szakdolgozatomban szintén szerepel a Queyranne tétele, de az eredetin kívül további két bizonyítást is veszünk. Fehér Borbála szakdolgozatában megtalálható a szimmetrikus szubmoduláris Gomory-Hu fa létezéséről szóló bizonyítás is amit fel fogok használni a szakdolgozatomban. Egy külön fejezet pedig a szimmetrikus szubmoduláris függvények extrém halmazaival foglalkozik. Szintén meg kell említenünk, hogy Fülöp Ottilía disszertációjában Goemans [11] parity halmazokon való minimalizálásához kapcsolodó eredmények találhatók.
A szakdolgozatom felépítése a következő. Először szimmetrikus szubmoduláris függvények minimalizálásával fogunk foglalkozni, Queyranne tételére három különböző bizonyítást is látni fogunk. A következő szakaszban megvizsgáljuk, hogy a gráfokra vonatkozó Gomory-Hu fa alkalmazásoknak milyen állítások felelnek meg szimmetrikus szubmoduláris függvények esetén.
Ezután bebizonyítjuk Szigeti Zoltán tételeit ferdén szupermoduláris függvények hipergráfokkal való fedéséről, illetve Király Tamás tételét félig ferdén szupermoduláris függvények gráfokkal való fedéséről. A tételek alkalmazásaként szó lesz hipergráfok lokális összefüggőségéről, szupermoduláris színezésekről és Nash-Williams tételének egy általánosításáról.
A következő fejezetben belátjuk Goemans tételét [11], ami a parity halmazcsaládokon való

szubmoduláris függvény minimalizálást visszavezeti az általános szubmoduláris függvény minimalizálásra. Alkalmazásként megnézzük, hogyan lehet szubmoduláris függvény esetén második legkisebb értékeket meghatározni, továbbá szó lesz még T -páros vágásokról, illetve s-t T -páros és T -páratlan vágásokról. A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy milyen kapcsolat van az általános szubmoduláris függvény minimalizálás és a szimmetrikus szubmoduláris függvények minimalizálása között. Szó lesz szimmetrikus szubmoduláris függvények megszorításáról és összehúzásáról is.
Az utolsó fejezetben halmazfüggvények által definiált rendszerekben fogunk minimális transzverzálist keresni. Ki fog derülni, hogy szubmoduláris és pozimoduláris függvények esetén polinomiális algoritmus adható a problémára. Alkalmazásként megvizsgáljuk a forrástelepítési problémát lokális élösszefüggőségi előírások esetén.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek Frank Andrásnak, hogy megismertette és megkedveltette velem ezt a témát, és végig rengeteget segített a szakdolgozat elkészítése során. Köszönettel tartozom Jordán Tibornak és Király Tamásnak, hogy megjegyzéseikkel, észrevételeikkel segítettek a szakdolgozat megírása során.

2. fejezet

Jelölések, alapfogalmak

Legyen V egy véges halmaz. Egy $f : 2^V \to \mathbb{R}$ a V részhalmazain értelmezett függvényt halmazfüggvénynek hívunk. A V halmazt az f függvény alaphalmazának fogjuk hívni.

2.0.1. Definíció. *Legyen f egy halmazfüggvény a V alaphalmazon. Az f -ről, azt mondjuk, hogy szimmetrikus, ha:*

$$f(X) = f(V - X)$$

$\forall\, X \subseteq V$ részhalmazra.

2.0.2. Definíció. *Egy f halmazfüggvény szubmoduláris, ha teljesíti a következő szubmodularitási egyenlőtlenséget:*

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \cap Y) + f(X \cup Y)$$

$\forall\, X, Y \subseteq V$ részhalmazra.

Egy $X, Y \subseteq V$ halmaz párt keresztezőnek hívunk, ha $X \cap Y \neq \emptyset$, $X - Y \neq \emptyset$, $Y - X \neq \emptyset$ és $X \cup Y \neq V$. Egy f halmazfüggvény keresztező szubmoduláris, ha a fenti szubmodularitási egyenlőtlenség csak keresztező halmaz párokra érvényes. Ilyen értelemben a keresztező szubmodularitás egy gyengébb tulajdonság, mint a teljes szubmodularitás.

2.0.3. Definíció. *Egy f halmazfüggvény szupermoduláris, ha:*

$$f(X) + f(Y) \leq f(X \cap Y) + f(X \cup Y)$$

$\forall\, X, Y \subseteq V$ részhalmazra.

Egy $G = (V, E)$ gráf esetén jelöljük $i_G(X)$ -el az $X \subseteq V$ részhalmaz által feszített élek számát: $i_G(X) = |\{uv \in E : \ u, v \in X\}|$. Az $i_G(X)$ halmazfüggvény szupermoduláris. Könnyen látható, hogy ha f szubmoduláris, akkor a $-f$ halmazfüggvény szupermoduláris lesz, és megfordítva, ha f szupermoduláris, akkor $-f$ szubmoduláris. Két szubmoduláris (szupermoduláris) halmazfüggvény összege is szubmoduláris (szupermoduláris).

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és legyen adott az élein egy $w : E \to \mathbb{R}$ súlyozás. Vegyük a csúcsok egy részhalmazát: $X \subseteq V$, jelöljük $d_G(X)$ -el az X halmazból kilépő élek súlyainak az összegét. Az így kapott $d_G(X)$ halmazfüggvényt a gráf vágás függvényének nevezzük. A gráf vágás függvénye szimmetrikus és szubmoduláris halmazfüggvény.

Legyen $\mathcal{H}$ egy hipergráf a V alaphalmazon, ahol $\mathcal{H}$ -val jelöljük a hiperélek halmazát. A hipergráf vágás függvényén a következő halmazfüggvényt értjük:

$$d_{\mathcal{H}}(X) = |\{H : \ H \in \mathcal{H},\, H \cap X \neq \emptyset,\, H \cap (V - X) \neq \emptyset\}|\,.$$

A vágás függvényt akkor is értelmezhetjük, ha adott egy $w : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ nemnegatív súlyfüggvény a hiperéleken:

$$f(X) = \sum \{w(H) : \ H \in \mathcal{H},\ H \cap X \neq \emptyset,\ H \cap (V - X) \neq \emptyset\}.$$

Könnyen belátható, hogy az így kapott f halmazfüggvény szimmetrikus és szubmoduláris. Ekkor a $d_{\mathcal{H}}(X)$ hipergráf vágás függvény is szimmetrikus és szubmoduláris ($w \equiv 1$).

2.0.4. Definíció. *Egy m halmazfüggvény moduláris, ha:*

$$m(X) + m(Y) = m(X \cap Y) + m(X \cup Y)$$

$\forall\, X, Y \subseteq V$ *részhalmazra.*

Ha adott egy $w : V \to \mathbb{R}$ súlyfüggvényünk a V halmaz csúcsain, akkor a $\tilde{w}(X) = \sum_{v \in X} w(v)$ halmazfüggvény moduláris lesz. Megfordítva, ha adott egy m moduláris halmazfüggvény, amire $m(\emptyset) = 0$ akkor az m előáll egy csúcsokon adott súlyfüggvény összegfüggvényeként. Vegyük az m -et az egypontú halmazokon: $w(v) = m(\{v\})$. Ekkor az m modularitása alapján $m(\{u\}) + m(\{v\}) = m(\emptyset) + m(\{u\} \cup \{v\}) = m(\{u, v\})$ és így $m(X) = \sum_{v \in X} m(\{v\}) = \sum_{v \in X} w(v)$.
Könnyen látható, hogy egy szubmoduláris (szupermoduláris) és egy moduláris halmazfüggvény összege is szubmoduláris (szupermoduláris).

2.0.5. Definíció. *Egy f halmazfüggvényről azt mondjuk, hogy pozimoduláris, ha:*

$$f(X) + f(Y) \geq f(X - Y) + f(Y - X)$$

$\forall\, X, Y \subseteq V$ *részhalmazra.*

Ha a fenti egyenlőtlenség fordított iránya teljesül minden $X, Y \subseteq V$ halmazpárra, akkor a halmazfüggvényről azt mondjuk, hogy negamoduláris.
Egy m nemnegatív moduláris halmazfüggvény pozimoduláris lesz. Ehhez azt kell csak felhasználni, hogy az m előáll a csúcsokon adott súlyfüggvény összegfüggvényeként és $m(X \cap Y) \geq 0$.

2.0.1. Állítás. *Egy f szimmetrikus és szubmoduláris halmazfüggvény pozimoduláris lesz.*

Bizonyítás. Legyenek $X, Y \subseteq V$ tetszőlegesek. A $V - X$ és Y halmazokra felírva a szubmodularitási egyenlőtlenséget és f szimmetrikusságát kihasználva:

$$\begin{aligned} f(X) + f(Y) = f(V - X) + f(Y) \geq f((V - X) \cap Y) + f((V - X) \cup Y) = \\ f(Y - X) + f(V - ((V - X) \cup Y)) = f(Y - X) + f(X - Y). \end{aligned}$$

□

A fenti állítás megfordítása nem igaz, azaz létezik olyan szubmoduláris és pozimoduláris halmazfüggvény, ami nem szimmetrikus. Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf, továbbá a csúcsain legyen adott egy nemnegatív súlyfüggvény: w. Definiáljuk a következő halmazfüggvényt a V alaphalmazon: $f(X) = d_G(X) + \tilde{w}(X)$, ahol $d_G(X)$ a G gráf vágásfüggvénye. Beláttuk, hogy $d_G(X)$ szimmetrikus és szubmoduláris, így pozimoduláris is. A $\tilde{w}$ halmazfüggvény moduláris, nemnegatív, így szubmoduláris és pozimoduláris is. Azaz az f halmazfüggvény szubmoduláris és pozimoduláris, de nem feltétlenül szimmetrikus. Például ha $w \equiv 1$ súlyfüggvényt vesszük és veszünk egy olyan X halmazt, amire $|X| \neq |V - X|$ akkor $d_G(X) = d_G(V - X)$, de $\tilde{w}(X) \neq \tilde{w}(V - X)$.

Szükségünk lesz még a súlyozott lokális élösszefüggőségi szám fogalmára.

2.0.6. Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és $w : E \to \mathbb{R}_+$ egy nemnegatív súlyfüggvény az élein. Adott $u, v \in V$ pontpárra a súlyozott lokális élösszefüggőségi szám legyen a következő mennyiség:*

$$\lambda(u, v) = \min\{d_G(X) : \ u \in X, \, v \notin X\}.$$

3. fejezet

Szimmetrikus szubmoduláris függvények minimalizálása

3.1. Queyranne tétel és bizonyításai

Ebben a szakaszban szimmetrikus, szubmoduláris függvények minimalizálásával fogunk foglalkozni. Általános szubmoduláris függvényeket minimalizáló polinomiális algoritmust először Grötschel, Lovász, és Schrijver adott [4], ellipszoid módszer segítségével. Később Iwata, Fleischer és Fujishige [2], illetve tőlük függetlenül Schrijver [13] talált erősen polinomiális algoritmust az általános szubmoduláris függvények minimalizálására.
Az előző részben láttuk, hogy szimmetrikus szubmoduláris függvényre a legkézenfekvőbb példa egy gráf vágás függvénye. Egy gráf minimális vágásának meghatározására Nagamochi és Ibaraki [14] [15] találtak egy folyam algoritmusokat nem használó eljárást, később ezt fejlesztette tovább, illetve egyszerűsítette egymástól függetlenül Stoer és Wagner [16], illetve Frank András [17].
Queyranne a fenti, gráf vágás függvényére vonatkozó állításokat altalánosította szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvényekre. Ebben a szakaszban belátjuk Queyranne tételét, ami azt mondja ki, hogy egy f szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény esetén létezik olyan (u, v) pont pár, hogy az őket elválasztó halmazok közül az egypontú $\{v\}$ halmaznak lesz a legkisebb az f értéke. Queyranne tételére az eredetin kívül további két bizonyítás is található a szakirodalomban: Rizzitől [10] és Fujishigétől [6]. Fujishige lemmájában többet bizonyít, mint Queyranne. Rizzi bizonyításának erőssége, hogy általánosabb függvényekre is lehetővé teszi a minimalizálást, mint a szimmetrikus szubmoduláris függvények.

Bevezetjük a kapcsolt pár és a max-vissza sorrend fogalmát, amit eredetileg a gráf vágás függvényének a vizsgálatára találtak ki. A Queyranne tételre vonatkozó bizonyítások után következik majd egy algoritmus, ami megad egy f szimmetrikus szubmoduláris függvényt minimalizáló halmazt. Az algoritmus nagyon hasonló lesz a gráf vágás függvényére vonatkozó Nagamochi Ibaraki algoritmushoz.

3.1.1. Queyranne bizonyítása

3.1.1. Definíció. *Egy rendezett (u, v) pontpárra azt mondjuk, hogy kapcsolt pár, ha az egypontú $\{v\}$ halmaz minimális f értékű az (u, v) pontpárt elválasztó halmazok között.*

Bevezetjük a pontoknak egy sorrendjét, amit max-vissza sorrendnek fogunk hívni. Az első pontnak, v_1 -nek bármelyik pont választható. A továbbiakban tegyük fel, hogy a $v_1, \ldots, v_{k-1}$ pontokat már meghatároztuk és legyen $V_i = \{v_1, \ldots, v_i\}$. A következő v_k pont legyen az az u pont a $V - V_{k-1}$ halmazból, amire:

$$f(V_{k-1} \cup \{u\}) - f(\{u\})$$

érték minimális.

3.1.1. Tétel (Queyranne). *Ha $v_1, \ldots, v_n$ egy max-vissza sorrend az f szimmetrikus szubmoduláris függvényre nézve, akkor a $\{v_n\}$ egypontú halmaz minimális f értékű a v_{n-1} és v_n pontokat elválasztó halmazok közül. Azaz a max-vissza sorrend utolsó két pontja: (v_{n-1}, v_n) kapcsolt pár.*

Először belátunk egy lemmát, ami a max-vissza sorrend egy speciális tulajdonságát írja le és amiből a Queyranne tétel azonnal következni fog.

3.1.1. Lemma. *Legyen f szimmetrikus, szubmoduláris függvény, V_i pedig a max-vissza sorrend első i db tagjának uniója. Továbbá legyen $y \in V - V_i$ és $X \subseteq V_{i-1}$, ekkor tetszőleges $i = 1, \ldots, n-1$ -re :*

$$f(V_i) + f(\{y\}) \leq f(V_i - X) + f(X \cup \{y\})$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. $i = 1$ esetén az X halmaz csakis az üres halmaz lehet, így a lemma triviálisan teljesül. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $i = 1, \ldots, k-1$ -re. Vegyünk egy tetszőleges $u \in V - V_k$ -t és egy $S \subseteq V_{k-1}$ halmazt. A max-vissza sorrendben v_k választása miatt:

$$f(V_{k-1} \cup \{v_k\}) - f(\{v_k\}) \leq f(V_{k-1} \cup \{u\}) - f(\{u\})$$

Ezt átrendezve:

$$f(V_k) + f(\{u\}) \leq f(V_{k-1} \cup \{u\}) + f(\{v_k\})$$

Legyen j a legkisebb egész, amire $S \subseteq V_{j-1}$. Két eset lehetséges:
1.eset $j = k$
Ekkor $v_{k-1} \in S$ és $V_{k-1} - S \subseteq V_{k-2}$. Ez alapján a következő egyenlőtlenségeket írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} f(V_k - S) + f(S \cup \{u\}) &= f((V_{k-1} - S) \cup \{v_k\}) + f(S \cup \{u\}) \\ &\geq f(V_{k-1}) + f(\{v_k\}) - f(S) + f(S \cup \{u\}) \\ &\geq f(V_{k-1} \cup \{u\}) + f(\{v_k\}) \\ &\geq f(V_k) + f(\{u\}) \end{aligned}$$

Ahol az első egyenlőtlenség az indukciós feltétel $i = k-1$, $y = v_k$, $X = V_{k-1} - S$ választással, a második egyenlőtlenség a szubmodularitási egyenlőtlenség a V_{k-1} és $S \cup \{u\}$ halmazokra, végül a harmadik egyenlőtlenséget feljebb láttuk be. Ezzel az 1.esetben készen is vagyunk az állítással.
2.eset $j \leq k-1$
Ekkor $v_{j-1} \in S$, de $v_j, \ldots, v_k \notin S$.

$$\begin{aligned} f(V_k - S) + f(S \cup \{u\}) &= f((V_{j-1} - S) \cup (V_k - V_{j-1})) + f(S \cup \{u\}) \\ &\geq f((V_{j-1} - S) \cup (V_k - V_{j-1})) + f(V_j) - f(V_j - S) + f(\{u\}) \\ &\geq f(V_k) + f(\{u\}) \end{aligned}$$

Ahol az első egyenlőtlenség az indukciós feltevés $i = j$, $y = u$, $X = S$ választással, a második pedig a szubmodularitási egyenlőtlenség a $(V_{j-1} - S) \cup (V_k - V_{j-1})$ és a V_j halmazokkal.
Ezzel a második esetben is készen vagyunk.

$\square$

Most pedig térjünk rá a Queyranne tétel bizonyítására. Szeretnénk megmutatni, hogy:

$$f(\{v_n\}) = \min\{f(U): \ v_{n-1} \notin U, v_n \in U\}.$$

Azaz a $\{v_n\}$ egypontú halmaz minimális f értékű a v_{n-1} -et és v_n -t szeparáló halmazok közül. Ehhez az előző lemmát alkalmazzuk $i = n-1$ -re. Ekkor szükségszerűen $y = v_n$ lehet csak. Egy $X \subseteq V_{n-2}$ halmaz nem tartalmazza v_{n-1} -et, így az $X \cup \{y\} = X \cup \{v_n\}$ halmaz egy v_{n-1} és v_n -t szeparáló halmaz, ami tartalmazza v_n -t és megfordítva minden U halmaz, amely szeparálja v_{n-1} -et és v_n -t és tartalmazza v_n -t előáll $X \cup \{v_n\}$ alakban, ahol $X \subseteq V_{n-2}$. Továbbá igaz még, hogy $V_{n-1} - X = V - (X \cup \{v_n\})$, illetve $V_{n-1} = V - \{v_n\}$, így f szimmetrikussága miatt: $f(V_{n-1} - X) = f(X \cup \{v_n\})$ és $f(V_{n-1}) = f(\{v_n\})$. Tehát a lemmát felírva:

$$2f(\{v_n\}) = f(V_{n-1}) + f(\{v_n\}) \leq f(V_{n-1} - X) + f(X \cup \{v_n\}) = 2f(X \cup \{v_n\}) = 2f(U)$$

Ahol U tetszőleges v_{n-1} és v_n -t szeparáló, v_n -et tartalmazó halmaz. Ezzel a Queyranne tételt beláttuk.

3.1.2. Fujishige bizonyítása

A Queyranne tételre adunk egy újabb bizonyítást. Azaz megintcsak adott egy f szimmetrikus, szubmoduláris halmazfüggvényünk a V alaphalmazon. A bizonyítás hasonló struktúrájú lesz az eredeti Queyranne -féle bizonyításhoz. Hasonlóan bevezetünk a V alaphalmaz pontjain egy sorrendet, amit rekurzívan definiálunk egy $w_k(X)$ segédfüggvénnyel együtt.
Az első pontnak: v_1 -nek tetszőleges pont választható. Ha már definiáltuk a $v_1, \ldots, v_{k-1}$ pontokat, akkor legyen $V_{k-1} = \{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ és definiáljuk a következő halmazfüggvényt:

$$w_k(X) = f(X) - \frac{1}{2}f(X \cap (V - V_{k-1})) - \frac{1}{2}f((V - X) \cap (V - V_{k-1})) + \frac{1}{2}f(V - V_{k-1}).$$

Az így elkészített függvények szimmetrikusak lesznek, de nem feltétlenül szubmodulárisak. A fent bevezetett függvény segítségével definiálható a következő v_k pont. v_k az az elem legyen a $V - V_{k-1}$ halmazból, amely maximalizálja a $w_k(\{u\})$ függvényt, ahol $u \in V - V_{k-1}$

$$w_k(\{v_k\}) = \max\{w_k(\{u\}): \ u \in V - V_{k-1}\}.$$

Az így meghatározott $v_1, \ldots, v_n$ sorrendet nevezzük szintén max-vissza sorrendnek, majd később fogjuk látni, hogy ez valóban megegyezik az előző Queyranne bizonyításbeli max-vissza sorrenddel.
Belátunk egy lemmát, amelyből a Queyranne tétel már elég könnyen bizonyítható.

3.1.2. Lemma (Fujishige). *Minden $k = 1, 2, \ldots, n-1$ -re és minden $u \in V - V_k$ -ra, $\{u\}$ minimális w_k értékű az u -t és v_k -t elválasztó halmazok körében.*

Bizonyítás. A lemmát k -ra vonatkozó teljes indukcióval fogjuk belátni. $k = 1$ esetén $U_0 = \emptyset$, így $w_k(X) = 0$ lesz $\forall X \subseteq V$ halmazon, ezáltal az állítás triviálisan teljesül.
Tegyük fel, hogy $k = l$ -re igaz az állítás és $k = l+1$ -re szeretnénk bizonyítani. Vegyünk egy tetszőleges $u \in V - V_{l+1}$ -et és egy tetszőleges u -t és v_{l+1} -et elválasztó X halmazt. Szeretnénk megmutatni, hogy $w_{l+1}(X) \geq w_{l+1}(\{u\})$.
1.eset X halmaz u -t és v_l -t is elválasztja.
Az általánosság megszorítása nélkül, ekkor feltehető, hogy $v_l \in X$, $v_{l+1} \in X$, $u \notin X$. Következő lépésként belátjuk, hogy:

$$w_{l+1}(X) - w_{l+1}(\{u\}) \geq w_l(X) - w_l(\{u\})$$

Ehhez először is írjuk fel az egyenlőtlenségben szereplő tagok kétszereseit, definició szerint:

$$\begin{aligned}
2w_{l+1}(X) &= 2f(X) - f(X \cap (V - V_l)) - f((V - X) \cap (V - V_l)) + f(V - V_l) \\
2w_{l+1}(\{u\}) &= 2f(\{u\}) - f(\{u\}) - f((V - \{u\}) \cap (V - V_l)) + f(V - V_l) \\
2w_l(X) &= 2f(X) - f(X \cap (V - V_{l-1})) - f((V - X) \cap (V - V_{l-1})) + f(V - V_{l-1}) \\
2w_l(\{u\}) &= 2f(\{u\}) - f(\{u\}) - f((V - \{u\}) \cap (V - V_{l-1})) + f(V - V_{l-1})
\end{aligned}$$

Tehát,

$$2[w_{l+1}(X) - w_{l+1}(\{u\})] - 2[w_l(X) - w_l(\{u\})] = f((V - \{u\}) \cap (V - V_l)) + f(X \cap (V - V_{l-1})) +$$
$$+ f((V - X) \cap (V - V_{l-1})) - f(X \cap (V - V_l)) - f((V - X) \cap (V - V_l)) - f((V - \{u\}) \cap (V - V_{l-1}))$$

Mivel $v_l \in X$, ezért $f((V - X) \cap (V - V_l)) = f((V - X) \cap (V - V_{l-1}))$, amivel az egyenlőséget továbbírva:

$$\begin{aligned}
&f((V - \{u\}) \cap (V - V_l)) + f(X \cap (V - V_{l-1})) + f((V - X) \cap (V - V_{l-1})) \\
&-f(X \cap (V - V_l)) - f((V - X) \cap (V - V_l)) - f((V - \{u\}) \cap (V - V_{l-1})) \\
&= f((V - \{u\}) \cap (V - V_l)) + f(X \cap (V - V_{l-1})) - f(X \cap (V - V_l)) \\
&-f((V - \{u\}) \cap (V - V_{l-1})) = f((X \cap (V - V_l)) \cup \{v_l\}) - f(X \cap (V - V_l)) \\
&+f((V - \{u\}) \cap (V - V_l)) - f((V - \{u\}) \cap (V - V_{l-1})) = f((X \cap (V - V_l)) \cup \{v_l\}) \\
&+f((V - V_l) - \{u\}) - f(X \cap (V - V_l)) - f((V - V_{l-1}) - \{u\})
\end{aligned}$$

A szubmodularitási egyenlőtlenséget használjuk az $(X \cap (V - V_l) \cup \{v_l\})$ és a $(V - V_l) - \{u\}$ halmazokra, ezzel:

$$f((X \cap (V - V_l)) \cup \{v_l\}) + f((V - V_l) - \{u\}) - f(X \cap (V - V_l)) - f((V - V_{l-1}) - \{u\}) \geq$$
$$\geq f((V - V_{l-1}) - \{u\}) + f(X \cap (V - V_l)) - f(X \cap (V - V_l)) - f((V - V_{l-1}) - \{u\}) = 0$$

Azaz beláttuk, hogy:

$$w_{l+1}(X) - w_{l+1}(\{u\}) \geq w_l(X) - w_l(\{u\}) \geq 0$$

A második egyenlőtlenség az indukciós feltevés miatt igaz (X szeparálja u -t és v_l -t). Ezzel az első esetben készen is vagyunk.
2.eset X halmaz nem szeparálja u -t és v_l -t.
Ekkor az X halmaz szükségképpen szeparálja v_{l-1} -et és v_l -et . Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $v_{l+1} \in X$, $v_l \notin X$, $u \notin X$. Szeretnénk megmutatni, hogy:

$$w_{l+1}(X) - w_l(X) \geq w_{l+1}(\{v_{l+1}\}) - w_l(\{v_{l+1}\})$$

Az 1.esethez hasonlóan írjuk fel az egyenlőtlenségben szereplő 4 tagot a definiciójuk szerint:

$$\begin{aligned}
2w_{l+1}(X) &= 2f(X) - f(X \cap (V - V_l)) - f((V - X) \cap (V - V_l)) + f(V - V_l) \\
2w_{l+1}(\{v_{l+1}\}) &= 2f(\{v_{l+1}\}) - f(\{v_{l+1}\}) - f((V - \{v_{l+1}\}) \cap (V - V_l)) + f(V - V_l) \\
2w_l(X) &= 2f(X) - f(X \cap (V - V_{l-1})) - f((V - X) \cap (V - V_{l-1})) + f(V - V_{l-1}) \\
2w_l(\{v_{l+1}\}) &= 2f(\{v_{l+1}\}) - f(\{v_{l+1}\}) - f((V - \{u\}) \cap (V - V_{l-1})) + f(V - V_{l-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2[w_{l+1}(X) - w_l(X)] - 2[w_{l+1}(\{v_{l+1}\}) - w_l(\{v_{l+1}\})] = \\
&= f((V - \{v_{l+1}\}) \cap (V - V_l)) + f(X \cap (V - V_{l-1})) + f((V - X) \cap (V - V_{l-1})) \\
&- f(X \cap (V - V_l)) - f((V - X) \cap (V - V_l)) - f((V - \{v_{l+1}\}) \cap (V - V_{l-1}))
\end{aligned}$$

Mivel az X halmaz nem tartalmazta a v_l -t, így $f(X \cap (V - V_{l-1})) = f(X \cap (V - V_l))$, azaz a fentieket továbbírva, kapjuk:

$$\begin{aligned}
&f((V - \{v_{l+1}\}) \cap (V - V_l)) + f((V - X) \cap (V - V_{l-1})) - f((V - X) \cap (V - V_l)) \\
&- f((V - \{v_{l+1}\}) \cap (V - V_{l-1})) = f((V - V_l) - \{v_{l+1}\}) + f((V - X) \cap (V - V_{l-1})) \\
&- f((V - X) \cap (V - V_l)) - f((V - V_{l-1}) - \{v_{l+1}\})
\end{aligned}$$

Felírva a szubmodularitási egyenlőtlenséget a $(V - V_l) - \{v_{l+1}\}$ és $(V - X) \cap (V - V_{l-1})$ halmazokra, a fentiekre a következő adódik:

$$\begin{aligned}
&f((V - V_l) - \{v_{l+1}\}) + f((V - X) \cap (V - V_{l-1})) - f((V - X) \cap (V - V_l)) \\
&- f((V - V_{l-1}) - \{v_{l+1}\}) \geq f((V - X) \cap (V - V_l)) + f((V - V_{l-1}) - \{v_{l+1}\}) \\
&- f((V - X) \cap (V - V_l)) - f((V - V_{l-1}) - \{v_{l+1}\}) = 0
\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy $w_{l+1}(X) - w_l(X) \geq w_{l+1}(\{v_{l+1}\}) - w_l(\{v_{l+1}\})$. Az indukciós feltevésből tudjuk, hogy $w_l(X) \geq w_l(\{v_{l+1}\})$ (X szeparálja v_l -t és v_{l+1} -et). Ezzel adódik, hogy

$$w_{l+1}(X) \geq w_{l+1}(\{v_{l+1}\})$$

Tudjuk, hogy $u \in V - V_{l+1}$, így az u pont a v_{l+1} után van a max-vissza sorrendben, ezért a v_{l+1} választása alapján: $w_{l+1}(\{v_{l+1}\}) \geq w_{l+1}(\{u\})$. Végülis megkapjuk az állítást $k = l+1$ esetén:

$$w_{l+1}(X) \geq w_{l+1}(\{u\})$$

Ezzel a 2.esetben is készen vagyunk az indukciós lépéssel.

□

Az előző lemma alapján már könnyen bizonyítható a Queyranne-tétel. A $k = n - 1$ esetben ekkor tetszőleges X halmazra, ami szeparálja v_n -t és v_{n-1} -et:

$$w_{n-1}(X) \geq w_{n-1}(\{v_n\})$$

Ugyanakkor:

$$\begin{aligned}
w_{n-1}(X) &= f(X) - \frac{1}{2}f(\{v_{n-1}\}) - \frac{1}{2}f(\{v_n\}) + \frac{1}{2}f(\{v_{n-1}, v_n\}) \\
w_{n-1}(\{v_n\}) &= f(\{v_n\}) - \frac{1}{2}f(\{v_{n-1}\}) - \frac{1}{2}f(\{v_n\}) + \frac{1}{2}f(\{v_{n-1}, v_n\})
\end{aligned}$$

Tehát tetszőleges X halmazra, ami szeparálja v_n -t és v_{n-1} -et:

$$f(X) \geq f(\{v_n\})$$

3.1.3. Rizzi bizonyítása

Nézzünk egy újabb bizonyítást a Queyranne tételre. Előre bocsátjuk, hogy Rizzi bizonyítása nem csak szimmetrikus, szubmoduláris halmazfüggvénykre lesz érvényes, hanem általánosabb függvényekre is. Ehhez vezessük be a d diszjunkt halmazpárokon értelmezett függvényt a következő tulajdonságokkal. Az alaphalmaz legyen szokásosan V.

- Szimmetria: $d(X,Y) = d(Y,X)$.
- Konzisztencia: $d(A,X) \geq d(B,X)$ esetén: $d(A, X \cup B) \geq d(B, X \cup A)$.
- Monotonitás: $X' \supseteq X$ esetén $d(X',Y) \geq d(X,Y)$, illetve $Y' \supseteq Y$ esetén $d(X,Y') \geq d(X,Y)$.

Most is meghatározzuk a V alaphalmaz pontjainak egy sorrendjét a fenti d halmazpárokon értelmezett függvény segítségével. Ezt a sorrendet is max-visszának fogjuk hívni és később belátjuk, hogy megegyezik a Queyranne és Fujishige által használt sorrenddel.
Ha adott egy f szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvényünk, akkor a következőképpen tudunk hozzá értelmezni egy d diszjunkt halmazpárokon értelmezett, a fenti tulajdonságokkal bíró függvényt:

$$d(X,Y) = f(X) + f(Y) - f(X \cup Y). \tag{3.1}$$

Belátjuk, hogy az így definiált d függvény tényleg teljesíti a fenti tulajdonságokat: szimmetria, konzisztencia, monotonitás. A szimmetria d definiciója alapján azonnal látszik.

3.1.1. Állítás. *Legyenek A, B, X páronként diszjunkt részhalmazai V -nek. Ekkor $d(A,X) \geq d(B,X)$ esetén:*

$$d(A, X \cup B) \geq d(B, X \cup A)$$

Azaz a d függvény konzisztens.

Bizonyítás. A d definiciójából: $d(A, X \cup B) + d(X,B) = f(A) + f(B) + f(X) - f(A \cup X \cup B)$.
Ugyanígy: $d(B, X \cup A) + d(X,A) = f(B) + f(A) + f(X) - f(B \cup X \cup A)$.
Azaz $d(A, X \cup B) + d(X,B) = d(B, X \cup A) + d(X,A)$. Innen pedig $d(A,X) \geq d(B,X)$ felhasználásával adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

□

3.1.2. Állítás. *A d halmazfüggvény mindkét változójában monoton növő, tehát:*

$$X' \supseteq X \quad \textit{esetén} \quad d(X',Y) \geq d(X,Y)$$

$$Y' \supseteq Y \quad \textit{esetén} \quad d(X,Y') \geq d(X,Y).$$

Bizonyítás. Szimmetria miatt elegendő az első tulajdonságot belátni.

$$\begin{aligned} d(X',Y) - d(X,Y) = (f(X') + f(Y) - f(X' \cup Y)) - (f(X) + f(Y) - f(X \cup Y)) = \\ (f(X') + f(X \cup Y)) - (f(X) + f(X' \cup Y)) = \\ (f(X') + f(X \cup Y)) - (f(X' \cap (X \cup Y)) + f(X' \cup (X \cup Y))) \geq 0. \end{aligned}$$

Ahol az utolsó egyenlőtlenség f szubmodularitásából adódott.

□

Definiáljuk a d függvényre a V pontjainak egy sorrendjét. v_1 tetszőleges pont lehet, továbbá ha már meghatároztuk $\{v_1, \dots, v_{i-1}\} = V_{i-1}$ -et, akkor v_i legyen az a pont, amire:

$$d(V_{i-1}, v_i) \geq d(V_{i-1}, u) \quad \forall\, u \in V - V_{i-1}$$

3.1.2. Tétel. *Legyen f szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon és készítsük el hozzá a (3.1) szerinti d halmazfüggvényt. Ha $v_1, \dots, v_n$ a fenti értelemben definiált max-vissza sorrend a d függvényre nézve, akkor a $\{v_n\}$ egypontú halmaz minimális f értékű a v_{n-1} és v_n pontokat elválasztó halmazok közül.*

Bizonyítás. Indukció a pontok számára: n-re. Ha $n = 2$, akkor az állítás magától értetődő. Ha $n = 3$, akkor a fent bevezetett max-vissza sorrend tulajdonság miatt $d(v_1, v_2) \geq d(v_1, v_3)$, azaz $f(\{v_1\}) + f(\{v_2\}) - f(\{v_1, v_2\}) \geq f(\{v_1\}) + f(\{v_3\}) - f(\{v_1, v_3\})$. Mivel f szimmetrikus az előző egyenlőtlenségbe helyettesítsünk $f(\{v_3\})$ -at $f(\{v_1, v_2\})$ helyére, illetve $f(\{v_1, v_3\})$ -at $f(\{v_2\})$ helyére. Rendezés után kapjuk: $f(v_3) \leq f(\{v_1, v_3\})$. Mivel $\{v_3\}$ és $\{v_1, v_3\}$ az összes lehetséges különböző halmaz szimmetria erejéig, ami elválasztja v_2 -öt és v_3 -at, az előbbiből $n = 3$ esetet beláttuk.
Indukciós lépés. Két pont összehúzása után legyen $f'(X') = f(X)$, ahol X az X' halmaz ősképét jelöli. Ekkor f' az összehúzott halmazon továbbra is szimmetrikus és szubmoduláris. Jelöljük f_{ij} - vel a v_i és v_j pontok összehúzása után kapott f' halmazfüggvényt, a neki megfelelő d függvényt d_{ij} -vel, tobábbá v_{ij} -vel magát az összehúzott pontot.

- A $v_{12}, v_3, \dots, v_n$ sorrend max-vissza az f_{12}- re nézve. Ehhez elegendő belátni, hogy $d_{12}(v_{12}, v_3) \geq d_{12}(v_{12}, v_i)$ minden $i \geq 3$ -ra. Az eredeti sorrend max-vissza tulajdonsága alapján ez azonnal adódik: $d_{12}(v_{12}, v_3) = d(V_2, v_3) \geq d(V_2, v_i) = d_{12}(v_{12}, v_i)$.

- A $v_1, v_{23}, \dots, v_n$ sorrend max-vissza az f_{23}- ra nézve. Ekkor $d_{23}(v_1, v_{23}) = d(v_1, \{v_2, v_3\}) \geq d(v_1, v_2) \geq d(v_1, v_i) = d_{23}(v_1, v_i)$, ahol az első egyenlőtlenség az eredeti d monotonitása miatt, a második pedig a max-vissza tulajdonság miatt igaz.

- A $v_2, v_{13}, \dots, v_n$ sorrend max-vissza az f_{13}- ra nézve. A $d(v_1, v_2) \geq d(v_1, v_3)$ az eredeti sorrend max-vissza tulajdonsága miatt teljesül, ezért a d függvény konzisztencia tulajdonsága miatt ($A = \{v_2\}, \quad B = \{v_3\}, \quad X = \{v_1\}$) -el felírva adódik, hogy: $d(\{v_1, v_3\}, v_2) \geq d(\{v_1, v_2\}, v_3) \geq d(\{v_1, v_2\}, v_i) \geq d(v_2, v_i)$. A második és harmadik egyenlőtlenség rendre a max-vissza tulajdonság és d monotonitása miatt teljesülnek. Végül felírhatjuk, hogy $d_{13}(v_{13}, v_2) = d(\{v_1, v_3\}, v_2) \geq d(v_2, v_i) = d_{13}(v_2, v_i)$.

Legyen X olyan v_{n-1} -et és v_n -et elválasztó halmaz, ami minimális f értékű. A v_1, v_2, v_3 ponthármasból biztosan létezik olyan pontpár, amit az X halmaz nem választ el. Legyenek ezek v_i és v_j ($1 \leq i < j \leq 3$). Legyen X' a v_i és v_j pontok összehúzásakor X -ből keletkező halmaz. Az előzőekben beláttuk, hogy bármely két pontot is húzzuk össze az első háromból a v_{n-1} és a v_n egy $n-1$ hosszú max-vissza sorrend utolsó két pontja az f_{ij} halmazfüggvényre nézve ($n \geq 4$). Az indukciós feltevést használva, ekkor $f_{ij}(X') = f_{ij}(\{v_n\})$. Ugyanakkor $f(X) = f_{ij}(X')$ és $f_{ij}(\{v_n\}) = f(\{v_n\})$, amiből adódik, hogy $f(X) = f(\{v_n\})$, azaz $\{v_n\}$ minimális f értékű a v_{n-1} -et és v_n -t elválasztó halmazok körében, mivel X is az volt.

□

3.1.1. Megjegyzés. *A fenti tétel bizonyításában nem használtuk ki, hogy f szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény volt. Csak azt használtuk, hogy a d függvény szimmetrikus, monoton növő és konzisztens volt. Tehát ha kiindulunk egy ilyen d függvényből, és vesszük az $f(X) = d(X, V - X)$ halmazfüggvényt, akkor arra is igaz lesz a Queyranne tétel.*

Láttunk három különböző bizonyítást is Queyranne tételére. Most belátjuk, hogy a bizonyítások során használt sorrendek valóban ugyanazok voltak, és így jogos volt mindegyikre a közös, max-vissza sorrend elnevezést használni.
Mindhárom esetben a kezdőpont v_1 tetszőleges volt. Queyranne esetében, ha már meghatároztuk $V_{i-1} = \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$ -et, akkor a következő v_i pont az lett, ami minimalizálta az $f(V_{i-1} \cup \{u\}) - f(\{u\})$ mennyiséget ($u \in V - V_{i-1}$).
Rizzinél a következő v_i pont az lett, amire $d(V_{i-1}, v_i) \geq d(V_{i-1}, u)$ teljesült, és a d függvényt a következőképpen definiáltuk: $d(X, Y) = f(X) + f(Y) - f(X \cup Y)$. Azaz:

$$f(V_{i-1}) + f(\{v_i\}) - f(V_{i-1} \cup \{v_i\}) \geq f(V_{i-1}) + f(\{u\}) - f(V_{i-1} \cup \{u\})$$

Egyszerűsítés után tehát pont azt kapjuk, hogy v_i minimalizálja a $f(V_{i-1} \cup \{u\}) - f(\{u\})$ mennyiséget, ahogy u befutja a $V - V_{i-1}$ halmazt, ez pedig éppen a Queyranne által definiált sorrendhez vezet.
Fujishigénél, ha már meghatároztuk az első $i-1$ darab pontot, akkor v_i az a pont lett, amire a $w_i(\{u\})$ függvény maximális volt $u \in V - V_{i-1}$ esetén. A w_i függvény pedig a következő volt: $w_i(X) = f(X) - \frac{1}{2}f(X \cap (V - V_{i-1})) - \frac{1}{2}f((V - X) \cap (V - V_{i-1})) + \frac{1}{2}f(V - V_{i-1})$. Azaz:

$$w_i(\{v_i\}) = f(\{v_i\}) - \frac{1}{2}f(\{v_i\}) - \frac{1}{2}f((V - \{v_i\}) \cap (V - V_{i-1})) + \frac{1}{2}f(V - V_{i-1})$$
$$w_i(\{u\}) = f(\{u\}) - \frac{1}{2}f(\{u\}) - \frac{1}{2}f((V - \{u\}) \cap (V - V_{i-1})) + \frac{1}{2}f(V - V_{i-1})$$

A $w_i(\{v_i\}) \geq w_i(\{u\})$ egyenlőtlenségbe behelyettesítve a fentieket, és az egyszerűsítéseket elvégezve a következőt kapjuk:

$$f(\{v_i\}) - f((V - \{v_i\}) \cap (V - V_{i-1})) \geq f(\{u\}) - f((V - \{u\}) \cap (V - V_{i-1})).$$

Használjuk ki f szimmetrikusságát: $f((V - \{v_i\}) \cap (V - V_{i-1})) = f(V - (\{v_i\} \cup V_{i-1})) = f(V_{i-1} \cup \{v_i\})$ és hasonlóan $f((V - \{u\}) \cap (V - V_{i-1})) = f(V_{i-1} \cup \{u\})$, tehát a fenti egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy:

$$f(\{v_i\}) - f(V_{i-1} \cup \{v_i\}) \geq f(\{u\}) - f(V_{i-1} \cup \{u\}).$$

Innen pedig már látható, hogy a Fujishige által használt sorrend is megegyezik a Queyranne által használttal.

Mindhárom bizonyítás teljes indukciót használt. A legegyszerűbb, legkézenfekvőbb talán Queyranne bizonyítása volt. Fujishige bizonyítása több munkát igényelt, viszont cserébe az általa bizonyított lemma erősebb, mint a Queyranne által használt. Rizzi bizonyítása kevésbé számolósabb, mint az előző kettő és általánosabb függvényekre is érvényes, mint a szimmetrikus szubmoduláris függvények.

3.2. Queyranne algoritmus

Az előző szakaszban beláttuk Queyranne tételét, ami azt mondta ki, hogy ha van egy szimmetrikus szubmoduláris függvényünk: f, akkor létezik olyan pontpár: (u, v), hogy az őket elválasztó halmazok közül az egypontú $\{v\}$ halmaz minimális f értékű.
Ebben a szakaszban arról lesz szó, hogy a Queyranne tétel segítségével hogyan tudunk egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvényt minimalizálni. Queyranne algoritmusa nagyon hasonló lesz a gráfok minimális vágását meghatározó Nagamochi Ibaraki algoritmushoz.

3.2.1. Tétel. *Legyen f egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon, $|V| = n$. Ekkor $O(n^3 T_f)$ futási időben található egy f -et minimalizáló $\emptyset \neq X \subset V$ halmaz, ahol T_f azt a futási időt jelöli, amelybe egy X halmaz f értékének a megadása telik.*

Adott tehát az f szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon. Elkészítjük a V pontjainak egy max-vissza sorrendjét: $v_1, \ldots, v_n$. Megjegyezzük, hogy ezt $O(n^2 T_f)$ futási időben megtehetjük. A sorrendben egy újabb v_i pont meghatározásához $f(V_{i-1} \cup \{u\}) - f(\{u\})$ kifejezést kell minimalizálnunk, ahol $u \in V - V_{i-1}$. Ha minden $u \in V - V_{i-1}$ -re kiértékeljük a fenti kifejezést, akkor $O(nT_f)$ időben tudunk meghatározni egy újabb pontot a sorrendben, tehát összeségében $O(n^2 T_f)$ futási időben megadható egy max-vissza sorrend.
Queyranne tétele alapján a max-vissza sorrend utolsó két pontja kapcsolt párt alkot, azaz $f(\{v_n\}) = \min\{f(X) : X \cap \{v_{n-1}, v_n\} = 1\}$. Húzzuk össze a v_{n-1} és a v_n pontokat egy ponttá: v , így kapjuk a $V^{(1)}$ alaphalmazt, ami $n-1$ pontú lesz. Ezen az alaphalmazon definiáljuk az $f^{(1)}$ függvényt, ami az f függvény összehúzása lesz.

$$f^{(1)}(X) = \begin{cases} f(X) & \text{ha } v \notin X \subseteq V^{(1)} \\ f((X - \{v\}) \cup \{v_{n-1}, v_n\}) & \text{ha } v \in X \subseteq V^{(1)} \end{cases}$$

Az $f^{(1)}$ továbbra is szimmetrikus és szubmoduláris lesz a $V^{(1)}$ alaphalmazon. A Queyranne tétel miatt, ha az $f^{(1)}$ -et minimalizálta egy $X' \subseteq V^{(1)}$ halmaz, akkor vagy az X' halmaz őse képe, vagy az egypontú $\{v_n\}$ halmaz minimalizálja az eredeti f függvényt. Ez azért teljesül, mert ha veszünk egy $X \subseteq V$ halmazt, ami f -et minimalizálja, akkor az X vagy elválasztja a v_{n-1} és a v_n pontokat, ez esetben $f(X) \geq f(\{v_n\})$ és így $f(\{v_n\})$ is minimális, vagy pedig nem választja el v_{n-1} -et és v_n -et és ekkor létezik olyan $X' \subseteq V^{(1)}$ halmaz, amire $f^{(1)}(X') = f(X)$ és $f^{(1)}(X')$ minimalizálja az $f^{(1)}$ -et.
Az új $V^{(1)}$ alaphalmazon ismét meghatározhatunk egy max-vissza sorrendet, ennek az utolsó két pontját összehúzva kapunk egy $V^{(2)}$ alaphalmazt $n-2$ ponttal, és azon egy $f^{(2)}$ szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvényt. Az $f^{(2)}$ függvény a max-vissza sorrend utolsó két pontját nem szeparáló halmazokon megőrzi az $f^{(1)}$ függvény értékét.
Az eljárást folytatva a kapott max-vissza sorrendek utolsó pontjait jelöljük: $v^{(0)}, \ldots, v^{(n-1)}$ -el. Ekkor a pontok őseképeit tekintve az eredeti V alaphalmazon: $X_{v^{(0)}}, \ldots, X_{v^{(n-1)}}$ az egyik halmaz minimalizálni fogja az eredeti f szimmetrikus szubmoduláris függvényt.
Egy max-vissza sorrend meghatározása $O(n^2 T_f)$ futási időt igényel, így a teljes algoritmus futási ideje $O(n^3 T_f)$ lesz.

Queyranne algoritmusa nem csak szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvények minimalizálását teszi lehetővé. Nagamochi és Ibaraki [1] észrevették, hogy Queyranne tétele és maga az algoritmus akkor is működik, ha f szimmetrikus és keresztező szubmoduláris. Sőt egy szubmoduláris és pozimoduláris halmazfüggvény minimalizálását is vissza tudjuk vezetni a szimmetrikus szubmoduláris függvény minimalizálásra.
Goemans [18] megmutatta, hogy Queyranne algoritmusát módosítva, hogyan lehet szimmetrikus szubmoduláris függvényeket olyan halmazcsaládokon minimalizálni, amik tartalmazásra nézve zártak, tehát ha $\mathcal{F}$ -el jelöljük a halmazcsaládot, $X \in \mathcal{F}$ és $X' \subseteq X$, akkor $X' \in \mathcal{F}$.

3.3. Gomory-Hu fa alkalmazások szimmetrikus, szubmoduláris függvényekre

Ha adott egy $G = (V, E)$ élsúlyozott gráfunk, akkor minden (u, v) pontpárra létezik egy $\lambda(u, v)$ súlyozott lokális élösszefüggőségi szám. Egy gráf Gomory-Hu fája ezeket a $\lambda(u, v)$ értékeket kódolja el. Azaz tetszőleges pontpárra megadja, hogy mennyi az adott pontpárt

elválasztó minimális vágás értéke. Ebben a szakaszban definiálni fogjuk a Gomory-Hu fa fogalmát gráfokra, illetve kimondunk egy tételt, ami szerint tetszőleges gráfra és súlyfüggvényre létezik Gomory-Hu fa [3].
Ha adott egy f szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvényünk, akkor hasonlóan definiálható a súlyozott lokális élösszefüggőségi számnak megfelelő $\lambda_f(u,v)$ mennyiség az f halmazfüggvényre is.
Ugyanúgy igaz, hogy tetszőleges f szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvényre létezik Gomory-Hu fa, ami ezeket a $\lambda_f(u,v)$ értékeket kódolja el. Fehér Borbála szakdolgozatában szerepel ennek a tételnek a bizonyítása, így most ezt nem ismételjük meg. Ebben a szakaszban azt vizsgáljuk meg, hogy milyen alkalmazásai vannak a Gomory-Hu fának szimmetrikus szubmoduláris függvényekre.
Az eredeti gráfbeli minimális vágásokra vonatkozó Gomory-Hu fára ismert alkalmazásokból saját eredményként megvizsgáltam, hogy melyek azok, amiknek a bizonyításai átvihetők szimmetrikus szubmoduláris függvényekre.

3.3.1. Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és az élein legyen $w : E \to \mathbb{R}_+$ egy súlyozás. A $T = (V, F)$ fát a (G, w) Gomory-Hu fájának nevezzük, ha minden $uv \in F$ fa élre $\lambda(u, v) = d_G(X_{uv})$, ahol X_{uv} -vel jelöljük az uv fa él alapvágását a gráfban, azaz $T - \{uv\}$ egyik komponensét.*

3.3.1. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ tetszőleges gráf és $w : E \to \mathbb{R}_+$ egy súlyozás az élein. Ekkor létezik (G, w) Gomory-Hu fa.*

Definiáljuk a lokális élösszefüggőség fogalmát szimmetrikus szubmoduláris függvényekre.

3.3.2. Definíció. *Legyen f egy szimmetrikus, szubmoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon. Ekkor:*

$$\lambda_f(u, v) = \min\{f(X) : \ u \in X, \, v \notin X\}.$$

Ennek segítségével a fentivel analóg módon definiálható a Gomory-Hu fa egy f szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvényre.

3.3.3. Definíció. *Legyen f egy szimmetrikus, szubmoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon. Az f függvény Gomory-Hu fája egy olyan $T = (V, F)$ fa, aminek minden $uv \in F$ élére: $\lambda_f(u, v) = f(X_{uv})$, ahol X_{uv} jelöli az uv fa élhez tartozó alapvágást, tehát a $T - uv$ egyik komponensét.*

Goemans vette észre, hogy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvénynek is létezik Gomory-Hu fája [11] .

3.3.2. Tétel. *Ha f szimmetrikus és szubmoduláris halmazfüggvény, akkor létezik az f függvény Gomory-Hu fája.*

Megjegyezzük, hogy akkor is létezik Gomory-Hu fa, ha f nem teljesen szubmoduláris, hanem csak keresztező szubmoduláris.
Fontos megfigyelés, hogy a Gomory-Hu fa nem csak a fa élei mentén vett $\lambda_f(u,v)$ értékeket kódolja el, hanem az összes V alaphalmazbeli párra vett $\lambda_f(u,v)$ -t. Vegyünk egy (a,b) párt, ami nem feltétlenül éle a Gomory-Hu fának. Továbbá legyen $U \subseteq V$ egy olyan részhalmaz, amire $a \in U$, $b \notin U$ és $\lambda_f(a,b) = f(U)$. Tudjuk, hogy a Gomory-Hu fában létezik a -ból b -be egy egyértelmű út. Ennek az útnak van olyan $e = xy$ éle, ami kilép az U halmazból, mivel U elválasztott az (a,b) párt. Ha vesszük a Gomory-Hu fa $e = xy$ élhez tartozó alapvágását, akkor $\lambda_f(x,y) = f(X_{xy})$. Azt is tudjuk, hogy az U halmaz

elválasztja x -et és y -t, így $\lambda_f(x,y) \leq f(U)$. Az X_{xy} alapvágás elválasztja a -t és b -t, így $\lambda_f(a,b) \leq f(X_{xy})$. Összevetve a kapott egyenlőtlenségeket:

$$f(X_{xy}) = \lambda_f(x,y) \leq f(U) = \lambda_f(a,b) \leq f(X_{xy}).$$

Tehát $\lambda_f(a,b) = \lambda_f(x,y) = f(X_{xy})$ és így a Gomory-Hu fa egyik alapvágásának f -értéke megadja $\lambda_f(a,b)$ -t, ahol (a,b) tetszőleges pontpár volt.

Most pedig nézzünk néhány alkalmazást szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény Gomory-Hu fájára. Kombinatorikus algoritmusok I. tárgyból vettünk néhány alkalmazást az eredeti gráf vágás függvényére vonatkozó Gomory-Hu fára. Nézzük meg az ott elhangzott bizonyítások hogyan vihetők át szimmetrikus szubmoduláris függvényekre.

3.3.1. Állítás. *Legyen $G = (V,E)$ gráf és k egy pozitív egész szám. Tegyük fel, hogy a gráfban minden csúcs foka legalább k, ekkor létezik, olyan u,v pontpár, amire $\lambda(u,v) \geq k$.*

Az állítás bizonyítása vázlatosan a következő. Vegyük a gráf Gomory-Hu fáját a $w \equiv 1$ súlyfüggvényre, és vegyük a Gomory-Hu fa egy xy levelét. Ekkor x,y -ra $\lambda(x,y) \geq k$.
Most fogalmazzuk meg a fenti tétel megfelelőjét szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvényekre.

3.3.2. Állítás. *Legyen f egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon és k egy pozitív egész szám. Ha $f(\{v\}) \geq k$ minden $v \in V$ -re, akkor létezik olyan u,v pont pár, amire $\lambda_f(u,v) \geq k$.*

Bizonyítás. Az f szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvényre létezik $T = (V,F)$ Gomory-Hu fa. A gráfokra vonatkozó esethez hasonlóan vegyük a Gomory-Hu fa egy $st \in F$ levelét ($d_F(t) = 1$). Ekkor $\lambda_f(s,t) = f(X_{st}) = f(\{t\}) \geq k$.

□

Nézzünk egy következő Gomory-Hu fa alkalmazást.

3.3.3. Állítás. *Legyen $G = (V,E)$ gráf a $w \equiv 1$ súlyozzással az élein és engedjünk meg párhuzamos éleket is a gráfban. Legyen $M = \max_{s,t \in V} \lambda(s,t)$, továbbá legyen olyan (u,v) pontpár, amire $\lambda(u,v) \leq M-1$. Ekkor be tudunk húzni egy újabb élt a gráfban, úgy hogy $M = \max_{s,t \in V} \lambda(s,t)$ továbbra is teljesüljön.*

A megoldás az volt, hogy a Gomory-Hu fa egy élét az eredeti gráfhoz hozzávéve belátható, hogy $M = \max_{s,t \in V} \lambda(s,t)$ nem romlik el.
Próbáljuk meg megfogalmazni a fenti állítást szimmetrikus szubmoduláris függvényekre és nézzük meg, hogy működik-e a fenti megoldás az általános esetben is.

3.3.4. Állítás. *Legyen f szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon és legyen f egészértékű. Legyen $M = \max_{s,t \in V} \lambda_f(s,t)$, továbbá legyen olyan (u,v) pontpár, amire $\lambda_f(u,v) \leq M-1$. Ekkor lesz olyan (a,b) pontpár a V alaphalmazban, hogy:*

$$f'(X) = \begin{cases} f(X)+1 & \text{ha } |X \cap \{a,b\}| = 1 \\ f(X) & \text{különben} \end{cases}$$

az így elkészített f' szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvényre $M = \max_{s,t \in V} \lambda_{f'}(s,t)$ továbbra is teljesül.

Bizonyítás. Először ellenőrizzük le, hogy a fenti módon definiált f' halmazfüggvény valóban szimmetrikus és szubmoduláris lesz. A szimmetrikusság abból adódik, hogy az eredeti f szimmetrikus volt, valamint, ha egy X halmaz elválasztja az (a, b) pontpárt, akkor ugyanez igaz a $V - X$ halmazra is.
A szubmodularitást esetszétválasztással tudjuk ellenőrizni. Azt kell megvizsgálnunk, hogy az $X, Y, X \cap Y, X \cup Y$ halmazok közül melyikeken nő az f függvény értéke. Ha az $X \cap Y$ és az $X \cup Y$ halmazok is elválasztják az (a, b) párt, akkor az X és az Y is elválasztja és így a szubmodularitási egyenlőtlenség érvényben marad. Ha az $X \cap Y$ választja el az (a, b) -t, akkor vagy az X vagy az Y is elválasztja. Ha az $X \cup Y$ választja el (a, b) -t, akkor ugyanez mondható el, tehát mindkét esetben továbbra is teljesül a szubmodularitási egyenlőtlenség, és ezzel az eseteket végig vizsgáltuk.
Tudjuk, hogy létezik olyan (u, v) pontpár, amire $\lambda_f(u, v) \leq M - 1$. Vegyük a Gomory-Hu fában az u -t a v -vel összekötő egyértelmű utat. Egy korábban tett megfigyelés miatt létezik olyan xy Gomory-Hu fa él ezen az úton, amire $\lambda_f(u, v) = f(X_{xy}) = \lambda_f(x, y)$.
Növeljük meg az f halmazfüggvény értékét az x -et és y -t elválasztó halmazokon, így kapjuk az f' szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvényt. Szeretnénk belátni, hogy $\lambda_{f'}(s, t) \leq M$ továbbra is teljesül minden $s, t \in V$ -re.
Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan s és t, amire $\lambda_{f'}(s, t) = M + 1$. Azaz eredetileg $\lambda_f(s, t) = M$ teljesült és ez nőtt meg eggyel.
A Gomory-Hu fában létezett az s -et és t -t összekötő egyértelmű út, jelöljük ezt P -vel. Megintcsak a korábbi megfigyelés miatt létezik a P úton egy zw Gomory-Hu fa él, amire $M = \lambda_f(s, t) = \lambda_f(zw) = f(X_{zw})$, tehát X_{zw} elválasztotta az s és t pontokat. Két eset lehetséges, ha $xy \neq zw$, akkor az X_{zw} halmaz nem választja el az x és y csúcsokat, mivel xy és zw is a Gomory-Hu fa élei voltak. Ezért $f'(X_{zw}) = M$ továbbra is teljesülni fog. Az X_{zw} halmaz elválasztotta s -et és t -t, ez viszont ellentmond annak, hogy $\lambda_{f'}(s, t) = M + 1$. A másik esetben $zw = xy$, ekkor $M - 1 \geq \lambda_f(u, v) = \lambda_f(x, y) = \lambda_f(z, w) = \lambda_f(s, t) = M$, ami szintén ellentmondás.
Azaz $\max_{s,t \in V} \lambda_{f'}(s, t) = M$ az új f' halmazfüggvényre is.

□

A Gomory-Hu fának egy további alkalmazása a k-vágás feladat. Ha adott egy $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $c : E \to \mathbb{R}_+$ súlyozás, akkor szeretnénk meghatározni a V alaphalmaz egy $A_1, \dots, A_k$ partícióját, úgy hogy az A_i halmazok között menő élek összsúlya minimális legyen. Ha a k szám nincs rögzítve, akkor ez a feladat NP-nehéz. A Gomory-Hu fa segítségével tudunk adni egy $2 - \frac{2}{k}$ approximációs algoritmust. Ha vesszük a Gomory-Hu fában azt a $k-1$ élt: $e_1, \dots, e_{k-1}$ amikre az $X_{e_1}, \dots, X_{e_{k-1}}$ Gomory-Hu fabeli alapvágások $d_G(X)$ értéke minimális, akkor megmutatható hogy ezen alapvágások által definiált k-vágás értéke nem nagyobb, mint egy minimális k -vágás értékének a $2 - \frac{2}{k}$ -szorosa.

Nézzük hogyan általánosítható a k -vágás approximációs algoritmus szimmetrikus szubmoduláris függvényekre a fentiek alapján. Legyen f egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon. A V alaphalmaz egy olyan $V_1, \dots, V_k$ partícióját keressük, amire $\sum_{i=1}^{k} f(V_i)$ minimális. Nagamochi és Ibaraki $k = 3$ esetén adott egy polinomiális algoritmust [19], amely meghatároz egy minimális 3-vágást egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvényre.

3.3.5. Állítás. *Legyen f egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon, úgy hogy $f(\emptyset) = 0$. Ekkor létezik $2 - \frac{2}{k}$ approximációs algoritmus a k-vágás feladatra szimmetrikus szubmoduláris függvény esetén.*

Bizonyítás. Vegyük az f függvény $T = (V, F)$ Gomory-Hu fáját. Legyenek $e_1, \dots, e_{k-1}$ a Gomory-Hu fának azon $k - 1$ éle, amire az $f(X_{e_1}), \dots, f(X_{e_{k-1}})$ Gomory-Hu fabeli alapvágások f értéke a legkisebb. Ez a $k - 1$ darab él meghatároz egy k elemű partíciót: a

Gomory-Hu fából kihagyva az $e_1, \dots, e_{k-1}$ éleket a fa k darab komponensre esik szét, jelöljük ezeket: $V_1, \dots, V_k$ -val.
Legyen $A_1, \dots, A_k$ a V alaphalmaz egy olyan particiója , amire $\sum_{i=1}^{k} f(A_i)$ minimális. Belátjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} f(V_i) \leq (2 - \frac{2}{k}) \sum_{i=1}^{k} f(A_i).$$

Először megmutatjuk, hogy:

$$2\sum_{i=1}^{k-1} f(X_{e_i}) \leq (2 - \frac{2}{k}) \sum_{i=1}^{k} f(A_i).$$

Feltehető, hogy $f(A_k) \geq f(A_i)$ minden $i = 1, \dots k-1$ -re.
Vizsgáljuk az $A_1, \dots, A_{k-1}$ halmazokat a Gomory-Hu fában. Minden A_i halmazra ($i = 1, \dots, k-1$) megadható a Gomory-Hu fa egy e_i^* éle, ami belép az A_i halmazba és az így kapott $e_1^*, \dots, e_k^*$ élek különbözőek.
Ha $e_i^* = u_i v_i$, akkor az A_i halmaz elválasztja az u_i és a v_i pontokat, így: $f(X_{e_i^*}) = \lambda_f(u_i, v_i) \leq f(A_i)$ minden $i = 1, \dots, k-1$ -re. Ekkor:

$$2\sum_{i=1}^{k-1} f(X_{e_i}) \leq 2\sum_{i=1}^{k-1} f(X_{e_i^*}) \leq 2\sum_{i=1}^{k-1} f(A_i) \leq (2 - \frac{2}{k}) \sum_{i=1}^{k} f(A_i). \tag{3.2}$$

Azt kell még megmutatnunk, hogy a következő egyenlőtlenség teljesül:

$$\sum_{i=1}^{k} f(V_i) \leq 2\sum_{i=1}^{k-1} f(X_{e_i}). \tag{3.3}$$

Ha $Y_1, Y_2, \dots, Y_\ell$ a V alaphalmaz egy particiója, akkor könnyű meggondolni, hogy:

$$f(Y_\ell) \leq \sum_{j=1}^{\ell-1} f(Y_j). \tag{3.4}$$

Az Y_j halmazok diszjunktak, így a szubmodularitási egyenlőtlenség alapján: $f(Y_i) + f(Y_j) \geq f(Y_i \cup Y_j) + f(\emptyset) = f(Y_i \cup Y_j)$, bármely $i \neq j$ -re. Ezalapján $\sum_{j=1}^{\ell-1} f(Y_j) \geq f(\cup_{j=1}^{\ell-1} Y_j)$. Tehát f szimmetrikusságát felhasználva: $f(Y_\ell) = f(V - Y_\ell) = f(\cup_{j=1}^{\ell-1} Y_j) \leq \sum_{j=1}^{\ell-1} f(Y_j)$.
A $V_1, \dots, V_k$ particiót úgy kaptuk, hogy az $e_1, \dots, e_{k-1}$ éleket kihagytuk a Gomory-Hu fából és vettük a keletkező komponenseket. Ekkor minden e_i él pontosan két V_j halmazból lép ki. Jelöljük I_j -vel azon e_i élek indexeinek halmazát, amikre az e_i kilép a V_j halmazból. Azt állítjuk, hogy $f(V_j) \leq \sum_{i \in I_j} f(X_{e_i})$ minden $j = 1, \dots, k$ -ra. A (3.4) miatt ehhez elegendő, hogy a V_j és az $\{X_{e_i} : i \in I_j\}$ együtt a V alaphalmaz egy particióját alkotják, ahol X_{e_i} alapvágást a két lehetőség közül, most válasszuk úgy hogy ne tartalmazza a V_j halmazt.

$$\sum_{j=1}^{k} f(V_j) \leq \sum_{i=1}^{k} \sum_{i \in I_j} f(X_{e_i}) = 2\sum_{j=1}^{k-1} f(X_{e_j}).$$

Ahol kihasználtuk, hogy minden e_i él pontosan két V_j halmazból lép ki. Ezzel beláttuk a (3.3) egyenlőtlenséget, így a (3.2) -el megkaptuk, hogy a $V_1, \dots, V_k$ partició k-vágás értéke legfeljebb $2 - \frac{2}{k}$ -szorosa egy optimális $A_1, \dots, A_k$ particióra vett k-vágás értéknek.

□

A következő alkalmazás T -páratlan vágásokra vonatkozik.

3.3.4. Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ egy összefüggő gráf, továbbá $T \subseteq V$ pontok egy halmaza a gráfban, úgy hogy $|T|$ páros. Egy T -páratlan vágáson egy olyan $X \subseteq V$ vágást értünk, amire $|X \cap T|$ páratlan.*

Ha adott egy $w : E \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény a gráf élein, akkor egy természetes kérdés, hogy hogyan lehet meghatározni egy minimális értékű T -páratlan vágást, azaz egy olyan $X \subseteq V$ vágást, ami egyrészt T -páratlan, másrészt $d_G(X)$ minimális értékű a T -páratlan vágások között.
A Gomory-Hu fák egy további alkalmazása, hogy segítségükkel meghatározható egy minimális értékű T -páratlan vágás. Ha vesszük a Gomory-Hu fa éleinek megfelelő alapvágásokat, akkor ezek között lesz egy minimális értékű T -páratlan vágás is.
Szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvények esetén ugyanúgy értelmezhető a T -páratlan vágás. Egy $X \subseteq V$ részhalmaz, akkor lesz T -páratlan vágás egy f szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény esetén, ha $|X \cap T|$ páratlan, ahol $|T|$ továbbra is páros.
Goemans [11] a későbbi fejezetben szereplő parity halmaz családokon való minimalizálással belátta, hogy egy f szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvényre vonatkozó Gomory-Hu fa segítségével meg tudunk határozni egy minimális értékű T -páratlan vágást, azaz egy olyan $X \subseteq V$ részhalmazt, ami T -páratlan vágás és $f(X)$ minimális az ilyen részhalmazok között. A következő bizonyításban mi az eredeti gráfra vonatkozó Gomory-Hu fa alkalmazást fogjuk általánosítani szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény esetén.

3.3.6. Állítás. *Legyen f szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon. Ekkor az f halmazfüggvény Gomory-Hu fájából meghatározható egy minimális értékű T -páratlan vágás.*

Bizonyítás. A bizonyítás teljesen hasonló lesz a gráfra vonatkozó Gomory-Hu fa alkalmazáshoz. Belátjuk, hogy az f halmazfüggvényhez tartozó Gomory-Hu fa egy élének alapvágása minimális T -páratlan vágás lesz.
Legyen $J = \{e \in F :$ az e élhez tartozó alapvágás T -páratlan vágás $\}$. Tehát J azon Gomory-Hu fa élek halmaza, amelyek T -páratlan alapvágást definiálnak.
Jelöljük $d_J(v)$ -vel a v csúcsra illeszkedő J -beli élek számát a Gomory-Hu fában. Azt állítjuk, hogy $d_J(v)$ pontosan akkor lesz páratlan, ha $v \in T$. Vegyünk egy v csúcsot a Gomory-Hu fában és legyenek $e_1, \dots e_k$ a J -beli élei a v csúcsnak és $e_{k+1}, \dots, e_n$ a nem J -beliek. Ha vesszük a v -beli csúcsra illeszkedő élekre a Gomory-Hu alapvágásokat: X_{e_i}, illetve a v csúcsot, akkor a V alaphalmaz egy partícióját kapjuk: $V = (\cup_{i=1}^{n} X_{e_i}) \cup \{v\}$. Egy X_{e_i} alapvágás páros sok T -beli elemet tartalmaz, ha $e_i \notin J$ és páratlan sokat, ha $e_i \in J$. Azt is tudjuk, hogy T -nek összesen páros sok pontja van, így ha páratlan sok $e_i \in J$ él illeszkedik a v csúcsra, akkor szükségképpen $v \in T$.
A megfordítás is hasonlóan igazolható: ha $v \in T$, akkor muszáj páratlan sok v -re illeszkedő Gomory-Hu fa élnek lennie, amik J -beliek.
Legyen X egy minimális f értékű T -páratlan vágás. Vizsgáljuk meg a Gomory-Hu fában az X halmazt. Tudjuk, hogy X páratlan sok T -beli pontot tartalmaz, így a fenti állítás szerint páratlan sok olyan $v \in X$ csúcs van, aminek a $d_J(v)$ foka páratlan. Ebből az következik, hogy létezik olyan J -beli Gomory-Hu fa él, ami kilép az X halmazból, jelöljük ezt az élt $uv = e$ -vel, $u \in X$ és $v \notin X$.
Mivel az e a Gomory-Hu fa egy éle, ezért az e élhez, tartozó X_{uv} alapvágás minimális f értékű, az u -t és v -t elválasztó halmazok között: $f(X_{uv}) = \lambda_f(u, v)$. Azt is tudjuk, hogy az X halmaz szeparálta az u és v pontokat, így $\lambda_f(u, v) \leq f(X)$. Azaz azt kaptuk, hogy $f(X_{uv}) \leq f(X)$. Tudjuk, hogy X_{uv} is T -páratlan vágás, mert J -beli élhez tartozott, X minimális T -páratlan vágás, így $f(X) \leq f(X_{uv})$.

Tehát $f(X) = f(X_{uv})$ és így az uv Gomory-Hu fabeli él egy minimális T -páratlan vágást definiál.

$\square$

4. fejezet

Ferdén szupermoduláris függvények fedései

Ebben a fejezetben ferdén szupermoduláris függvények fedéseiről szóló tételekről lesz szó. A ferde szupermodularitás gyengébb tulajdonság, mint a szupermodularitás. Látni fogjuk viszont, hogy a fejezetben bizonyított ferdén szupermoduláris függvényekről szóló tételek sok helyen alkalmazhatóak lesznek. Először Szigeti Zoltán két tételét bizonyítjuk be. Az első megmondja, hogy egy p ferdén szupermoduláris halmazfüggvény esetén mikor létezik olyan hipergráf, ami fedi a p -t, és teljesít egy előre adott fokszám előírást. A második tétel egy minimax tétel lesz, amely megadja, hogy mekkora lehet egy hipergráf minimális értéke, ami fedi a p függvényt.
Szigeti tételére két alkalmazást is venni fogunk: hipergráfok lokális összefüggőségének növelése és szupermoduláris színezések. Ezután bebizonyítjuk Kiráy Tamás általánosítását Szigeti tételére.
A fejezet végén félig ferdén szupermoduláris függvényekről lesz szó. Belátjuk Király Tamás tételét, ami megadja, hogy mikor létezik olyan gráf, ami fed egy előre adott félig ferdén szupermoduláris függvényt, és teljesít egy előre adott fokszám előírást. A tétel alkalmazásaként belátjuk a Nash-Williams tétel egy általánosítását, két gráf k darab erdővel való fedéséről.

4.1. Ferdén szupermoduláris függvények fedése hipergráfokkal

Szigeti Zoltán tételeit [9] fogjuk belátni, de előtte szükségünk lesz néhány egyszerű állításra ferdén szupermoduláris függvényekkel kapcsolatban.

4.1.1. Definíció. *A p halmazfüggvény ferdén szupermoduláris, ha a következő egyenlőtlenségekből legalább az egyiket teljesíti, minden $X, Y \subseteq V$ -re:*

$$p(X) + p(Y) \leq p(X \cup Y) + p(X \cap Y) \quad \textit{szupermodularitás}$$
$$p(X) + p(Y) \leq p(X - Y) + p(Y - X) \quad \textit{negamodularitás}$$

4.1.1. Állítás. *Legyen p ferdén szupermoduláris halmazfüggvény a V -n. Ekkor:*

$$p'(X) = \max\{p(X), p(V - X)\}$$

halmazfüggény szimmetrikus és ferdén szupermoduláris.

Bizonyítás. A szimmetrikusság a p' definiciójából egyből látszik.
A ferde szupermodularitás igazolása esetszétválasztással megy.

Ha $p'(X) = p(X)$ és $p'(Y) = p(Y)$ valamint X -re és Y -ra p szupermodularitása teljesül.

$$p'(X) + p'(Y) = p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y) \leq p'(X \cap Y) + p'(X \cup Y).$$

Ha $p'(X) = p(X)$ és $p'(Y) = p(Y)$ valamint X -re és Y -ra p negamodularitása teljesül.

$$p'(X) + p'(Y) = p(X) + p(Y) \leq p(X - Y) + p(Y - X) \leq p'(X - Y) + p'(Y - X).$$

Ha $p'(X) = p(X)$ és $p'(Y) = p(V - Y)$ valamint X -re és $V - Y$ -ra p szupermodularitása teljesül.

$$\begin{aligned} p'(X) + p'(Y) = p(X) + p(V - Y) &\leq p(X \cap (V - Y)) + p(X \cup (V - Y)) \\ &= p(X - Y) + p(V - (Y - X)) \leq p'(X - Y) + p'(Y - X). \end{aligned}$$

Ha $p'(X) = p(X)$ és $p'(Y) = p(V - Y)$ valamint X -re és $V - Y$ -ra p negamodularitása teljesül.

$$\begin{aligned} p'(X) + p'(Y) = p(X) + p(V - Y) &\leq p(X - (V - Y)) + p((V - Y) - X) \\ &= p(X \cap Y) + p(V - (X \cup Y)) \leq p'(X \cap Y) + p'(X \cup Y). \end{aligned}$$

A többi eset is a fentiekhez hasonlóan kezelhető.

□

4.1.2. Állítás. *Legyen p ferdén szupermoduláris halmazfüggvény a V -n. Legyen $Z \subseteq V$. Ekkor:*

$$p'(X) = \max\{p(X \cup X') : X' \subseteq Z\}$$

ferdén szupermoduláris lesz a $V - Z$ alaphalmazon.

Bizonyítás. Legyenek $X, Y \subseteq V - Z$. Legyenek továbbá X', Y' a Z -nek azon részhalmazai, melyeken a maximumok felvétetnek a $p'(X)$, illetve a $p'(Y)$ definiálásakor. A p ferdén szupermoduláris, így az $X \cup X'$ és az $Y \cup Y'$ halmazokra a következők egyike teljesül:
1.eset

$$\begin{aligned} p'(X) + p'(Y) = p(X \cup X') + p(Y \cup Y') \leq \\ \leq p((X \cup X') \cap (Y \cup Y')) + p((X \cup X') \cup (Y \cup Y')) = \\ = p((X \cap Y) \cup (X' \cap Y')) + p((X \cup Y) \cup (X' \cup Y')) \leq \\ \leq p'(X \cap Y) + p'(X \cup Y). \end{aligned}$$

2.eset

$$\begin{aligned} p'(X) + p'(Y) = p(X \cup X') + p(Y \cup Y') \leq \\ \leq p((X \cup X') - (Y \cup Y')) + p((Y \cup Y') - (X \cup X')) = \\ = p((X - Y) \cup (X' - Y')) + p((Y - X) \cup (Y' - X')) \leq \\ \leq p'(X - Y) + p'(Y - X). \end{aligned}$$

□

4.1.3. Állítás. *Legyen p egy ferdén szupermoduláris függvény a V -n. Továbbá $V_1 \subseteq V$. Ekkor:*

$$p'(X) = \begin{cases} p(X) - 1 & \text{ha } X \cap V_1 \neq \emptyset \\ p(X) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

ferdén szupermoduláris a V -n.

Bizonyítás. Vegyük azt az esetet, amikor p szupermoduláris az X és Y halmazon. Ekkor p' szupermodularitása akkor tud elromlani, ha $X \cap Y$ és $X \cup Y$ közül legalább az egyik belemetsz a V_1 -be. Ha $X \cap Y$ belemetsz, akkor X és Y is, ezért az egyenlőtlenség p' -re is érvényben marad. Ha csak $X \cup Y$ metsz bele V_1 -be, akkor szükségszerűen X vagy Y is belemetsz, azaz az egyenlőtlenség p' -re ekkor is érvényben marad.
Amikor p negamoduláris az X és Y halmazokon, akkor p' negamodularitása akkor tud elromlani, ha $X - Y$ és $Y - X$ közül legalább az egyik belemetsz a V_1 -be. Ha $X - Y$ belemetsz V_1 -be, akkor X is és ha $Y - X$ metsz bele V_1 -be, akkor Y is, tehát az egyenlőtlenség érvényben marad p' esetén is.

□

4.1.2. Definíció. *Legyen m egy egészértékű függvény a V pontjain, továbbá p ferdén szupermoduláris halmazfüggvény V -n, amire $p(X) \leq m(X) \quad \forall X \subseteq V$. Egy X halmazt pontosnak hívunk, ha egyenlőséggel teljesíti az előző egyenlőtlenséget, tehát: $p(X) = m(X)$.*

4.1.4. Állítás. *Ha X és Y pontos halmazok, akkor $X \cap Y$ és $X \cup Y$ pontosak, vagy pedig $X - Y$ és $Y - X$ pontosak. Ráadásul, ha az utóbbi eset áll fent, akkor $m(X \cap Y) = 0$.*

Bizonyítás. p ferde szupermodularitása alapján az X és Y pontos halmazokra teljesül:
1.eset

$$\begin{aligned} m(X) + m(Y) &= p(X) + p(Y) \\ &\leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y) \\ &\leq m(X \cap Y) + m(X \cup Y) \\ &= m(X) + m(Y). \end{aligned}$$

Ahol kihasználtuk X és Y pontosságát, illetve az m függvény modularitását. Az egyenlőtlenségek végig egyenlőséggel teljesülnek, így $p(X \cap Y) = m(X \cap Y)$ és $p(X \cup Y) = m(X \cup Y)$.
2.eset

$$\begin{aligned} m(X) + m(Y) &= p(X) + p(Y) \\ &\leq p(X - Y) + p(Y - X) \\ &\leq m(X - Y) + m(Y - X) \\ &= m(X) + m(Y) - 2m(X \cap Y). \end{aligned}$$

Ekkor az egyenlőtlenség bal és jobb oldala szükségszerűen egyenlő, így $m(X \cap Y) = 0$, továbbá a köztes egyenlőtlenségek egyenlőséggel teljesülnek, amiből $p(X - Y) = m(X - Y)$ és $p(Y - X) = m(Y - X)$.

□

4.1.1. Tétel (Szigeti Zoltán). *Legyen p egy ferdén szupermoduláris egészértékű halmazfüggvény a V alaphalmazon. Továbbá legyen $m(v)$ egy nemnegatív, egészértékű függvény a V pontjain (fokszám előírás). Ekkor létezik olyan $\mathcal{H}$ hipergráf, melyre:*

$$d_{\mathcal{H}}(v) = m(v) \quad \forall v \in V \tag{4.1}$$

$$d_{\mathcal{H}}(X) \geq p(X) \quad \forall X \subseteq V \tag{4.2}$$

akkor és csak akkor, ha $\forall X \subseteq V$

$$p(X) \leq \min\{m(X), m(V - X)\} \tag{4.3}$$

Sőt, $\mathcal{H}$ választható olyannak, hogy $|\mathcal{H}| = k = \max\{p(X) : X \subseteq V\}$.

Bizonyítás. Először belátjuk a (4.3) feltétel szükségességét felhasználva a (4.1) és a (4.2) feltételt. Legyen $X \subseteq V$.
$d_{\mathcal{H}}(X) \leq \sum_{v \in X} d_{\mathcal{H}}(\{v\})$, mert ha egy $H \in \mathcal{H}$ hiperél metszi X -et és $V - X$ -et is, akkor létezik $v \in H \cap X$, $H \neq \{v\}$, azaz a H hiperélt a jobboldali összegben is legalább egyszer megszámoljuk. Tehát:

$$p(X) \leq d_{\mathcal{H}}(X) \leq \sum_{v \in X} d_{\mathcal{H}}(\{v\}) = \sum_{v \in X} m(v) = m(X)$$

Továbbá $p(X) \leq m(V-X)$ a $d_{\mathcal{H}}(X) = d_{\mathcal{H}}(V-X)$ alapján könnyen adódik, és ezzel készen vagyunk a szükségességgel.

A bizonyítás nehezebb része a (4.3) -as feltétel elégségességének belátása.
Ehhez indirekt vegyünk egy olyan ellenpéldát, amire $|V| + k$ minimális. A (4.1.1) állítás alapján feltehető, hogy p szimmetrikus. Megfogalmazunk egy lemmát, amelyen a bizonyítás nagy része alapszik.

4.1.1. Lemma. *Legyen p egy egészértékű ferdén szupermoduláris halmazfüggvény a V -n, továbbá m egy nemnegatív egészértékű függvény a V pontjain, mint a tételben. Továbbá legyen $H \subseteq V$. Ekkor létezik $\mathcal{H}$ hipergráf, melyre:*

(i) $H \in \mathcal{H}$,

(ii) A $\mathcal{H}$ hipergráfra teljesül (4.1) és (4.2),

(iii) $\mathcal{H}$ pontosan $k = \max\{p(X) : X \subseteq V\}$ darab hiperélt tartalmaz

akkor és csak akkor, ha

(a) p és m teljesíti a (4.3) -at,

(b) $X \cap H \neq \emptyset$ minden $X \subseteq V$, amire $p(X) = k$,

(c) $|X \cap H| \leq m(X) - p(X) + 1$ minden $X \subseteq V$,
$|H| \leq m(X) - p(X)$ minden $H \subseteq X \subseteq V$,

(d) $m(v) \geq 1$ minden $v \in H$ -ra.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ teljesíti: (i), (ii), (iii) -t.
Ekkor teljesül az (a) feltétel.
(ii) alapján $p(X) \leq d_{\mathcal{H}}(X)$. Továbbá $d_{\mathcal{H}}(X) \leq \sum_{v \in X} d_{\mathcal{H}}(\{v\})$, amit a szükségességnél már beláttunk. Tehát: $p(X) \leq d_{\mathcal{H}}(X) \leq \sum_{v \in X} d_{\mathcal{H}}(\{v\}) = \sum_{v \in X} m(v) = m(X)$. Továbbá $p(X) \leq m(V - X)$ a $d_{\mathcal{H}}(X) = d_{\mathcal{H}}(V - X)$ alapján könnyen adódik, és így (a) -val készen vagyunk.
Belátjuk a (b) feltételt.
Az (iii) alapján a $\mathcal{H}$ -ban k db hiperél van, így ha egy X halmazra $p(X) = k$, akkor $k = p(X) \leq d_{\mathcal{H}}(X)$, tehát minden hiperél belemetsz az X -be, így szükségszerűen a H is.
A (c) feltétel teljesülése:
Legyen $\mathcal{H}' = \mathcal{H} - H$. Továbbá:

$$p'(X) = \begin{cases} p(X) - 1 & \text{ha } X \cap H \neq \emptyset \\ p(X) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$m'(v) = \begin{cases} m(v) - 1 & \text{ha } v \in H \\ m(v) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A (4.1.3) alapján tudjuk, hogy p' ferdén szupermoduláris. A (d) alapján adódik, hogy $m'(v)$ nemnegatív.
Állítjuk, hogy $\mathcal{H}'$ teljesíti a (4.1) -et és a (4.2) -at a p' -re és m' -re.
Tudjuk, hogy p és m teljesíti a (4.1) -et és a (4.2) -öt. Az m azokra a csúcsokra csökken 1 -el, amik benne vannak H -ban. A $d_{\mathcal{H}}(v)$ is pontosan ugyanezekre a csúcsokra csökken 1 -el, így $d_{\mathcal{H}'}(v) = m'(v)$.
A $d_{\mathcal{H}}(X)$ azokra az X halmazokra csökken 1 -el, amikre H belemetsz X -be és $V - X$ -be is, tehát $X \cap H \neq \emptyset$ és így $p(X)$ is csökken 1 -el ezekre a halmazokra, azaz $d_{\mathcal{H}'}(X) \geq p'(X)$ érvényben marad.
Az (a) pont bizonyításához hasonlóan látszik, hogy p' -re és m' -re teljesül a (4.3), ha (4.1) és (4.2) teljesült.
Legyen $X \subseteq V$. Ekkor $p(X) - 1 \leq p'(X) \leq m'(X) = m(X) - |X \cap H|$, mivel $m(X)$ pontosan annyival csökkent ahány H -beli eleme volt.
Legyen $H \subseteq X \subseteq V$. Ekkor $p(X) = p(V - X) = p'(V - X) \leq m'(X) = m(X) - |H|$. Ezzel a (c) -t beláttuk.
Végül a (d) feltétel azonnal adódik a (4.1) alapján, mivel egy $v \in H$ -ra $1 \leq d_{\mathcal{H}}(v) = m(v)$.

A továbbiakban bebizonyítjuk az ekvivalencia másik irányát is. Ehhez néhány köztes állítást fogunk belátni.
Legyen $H \subseteq V$ olyan részhalmaz, amely teljesíti (a), (b), (c), (d) -t. Továbbá legyenek p' és m' a fenti módon definiáltak.

4.1.5. Állítás. *p' -re és m' -re teljesül a (4.3), azaz:*

$$p'(X) \leq \min\{m'(X), m'(V - X)\}$$

Bizonyítás. A (4.1.3) állítás alapján tudjuk, hogy p' ferdén szupermoduláris, továbbá a (d) miatt m' nemnegatív. Legyen $X \subseteq V$.
Ha $X \cap H = \emptyset$, akkor $p'(X) = p(X) \leq m(X) = m'(X)$ az a) alapján.
Ha $X \cap H \neq \emptyset$, akkor a c) felhasználásával: $p'(X) = p(X) - 1 \leq m(X) - |X \cap H| = m'(X)$.
Tehát $p'(X) \leq m'(X)$ minden $X \subseteq V$ -re.
Ha $X \cap H = \emptyset$, akkor $H \subseteq V - X$, ezért a c) pont alapján: $p'(X) = p(X) = p(V - X) \leq m(V - X) - |H| = m'(V - X)$, felhasználva p szimmetrikusságát.
Ha $X \cap H \neq \emptyset$, akkor a fentiekben már belátott $p'(X) \leq m'(X)$ -et felhasználva: $p'(X) = p(X) - 1 = p(V - X) - 1 \leq p'(V - X) \leq m'(V - X)$.
Tehát $p'(X) \leq m'(V - X)$ minden $X \subseteq V$ -re. Ezzel az állítást beláttuk.

□

A b) alapján tudjuk, hogy minden olyan $X \subseteq V$ -re, amire $p(X) = k$ szükségképpen $X \cap H \neq \emptyset$ és így $p'(X) = p(X) - 1$ minden maximális p értékű X halmazra. Azaz $\max\{p'(X) : X \subseteq V\} = k - 1$. Mivel egy minimális ellenpéldából indultunk ki és p', illetve m' teljesíti a (4.3) -at, így létezik $\mathcal{H}'$ hipergráf, ami teljesíti a (4.1) -et és a (4.2) -öt az m' -re és a p' -re, továbbá $k - 1$ hiperéle van.
Legyen a $\mathcal{H}$ hipergráf a következő: $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \cup \{H\}$. Ekkor $\mathcal{H}$ hipergráfra igaz, hogy: $H \in \mathcal{H}$, azaz (i) teljesül rá, továbbá $\mathcal{H}$ -nak $(k - 1) + 1 = k$ darab hiperéle van: (iii) is teljesül.
A lemma befejezéséhez így elegendő megmutatni, hogy $\mathcal{H}$ teljesíti (ii) -t.

4.1.6. Állítás. *A fent definiált $\mathcal{H}$ hipergráfra:*

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{H}}(v) &= m(v) \quad \forall v \in V \\ d_{\mathcal{H}}(X) &\geq p(X) \quad \forall X \subseteq V. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Ha $v \notin H$, akkor $d_{\mathcal{H}}(v) = d_{\mathcal{H}'}(v) = m'(v) = m(v)$.
Ha $v \in H$, akkor $d_{\mathcal{H}}(v) = d_{\mathcal{H}'}(v) + 1 = m'(v) + 1 = m(v)$.
Legyen $X \subseteq V$.
Ha $X \cap H = \emptyset$, akkor $d_{\mathcal{H}}(X) = d_{\mathcal{H}'}(X) \geq p'(X) = p(X)$.
Ha $H \subseteq X$, akkor $d_{\mathcal{H}}(X) = d_{\mathcal{H}'}(X) = d_{\mathcal{H}'}(V - X) \geq p'(V - X) = p(V - X) = p(X)$.
Végül ha $X \cap H \neq \emptyset$ és $H - X \neq \emptyset$, akkor $d_{\mathcal{H}}(X) = d_{\mathcal{H}'}(X) + 1 \geq p'(X) + 1 = p(X)$.

□

Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük.

□

Most pedig a lemma alapján bebizonyítjuk a tétel elégséges irányát. Ehhez elegendő megmutatni, hogy létezik, olyan $H \subseteq V$ részhalmaz, ami teljesíti b), c), d) -t. Az a) automatikusan teljesül, mivel az elégségesség bizonyításánál feltesszük, hogy a (4.3) teljesül.

4.1.7. Állítás. $m(v) \geq 1 \quad \forall v \in V$.

Bizonyítás. Legyen $Z = \{v \in V : m(v) = 0\}$. Indirekt tegyük fel, hogy Z nem üres. Definiáljuk a p' halmazfüggvényt a $V - Z$ alaphalmaz részhalmazain a következőképpen:

$$p'(X) = \max\{p(X \cup X') : \; X' \subseteq Z\}$$

Ekkor a (4.1.2) állítás alapján a p' ferdén szupermoduláris. Továbbá p' szimmetrikus, mert:

$$\begin{aligned} p'(X) = \max\{p(X \cup X') : \; X' \subseteq Z\} = \max\{p(V - X - X') : \; X' \subseteq Z\} = \\ = \max\{p(((V - Z) - X) \cup (Z - X')) : \; X' \subseteq Z\} = p'((V - Z) - X). \end{aligned}$$

Legyen $m'(v) = m(v)$ minden $\forall v \in V - Z$ -re. Ekkor Z definiciója miatt minden $X' \subseteq Z$ -re $m(X') = 0$. Emiatt minden $X \subseteq V - Z$ -re:

$$p'(X) = \max\{p(X \cup X') : X' \subseteq Z\} \leq \max\{m(X \cup X') : X' \subseteq Z\} = m(X) = m'(X)$$

Továbbá p' szimmetrikussága miatt: $p'(X) = p'((V - Z) - X) \leq m'((V - Z) - X)$.
Azaz p' és m' kielégítik a tétel elégségességi feltételét: (4.3). $Z \neq \emptyset$ miatt $|V - Z| < |V|$, azaz az alaphalmaz mérete kisebb, mint a minimális ellenpéldáé, amiből kiindultunk.
Azaz létezik egy $\mathcal{H}$ hipergráf, ami teljesíti a (4.1) -et és a (4.2) -öt, a p' -re és az m' -re. Ekkor $d_{\mathcal{H}}(X) \geq p'(X) \geq p(X)$ és $d_{\mathcal{H}}(v) = m'(v) = m(v)$, tehát a $\mathcal{H}$ hipergráf a p -re és az m -re is teljesíti a (4.1) -et és a (4.2) -öt, ami ellentmondás, mert eredetileg egy ellenpéldából indultunk ki. Ezzel az állítást beláttuk.

□

Legyen V_1 olyan tartalmazásra nézve minimális halmaz, amire $V_1 \cap Y \neq \emptyset$ minden Y halmazra, amire $p(Y) = k$. Ekkor a V_1 halmaz teljesíti (b) -t, hiszen így adtuk meg. A V_1 halmaz teljesíti (d) -t, az előző állításból adódóan.
Megmutatjuk, hogy a V_1 halmaz teljesíti (c) -t is és így a (4.1.1) lemma alapján létezik olyan hipergráf, ami teljesíti a (4.1) -et és a (4.2) -öt és tartalmazza a V_1 -et. Ezzel pedig a bizonyítandó tétel belátásával teljesen készen volnánk.

4.1.8. Állítás. *A V_1 halmazra teljesül a (c) tulajdonság, azaz:*

$$p(X) \leq m(X) + 1 - |V_1 \cap X| \quad \forall X \subseteq V$$
$$p(X) \leq m(X) - |V_1| \quad ha \quad \forall V_1 \subseteq X \subseteq V.$$

Bizonyítás. Az állítást az X elemszámára vonatkozó teljes indukcióval fogjuk belátni. $X = \emptyset$ esetén $p(X) \leq m(X) \leq m(X)+1$ a (4.3) -ból adódóan. Az indukciós lépéshez legyen $X \subseteq V$ és tegyük fel, hogy az állítás igaz minden X -nél kisebb elemszámú részhalmazra. Feltehető, hogy létezik $y \in V_1 \cap X$, különben az állítás a (4.3) alapján triviálisan teljesül. A V_1 halmaz minimalitása miatt a $V_1 - \{y\}$ halmazt véve létezik olyan Y halmaz, amire $p(Y) = k$ és Y nem metsz bele a $V_1 - \{y\}$ -ba, azaz kicsit másképp írva: $Y \subseteq (V - V_1) \cup \{y\}$. Itt jegyeznénk meg, hogy $y \in Y$, mivel Y belemetsz V_1 -be, de $V_1 - \{y\}$ -ba nem. Ekkor:

$$|V_1 \cap (X - Y)| = |V_1 \cap X| - 1 \tag{4.4}$$

A (4.1.7) állítás alapján:

$$m(X - Y) \geq m((X - Y) \cap V_1) \geq |(X - Y) \cap V_1| = |X \cap V_1| - 1. \tag{4.5}$$
$$m(X \cap Y) \geq 1. \tag{4.6}$$

Mivel $y \in X \cap Y$ ebből az következik, hogy $|X - Y| < |X|$, ezért az indukciós feltevés miatt az állítás igaz $X - Y$ -ra:

$$p(X - Y) \leq m(X - Y) + 1 - |V_1 \cap (X - Y)|\,. \tag{4.7}$$

Mivel p ferdén szupermoduláris, így az X és Y halmazokra a következők egyike teljesül:
1.eset

$$\begin{aligned} p(X) + p(Y) &\leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y) \\ &\leq m(X \cap Y) + p(X \cup Y) \quad (4.3) \\ &= m(X) - m(X - Y) + p(X \cup Y) \\ &\leq m(X) + 1 - |V_1 \cap X| + p(X \cup Y). \end{aligned}$$

Ahol az utolsó egyenlőtlenség egy feljebb belátott egyenlőtlenség alapján teljesül. Ezzel az állítást beláttuk az X halmazra, mivel $p(Y) = k$ és $p(X \cup Y) \leq k$, így:

$$p(X) \leq m(X) + 1 - |V_1 \cap X|\,.$$

Továbbá ha $V_1 \subseteq X$, akkor $V - (X \cup Y)$ diszjunkt V_1 -től, így $p(X \cup Y) = p(V - (X \cup Y)) \leq k - 1$, mert minden halmaz, aminek a p értéke k, belemetsz a V_1 -be. Tehát:

$$\begin{aligned} p(X) \leq m(X) + 1 - |V_1 \cap X| + p(X \cup Y) - p(Y) \leq \\ \leq m(X) + 1 - |V_1 \cap X| - 1 = m(X) - |V_1 \cap X| = \\ = m(X) - |V_1|\,. \end{aligned}$$

2.eset

$$\begin{aligned} p(X) + p(Y) &\leq p(X - Y) + p(Y - X) \\ &\leq m(X - Y) + 1 - |V_1 \cap (X - Y)| + p(Y - X) \quad (4.7) \\ &\leq m(X) - m(X \cap Y) + 1 - |V_1 \cap X| + 1 + p(Y - X) \quad (4.4) \\ &\leq m(X) - |V_1 \cap X| + 1 + p(Y - X) \quad (4.6) \\ &\leq m(X) - |V_1 \cap X| + k \end{aligned}$$

Ahol az utolsó egyenlőtlenségnél felhasználtuk, hogy $(Y - X) \cap V_1 = \emptyset$, így $p(Y - X) \leq k - 1$. Ezzel az állítás kijött az X halmazra, mivel $p(Y) = k$.
$V_1 \subseteq X$ esetén pedig $V_1 \cap X = V_1$, így:

$$p(X) \leq m(X) - |V_1|\,.$$

$\square$

Ezzel az utolsó szükséges állítást is beláttuk: V_1 halmaz teljesíti (c) -t, így a lemma alapján létezik olyan hipergráf, ami teljesíti a tétel elégséges irányát.
A bizonyítást teljesen befejeztük.

$\square$

Most pedig rátérünk Szigeti Zoltán másik tételére, ami választ ad arra a kérdésre, hogy milyen kicsi lehet egy p ferdén szupermoduláris függvényt fedő hipergráf értéke.

4.1.3. Definíció. *Egy $\mathcal{H}$ hipergráf értékén a következő mennyiséget értjük:*

$$val(\mathcal{H}) = \sum_{H \in \mathcal{H}} |H|$$

4.1.2. Tétel (Szigeti Zoltán). *Legyen p egy szimmetrikus, ferdén szupermoduláris egészértékű függvény a V alaphalmaz részhalmazain. Ekkor:*

$$\min\{val(\mathcal{H}) : \ d_{\mathcal{H}}(X) \geq p(X), \ \forall X \subseteq V\} = \max\{\sum p(V_i)\}$$

Ahol a baloldali maximum a V összes lehetséges $V_1, \ldots, V_\ell$ részparticióján veendő.

Bizonyítás. Először belátjuk a tétel könnyebbik részét: min $\geq$ max.
Vegyünk egy tetszőleges $V_1, \ldots, V_\ell$ particiót. Ekkor $\sum p(V_i) \leq \sum d_{\mathcal{H}}(V_i) \leq val(\mathcal{H})$. Ahol az utolsó egyenlőtlenséghez gondoljuk meg, hogy egy H hiperélt hányszor számolunk meg a bal oldali összegben: pontosan annyiszor ahányszor belemetsz egy V_i particióba, úgy hogy nincs teljesen benne V_i -ben. Ez legfeljebb $|H|$ darab V_i -re fordulhat elő.

A min $\leq$ max rész bebizonyításához az előző tételt fogjuk felhasználni.
Legyen m a V pontjain értelmezett egészértékű függvény, úgy hogy létezzen $\mathcal{H}$ hipergráf, amire a p és az m teljesíti a (4.1) -et és a (4.2) -öt az előző tételben, ráadásul $m(V)$ minimális. Ilyen m létezik: például legyen az $m(v) = \max\{p(X) : X \subseteq V\}$ minden $v \in V$. Ekkor p és m teljesítik az előző tételbeli (4.3) - at, így a (4.1) -et és a (4.2) -öt is.
Legyen $Z = \{v \in V : m(v) = 0\}$ és $V' = V - Z$. Ekkor minden $v \in V'$ benne van egy pontos halmazban ($p(X) = m(X)$), hiszen ellenkező esetben $m(v)$ -t csökkentve érvényben maradna a (4.3) , és így $m(V)$ nem lenne minimális.
Tehát létezik egy $X_1, \ldots, X_k$ halmazrendszer, amire:

- X_i pontos minden $i = 1, \ldots, k$ -ra,
- $\cup_{i=1}^{k} X_i \supseteq V'$,
- $\sum_{i=1}^{k} |X_i|$ minimális.

4.1.9. Állítás.

$$X_i \cap X_j = \emptyset.$$

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $X_i \cap X_j \neq \emptyset$. A (4.1.4) állítás alapján tudjuk, hogy vagy $X_i \cup X_j$ pontos, vagy pedig $X_i - X_j$ és $X_j - X_i$ pontosak és az utóbbi esetben $m(X_i \cap X_j) = 0$.
Ha $X_i \cup X_j$ pontos és $X_i \cap X_j \neq \emptyset$, akkor a fenti halmazrendszerben X_i -t és X_j -t lecserélve $X_i \cup X_j$ -re az új rendszerben a $\sum_{i=1}^{k} |X_i|$ összeg csökkenne, így az eredeti rendszer mégse minimális, ami ellentmondás.
Ha $X_i - X_j$ és $X_j - X_i$ pontosak és $m(X_i \cap X_j) = 0$, akkor $X_i \cap X_j \subseteq Z$. Megintcsak

lecserélve X_i -t és X_j -t az $X_i - X_j$ -re és $X_j - X_i$ -re, az új rendszerben minden halmaz pontos lesz, a halmazok uniói továbbra is lefedik a V' -t, mivel $(X_1 \cap X_j) \cap V' = \emptyset$ és a $\sum_{i=1}^{k} |X_i|$ összeg csökken, így az eredeti rendszer mégse minimális, ami megintcsak ellentmondásra vezet.
Ezzel az állítást beláttuk.

□

Az $X_1, \ldots, X_k$ fenti részpartició segítségével már könnyen látható a min $\leq$ max irány:

$$\min\{val(\mathcal{H}) :\ d_{\mathcal{H}}(X) \geq p(X), \forall\, X \subseteq V\} \leq val(\mathcal{H}) = \sum_{H \in \mathcal{H}} |H| = \sum_{v \in V} d_{\mathcal{H}}(v) =$$

$$\sum_{v \in V} m(v) = m(V) = m(V') + m(Z) = \sum_{i=1}^{k} m(X_i) = \sum_{i=1}^{k} p(X_i) \leq \max\{\sum p(V_i)\}.$$

□

4.2. Alkalmazások

4.2.1. Hipergráfok lokális összefüggőségének növelése

Legyen $\mathcal{G}$ hipergráf a V alaphalmazon. Minden $s, t \in V$ pontpárra legyen adott egy $\lambda(s, t)$ nemnegatív, egészértékű lokális összefüggőségi előírás. Olyan $\mathcal{H}$ hipergráfot keresünk, amit az eredeti $\mathcal{G}$ hipergráfhoz adva, a kapott hipergráf teljesíti az összefüggőségi előírást minden s, t párra, továbbá a $\mathcal{H}$ értéke, azaz $val(\mathcal{H}) = \sum_{H \in \mathcal{H}} |H|$ minimális. Azaz minden $X \subseteq V$ -re:

$$d_{\mathcal{G}+\mathcal{H}}(X) \geq \lambda(s, t) \quad \forall s \in X,\, t \notin X.$$

Vezessük be a következő halmazfüggvényt: $R(X) = max\{\lambda(s, t) : s \in X,\, t \notin X)\}$, ekkor a probléma a következő:

$$d_{\mathcal{H}}(X) \geq R(X) - d_{\mathcal{G}}(X) \quad \forall\, X \subseteq V.$$

Legyen $p(X) = R(X) - d_{\mathcal{G}}(X)$. Azaz olyan $\mathcal{H}$ hipergráfot keresünk, amire:

$$d_{\mathcal{H}}(X) \geq p(X) \quad \forall X \subseteq V. \tag{4.8}$$

A fenti p függvény ekkor egészértékű, szimmetrikus és ferdén szupermoduláris:
Olyan $\mathcal{H}$ hipergráfot keresünk tehát, ami teljesíti a (4.8) -t és aminek a $val(\mathcal{H})$ értéke minimális. Ekkor a (4.1.2) tétel pont erre a kérdésre ad választ:

$$\min\{val(\mathcal{H}) : d_{\mathcal{H}}(X) \geq p(X), \forall X \subseteq V\} = \max\{\sum p(V_i)\}$$

Ahol $V_1, \ldots, V_l$ tetszőleges részparticiója V -nek.

4.2.2. Szupermoduláris színezések

Ebben a részben Szigeti Zoltán tételének egy további alkalmazását mutatjuk be.
Legyen p egy szupermoduláris halmazfüggvény a V részhalmazain.

4.2.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a V pontjainak k színnel való színezése egy jó k -színezés a p függvényre nézve, ha V -nek minden X részhalmazára az X -ben jelen lévő különböző színek száma legalább $p(X)$.*

A következő tétel megmondja, hogy mikor létezik jó k -színezés a p szupermoduláris függvényre nézve:

4.2.1. Tétel. *Legyen p egészértékű, szupermoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon, továbbá legyen $k = \max\{p(X) : X \subseteq V\}$ nemnegatív. Akkor és csak akkor létezik jó k -színezés a p -re nézve, ha $p(X) \leq |X|$ teljesül minden $X \subseteq V$ -re.*

Bizonyítás. A tételt a (4.1.1) tételre fogjuk visszavezetni az alábbi konstrukció segítségével. Vegyünk fel egy új v pontot a V halmazon kívül, és definiáljuk a p' -t és m' -t a következő módon:

$$V' = V \cup \{v\}.$$

$$p'(X) = \begin{cases} p(X) & \text{ha } v \notin X \\ p(V - X) & \text{ha } v \in X \end{cases}$$

$$m'(u) = \begin{cases} 1 & \text{ha } u \in V \\ \max\{p(X) : X \subseteq V\} & \text{ha } u = v \end{cases}$$

4.2.1. Állítás. *A fent definiált p' ferdén szupermoduláris.*

Bizonyítás. Legyen $X, Y \subseteq V'$. Esetszétválasztással bizonyítunk.
Ha $v \notin X$ és $v \notin Y$, akkor $v \notin X \cap Y$ és $v \notin X \cup Y$, ezért:

$$p'(X) + p'(Y) = p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y) = p'(X \cap Y) + p'(X \cup Y).$$

Ha $v \notin X$ és $v \in Y$, akkor $v \notin X - Y$ és $v \in Y - X$, ezért:

$$\begin{aligned} p'(X) + p'(Y) = p(X) + p(V - Y) &\leq p(X \cap (V - Y)) + p(X \cup (V - Y)) \\ &= p(X - Y) + p(V - (Y - X)) = p'(X - Y) + p'(Y - X). \end{aligned}$$

Ha $v \in X$ és $v \in Y$, akkor $v \in X \cup Y$ és $v \in X \cap Y$, ezért:

$$\begin{aligned} p'(X) + p'(Y) = p(V - X) + p(V - Y) &\leq p((V - X) \cap (V - Y)) + p((V - X) \cup (V - Y)) \\ &= p(V - (X \cup Y)) + p(V - (X \cap Y)) = p'(X \cup Y) + p'(X \cap Y). \end{aligned}$$

□

4.2.2. Állítás. *p' és m' teljesíti a (4.1.1) tételben szereplő feltételt:*

$$p'(X) \leq \min\{m'(X), m'(V' - X)\}$$

Bizonyítás. p' szimmetikus, mert ha $v \notin X$, akkor $v \in V' - X$, így : $p'(X) = p(X) = p(V - (V' - X)) = p'(V' - X)$. A $v \in X$ eset hasonlóan kezelhető.
Legyen $X \subseteq V'$.
Ha $v \notin X$, akkor $p'(X) = p(X) \leq |X| = m'(X)$ a tétel feltétele és p' , m' definiciója alapján.
Ha $v \in X$, akkor $p'(X) = p(V - X) \leq \max\{p(X) : X \subseteq V\} \leq m'(v) + |X \cap V| = m'(X)$.
Tehát $p'(X) \leq m'(X)$ minden $X \subseteq V'$ -re. A p' szimmetrikussága miatt pedig: $p'(X) = p'(V' - X) \leq m'(V' - X)$. Ezzel beláttuk az állítást.

□

A (4.1.1) tétel szerint ekkor létezik $\mathcal{H}$ hipergráf, melyre:

$$d_{\mathcal{H}}(u) = m'(u) \quad \forall u \in V', \tag{4.9}$$

$$d_{\mathcal{H}}(X) \geq p'(X) \quad \forall X \subseteq V'. \tag{4.10}$$

Mivel az m' az eredeti V alaphalmazon azonosan 1, ezért a (4.9) szerint minden $u \in V$ pontot pontosan 1 hiperél fed, azaz a hiperélek megadnak egy particiót a V -n. Ez a partició egy jó k -színezés lesz, mert a (4.10) alapján minden $X \subseteq V$ halmazra a $d_{\mathcal{H}}(X)$ (ami az X -ben lévő különböző színek számánál kisebb) legalább $p'(X) = p(X)$. Továbbá $m'(v) = \max\{p(X) : X \subseteq V\} = k$ alapján a színek száma valóban $\max\{p(X) : X \subseteq V\}$.

□

4.3. Király Tamás általánosítása

Király Tamás belátta Szigeti Zoltán tételének egy általánosítását [7]. A tétel amit venni fogunk hiperélek egyesítéséről fog szólni és a bizonyítás rövidebb lesz, mint az eredeti (4.1.1) tétel bizonyítása.

Legyen $\mathcal{H}$ hipergráf a V alaphalmazon. Két diszjunkt hiperél egyesítésén azt értjük, hogy kihagyjuk őket a hipergráfból, az uniójukat pedig hozzávesszük a hipergráfhoz.

4.3.1. Definíció. *Jelöljük $b_{\mathcal{H}}(X)$ -el, azon $H \in \mathcal{H}$ hiperélek számát, amikre $X \cap H \neq \emptyset$.*

A következő állítást nem fogjuk bizonyítani, szokásosan igazolható esetszétválasztás segítségével.

4.3.1. Állítás. *$b_{\mathcal{H}}(X)$ szubmoduláris, továbbá teljesül rá a következő egyenlőtlenség:*

$$b_{\mathcal{H}}(X) + b_{\mathcal{H}}(Y) \geq b_{\mathcal{H}}(X - Y) + b_{\mathcal{H}}(Y - X) + |\{H \in \mathcal{H} : \emptyset \neq H \cap Y \subseteq X \cap Y\}|. \quad (4.11)$$

4.3.2. Állítás. *Legyen H_0 egy tetszőleges részhalmaza a V -nek, továbbá:*

$$p'(X) = \begin{cases} p(X) - 1 & \text{ha } X \cap H_0 \neq \emptyset \text{ és } (V - X) \cap H_0 \neq \emptyset \\ p(X) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor a p' szimmetrikus és ferdén szupermoduláris.

Bizonyítás. A p' függvény szimmetrikus, hiszen ha egy X halmazra $X \cap H_0 \neq \emptyset$ és $(V - X) \cap H_0 \neq \emptyset$ teljesül, akkor ugyanezek a $V - X$ -re is teljesülnek. Továbbá, ha a fenti két feltétel egyike egy X halmazra nem teljesül, akkor a $V - X$ -re ugyanez elmondható.
A p' ferdén szupermoduláris. Vegyük először azt az esetet, amikor X és Y halmazra és p -re a szupermoduláris egyenlőtlenség teljesül. A p' szupermodularitása, akkor tud elromlani, ha $p(X \cap Y)$ és $p(X \cup Y)$ közül legalább az egyik csökken. Ha $p(X \cap Y)$ és $p(X \cup Y)$ is csökken, az azt jelenti, hogy X és Y is belemetsz a H_0 -ba, és $X \cup Y$ nem tartalmazza a H_0 -t, ekkor X és Y sem tartalmazza a H_0 -t így $p(X)$ és $p(Y)$ is csökkennek.
Következő esetként nézzük meg, mi történik ha csak $p(X \cap Y)$ csökken. Ekkor X és Y is belemetsz a H_0 -ba, továbbá nem lehetséges, hogy X és Y is tartalmazzák H_0 -t, hiszen ekkor $X \cap Y$ is tartalmazni fogja, ami ellentmond annak, hogy $p(X \cap Y)$ csökken. Tehát vagy $p(X)$ vagy $p(Y)$ csökken, és ezzel érvényben marad az egyenlőtlenség.
Végül, ha csak $p(X \cup Y)$ csökken, akkor vagy X vagy Y belemetsz a H_0 -ba, továbbá se X, se Y nem tartalmazhatja a H_0 -t, mivel ekkor $X \cup Y$ is tartalmazná. Azaz vagy $p(X)$, vagy $p(Y)$ csökkenni fog, így az egyenlőtlenség érvényben marad.
A negamoduláris eset az előzőekhez hasonlóan kezelhető.

□

4.3.1. Tétel (Király Tamás). *Legyen $\mathcal{H}$ hipergráf és p egészértékű, szimmetrikus, ferdén szupermoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon, továbbá:*

$$b_{\mathcal{H}}(X) \geq p(X) \quad \forall X \subseteq V. \quad (4.12)$$

Ekkor a $\mathcal{H}$ hipergráf néhány élét egyesítve, kaphatunk egy olyan $\mathcal{H}_*$ hipergráfot, amire:

$$d_{\mathcal{H}_*}(X) \geq p(X) \quad \forall X \subseteq V. \quad (4.13)$$

Bizonyítás. A tételt a hiperélek számára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. $\mathcal{H} = \emptyset$ esetén a tétel triviálisan teljesül.
Egy X halmazt pontosnak hívunk, ha $b_{\mathcal{H}}(X) = p(X)$.

4.3.3. Állítás. *Ha X és Y halmazok pontosak, akkor vagy $X \cup Y$ és $X \cap Y$ pontosak, vagy pedig $X - Y$ és $Y - X$ pontosak. Továbbá, ha X és Y pontosak és létezik olyan $H \in \mathcal{H}$ hiperél, amire: $\emptyset \neq H \cap Y \subseteq X \cap Y$, akkor $X \cup Y$ és $X \cap Y$ pontosak.*

Bizonyítás. A p ferde szupermodularitása miatt két eset lehetséges:
1.eset

$$p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y).$$

A $b_{\mathcal{H}}$ függvény szubmodularitása miatt a következő lesz igaz:

$$p(X) + p(Y) = b_{\mathcal{H}}(X) + b_{\mathcal{H}}(Y) \geq b_{\mathcal{H}}(X \cup Y) + b_{\mathcal{H}}(X \cap Y) \geq p(X \cup Y) + p(X \cap Y)$$

Tehát összevetve a két egyenlőtlenséget az adódik, hogy a fenti egyenlőtlenség végig egyenlőséggel teljesül, így: $b_{\mathcal{H}}(X \cup Y) = p(X \cup Y)$ és $b_{\mathcal{H}}(X \cap Y) = p(X \cap Y)$, azaz $X \cap Y$ és $X \cup Y$ halmazok pontosak.
2.eset

$$p(X) + p(Y) \leq p(X - Y) + p(Y - X).$$

A (4.11) alapján ugyanakkor:

$$\begin{aligned} p(X) + p(Y) = b_{\mathcal{H}}(X) + b_{\mathcal{H}}(Y) \geq b_{\mathcal{H}}(X - Y) + b_{\mathcal{H}}(Y - X) \\ + |\{H \in \mathcal{H} : \emptyset \neq H \cap Y \subseteq X \cap Y\}| \geq p(X - Y) + p(Y - X). \end{aligned}$$

Tehát a fenti egyenlőtlenség végig egyenlőséggel teljesül, így: $b_{\mathcal{H}}(X - Y) = p(X - Y)$ és $b_{\mathcal{H}}(Y - X) = p(Y - X)$, azaz $X - Y$ és $Y - X$ halmazok pontosak. Ráadásul a $\{H \in \mathcal{H} : \emptyset \neq H \cap Y \subseteq X \cap Y\}$ halmaz szükségképpen üres.

□

Legyen H_0 egy tetszőleges hiperél a $\mathcal{H}$ -ból. Ha nincs olyan X pontos halmaz, ami tartalmazza H_0 -t, akkor legyen $\mathcal{H}' = \mathcal{H} - H_0$. Továbbá:

$$p'(X) = \begin{cases} p(X) - 1 & \text{ha } X \cap H_0 \neq \emptyset \text{ és } (V - X) \cap H_0 \neq \emptyset \\ p(X) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

p' -ről egy fenti állításban beláttuk, hogy szimmetrikus és ferdén szupermoduláris. $b_{\mathcal{H}'}(X) \geq p'(X)$ minden $X \subseteq V$ -re, mert az eredeti $b_{\mathcal{H}}(X) \geq p(X)$ egyenlőtlenség akkor tudna elromlani, ha X pontos volna és X tartalmazná H_0 -at.
A $\mathcal{H}'$ hipergráfnak eggyel kevesebb hiperéle van, így az indukciós feltevést használva létezik $\mathcal{H}'_*$ hipergráf, amit $\mathcal{H}'$ néhány hiperélének egyesítésével kapunk és amelyre: $d_{\mathcal{H}'_*}(X) \geq p'(X)$ minden $X \subseteq V$ -re.
Ekkor a $\mathcal{H}_* = \mathcal{H}'_* \cup H_0$ hipergráfra teljesül, hogy $d_{\mathcal{H}_*}(X) \geq p(X)$, hiszen a $p(X)$ -et a $p'(X)$ -ből úgy kapjuk, hogy megnöveljük a p értékét 1 -el, azon a halmazokon, amikre $X \cap H_0 \neq \emptyset$ és $(V - X) \cap H_0 \neq \emptyset$, pontosan ugyanezekre a halmazokra a $d_{\mathcal{H}'_*}(X)$ is megnövekszik eggyel a H_0 új hiperél bevétele miatt.
Azaz ezzel készen vagyunk az indukciós lépéssel, ha nem létezik a H_0 -t tartalmazó pontos halmaz.

A továbbiakban tegyük fel, hogy H_0 benne van egy X_0 pontos halmazban.
Legyen $\mathcal{Y}$ azon Y halmazok családja, amikre $H_0 \cap Y \neq \emptyset$ és Y pontos. Ha $Y \in \mathcal{Y}$, akkor $\emptyset \neq H_0 \cap Y \subseteq X_0 \cap Y$, tehát a (4.3.3) állítás miatt ekkor $X_0 \cap Y$ és $X_0 \cup Y$ is pontos halmazok, továbbá a metszetük a H_0 -al nem üres, így $(X_0 \cap Y) \in \mathcal{Y}$ és $(X_0 \cup Y) \in \mathcal{Y}$.
Legyenek Y_1 és Y_2 tartalmazásra nézve maximális halmazok $\mathcal{Y}$ -ból. Ekkor az előzőek szerint $X_0 \cup Y_1 \in \mathcal{Y}$, ebből következik, hogy $H_0 \subseteq X_0 \cup Y_1 = Y_1$, mivel Y_1 maximális volt. Hasonlóan adódik, hogy $H_0 \subseteq Y_2$, és így $H_0 \subseteq Y_1 \cap Y_2$. Ezalapján $\emptyset \neq H_0 \cap Y_2 \subseteq Y_1 \cap Y_2$,

tehát $Y_1 \cap Y_2$ és $Y_1 \cup Y_2$ pontosak a (4.3.3) állítás miatt, a metszetük H_0 -al nem üres, így $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{Y}$ és $Y_1 \cup Y_2 \in \mathcal{Y}$.
Végülis az adódik, hogy $\mathcal{Y}$ -nak létezik egy egyértelmű, tartalmazásra nézve maximális eleme, jelöljük ezt Y_0 -al.

Belátjuk, hogy létezik olyan $\mathcal{H}$ -beli hiperél, ami diszjunkt az Y_0 -tól. Tegyük fel, hogy minden $H \in \mathcal{H}$ hiperélre $H \cap Y_0 \neq \emptyset$. Ekkor $p(V - Y_0) = p(Y_0) = b_{\mathcal{H}}(Y_0) > b_{\mathcal{H}}(V - Y_0)$, ahol a legutolsó egyenlőtlenség azért igaz, mert Y_0 minden hiperélbe belemetsz, míg $V - Y_0$ biztosan nem metsz bele a H_0 -ba.
Azt kaptuk, hogy a $V - Y_0$ halmaz megsérti a tétel feltételét, ami ellentmondás, így létezik egy H_1 hiperél, ami diszjunkt az Y_0 -tól.
Legyen $\mathcal{H}'$ az a hipergráf, amit a $\mathcal{H}$ -ból kapunk a H_0 és a H_1 hiperélek egyesítésével. Állítjuk, hogy a $\mathcal{H}'$ teljesíti a tétel feltételét, az eredeti p -re nézve. Indirekt tegyük fel, hogy egy $X \subseteq V$ halmazra : $b_{\mathcal{H}'}(X) < p(X)$. Mivel eredetileg $b_{\mathcal{H}}(X) \geq p(X)$ teljesült, így ez az egyenlőtlenség csak úgy tud elromlani, ha X pontos volt, továbbá H_0 és H_1 is belemetszett az X -be, hiszen a $b_{\mathcal{H}}(X)$ csak így tud csökkenni. Ekkor viszont $X \in \mathcal{Y}$, ami ellentmondás, hiszen $H_1 \cap Y = \emptyset$ minden $Y \in \mathcal{Y}$ -ra, emlékezzünk, hogy H_1 diszjunkt volt az Y_0 maximális $\mathcal{Y}$ -beli elemtől.

Tehát megállípítottuk, hogy a $\mathcal{H}'$ hipergráf teljesíti a tétel feltételeit. Azt is tudjuk, hogy eggyel kevesebb hiperéle van, mint a $\mathcal{H}$ -nak, így az indukciós feltevés szerint létezik egy $\mathcal{H}_*$ hipergráf, amire $d_{\mathcal{H}_*}(X) \geq p(X)$ minden $X \subseteq V$ -re és a $\mathcal{H}_*$ -ot a $\mathcal{H}'$ -ből kapjuk néhány hiperél egyesítésével. Ugyanakkor tudjuk, hogy a $\mathcal{H}'$ hipergráfot a $\mathcal{H}$ -ból kaptuk a H_0 és H_1 hiperélek egyesítésével, azaz végső soron a $\mathcal{H}_*$ is a $\mathcal{H}$ -ból kapható hiperélek egyesítésével. Ezzel a tételt teljesen bebizonyítottuk.

□

Most pedig megmutatjuk, hogy ebből a tételből, hogyan jön ki Szigeti Zoltán (4.1.1) tétele.
Az eredeti tételbeli $d_{\mathcal{H}}(v) = m(v)$ előírást módosítsuk $b_{\mathcal{H}}(v) = m(v)$ -re. Ha adott az m egészértékű fokszám előírás, akkor legyen $\mathcal{H}$ a következő hipergráf: $\mathcal{H}$ minden hiperéle egypontú: $\{v\}$ és minden ilyen hiperélt olyan multiplicitással veszünk be a hipergráfba, amennyi az $m(v)$ érték. Szigeti tételének csak a nehezebb, elégséges irányát látjuk be, azaz feltehető, hogy a p szimmetrikus, ferdén szupermoduláris halmazfüggvényre teljesül, hogy: $p(X) \leq m(X)$ minden $X \subseteq V$ halmazra. Azt is tudjuk, hogy $m(X) = b_{\mathcal{H}}(X)$, így $p(X) \leq b_{\mathcal{H}}(X)$ teljesülni fog. Alkalmazzuk Király Tamás tételét, ekkor létezik olyan $\mathcal{H}'$ hipergráf, amit a $\mathcal{H}$ -ból kapunk néhány hiperél egyesítésével és $d_{\mathcal{H}'}(X) \geq p(X)$. Az eredeti $\mathcal{H}$ hipergráfra teljesült, hogy $b_{\mathcal{H}}(v) = m(v)$ minden $v \in V$ csúcsra. Mivel a $\mathcal{H}'$ hipergráfot a $\mathcal{H}$ -ból kaptuk néhány hiperél egyesítésével, így $b_{\mathcal{H}'}(v) = m(v)$ is teljesülni fog.

4.4. Félig ferdén szupermoduláris függvények fedése gráfokkal

Ebben a szakaszban bevezetjük a félig ferdén szupermoduláris halmazfüggvényeket. Belátunk egy Szigeti tételéhez hasonló tételt gráfokra. Király Tamás tétele [8] megadja, hogy mikor létezik olyan gráf, ami fed egy előre adott félig ferdén szupermoduláris halmazfüggvényt és teljesít egy m fokszám előírást. A tétel alkalmazásaként belátjuk Nash-Williams k darab erdővel való fedésről szóló tételének egy általánosítását.

4.4.1. Definíció. *Egy p halmazfüggvényt félig ferdén szupermodulárisnak nevezünk, ha tetszőleges X_1, X_2, X_3 halmazokra, amikre $p(X_i) > 0$ $(i = 1, 2, 3)$ a következők tulajdonságok* *közül legalább az egyik teljesül:*

- $p(X_i) + p(X_j) \leq p(X_i \cup X_j) + p(X_i \cap X_j)$ *valamilyen* $i \neq j$ *párra,*
- $p(X_i) + p(X_j) \leq p(X_i - X_j) + p(X_j - X_i)$ *valamilyen* $i \neq j$ *párra,*
- $p(X_1)+p(X_2)+p(X_3) \leq p(X_1 \cap X_2 \cap X_3)+p(X_1-(X_2 \cup X_3))+p(X_2-(X_1 \cup X_3))+p(X_3-(X_1 \cup X_2))$,
- $p(X_1) + p(X_2) + p(X_3) \leq p(X_1 \cup X_2 \cup X_3) + p((X_2 \cap X_3) - X_1) + p((X_1 \cap X_3) - X_2) + p((X_1 \cap X_2) - X_3)$.

A következő segédállítást nem bizonyítjuk.

4.4.1. Állítás. *Ha* p_1 *és* p_2 *két ferdén szupermoduláris halmazfüggvény, akkor a* $p(X) = \max\{p_1(X), p_2(X), 0\}$ *halmazfüggvény félig ferdén szupermoduláris lesz.*

4.4.1. Tétel (Király Tamás). *Legyen* p *nemnegatív, egészértékű, szimmetrikus, félig ferdén szupermoduláris halmazfüggvény a* V *alaphalmazon. Legyen továbbá* m *egy nemnegatív, egészértékű fokszám előírás a* V *pontjain úgy, hogy* $m(V)$ *páros, és az* $m_p(X) = m(X) - p(X)$ *nemnegatív és az értéke páros minden* $X \subseteq V$ *halmazra, amire* $p(X) > 0$. *Ekkor létezik, olyan* G *gráf a* V *pontjain, hogy:*

$$d_G(v) = m(v) \quad \forall\, v \in V. \tag{4.14}$$
$$d_G(X) \geq p(X) \quad \forall\, X \subseteq V \tag{4.15}$$

Bizonyítás. A tételt az $m(V)$ értékére való indukcióval bizonyítjuk be. A tétel igaz lesz, ha az m legfeljebb egy pontban nem nulla. Tehát feltételezhető, hogy az m legalább két csúcson pozitív értékű.
Egy $X \subseteq V$ halmazt pontosnak hívunk, ha $p(X) > 0$ és $m_p(X) = 0$. Legyen $u \in V$ egy tetszőleges csúcs, ahol $m(u) > 0$, továbbá legyenek $X_1, \ldots, X_k$ azon tartalmazásra nézve maximális pontos halmazok, amikben benne van az u csúcs. Legyen $W = V - \cup_{i=1}^{k} X_i$.

4.4.2. Állítás. $m(W) > 0$.

Bizonyítás. Először azt az esetet vizsgáljuk meg, amikor $k = 0$, vagyis nincs ilyen pontos halmaz. Ekkor $m(W) = m(V) > 0$.
A $k = 1$ esetén:

$$0 < m(X_1) = p(X_1) = p(V - X_1) \leq m(V - X_1) = m(W)$$

A $k = 2$ esetben felhasználva az előző egyenlőtlenséget, illetve, hogy $m(X_1 \cap X_2) > 0$.

$$m(X_1) \leq m(V - X_1) = m(W) + m(X_2) - m(X_1 \cap X_2) < m(W) + m(X_2) \leq$$
$$\leq m(W) + m(V - X_2) = m(W) + m(W) + m(X_1) - m(X_1 \cap X_2) < 2m(W) + m(X_1).$$

Azaz $m(W) > 0$.
Végül vizsgáljuk meg a $k \geq 3$ esetet. Mivel p félig ferdén szupermoduláris, így a következő négy eset közül legalább az egyik teljesül:

1.eset $p(X_i) + p(X_j) \leq p(X_i \cap X_j) + p(X_i \cup X_j)$.
Ekkor:

$$0 + 0 = m_p(X_i) + m_p(X_j) \geq m_p(X_i \cap X_j) + m_p(X_i \cup X_j) \geq 0 + 0.$$

Ahol kihasználtuk az m függvény modularitását. Az egyenlőtlenség végig egyenlőséggel teljesül, így $m_p(X_i \cup X_j) = 0$. Azaz az $X_i \cup X_j$ halmaz is pontos (tartalmazza u -t, így

$p(X_i \cup X_j) = m(X_i \cup X_j) > 0)$. Ez viszont ellentmondás, mivel X_i és X_j maximális u -t tartalmazó pontos halmazok voltak. Tehát az 1. esetben nem lehetséges, hogy $k \geq 3$.
2.eset $p(X_i) + p(X_j) \leq p(X_i - X_j) + p(X_j - X_i)$.
Ekkor:

$$0 + 0 = m_p(X_i) + m_p(X_j) \geq m_p(X_i - X_j) + m_p(X_j - X_i) + 2m(X_i \cap X_j) > 0.$$

Ahol kihasználtuk, hogy $m(X_i \cap X_j) > 0$, mivel $u \in X_i \cap X_j$. Megintcsak ellentmondást kaptunk az 1. esethez hasonlóan.
3.eset $p(X_1) + p(X_2) + p(X_3) \leq p(X_1 \cap X_2 \cap X_3) + p(X_1 - (X_2 \cup X_3)) +$
$+ p(X_2 - (X_1 \cup X_3)) + p(X_3 - (X_1 \cup X_2))$.
Ekkor $0 = m_p(X_1) + m_p(X_2) + m_p(X_3) \geq m_p(X_1 \cap X_2 \cap X_3) + m_p(X_1 - (X_2 \cup X_3)) + m_p(X_2 - (X_1 \cup X_3)) + m_p(X_3 - (X_1 \cup X_2)) + 2m(X_1 \cap X_2 \cap X_3) > 0$. Kihasználva, hogy $m(X_1 \cap X_2 \cap X_3) > 0$, mert $u \in X_1 \cap X_2 \cap X_3$. Azaz a 3.esetben is ellentmondást kaptunk.

4.eset $p(X_1) + p(X_2) + p(X_3) \leq p(X_1 \cup X_2 \cup X_3) + p((X_2 \cap X_3) - X_1) + p((X_1 \cap X_3) - X_2) + p((X_1 \cap X_2) - X_3)$
Ekkor $0 = m_p(X_1) + m_p(X_2) + m_p(X_3) \geq m_p(X_1 \cup X_2 \cup X_3) + m_p((X_2 \cap X_3) - X_1) + m_p((X_1 \cap X_3) - X_2) + m_p((X_1 \cap X_2) - X_3) + 2m(X_1 \cap X_2 \cap X_3) > 0$. Szintén ellentmondást kaptunk.
Ezzel az állítást beláttuk.

$\square$

Az állítás alapján létezik egy csúcs: $w \in W$, ami az u -tól különböző, továbbá $m(w) > 0$. Ekkor legyen:

$$m'(v) = \begin{cases} m(v) - 1 & \text{ha } v \in \{u, w\} \\ m(v) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$p'(X) = \begin{cases} p(X) - 1 & \text{ha } |X \cap \{u, w\}| = 1 \text{ és } p(X) > 0, \\ p(X) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor a p' -re és m' -re teljesülnek a tétel feltételei, azaz:

- p' nemnegatív, egészértékű és szimmetrikus: csak olyan halmazokon csökkentettük a p -t, amikre $p(X) > 0$. A p eredetileg egészértékű volt, így p' is az, továbbá ha egy X halmazra $|X \cap \{u, w\}| = 1$ és $p(X) > 0$ teljesülnek, akkor a komplementerére is teljesülni fognak, tehát p szimmetrikussága megőrződik.

- Könnyen igazolható, hogy p' félig ferdén szupermoduláris.

- $m'(X) - p'(X)$ páros, ha $p'(X) > 0$.
Tudjuk, hogy $p(X) \geq p'(X) > 0$, így $m(X) - p(X) = m_p(X)$ értéke páros. Ha $|X \cap \{u, w\}| = 2$, akkor m kettővel csökken, míg a p nem csökken, tehát a páros értékűség megőrzödik. Ha $|X \cap \{u, w\}| = 1$, akkor m és p is egyaránt eggyel csökkennek, továbbá ha $|X \cap \{u, w\}| = 0$, akkor m és p értéke nem változik.

- $m'(X) - p'(X)$ nemnegatív. Az $m(X) - p(X)$ nemnegativitása, akkor tud elromlani, ha X pontos volt és az m többel csökken, mint a p. Ez csak akkor lehetséges, ha $|X \cap \{u, w\}| = 2$, viszont ha $u \in X$ egy pontos halmazra, akkor $w \notin X$, ellentmondás.

Tudjuk, hogy $m'(V) < m(V)$ és az m' -re és p' -re teljesülnek a tétel feltételei, így az indukciós feltevés szerint létezik olyan G' gráf, amire:

$$d_{G'}(v) = m'(v) \quad \forall\, v \in V$$
$$d_{G'}(X) \geq p'(X) \quad \forall\, X \subseteq V.$$

Legyen a G gráf a G' kiegészítése az uw éllel. Ekkor az $m'(v)$ és a $d_{G'}(v)$ is az u és w csúcsokra nő 1 -el, továbbá a $p'(X)$ és a $d_{G'}(X)$ pontosan azokra a halmazokra nő 1 -el, amikre $|X \cap \{u, w\}| = 1$. Tehát végülis kapunk egy olyan G gráfot, amire:

$$d_G(v) = m(v) \quad \forall\, v \in V$$
$$d_G(X) \geq p(X) \quad \forall\, X \subseteq V.$$

□

4.5. Alkalmazás: Nash-Williams tételének egy általánosítása

Ebben a részben szeretnénk az előző tétel egy szép alkalmazását megmutatni. Jól ismert Nash-Williams k darab erdővel való fedésről szóló tétele:

4.5.1. Tétel (Nash-Williams). *Egy $G = (V, E)$ gráf élhalmaza akkor és csak akkor fedhető k darab erdővel, ha $i_G(X) \leq k(|X| - 1)$ minden nem üres $X \subseteq V$ -re.*

Király Tamás [8] bebizonyíotta Nash-Williams tételének egy általánosítását.

4.5.2. Tétel (Király Tamás). *Legyen $G_1 = (V, E_1)$ és $G_2 = (V, E_2)$ két gráf, amik egyenként fedhetők k darab erdővel. Legyen továbbá m egy nemnegatív, egészértékű fokszám előírás a V pontjain, úgy hogy $m(V)$ páros. Ekkor létezik olyan F élhalmaz, amire $d_F(v) = m(v)$ minden $v \in V$ -re és $G'_1 = (V, E_1 + F)$ illetve $G'_2 = (V, E_2 + F)$ gráfok lefedhetők külön-külön k darab erdővel akkor és csak akkor, ha*

$$\max\{m(X) - \frac{m(V)}{2}, 0\} \leq k(|X| - 1) - \max\{i_{G_1}(X), i_{G_2}(X)\} \quad \forall\, \emptyset \neq X \subseteq V. \tag{4.16}$$

Bizonyítás. Először vizsgáljuk meg a feltétel szükségességét. Ha G'_1 és G'_2 fedhetők k erdővel, akkor a Nash-Williams tétel alapján $\max\{i_{G'_1}(X), i_{G'_2}(X)\} \leq k(|X| - 1)$ minden $\emptyset \neq X \subseteq V$ -re. Továbbá $m(X) = \sum_{v \in X} d_F(v) = 2i_F(X) + d_F(X)$, illetve $m(V - X) = \sum_{v \in V - X} d_F(v) = 2i_F(V - X) + d_F(X)$, amiből $i_F(X) \geq \frac{1}{2}m(X) - \frac{1}{2}m(V - X)$, tovább alakítva pedig: $i_F(X) \geq m(X) - \frac{m(V)}{2}$.
Összeadva a $\max\{i_{G_1}(X), i_{G_2}(X)\} + i_F(X) = \max\{i_{G'_1}(X), i_{G'_2}(X)\} \leq k(|X| - 1)$, illetve a $\max\{m(X) - \frac{m(V)}{2}, 0\} \leq i_F(X)$ egyenlőtlenségeket megkapjuk a (4.16) -ot.

Most pedig térjünk rá az elégségességre. A (4.4.1) tételt fogjuk felhasználni.
Definiáljuk a következő halmazfüggvényeket:

$$q_1(X) = m(X) + 2i_{G_1}(X) - 2k(|X| - 1) \quad \emptyset \neq X \subseteq V, \tag{4.17}$$
$$q_2(X) = m(X) + 2i_{G_2}(X) - 2k(|X| - 1) \quad \emptyset \neq X \subseteq V, \tag{4.18}$$
$$p(X) = \max\{q_1(X), q_1(V - X), q_2(X), q_2(V - X), 0\}. \tag{4.19}$$

Ellenőrizzük le, hogy a (4.4.1) tétel feltételei teljesülnek-e a fenti p -re és az m -re:
A definició alapján világos, hogy p nemnegatív, egészértékű és szimmetrikus. Mivel $m(V)$ páros, így $m(X) \equiv m(V - X) \quad (2)$, sőt a q_1 és a q_2 definiciója alapján: $q_2(X) \equiv q_1(X) \equiv$

$m(X) \equiv m(V-X) \equiv q_1(V-X) \equiv q_2(V-X) \quad (2)$. Ezért $m(X) - p(X)$ páros értékű minden $X \subseteq V$ -re, amire $p(X) > 0$.
A p félig ferdén szupermoduláris. A q_1 és a q_2 szupermoduláris halmazfüggvények, mivel az $m(X)$ és a $|X|$ halmazfüggvények modulárisak és az $i_G(X)$ halmazfüggvény pedig szupermoduláris. A $\max\{q_1(X), q_1(V-X)\}$ és a $\max\{q_2(X), q_2(V-X)\}$ halmazfüggvények ferdén szupermodulárisak a (4.1.1) állítás miatt. Végül felhasználva a (4.4.1) állítást megkapjuk, hogy p félig ferdén szupermoduláris.

4.5.1. Állítás (). *Ha a (4.16) feltétel teljesül, akkor az $m_p(X) = m(X) - p(X)$ halmazfüggvény nemnegatív.*

Bizonyítás. Ha $p(X) = 0$ valamilyen X halmazra, akkor $m_p(X) = m(X)$, ami nemnegatív. Ha $p(X) = q_1(X)$ (a $p(X) = q_2(X)$ eset analóg módon kezelhető), akkor $m_p(X) = 2k(|X|-1) - 2i_{G_1}(X)$, ami nemnegatív, mivel az $i_{G_1}(X) \leq k(|X|-1)$, kiolvasható a (4.16) -ból. Ha $p(X) = q_1(V-X)$ (a $p(X) = q_2(V-X)$ eset analóg módon kezelhető), akkor $m_p(X) = m(X) - m(V-X) + 2k(|V-X|-1) - 2i_{G_1}(V-X) = 2[\frac{m(V)}{2} - m(V-X) + k(|V-X|-1) - i_{G_1}(V-X)]$, ami nemnegatív, mert a (4.16) -ot használva a $V-X$ -re, kiolvasható, hogy : $m(V-X) - \frac{m(V)}{2} \leq k(|V-X|-1) - i_{G_1}(V-X)$.

□

Tehát a (4.4.1) tétel feltételei teljesülnek p -re és m -re, így létezik egy $G^* = (V, E^*)$ gráf, amire $d_{G^*}(v) = m(v)$ minden $v \in V$ -re és $d_{G^*}(X) \geq p(X)$ minden $X \subseteq V$ -re. Tudjuk, hogy $d_{G^*}(X) = \sum_{v \in X} d_{G^*}(v) - 2i_{G^*}(X) = m(X) - 2i_{G^*}(X)$ és ebből $m(X) - 2i_{G^*}(X) \geq p(X)$. A p definiciója alapján: $p(X) \geq \max\{q_1(X), q_2(X)\}$, azaz a következő igaz:

$$m(X) - 2i_{G^*}(X) \geq m(X) + 2\max\{i_{G_1}(X), i_{G_2}(X)\} - 2k(|X|-1).$$

Legyen $G_1' = (V, E_1 + E^*)$, illetve $G_2' = (V, E_2 + E^*)$, ekkor a fenti egyenlőtlenség a következő alakban írható:

$$\max\{i_{G_1'}(X), i_{G_2'}(X)\} \leq k(|X|-1).$$

A Nash-Williams tétel alapján, ekkor a G_1' és a G_2' is lefedhetők k erdővel, ezzel a tételt beláttuk.

□

5. fejezet

Szubmoduláris függvények minimalizálása speciális halmaz családokon

Ebben fejezetben olyan szubmoduláris függvény minimalizálási problémákkal fogunk foglalkozni, ahol nem az alaphalmaz összes részhalmazán keressük a minimumot, hanem bizonyos halmaz családokon belül. Ilyenek például a parity halmaz családok, vagy egy adott pontpárt elválasztó halmazok családja. A fejezet során belátjuk, hogy az általános szubmoduláris függvény minimalizálás és a szimmetrikus szubmoduláris függvény minimalizálás adott pontpárt elválasztó halmazokon ekvivalensek. Belátunk néhány tételt szimmetrikus szubmoduláris függvények megszorításáról és összehúzásáról is.

5.1. Szubmoduláris függvények minimalizálása parity családokon

A következő részben bebizonyítjuk Goemans tételét [11], ami a parity halmazcsaládokon való szubmoduláris függvény minimalizálást visszavezeti az általános szubmoduláris függvény minimalizálásra. Alkalmazásként megnézzük, hogyan lehet szubmoduláris függvény esetén második legkisebb értékeket meghatározni, továbbá szó lesz még T -páros vágásokról, illetve s-t T -páros és T -páratlan vágásokról.

5.1.1. Definíció. *Egy V alaphalmaz részhalmazainak egy $\mathcal{C}$ családja metszet-unióra zárt, ha:*

$$A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B,\ A \cup B \in \mathcal{C}.$$

Definiáljuk a parity halmaz családokat:

5.1.2. Definíció. *Legyen $\mathcal{C}$ egy metszet-unióra zárt család a V alaphalmazon. Egy $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}$ részcsaládot parity -nek hívunk, ha:*

$$A, B \in \mathcal{C} - \mathcal{G} \Rightarrow (A \cap B \in \mathcal{G} \Leftrightarrow A \cup B \in \mathcal{G}).$$

Ha adott egy $\mathcal{C}$ halmaz család, illetve egy (s,t) pontpár, akkor definiálhatjuk az s -et és t -t elválasztó halmazok részcsaládját $\mathcal{C}$ -n belül:

5.1.3. Definíció. *Legyen $\mathcal{C}$ egy metszet-unióra zárt család a V alaphalmazon, továbbá $s, t \in V$. A $\mathcal{C}_{st}$ halmazcsaládot a kövekezőképpen definiáljuk:*

$$\mathcal{C}_{st} = \{A \in \mathcal{C} :\ s \in A,\ t \notin A\}.$$

Mivel ebben a fejezetben csak adott $\mathcal{C}$ halmazcsaládokon szeretnénk minimalizálni függvényeket, így szükségünk lesz a következő fogalomra. Azt mondjuk, hogy egy f halmazfüggvény szubmoduláris egy $\mathcal{C}$ halmazcsaládon, ha:

$$f(A) + f(B) \geq f(A \cap B) + f(A \cup B)$$

minden $A, B \subseteq V$ halmazra, amire A, B, $A \cap B$, $A \cup B \in \mathcal{C}$.

A következő tétel Goemanstól származik, amely megad egy kapcsolatot a parity halmazcsaládokon való minimalizálás és a metszet-unióra zárt családokon való minimalizálás között. Megjegyezzük, hogy ezutóbbira Grötschel, Lovász és Schrijver [4] alapján létezik polinomiális algoritmus.

5.1.1. Tétel. *Legyen $\mathcal{C}$ egy metszet-unióra zárt halmazcsalád a V alaphalmazon, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}$ pedig egy parity halmaz család, továbbá f egy szubmoduláris halmazfüggvény a $\mathcal{C}$ -n. Legyen $S^* \in \mathcal{G}$ egy f -et minimalizáló halmaz a $\mathcal{G}$ -beli halmazok körében. Ekkor vagy $S^* \in \{\emptyset, V\}$ vagy pedig létezik $a, b \in V$, hogy S^* minimalizálja az f -et a $\mathcal{C}_{ab}$ halmaz családon belül.*

Bizonyítás. Adott a $\mathcal{C}$ metszet-unióra zárt halmaz család a V alaphalmazon, illetve a $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}$ parity halmaz család, továbbá az f szubmoduláris függvény a $\mathcal{C}$ -n. Legyen S^* az f -et minimalizáló halmaz a $\mathcal{G}$ -n. Tegyük fel, hogy $S^* \notin \{\emptyset, V\}$. Belátunk egy lemmát, ami az (5.1.1) és az (5.1.2) tétel bizonyításának a kulcsa lesz.

5.1.1. Lemma. *Létezik $a \in S^*$ úgy, hogy $f(A) \geq f(S^*)$ minden $A \subseteq S^*$ -ra, amire $a \in A$ és $A \in \mathcal{C}$.*

Bizonyítás. A lemma bizonyítása indirekt, azaz tegyük fel, hogy minden $a \in S^*$ -ra létezik egy $T_a \subset S^*$, amire $a \in T_a$, $T_a \in \mathcal{C}$ és $f(T_a) < f(S^*)$. Sőt minden $a \in S^*$ -ra legyen T_a tartalmazásra nézve maximális ilyen típusú halmaz. Tudjuk, hogy $T_a \in \mathcal{C} - \mathcal{G}$, hiszen ha $T_a \in \mathcal{G}$ volna, akkor S^* mégse volna minimális f értékű a $\mathcal{G}$ halmazok körében.

5.1.1. Állítás. *Legyen $\emptyset \neq I \subseteq S^*$, ekkor: $\cap_{a \in I} T_a \in \mathcal{C} - \mathcal{G}$*

Bizonyítás. Mivel a $\mathcal{C}$ metszet-unióra zárt, így $\cap_{a \in I} T_a \in \mathcal{C}$. Elég megmutatni, hogy $f(\cap_{a \in I} T_a) < f(S^*)$, hiszen ekkor $\cap_{a \in I} T_a \notin \mathcal{G}$, különben S^* nem lenne minimális értékű a $\mathcal{G}$ -k körében.
Legyen $I \subseteq S^*$ rögzített. Vezessük be a következő jelölést: $\cap_{a \in I} T_a = T_I$. Legyen $I' \subseteq I$ olyan, hogy $f(T_{I'}) < f(S^*)$ és I' tartalmazásra nézve maximális az ilyen típusú halmazok között. Az I' nem üres, mert az egypontú halmazokra teljesül, hogy $f(T_{I'}) < f(S^*)$.
Ha $I' = I$, akkor készen vagyunk, beláttuk, amit akartunk.
Ha $I' \neq I$, akkor legyen $b \in I - I'$. Mivel a $\mathcal{C}$ metszet-unióra zárt, így a $T_{I'}, T_b, T_{I'} \cup T_b, T_{I'} \cap T_b$ mind $\mathcal{C}$ -beliek, így alkalmazható rájuk a szubmodularitási egyenlőtlenség:

$$2f(S^*) > f(T_{I'}) + f(T_b) \geq f(T_{I'} \cap T_b) + f(T_{I'} \cup T_b)$$

A T_b definíció szerint tartalmazásra nézve maximális az olyan halmazok között, amik b -t tartalmazzák és az f értékük kisebb, mint az S^* -é, azaz a $T_{I'} \cup T_b$ -re szükségképpen $f(T_{I'} \cup T_b) \geq f(S^*)$.
Azaz a fenti szubmodularitási egyenlőtlenség alapján azt kapjuk, hogy $f(T_{I'} \cap T_b) < f(S^*)$. Ez viszont ellentmond az I' maximalitásának, tehát csak az $I' = I$ eset fordulhat elő, amivel az állítást beláttuk.

□

5.1.2. Állítás. *Legyen I és J két diszjunkt részhalmaza S^* -nak. Ekkor:*

$$(\cap_{a\in I}T_a) \cap (\cup_{b\in J}T_b) \in \mathcal{C} - \mathcal{G}.$$

Bizonyítás. Az állítást speciális kettős indukcióval bizonyítjuk (i, j) -re, ahol $i = |I|$ és $j = |J|$ a következő rendezéssel a párokon: $(i_1, j_1) < (i_2, j_2)$,ha $i_1 + j_1 < i_2 + j_2$,vagy ha $i_1 + j_1 = i_2 + j_2$ és $j_1 < j_2$.
A jelöléseket megkönnyítve legyen $\cap_{a\in I}T_a = T_I$ és $\cup_{b\in J}T_b = T^J$, illetve $T_I \cap T^J = T_I^J$.
Az előző állítás alapján a kezdő lépés minden (i, j) -re be lett látva, amire $j \leq 1$.
Az indukciós lépést a következő két esetre bontjuk:
1.eset $i = 0$ és $j > 1$.
A $(0, j)$ párra szeretnénk az állítást belátni, feltéve, hogy minden, a rendezésben nála kisebb párra már tudjuk azt. Legyen $c \in J$. A fenti rendezés szerint $(0, j-1) < (0, j)$, tehát az indukciós feltevés szerint $T^{J-c} \in \mathcal{C}-\mathcal{G}$. Mivel $\mathcal{G}$ parity család és $T^{J-c}, T_c \in \mathcal{C}-\mathcal{G}$, így definíció szerint:

$$T^{J-c} \cup T_c = T^J \in \mathcal{C} - \mathcal{G} \Leftrightarrow T^{J-c} \cap T_c = T_c^{J-c} \in \mathcal{C} - \mathcal{G}.$$

A $T_c^{J-c} \in \mathcal{C} - \mathcal{G}$ szintén az indukciós feltevés miatt, hiszen $(1, j-1) < (0, j)$. Ekkor $T^J \in \mathcal{C} - \mathcal{G}$ és ezzel az indukciós lépést beláttuk az 1.esetben.
2.eset $i > 0$ és $j > 0$.
Legyen megint $c \in J$. Tudjuk, hogy:

$$T_I^J = T_I \cap T^J = T_I \cap (T^{J-c} \cup T_c) = (T_I \cap T^{J-c}) \cup (T_I \cap T_c) = T_I^{J-c} \cap T_{I+c}. \qquad (5.1)$$

Ahol $I + c = I \cup \{c\}$. Az (5.1.1) állítás alapján $T_{I+c} \in \mathcal{C}-\mathcal{G}$. Az indukciós feltevés alapján azt is tudjuk, hogy $T_I^{J-c} \in \mathcal{C} - \mathcal{G}$, hiszen $(i, j-1) < (i, j)$. Mivel $\mathcal{G}$ parity család és az előzőek alapján $T_{I+c}, T_I^{J-c} \in \mathcal{C} - \mathcal{G}$, ezért:

$$T_I^J = T_I^{J-c} \cup T_{I+c} \in \mathcal{C} - \mathcal{G} \Leftrightarrow T_{I+c} \cap T_I^{J-c} = T_{I+c}^{J-c} \in \mathcal{C} - \mathcal{G}.$$

Ugyanakkor szintén az indukciós feltevés alapján $T_{I+c}^{J-c} \in \mathcal{C}-\mathcal{G}$, mert $(i+1, j-1) < (i, j)$. Ezzel adódik, hogy $T_I^J \in \mathcal{C} - \mathcal{G}$, így az indukciós lépést a 2.esetben is igazoltuk, az állítást beláttuk.

□

Most pedig térjünk vissza a lemma bizonyítására, ami indirekt volt. Az előző állítást az $I = \emptyset$ és a $J = S^*$ -ra alkalmazva: $\cup_{b\in S^*}T_b = S^* \in \mathcal{C} - \mathcal{G}$, ami ellentmondás, hiszen abból indultunk ki, hogy az S^* egy $\mathcal{G}$ -beli halmaz.
Ezzel a lemma bizonyítását is befejeztük.

□

Belátunk egy előzőhöz hasonló lemmát:

5.1.2. Lemma. *Létezik $b \in V - S^*$, hogy $f(B) \geq f(S^*)$ minden $S^* \subseteq B$ -re, amire $B \in \mathcal{C}$ és $b \notin B$.*

Bizonyítás. Az előző lemmára vezetjük vissza a bizonyítást. Legyen $f'(X) = f(V - X)$ a következő halmaz családon $\mathcal{C}' = \{X : V - X \in \mathcal{C}\}$. Ekkor f' szubmoduláris a $\mathcal{C}'$ metszet-unióra zárt halmaz családon, továbbá $V - S^*$ minimalizálja az f' -t a $\mathcal{G}' = \{X : V - X \in \mathcal{G}\}$ parity halmaz családon. Ha f' -re és $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{C}'$ alkalmazzuk az előző lemmát, akkor kapjuk, hogy létezik $b \in V - S^*$, amire minden $b \in X \subseteq V - S^*$ -ra $f'(X) \geq f'(V - S^*)$, ha $X \in \mathcal{C}'$.
Legyen $B = V - X$, ekkor $B \in \mathcal{C}$, $b \notin B$, $S^* \subseteq B$ és $f(B) \geq f(S^*)$ teljesül minden ilyen típusú B halmazra, és ezzel a lemmát beláttuk.

□

Végül térjünk rá a tétel bizonyítására. Legyen a és b két olyan V -beli elem, amelyekről az előző két lemmában beláttuk, hogy léteznek. Legyen továbbá W egy f -et minimalizáló halmaz a $\mathcal{C}_{ab}$ családon belül. Ekkor $a \in S^*$, $b \notin S^*$ miatt $S^* \in \mathcal{C}_{ab}$ és így $f(W) \leq f(S^*)$. A szubmodularitási egyenlőtlenség alapján:

$$2f(S^*) \geq f(S^*) + f(W) \geq f(S^* \cap W) + f(S^* \cup W)$$

Mivel $a \in S^* \cap W \subseteq S^*$, ezért az első lemma alapján $f(S^* \cap W) \geq f(S^*)$. Továbbá $b \notin S^* \cup W$ és $S^* \cup W \supseteq S^*$, ezért a másik lemma alapján pedig $f(S^* \cup W) \geq f(S^*)$. Ezeket a fenti szubmodularitási egyenlőtlenséggel összevetve, adódik, hogy $f(S^*) = f(W)$. Tehát végülis találtunk olyan a -t és b -t, hogy az S^* minimális f értékű a $\mathcal{C}_{ab}$ halmaz családon belül is.
Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük .

□

A következő tétel az előzőnek egy erősebb változata, amely egyértelműséget is megfogalmaz.

5.1.2. Tétel. *Legyen $\mathcal{C}$ egy metszet-unióra zárt halmaz család a V alaphalmazon, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}$ pedig egy parity halmaz család, továbbá f egy szubmoduláris halmazfüggvény a $\mathcal{C}$ -n. Legyen $S^* \in \mathcal{G}$ egy tartalmazásra nézve minimális f -et minimalizáló halmaz a $\mathcal{G}$ -n. Ekkor vagy $S^* \in \{\emptyset, V\}$, vagy pedig létezik $a, b \in V$, hogy S^* egy tartalmazásra nézve minimális, egyértelmű, f -et minimalizáló halmaz a $\mathcal{C}_{ab}$ -n.*

Rögtön fogalmazzuk is meg a fenti tétel következményét.

5.1.1. Következmény. *Legyen $\mathcal{C}$ egy metszet-unióra zárt halmaz család a V alaphalmazon, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}$ pedig egy parity halmaz család, továbbá f egy szubmoduláris halmazfüggvény a $\mathcal{C}$ -n. Ekkor egy f -et a $\mathcal{G}$ halmazok körében minimalizáló halmaz megkapható $O(|V|^2)$ általános szubmoduláris függvény minimalizálással a $\mathcal{C}$ -n.*

Most pedig nézzük a tétel bizonyítását.
Bizonyítás. A bizonyítás az előző tétel bizonyítását követi, néhány ponton viszont szükségünk lesz módosításokra is.
Kiindulunk egy $S^* \in \mathcal{G}$ halmazból, ami minimalizálja f -et a $\mathcal{G}$ halmaz családon, ráadásul tartalmazásra nézve minimális. Megint csak feltesszük, hogy $S^* \notin \{\emptyset, V\}$. Az (5.1.1) -hez hasonlóan belátjuk a következő lemmát, egy kis módosítással: most szigorú egyenlőtlenséget követelünk meg:

5.1.3. Lemma. *Létezik $a \in S^*$, hogy $f(A) > f(S^*)$ minden $A \subset S^*$ -ra, amire $a \in A$ és $A \in \mathcal{C}$.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy a lemma nem igaz, ekkor minden $a \in S^*$ -ra létezik $T_a \subset S^*$, hogy $a \in T_a$, $T_a \in \mathcal{C}$ és $f(T_a) \leq f(S^*)$. A T_a halmazokat megint válasszuk tartalmazásra nézve maximálisaknak.
Tudjuk, hogy minden a -ra $T_a \in \mathcal{C} - \mathcal{G}$, mivel $T_a \in \mathcal{G}$ esetén az S^* nem volna tartalmazásra nézve minimális f -et minimalizáló halmaz a $\mathcal{G}$ -n.

5.1.3. Állítás. *$\cap_{a \in I} T_a \in \mathcal{C} - \mathcal{G}$ minden $\emptyset \neq I \subseteq S^*$ -ra.*

Bizonyítás. A bizonyítás itt is hasonló lesz. Mivel $\cap_{a\in I}T_a \in \mathcal{C}$, a bizonyításhoz elég belátni, hogy $f(\cap_{a\in I}T_a) \leq f(S^*)$, hiszen ekkor $\cap_{a\in I}T_a \in \mathcal{G}$ esetén a $\cap_{a\in I}T_a \subset S^*$ miatt az S^* mégse volna tartalmazásra nézve minimális f -et minimalizáló halmaz a $\mathcal{G}$ -n.
Adott, nem üres $I \subseteq S^*$ -ra, legyen $I' \subseteq I$, olyan tartalmazásra nézve maximális halmaz, amire $f(T_{I'}) \leq f(S^*)$, ahol $T_{I'} = \cap_{a\in I'}T_a$.
Ha $I' = I$, akkor készen vagyunk, különben pedig legyen $b \in I - I'$. A $T_{I'}$, T_b, $T_{I'} \cap T_b$, $T_{I'} \cup T_b \in \mathcal{C}$, így a szubmodularitási egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$2f(S^*) \geq f(T_{I'}) + f(T_b) \geq f(T_{I'} \cap T_b) + f(T_{I'} \cup T_b).$$

Belátjuk, hogy $f(T_{I'} \cup T_b) \geq f(S^*)$. Ha $T_{I'} \cup T_b = S^*$, akkor ez triviálisan teljesül, míg $T_{I'} \cup T_b \subset S^*$ esetén a T_b maximalitása miatt szükségképpen: $f(T_{I'} \cup T_b) > f(S^*)$.
Végülis a szubmodularitási egyenlőtlenséget összevetve $f(T_{I'} \cup T_b) \geq f(S^*)$ -al, kapjuk, hogy $f(T_{I'} \cap T_b) \leq f(S^*)$, ez viszont ellentmond az I' maximalitásának, vagyis csak az $I' = I$ eset fordulhat elő, és ezzel készen vagyunk.

□

Az (5.1.2) állítás most is igaz lesz, ráadásul a bizonyítás változatlanul érvényben marad. A lemma bizonyításának befejezéséhez az (5.1.2) állítást az $I = \emptyset$ és $J = S^*$ -ra alkalmazva kapjuk, hogy $\cup_{b\in S^*}T_b = S^* \in \mathcal{C} - \mathcal{G}$, ami ellentmondás, és ezzel a lemmát beláttuk.

□

Most pedig térjünk rá az (5.1.2) tétel bizonyítására.
Abból indultunk ki, hogy S^* tartalmazásra nézve minimális f -et minimalizáló halmaz a $\mathcal{G}$ -n. Legyen a az (5.1.3) lemmabeli pont és b az eredeti (5.1.2) lemmabeli.
Legyen W az f -et minimalizáló halmaz a $\mathcal{C}_{ab}$ halmaz családon belül. Most is $a \in S^*$, illetve $b \notin S^*$, így $f(W) \leq f(S^*)$. A szubmodularitási egyenlőtlenséget felírva:

$$2f(S^*) \geq f(S^*) + f(W) \geq f(S^* \cap W) + f(S^* \cup W).$$

Tudjuk, hogy $b \notin S^* \cup W$, így az (5.1.2) lemma alapján $f(S^* \cup W) \geq f(S^*)$.
Az $f(S^* \cap W)$ -nél két esetet különböztetünk meg:
1.eset $S^* \cap W \subset S^*$.
Ekkor $a \in S^* \cap W$ és az (5.1.3) lemma alapján $f(S^* \cap W) > f(S^*)$, ez viszont a szubmodularitási egyenlőtlenséggel együtt ellentmondásra vezet, tehát az 1.eset nem fordul elő.
2.eset Azaz szükségszerűen $S^* \cap W = S^*$ teljesül.
Ekkor a fenti szubmodularitási egyenlőtlenség végig egyenlőséggel teljesül és így $f(S^*) = f(W)$, tehát létezik olyan a és b, hogy S^* minimalizálja az f -et a $\mathcal{C}_{ab}$ -n. Ugyanakkor minden olyan W halmazra, ami minimalizálja az f -et a $\mathcal{C}_{ab}$ -n kijött, hogy $S^* \cap W = S^*$, azaz $S^* \subseteq W$. Tehát az S^* egy tartalmazásra nézve minimális, egyértelmű, f -et minimalizáló halmaz a $\mathcal{C}_{ab}$ -n.
Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

□

5.2. Alkalmazások

5.2.1. A második legkisebb értékek meghatározása

Adott egy $\mathcal{C}$ metszet-unióra zárt halmaz család a V alaphalmazon, és egy f szubmoduláris függvény a $\mathcal{C}$ -n. Szeretnénk meghatározni egy olyan halmazt, aminek a második legkisebb az f értéke. Ehhez szükségünk lesz két egyszerűbb segédállításra:

5.2.1. Állítás. *Legyen $\mathcal{C}$ metszet-unióra zárt, továbbá $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ a $\mathcal{C}$ -nek egy metszet-unióra zárt részcsaládja. Ekkor $\mathcal{G} = \mathcal{C} - \mathcal{F}$ egy parity halmaz család lesz.*

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{C} - \mathcal{G} = \mathcal{F}$ metszet-unióra zárt, ez azt jelenti, hogy ha $A, B \in \mathcal{C} - \mathcal{G}$, akkor $A \cap B$, $A \cup B \in \mathcal{C} - \mathcal{G}$ és ebből következik, hogy a $\mathcal{C} - \mathcal{G}$ egy parity halmaz család.

□

5.2.2. Állítás. *Ha f szubmoduláris a $\mathcal{C}$ metszet-unióra zárt családon, akkor az*

$$\mathcal{F}_{min} = \{A \in \mathcal{C} : f(A) = \min_{S \in \mathcal{C}} f(S)\}$$

is metszet-unióra zárt halmaz család.

Bizonyítás. Jelöljük az f minimális értékét a $\mathcal{C}$ halmaz családon M -el. Legyenek $A, B \in \mathcal{F}_{min} \subseteq \mathcal{C}$. Mivel $\mathcal{C}$ metszet-unióra zárt, így alkalmazható a szubmodularitási egyenlőtlenség az A és B halmazokra:

$$M + M = f(A) + f(B) \geq f(A \cup B) + f(A \cap B) \geq M + M.$$

Azaz a fenti egyenlőtlenség végig egyenlőséggel teljesül, így $f(A \cup B) = M$ és $f(A \cap B) = M$, tehát $A \cap B$, $A \cup B \in \mathcal{F}_{min}$, vagyis az $\mathcal{F}_{min}$ metszet-unióra zárt.

□

A fenti két állítás alapján ekkor adódik, hogy a $\mathcal{C} - \mathcal{F}_{min}$ parity halmaz család lesz. Tehát alkalmazhatjuk rá az (5.1.1) következményt, ami pont a kívánt második legkisebb f értékű halmazt adja meg:

5.2.1. Következmény. *Legyen $\mathcal{C}$ egy metszet-unióra zárt halmaz család a V alaphalmazon, továbbá f szubmoduláris függvény a $\mathcal{C}$ -n. Ekkor egy második legkisebb f -értékű halmaz megkapható $O(|V|^2)$ általános szubmoduláris függvény minimalizálás segítségével a $\mathcal{C}$ metszet-unióra zárt halmaz családon.*

5.2.2. Alkalmazások szimmetrikus, szubmoduláris függvényekre

Ebben a részben feltételezzük, hogy az f függvény szimmetrikus is.
Mivel egy $\mathcal{C}$ metszet-unióra zárt család esetén nem biztos, hogy egy halmaz komplementere is benne van a $\mathcal{C}$ -ben, ezért csak olyan halmaz családokat érdemes vizsgálni, amik szimmetrikusak, tehát ha $A \in \mathcal{C}$, akkor $V - A \in \mathcal{C}$ is teljesül.

5.2.3. Állítás. *Legyen $\mathcal{C}$ egy szimmetrikus, metszet-unióra zárt halmaz család a V alaphalmazon, és legyen $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}$ egy parity család. Ekkor $\mathcal{G}_{szimm} \subseteq \mathcal{C}$ egy szimmetrikus parity család lesz, ahol:*

$$\mathcal{G}_{szimm} = \{A \in \mathcal{C} : A \in \mathcal{G} \, vagy \, V - A \in \mathcal{G}\}.$$

Bizonyítás. A definíció alapján látszik, hogy $\mathcal{G}_{szimm}$ szimmetrikus. Legyen $A, B \in \mathcal{C} - \mathcal{G}_{szimm}$. Ekkor A, B, $V - A$, $V - B \in \mathcal{C} - \mathcal{G}$, felhasználva $\mathcal{C}$ szimmetrikusságát és $\mathcal{G}_{szimm}$ definícióját. Mivel $\mathcal{G}$ parity család, így ezek szerint: $A \cup B \in \mathcal{G} \Leftrightarrow A \cap B \in \mathcal{G}$, továbbá $V - (A \cup B) \in \mathcal{G} \Leftrightarrow V - (A \cap B) \in \mathcal{G}$
Megmutatjuk, hogy $A \cup B \in \mathcal{C} - \mathcal{G}_{szimm} \Leftrightarrow A \cap B \in \mathcal{C} - \mathcal{G}_{szimm}$. Ebből már következik, hogy $\mathcal{G}_{szimm}$ parity család.
Legyen tehát $A \cup B \in \mathcal{C} - \mathcal{G}_{szimm}$, azaz $A \cup B \in \mathcal{C} - \mathcal{G}$ és ekkor a fentiek alapján $A \cap B \subseteq \mathcal{C} - \mathcal{G}$, továbbá $V - (A \cup B) \in \mathcal{C} - \mathcal{G}$ és így szintén a fentiek alapján: $V - (A \cap B) \subseteq \mathcal{C} - \mathcal{G}$. Azaz $A \cap B\mathcal{C} - \mathcal{G}_{szimm}$. Megfordítva, ha $A \cap B \in \mathcal{C} - \mathcal{G}_{szimm}$, akkor az előzőhöz teljesen hasonlóan kapjuk, hogy $A \cup B \in \mathcal{C} - \mathcal{G}_{szimm}$.

□

A fenti állítás alapján így, ha egy szimmetrikus szubmoduláris függvényt minimalizálunk egy $\mathcal{G}$ parity halmaz családon, akkor feltehető, hogy $\mathcal{G}$ szimmetrikus.

s-t T-páros és T-páratlan vágások

Legyenek $s, t \in V$. Továbbá $T \subseteq V$ egy páros elemszámú halmaz. Egy A halmaz s-t T-páros vágás, ha $s \in A$, $t \notin A$, $|A \cap T|$ páros, továbbá $A \notin \{\emptyset, V\}$. Egy A halmaz s-t T-páratlan vágás, ha $s \in A$, $t \notin A$, $|A \cap T|$ páratlan.
Vegyük az s-t T-páratlan vágások esetét, az s-t T-páros vágások hasonlóan kezelhetőek lesznek. Legyen most $\mathcal{C} = \{X : s \in X, t \notin X\}$. Könnyen látható, hogy $\mathcal{C}$ metszet-unióra zárt: ha A és B is tartalmazzák s -et, akkor $A \cap B$ és $A \cup B$ is tartalmazni fogják, továbbá ha A és B nem tartalmazzák a t -t, akkor se $A \cap B$, se $A \cup B$ nem tartalmazza t -t.
Legyen $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{C} : |A \cap T| \text{ páratlan}\}$. Ekkor a $\mathcal{G}$ parity halmaz család lesz. Ehhez legyen $A, B \in \mathcal{C} - \mathcal{G}$. Ez azt jelenti, hogy $|(A \cap T)|$ és $|B \cap T|$ is páros. Elég belátni, hogy $|(A \cup B) \cap T|$ és $|(A \cap B) \cap T|$ paritása megegyezik, ez viszont következik, abból, hogy $|(A \cup B) \cap T| + |(A \cap B) \cap T| = |B \cap T| + |A \cap T| \equiv 0\,(2)$.
Összefoglalva azon halmazok, amik s -et tartalmazzák t -t nem tartalmazzák, és a T -ből páratlan sok elemet tartalmaznak egy parity halmaz családot alkotnak, így ha az f a vágás kapacitás függvénye, akkor meg tudunk határozni egy minimális kapacitású s-t T-páratlan vágást az (5.1.1) alapján.

T-páros vágások

Egy $A \subseteq V$ halmaz T-páros vágás, ha $|A \cap T|$ páros továbbá $A \notin \{\emptyset, V\}$. Legyen $\mathcal{G} = \{A \subseteq V : |A \cap T| \text{ páros}\}$. Könnyen látható, hogy $\mathcal{G}$ parity halmaz család a $\mathcal{C} = 2^V$ családon belül. Mi viszont a $\mathcal{G} - \{\emptyset, V\}$ halmaz családon szeretnénk optimalizálni az f -et. Legyen $\mathcal{G}_{st} = \{A \in \mathcal{G} : s \in A, t \notin A\}$. Azaz az előző részben használt parity család az s-t T-páros vágásra. Ekkor:

$$\mathcal{G} - \{\emptyset, V\} = \cup_{t \in V - \{s\}} \mathcal{G}_{st} \cup \mathcal{G}_{ts}.$$

Ezzel a T-páros minimális vágás feladatot redukáltuk $O(|V|)$ darab minimális s-t T-páros vágás feladat meghatározására, így végülis $O(|V|^3)$ általános szubmoduláris függvény minimalizálással kaphatunk egy optimális T-páros vágást.

5.3. Szimmetrikus szubmoduláris függvények megszorítása és összehúzása

Narayanan vezette be szimmetrikus szubmoduláris függvények megszorításait és összehúzásait. Az általa bizonyított állítások segítségével a következő szakaszban belátjuk, hogy a szimmetrikus szubmoduláris függvények minimalizálása adott (s, t) pontpárt elválasztó halmazok esetén ekvivalens az általános szubmoduláris függvény minimalizálással [12].

5.3.1. Definíció. *Legyen $T \subseteq S$. Az f halmazfüggvény T -re vett megszorításán a következő halmazfüggvényt értjük a T alaphalmazon:*

$$f.T(Y) = f(Y) \quad Y \subseteq T.$$

A definíció alapján azonnal látszik, hogy egy szubmoduláris halmazfüggvény megszorítása is szubmoduláris.

5.3.2. Definíció. *Legyen $T \subseteq V$. Az f halmazfüggvény T halmazra való összehúzásán a következő T alaphalmazon vett halmazfüggvényt értjük:*

$$f \times T(Y) = f(Y \cup (V - T)) - f(V - T).$$

5.3.3. Definíció. *Legyen $T_1 \subseteq T_2 \subseteq V$. Az f halmazfüggvényt először összehúzva a T_2 -re, majd megszorítva a T_1 -re a kapott halmazfüggvényt: $f \times T_2.T_1$ az f minorjának fogjuk nevezni.*

5.3.1. Állítás. *Egy szubmoduláris halmazfüggvény minorja is szubmoduláris.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy egy szubmoduláris halmazfüggvény megszorítása is szubmoduláris, így elég belátni, hogy egy szubmoduláris halmazfüggvény összehúzása szubmoduláris. Legyen f szubmoduláris halmazfüggvény a V -n, $T \subseteq V$. Jelölje $h(X) = f \times T(X)$ az összehúzott halmazfüggvényt. Definíció szerint $h(X) = f(X \cup (V - T)) - f(V - T)$. Szeretnénk igazolni, hogy h teljesíti a szubmodularitási egyenlőtlenséget minden $X, Y \subseteq T$ halmazpárra:

$$f(X \cup (V - T)) + f(Y \cup (V - T)) \geq f((X \cap Y) \cup (V - T)) + f((X \cup Y) \cup (V - T))$$

A fenti egyenlőtlenségben már egyszerűsítettünk $f(V - T)$ -vel. Vegyük észre, hogy a fenti egyenlőtlenség az f szubmodularitása alapján azonnal látszik, felhasználva, hogy $(X \cup (V - T)) \cup (Y \cup (V - T)) = (X \cup Y) \cup (V - T)$ és $(X \cup (V - T)) \cap (Y \cup (V - T)) = (X \cap Y) \cup (V - T)$.

□

Szükségünk lesz a megszorítás és az összehúzás inverz műveleteire is. Legyen g egy tetszőleges halmazfüggvény a V alaphalmazon, ezt fogjuk kiterjeszteni, illetve kibővíteni egy új elemmel ellátott $V \cup \{a\}$ alaphalmazra.

5.3.4. Definíció. *A g kiterjesztésén (a megszorítás inverz művelete) a következő f halmazfüggvényt értjük a $V \cup \{a\}$ alaphalmazon, ahol $a \notin V$.*

$$f(X) = \begin{cases} g(X) & \text{,ha } X \subseteq V \\ g(S - X) & \text{,ha } a \in X \subseteq V \cup \{a\}. \end{cases}$$

5.3.5. Definíció. *A g kibővítésén (az összehúzás inverz művelete) a következő f halmazfüggvényt értjük a $V \cup \{a\}$ alaphalmazon, ahol $a \notin V$.*

$$f(X) = \begin{cases} g(V - X) & \text{,ha } X \subseteq V \\ g(X - a) & \text{,ha } a \in X \subseteq V \cup \{a\}. \end{cases}$$

5.3.2. Állítás. *A fent definiált kiterjesztés valóban inverz művelete a megszorításnak, illetve a kibővítés egy konstans értéktől eltekintve inverze az összehúzásnak.*

Bizonyítás. Ehhez először legyen f szimmetrikus, szubmoduláris halmazfüggvény a V -n, $a \in V$ tetszőleges. Legyen g az f megszorítása a $V - \{a\}$ alaphalmazra: $g = f.(V - \{a\})$. Ha a g -t ismét kiterjesztjük a V -re és $a \notin X$, akkor $g(X) = f(X)$ és a kiterjesztett f' függvényre: $f'(X) = g(X) = f(X)$. Ha $a \in X \subseteq V$, akkor $f'(X) = g((V - \{a\}) - X) = f((V - \{a\}) - X) = f(X)$, ahol kihasználtuk, hogy $a \in X$ és f szimmetrikus. Ezzel beláttuk, hogy ha egy szimmetrikus szubmoduláris függvényt előbb megszorítunk, majd kiterjesztjük, akkor az eredeti halmazfüggvényt kapjuk vissza.
Nézzük mi a helyzet az összehúzás esetén. Legyen f szimmetrikus szubmoduláris a V -n, legyen a g a $V - \{a\}$ -ra való megszorítása: $g = f \times (V - \{a\})$. A g kibővítése

az a elemmel az eredeti halmazra legyen f'. Megintcsak két esetet kell vizsgálnunk. Az első esetben: $a \notin X$, $f'(X) = g((V - \{a\}) - X) = f(((V - \{a\}) - X) \cup \{a\}) - f(\{a\}) = f(V - X) - f(\{a\}) = f(X) - f(\{a\})$. A második esetben: $a \in X$, így $f'(X) = g(X - \{a\}) = f((X - \{a\}) \cup \{a\}) - f(\{a\}) = f(X) - f(\{a\})$. Azaz ha egy szimmetrikus szubmoduláris függvényt előbb összehúzunk, majd kibővítjük akkor egy konstans tagtól: $f(\{a\})$ eltekintve az eredeti halmazfüggvényt kapjuk vissza.

□

5.3.6. Definíció. *Legyen g szubmoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon. Legyen f_a az ő kiterjesztése a $V \cup \{a\}$ halmazra ($a \notin V$), továbbá legyen f_{ab} az f_a kibővítése a $V \cup \{a\} \cup \{b\}$ halmazra ($b \notin V \cup \{a\}$). Az f_{ab} -t a g függvény szimmetrikus (a, b) felemeltjének nevezzük.*

A következő tételt nem bizonyítjuk, csak kimondjuk az állítást.

5.3.1. Tétel. *Legyen g szubmoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon. A g pontosan akkor megszorítása (összehúzása) egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvénynek, ha g kiterjesztése (kibővítése) szimmetrikus és szubmoduláris.*
Ha g egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény megszorítása (összehúzása), akkor a Queyranne algoritmus megad egy minimális g értékű X halmazt, akkor is ha $\emptyset \subset X \subset V$ és akkor is ha $\emptyset \subseteq X \subseteq V$ feltételeink vannak.

A továbbiakban megvizsgálunk néhány állítást szimmetrikus szubmoduláris függvények megszorításainak és összehúzásainak a jellemzésére.

5.3.2. Tétel. *Legyen h egy szubmoduláris halmazfüggvény a V -n.*
A h függvény pontosan akkor megszorítása egy szimmetrikus, szubmoduláris halmazfüggvénynek, ha h -ra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$h(X - e) - h(X) \leq h(V - (X - e)) - h(V - X) \quad e \in X \subseteq V \tag{5.2}$$

A h függvény pontosan akkor összehúzása egy szimmetrikus, szubmoduláris halmazfüggvénynek, ha h -ra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$h(X - e) - h(X) \geq h(V - (X - e)) - h(V - X) \quad e \in X \subseteq V \tag{5.3}$$

Bizonyítás. Csak az összehúzás jellemzését bizonyítjuk és onnan is csak a szükséges irányt. A megszorítás esetén a szükséges irány az összehúzáshoz hasonló lesz. Az elégséges irányok az (5.3.1) tétel alapján beláthatóak.
Legyen $h = f \times V$, ahol f egy szimmetrikus, szubmoduláris halmazfüggvény az S alaphalmazon ($V \subseteq S$). Ekkor definíció szerint:

$$h(X) - h(X - e) = f(X \cup (S - V)) - f((X - e) \cup (S - V)).$$

Mivel $f(S - V)$ -vel tudtunk egyszerűsíteni. Most írjuk fel az (5.3) egyenlőtlenség másik oldalát is:

$$\begin{aligned} h(V - X) - h(V - (X - e)) &= f((V - X) \cup (S - V)) - f((V - (X - e)) \cup (S - V)) = \\ &= f(S - X) - f(S - (X - e)) = f(X) - f(X - e). \end{aligned}$$

Ahol a legutolsó egyenlőtlenségben kihasználtuk f szimmetrikusságát. Az f szubmodularitása alapján:

$$f(X) + f((X - e) \cup (S - V)) \geq f(X \cup (S - V)) + f(X - e).$$

Átrendezve:

$$f(X \cup (S - V)) - f((X - e) \cup (S - V)) \leq f(X) - f(X - e).$$

Ebből és a fentiekből adódik az (5.3) -as egyenlőtlenség:

$$h(X) - h(X - e) \leq h(V - X) - h(V - (X - e)).$$

□

5.3.3. Állítás. *A következő állítások teljesülnek:*

- *i) Legyenek g_1 és g_2 szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvények megszorításai (összehúzásai). Ekkor g_1+g_2 és λg_1 is szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvények megszorításai (összehúzásai)* $(\lambda \geq 0)$.
- *ii) Tetszőleges szimmetrikus, szubmoduláris halmazfüggvény másik szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény megszorítása, illetve összehúzása.*
- *iii) Egy monoton növő, szubmoduláris halmazfüggvény megszorítása egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvénynek.*
- *iv) Ha w egy moduláris halmazfüggvény és $w(e) \geq 0$ ($w(e) \leq 0$) minden $e \in X$ -re, akkor w megszorítása (összehúzása) egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvénynek.*

Bizonyítás. Az (5.3.2) tételt fogjuk felhasználni, pontosabban mindig elég lesz ellenőrizni, hogy az adott függvény teljesíti-e az (5.2) vagy az (5.3) egyenlőtlenséget.
Az i) pont esetén tudjuk, hogy g_1 és g_2 teljesíti az (5.2) -et, így a $g_1 + g_2$ és a λg_1 is teljesíteni fogják, ha $\lambda \geq 0$. Az összehúzás ugyanígy bizonyítható.

Az ii) pont esetén ha egy h halmazfüggvény szimmetrikus, akkor $h(X - e) = h(V - (X - e))$ és $h(X) = h(V - X)$, így az (5.2) és az (5.3) egyenlőtlenségek triviálisan egyenlőséggel fognak teljesülni.

Az iii) pontban ha h monoton növő halmazfüggvény, akkor $h(X - e) \leq h(X)$ és $h(V - X) \leq h(V - (X - e))$, így az (5.2) egyenlőtlenség teljesülni fog.

Végül a iv) pont esetén a w modularitása alapján: $w(X - e) - w(X) = -w(e)$ és $w(V - (X - e)) - w(V - X) = w(e)$, így ha $w(e) \geq 0$ minden $e \in V$ -re, akkor az (5.2) egyenlőtlenség teljesül, míg ha $w(e) \leq 0$ minden $e \in V$ -re, akkor az (5.3) egyenlőtlenség fog teljesülni.

□

5.3.4. Állítás. *Egy f szubmoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon pontosan akkor megszorítása egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvénynek, ha f pozimoduláris a V -n.*

Bizonyítás. Először is, ha f pozimoduláris, akkor:

$$f(X) + f(V - (X - e)) \geq f(X - e) + f(V - X) \quad \forall X \subseteq V.$$

Ez pedig az (5.3.2) alapján elégséges feltétele annak, hogy az f megszorítása egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvénynek.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy az f megszorítása egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvénynek.
Belátható, hogy ekkor: $f(X) - f(X - Z) \geq f(V - X) - f(V - (X - Z))$ minden $Z \subseteq X$ -re.
$Z = X \cap Y$ -t írva:

$$f(X) - f(X - Y) \geq f(V - X) - f(V - (X - Y)) \geq f(Y - X) - f(Y)$$

Ahol a második egyenlőtlenség az f -re vonatkozó szubmodularitási egyenlőtlenség, kihasználva, hogy $(V - X) \cup Y) = V - (X - Y)$ és $(V - X) \cap Y = Y - X$.
Végül a fenti egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk a pozimodularitási egyenlőtlenséget.

□

A továbbiakban belátjuk, hogy minden szubmoduláris halmazfüggvény lényegében egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény minorja, illetve hogy tetszőleges szubmoduláris halmazfüggvénynek a szimmetrikus (a, b) felemeltje szubmoduláris lesz. Először megfogalmazzuk a következő lemmát:

5.3.1. Lemma. *Legyen g egy szubmoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon. Ekkor $g(X) = \rho(X) + w(X)$ alakban előáll, ahol ρ egy monoton növő szubmoduláris halmazfüggvény, a w pedig egy nempozitív ($w(e) \leq 0\ \forall\, e \in V$) moduláris halmazfüggvény.*

Bizonyítás. Legyen $w_1(e) = g(V) - g(V - e)$, illetve $w_1(X) = \sum e \in X w_1(e)$.
A g függvény szubmoduláris a w_1 pedig moduláris, így a $g - w_1$ halmazfüggvény szubmoduláris lesz. Legyen $X \subseteq V$ és $e \in X$. A szubmodularitási egyenlőtlenséget felírva az X és a $V - e$ halmazokra:

$$(g - w_1)(X) + (g - w_1)(V - e) \geq (g - w_1)(V) + (g - w_1)(X - e)$$

Átrendezve:

$$\begin{aligned}(g - w_1)(X) + (g - w_1)(X - e) \geq (g - w_1)(V) + (g - w_1)(V - e) = \\ = g(V) - g(V - e) - w_1(e) = 0.\end{aligned}$$

Azaz a $g - w_1$ halmazfüggvény monoton növő. Legyen $w_1 = w_- + w_+$, ahol w_- egy nempozitív moduláris függvény, a w_+ pedig egy nemnegatív moduláris halmazfüggvény. Legyen $\rho = g - w_1 + w_+$ továbbá $w = w_-$. Ekkor a ρ és a w teljesítik a tétel követelményeit, hiszen $\rho + w = g - w_1 + w_+ + w_- = g$, a w egy nempozitív moduláris függvény. A ρ monoton növő és szubmoduláris, mivel a $g - w_1$ az volt, így ha ehhez egy nemnegatív moduláris halmazfüggvényt hozzáadunk, akkor szintén egy monoton növő, szubmoduláris halmazfüggvényt kapunk.

□

5.3.1. Következmény. *Minden szubmoduláris halmazfüggvény előáll két olyan szubmoduláris halmazfüggvény összegeként, ahol az egyik egy szimmetrikus szubmoduláris függvény megszorítása, míg a másik egy szimmetrikus szubmoduláris függvény összehúzása.*

5.3.3. Tétel. *Legyen g egy szubmoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon.*

- *i) Létezik f szubmoduláris halmazfüggvény, ami a g függvény szimmetrikus (a, b) felemeltje*

- *ii) A $g(X) - g(\emptyset)$ halmazfüggvény egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény minorja.*

Bizonyítás. Először az i) állítást fogjuk belátni. Az előző lemma alapján legyen $g(X) = \rho(X) + w(X)$, ahol ρ egy monoton növő szubmoduláris halmazfüggvény, a w pedig egy nempozitív, moduláris halmazfüggvény. Az (5.3.3) állítás iii) pontja alapján a ρ egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény megszorítása, legyen ez az f_1: a ρ kiterjesztése a $V \cup a$ halmazra. A w -t is kiterjesztjük a $V \cup a$ halmazra: $w_1(a) = 0$, illetve $w_1(e) = w_e$ minden $e \in V$ -re.
Legyen $g_1 = f_1 + w_1$. Világos, hogy $g_1.V = g$. Az f_1 egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény, így az (5.3.3) ii) pontja miatt az f_1 egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény összehúzása. A w_1 egy nempozitív moduláris halmazfüggvény, így a iv) pont alapján a w_1 is egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény összehúzása, így végül az i) alapján a g_1 is egy szimmetrikus, szubmoduláris halmazfüggvény összehúzása. Másképp fogalmazva a g_1 kibővítése a $V \cup a \cup b$ halmazra: f egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény lesz. Ez az f függvény a g szimmetrikus (a, b) felemeltje.

Az ii) állítás bizonyításához az előbbiekben megkonstruált f függvényt fogjuk használni. Húzzuk össze az f -et a $V \cup a$ halmazra: $f \times (V \cup a)(X) = f(X \cup b) - f(b)$. Tudjuk, hogy az f a g_1 kibővítése volt, így egy $X \subseteq V \cup a$ halmazra: $f(X \cup b) = g_1(X)$ és $f(b) = g_1(\emptyset)$, azaz $f \times (V \cup a)(X) = f(X \cup b) - f(b) = g_1(X) - g_1(\emptyset)$.
Az összehúzott függvényt szorítsuk meg a V halmazra: $f \times (V \cup a).V(X) = g_1(X) - g_1(\emptyset)$. Ha $X \subseteq V$ akkor $g_1(X) - g_1(\emptyset) = f_1(X) + w_1(X) - f_1(\emptyset) = \rho(X) + w(X) - \rho(\emptyset) = g(X) - g(\emptyset)$. Ezzel pedig beláttuk, hogy az f függvény minorja $g(X) - g(\emptyset)$ függvény.

□

5.4. Szimmetrikus szubmoduláris függvények minimalizálása adott pontpárt elválasztó halmazokon

Ebben a szakaszban belátjuk, hogy egy szimmetrikus szubmoduláris függvénynek a minimalizálása adott (a, b) pontpárt elválasztó halmazokon ekvivalens az általános szubmoduláris függvény minimalizálással. Két különböző bizonyítást is bemutatunk. Először Narayanan bizonyítását nézzük meg [12], ami további kettő, azaz összesen négy szubmoduláris függvény minimalizálási probléma ekvivalenciáját látja be. A bizonyítás az előző szakaszbeli függvény megszorításon, összehúzáson és az ezekről szóló tételeken alapszik. Utána Queyranne bizonyítását is leírjuk, ami egyszerűbb, kevesebb eszközt igényel az előzőnél, viszont felhasznál egy M korlátot, ami az f minimumától és maximumától függ, és csak a két kiinduló függvényminimalizálási probléma ekvivalenciáját bizonyítja.

5.4.1. Tétel (Narayanan). *A következő minimalizálási feladatok ekvivalensek:*

- *(1) Legyen f szimmetrikus, szubmoduláris függvény a V alaphalmazon, továbbá $\emptyset \subset A \subseteq B \subset V$ adottak. Az f minimalizálása olyan $X \subseteq V$ halmazokon, amikre: $A \subseteq X \subseteq B$.*

- *(2) Legyen f szimmetrikus szubmoduláris függvény a $T \cup \{a\} \cup \{b\}$ alaphalmazon. Az f minimalizálása olyan $X \subseteq T \cup \{a\} \cup \{b\}$ halmazokon, amik szeparálják az (a, b) párt.*

- *(3) Egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény minorjának a minimalizálása.*

- *(4) Általános szubmoduláris halmazfüggvény minimalizálása.*

Bizonyítás. Először belátjuk (3) és (4) ekvivalenciáját. Ha g egy általános szubmoduláris halmazfüggvény, akkor az (5.3.3) tétel alapján $g(X) - g(\emptyset)$ egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvény minorja, így ha egy ilyen típusú függvényt tudunk minimalizálni, akkor a g -t is tudjuk minimalizálni. Megfordítva, ha van egy h halmazfüggvényünk, ami minorja egy szimmetrikus szubmoduláris függvénynek, akkor az (5.3.1) állítás alapján h szubmoduláris lesz, így ha egy általános szubmoduláris függvényt tudunk minimalizálni, akkor a h -t is tudjuk.

Belátjuk (1) és (2) ekvivalenciáját. A (2) az (1) -es speciális esete, így elég belátni (1) $\Rightarrow$ (2) -öt. Adott az f halmazfüggvény a V -n, illetve $\emptyset \subset A \subseteq B \subset V$. Legyen $T = V - (A \cup (V - B))$, továbbá definiáljunk egy f_1 halmazfüggvényt a $T \cup \{a\} \cup \{b\}$ halmazon. Lényegében az a pontot azonosítjuk az A halmazzal, a b pontot pedig a $V - B$ halmazzal. $f_1(X) = f(X)$, ha $a, b \notin X$, továbbá $f_1(X \cup \{a\}) = f(X \cup A)$, $f_1(X \cup \{b\}) = f(X \cup (V - B))$, $f_1(X \cup \{a\} \cup \{b\}) = f(X \cup A \cup (V - B))$.
Könnyen belátható, hogy ha az f függvény szimmetrikus és szubmoduláris volt, akkor az f_1 is az lesz. Egy $Y \subseteq T \cup \{a\} \cup \{b\}$ halmaz pontosan akkor szeparálja a -t és b -t (az általánosság megszorítása nélkül: $a \in Y$ és $b \notin Y$), ha $A \subseteq (Y - \{a\}) \cup A \subseteq B$. Ezzel az (1) -beli minimalizálási feladatot visszavezettük a (2) -belire.
Végül belátjuk (1) és (3) ekvivalenciáját. Ha h egy f szimmetrikus szubmoduláris függvény minorja, $X \subseteq T_2 \subseteq T_1$ akkor $h(X) = f \times T_1.T_2(X) = f(X \cup (V - T_1)) - f(V - T_1)$. Ez alapján $f \times T_1.T_2$ minimalizálása az $X \subseteq T_2$ halmazokra ekvivalens az f minimalizálásával a $V - T_1 \subseteq Y \subseteq (V - T_1) \cup T_2$ halmazokon.

□

Most pedig nézzük Queyranne konstrukcióját.

5.4.2. Tétel (Queyranne). *Legyen f szimmetrikus szubmoduláris függvény a $T \cup \{a\} \cup \{b\}$ alaphalmazon. Ha f -et tudjuk minimalizálni az olyan $X \subseteq T \cup \{a\} \cup \{b\}$ halmazokon, amikre $a \in X$, $b \notin X$, akkor egy tetszőleges g szubmoduláris halmazfüggvényt is tudunk minimalizálni.*

Bizonyítás. Legyen adott a g szubmoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon. Legyen M olyan pozitív szám, amire: $-M < \min_{X \in V} g(X)$, illetve $-M < \min_{X \in V} g(X) - \max_{X \in V} g(X)$. Definiáljunk egy f halmazfüggvényt a $V' = V \cup \{a\} \cup \{b\}$ halmazon ($a, b \notin V$).

$$f(X) = \begin{cases} g(X - a) & \text{ha } a \in X \text{ és } b \notin X \\ -M\,|X| & \text{ha } a, b \in X \\ f(V' - X) & \text{ha } a \notin X. \end{cases}$$

5.4.1. Állítás. *Az így definiált f függvény szimmetrikus és szubmoduláris lesz.*

Bizonyítás. A szimmetria az f definicójának harmadik esete alapján világos, hiszen az X és a $V' - X$ halmazok közül az egyik tartalmazni fogja az a pontot, míg a másik nem. A szubmodularitás belátásához legyen $\emptyset \neq X, Y \subseteq V'$.
1.eset
Ha $X \cap \{a, b\} = Y \cap \{a, b\}$, akkor f -re teljesül a szubmodularitási egyenlőtlenség, mivel egyrészt g -re teljesült, másrészt a $-M\,|X|$ halmazfüggvény moduláris, így egyben szubmoduláris is.
2.eset
Ha X és Y halmazok közül az egyik tartalmazza a másikat, akkor a szubmodularitási egyenlőtlenség triviálisan teljesül az f -re.

3.eset
Ha $a \in X$, $b \notin X$, illetve $a \notin Y$ és $b \in Y$, akkor:

$$f(X \cap Y)+f(X \cup Y) = -M\,|X \cap Y| - M\,|X \cup Y| \leq -2M < g(X-a)+g((V'-Y)-a) = f(X)+f(Y).$$

4.eset
Ha $a \in X$, $b \notin X$, illetve $a, b \in Y$, és $X \nsubseteq Y$, akkor:

$$f(X \cup Y) - f(Y) \leq -M < g(X-a) - g((X \cap Y) - a) = f(X) - f(X \cap Y).$$

Átrendezve ebből adódik a szubmodularitás.
5.eset
Ha $a, b \in X$ és $a, b \notin Y$, akkor $f(X \cup Y) = -M\,|X \cup Y| \leq -M\,|X| = f(X)$, illetve $f(X \cap Y) = -M\,|X \cap Y| \leq -M\,|Y| = f(Y)$. A két egyenlőtlenséget összeadva adódik a szubmodularitás.
A többi eset az előzőekhez hasonlóan kezelhető.

$\square$

Ha $X \subseteq V'$ egy f -et minimalizáló halmaz, amire $a \in X$ és $b \notin X$, akkor $f(X) = g(X-a)$ így az $X - a \subseteq V$ halmaz egy g -t minimalizáló halmaz lesz. Tehát, ha adott pontpárt elválasztó halmazokon tudunk egy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvényt minimalizálni, akkor egy általános szubmoduláris halmazfüggvényt is minimalizálni tudunk.

$\square$

6. fejezet

Minimális transzverzálisok halmazrendszerekben

6.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben a következő problémával fogunk foglalkozni. Legyen adott f és g két halmazfüggvény a V alaphalmazon.
Olyan $R \subseteq V$ halmazt keresünk, amire:

$$|R| \quad \text{minimális, úgy hogy:}$$

$$g(X) \geq f(X) \quad \forall X \subseteq V - R. \tag{6.1}$$

Gráfok esetén lefogás alatt V -beli pontoknak egy olyan L részhalmazát értettük, amely minden élből tartalmaz legalább egy pontot. A hipergráfokra is teljesen hasonlóan definiálható a hiperéleket lefogó ponthalmaz:

6.1.1. Definíció. *Legyen $\mathcal{H}$ hipergráf egy V alaphalmazon. A $\mathcal{H}$ hipergráf transzverzálisán egy olyan $R \subseteq V$ részhalmazt értünk, amire: $R \cap H \neq \emptyset$ minden $H \in \mathcal{H}$ hiperélre.*

6.1.2. Definíció. *Egy $\mathcal{H}$ hipergráf transzverzális számát $\tau(\mathcal{H})$ -val jelöljük és a következő mennyiséget értjük alatta:*

$$\tau(\mathcal{H}) = \min\{|R| : R \text{ a } \mathcal{H} \text{ transzverzálisa}\}.$$

Nevezzünk egy $X \subseteq V$ részhalmazt hiányosnak, ha $g(X) < f(X)$. Egy $X \subseteq V$ részhalmaz tartalmazásra nézve minimális hiányos halmaz, ha minden $Y \subset X$ -re $g(X) \geq f(X)$, azaz a valódi részhalmazai nem hiányosak.
Jelöljük $\mathcal{W}(f,g)$ -vel a tartalmazásra nézve minimális hiányos halmazok rendszerét. Ekkor a fenti feladat a következővel ekvivalens:

$$|R| \quad \text{minimális, úgy hogy:}$$

$$R \cap X \neq \emptyset \quad \forall X \in \mathcal{W}(f,g). \tag{6.2}$$

Valóban egyrészt, ha van egy $R \subseteq V$ részhalmazunk, amire (6.2) feltétel fennáll, akkor az R halmaz minden hiányos halmazba belemetsz, így ha veszünk egy $Y \subseteq V - R$ halmazt, akkor $Y \cap R$ üres, és Y nem lesz hiányos, azaz $g(Y) \geq f(Y)$.
Megfordítva, ha van egy $R \subseteq V$ részhalmazunk, amire (6.1) feltétel teljesül, akkor egy tetszőleges Y hiányos halmazra $g(Y) < f(Y)$, így szükségképpen $Y \not\subseteq V - R$, azaz $Y \cap R \neq \emptyset$.

Tehát a célunk egy R minimális transzverzális megtalálása a $\mathcal{W}(f, g)$ hipergráfban. A következő szakaszban látni fogjuk, hogy egy fa hipergráf esetén létezik algoritmus, ami megad egy minimális transzverzálist. A fejezet fő kérdése az lesz, hogy milyen tulajdonságú f és g halmazfüggvényeket kell vennünk ahhoz, hogy a fenti (6.2) probléma kezelhető legyen. A fejezet végén ki fog derülni, hogy ha g szubmoduláris és pozimoduláris, az f pedig moduloton függvény, akkor létezik polinomiális algoritmus, ami megad egy minimális transzverzálist a $\mathcal{W}(f, g)$ rendszerben. Az utolsó szakaszban látni fogjuk a kiinduló probléma egy alkalmazását forrástelepítésre.
Az egész fejezet Nagamochi és Ibaraki könyve [1] alapján készült.

6.2. Minimális transzverzálisok és fa hipergráfok

Ebben a szakaszban fa hipergráfokkal fogunk foglalkozni. Belátunk egy a gráfokra vonatkozó Kőnig tételhez hasonló tételt fa hipergráfokra, majd mutatunk egy algoritmust, amely kiszámol egy minimális transzverzálist fa hipergráfok esetén. Egy további tételben egy jellemzést látunk majd be fa hipergráfokra. Kiderül, hogy egy hipergráf akkor és csak akkor lesz fa hipergráf, ha teljesül rá a Helly tulajdonság továbbá az élgráfja merevkörű.

Az előző szakaszban definiáltuk a transzverzális fogalmát hipergráfokra, ami a gráfoknál megismert lefogás megfelelője volt. Hasonlóan definiálhatjuk hiperélek egy független halmazát:

6.2.1. Definíció. *Legyen $\mathcal{H}$ egy hipergráf. Hiperélek egy $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ részhalmazát függetlennek mondjuk, ha bármely két különböző $\mathcal{H}'$ -beli hiperél diszjunkt.*

6.2.2. Definíció. *Egy $\mathcal{H}$ hipergráf esetén a a független hiperélek maximális számát $\nu(\mathcal{H})$ -val jelöljük.*

$$\nu(\mathcal{H}) = \max\{|\mathcal{H}'| : \mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H} \textit{ független}\}.$$

Könnyen látható, hogy tetszőleges hipergráf esetén $\tau(\mathcal{H}) \geq \nu(\mathcal{H})$. Vegyük független hiperélek egy tetszőleges halmazát: $\mathcal{H}'$ és a hipergráf egy tetszőleges R transzverzálisát. Ekkor R -nek minden $H \in \mathcal{H}'$ hiperélből legalább egy elemet kell tartalmaznia. A $\mathcal{H}'$ függetlensége miatt pedig ezek az elemek különbözőek.

6.2.3. Definíció. *Legyen $\mathcal{H}$ hipergráf a V alaphalmazon. A $\mathcal{H}$ akkor lesz fa hipergráf, ha létezik egy $T = (V, E)$ fa a V pontjain, úgy hogy minden $H \in \mathcal{H}$ hiperél pontjai a T -nek egy részfáját határozzák meg. A fa hipergráfhoz tartozó T fát a hipergráf alap fájának nevezzük.*

Megjegyzendő, hogy a T alapfa egy $e \in E$ éle nem feltétlenül hiperéle a $\mathcal{H}$ hipergráfnak. Könnyen látható, hogy egy $\mathcal{H}$ fa hipergráf $\mathcal{H}'$ rész hipergráfja is fa hipergráf. Ha vesszük a $\mathcal{H}$ egy T alap fáját, akkor az megfelelő lesz $\mathcal{H}'$ -nek is, hiszen minden hiperél továbbra is egy részfát fog alkotni T -ben.

Válasszuk ki a T alapfa egy $r \in V$ csúcsát gyökérpontnak. Ha ebből a gyökérpontból indulva járjuk be a T fát, akkor jelölje $D(u)$ az összes olyan fabeli csúcs halmazát, amik az u leszármazottai (u -t is beleértve), azaz a gyökérből nézve az u alatt vannak.
Minden $H \in \mathcal{H}$ hiperélre legyen $v_H \in H$ az az egyértelmű csúcs, amire $H \subseteq D(v_H)$. Ilyen v_H csúcs létezik, mivel minden hipergráf a T alapfa egy részfáját határozza meg.
Számozzuk meg a $\mathcal{H}$ -beli hiperéleket, aszerint, hogy a hozzájuk tartozó v_H csúcsnak mekkora a mélysége a T alapfában (az r gyökérből nézve): $H_1, H_2, \ldots, H_{|\mathcal{H}|}$, ha:

$$depth(v_{H_1}) \geq depth(v_{H_2}) \geq \cdots \geq depth(v_{H_{|\mathcal{H}|}}). \tag{6.3}$$

Mielőtt bebizonyítanánk a Kőnig típusú tételt fa hipergráfokra, előbb egy lemmára lesz szükségünk.

6.2.1. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ egy fa hipergráf. Soroljuk fel a $\mathcal{H}$ hiperéleit a fenti sorrendben: $H_1, H_2, \ldots, H_{|\mathcal{H}|}$. Minden H_i és H_j hiperélre, amire $H_j \cap H_i \neq \emptyset$ és $j \geq i$, a H_j tartalmazza a fent definiált v_{H_i} csúcsot, azaz a $\{v_{H_i}\}$ transzverzálisa lesz a $\mathcal{H}$ következő részhipergráfjának: $\{H_j : j \geq i,\ H_j \cap H_i \neq \emptyset\}$.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy létezik olyan H_j hiperél, amire $j \geq i$ és $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ a $v_{H_i} \notin H_j$, azaz $H_i \cap H_j - \{v_{H_i}\} \neq \emptyset$. Mivel $j \geq i$, így a sorrend alapján $depth(v_{H_i}) \geq depth(v_{H_j})$ továbbá $v_{H_i} \notin H_j$ miatt: $depth(v_{H_i}) > depth(v_{H_j})$.
Azt is tudjuk, hogy egy $u \in H_i \cap H_j - \{v_{H_i}\}$ csúcsra: $depth(u) > depth(v_{H_i})$, mivel a v_{H_i} csúcs definíciója miatt minden H_i -beli csúcs mélysége kisebb, a v_{H_i} mélységénél.
Az H_j halmaz tartalmaz egy $u \in H_i \cap H_j - \{v_{H_i}\}$ csúcsot, továbbá tartalmazza v_{H_j} -t, de nem tartalmazza v_{H_i} -t. Továbbá $depth(u) > depth(v_{H_i}) > depth(v_{H_j})$, ez viszont ellentmond annak, hogy H_j egy részfát határoz meg a T alap fában és $H_j \subseteq D(v_{H_j})$.
Ezzel a lemmát beláttuk.

□

6.2.1. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ egy fa hipergráf a V alaphalmazon. Ekkor $\tau(\mathcal{H}) = \nu(\mathcal{H})$.*

Bizonyítás. A tételt $|\mathcal{H}|$ -ra vonatkozó indukcióval fogjuk bizonyítani. Ha $\mathcal{H} = \emptyset$, akkor $\tau(\mathcal{H}) = \nu(\mathcal{H})$ teljesül az $R = \emptyset$ transzverzálisra és az $\mathcal{M} = \emptyset$ független hiperél halmazra. A továbbiakban feltehető, hogy $\mathcal{H} \neq \emptyset$.
Vegyük a H_1 hiperélet az előzőekben definiált sorrendből, és legyen $\mathcal{H}' = \mathcal{H} - \{H \in \mathcal{H} : H \cap H_1 \neq \emptyset\}$. Az indukciós feltevés miatt a $\mathcal{H}'$ hipergráfban létezik olyan R' transzverzális és $\mathcal{M}'$ független hiperél halmaz, amire $|R'| = |\mathcal{M}'|$.
Az $\mathcal{M} = \mathcal{M}' \cup \{H_1\}$ hiperél halmaz független lesz az eredeti $\mathcal{H}$ hipergráfban, hiszen a $\mathcal{H}'$ definíciója miatt minden $H \in \mathcal{H}'$ hiperél diszjunkt H_1 -től.
Az előző lemma alapján a $\{v_{H_1}\}$ transzverzálisa lesz a $\{H \in \mathcal{H} : H \cap H_1 \neq \emptyset\}$ hiperél halmaznak, és így $R = R' \cup \{v_{H_1}\}$ transzverzálisa az eredeti $\mathcal{H}$ hipergráfnak.
Ezzel pedig készen vagyunk, mivel a $\mathcal{H}$ hipergráfban megadtunk olyan R transzverzálist és $\mathcal{M}$ független hiperél halmazt, amikre $|R| = |\mathcal{M}|$. Korábban már láttuk, hogy tetszőleges R transzverzálisra és $\mathcal{M}$ független hiperél halmazra: $|R| \geq |\mathcal{M}|$. Végülis beláttuk, hogy $\tau(\mathcal{H}) = \nu(\mathcal{H})$.

□

Az előbb bizonyított tételt felhasználva egy egyszerű algoritmust tudunk adni minimális transzverzális meghatározására egy fa hipergráfban. Fontos hangsúlyozni, hogy a következő algoritmushoz szükség van a fa hipergráf alap fájára, továbbá egy eljárásra, ami eldönti, hogy egy tetszőleges R halmaz transzverzális -e vagy sem.

Algoritmus Minimális Transzverzális
Input: A $\mathcal{H}$ fa hipergráf és annak egy $T = (V, E)$ alap fája
Output: A $\mathcal{H}$ hipergráf egy minimális transzverzálisa

1. Legyen $R := \emptyset$ és $U := V$;
2. **Amíg** $U \neq \emptyset$
3. Legyen v a $T[U]$ egy levele és $U := U - \{v\}$;
4. **Ha** $R \cup U$ nem transzverzálisa $\mathcal{H}$ -nak **akkor** $R := R \cup \{v\}$
5. **Vége** (Amíg)

6. Output R

A fenti algoritmus eredményeként kapott R halmaz valóban a hipergráf egy transzverzálisa. Ehhez elég meggondolni, hogy kezdetben $R \cup U = V$ egy transzverzális volt, továbbá minden lépésben az $R \cup U$ transzverzalitása megőrződik.
A kapott R halmaz minimális transzverzális lesz. Ehhez elég megadni egy $|R|$ méretű $\mathcal{M}$ független hiperél halmazt az előző tétel szerint. Amikor egy új v csúccsal bővítjük az R halmazt, akkor szükségképpen létezik legalább egy olyan H_v hiperél, amit az eddigi $R \cup U$ halmaz nem fog le, tehát $H_v \subseteq D(v) - R$. Ha minden $v \in R$ esetén veszünk egy ilyen H_v hiperélt, akkor ezek függetlenek lesznek. Legyen $v_1, v_2 \in R$ és v_1 -et előbb választottuk az R halmazba, mint a v_2 -öt. Legyen R_1 és R_2 a pillanatnyi transzverzálisok a v_1 és a v_2 kiválasztásánál. Azt szeretnénk belátni, hogy $H_{v_1} \subseteq D(v_1) - R_1$ és $H_{v_2} \subseteq D(v_2) - R_2$ diszjunktak. Ha H_{v_2} metszené H_{v_1} -et, akkor szükségszerűen $H_{v_2} \cap D(v_1) \neq \emptyset$. A $v_1 \in R_2$, így $v_1 \notin H_{v_2}$, ez viszont ellentmondás, mivel a H_{v_2} hiperél egy részfát alkot a T -ben.
Tehát az algoritmus valóban egy minimális transzverzálist ad meg.

6.2.4. Definíció. *Egy G gráfról akkor mondjuk, hogy merevkörű, ha G minden legalább négy hosszú körének van átlója.*

Mielőtt a fa hipergráfok jellemzéséről szóló tételeket bebizonyítanánk, szükségünk lesz egy ismertebb tételre, ami a merevkörű gráfokkal kapcsolatos.

6.2.5. Definíció. *Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf, $|V| = n$. A gráf pontjainak egy $v_1, \ldots, v_n$ sorrendjét szimpliciálisnak nevezzük, ha minden i -re a v_i csúcs azon v_j szomszédai, amire $j \geq i$ egy teljes részgráfot feszítenek.*

A következő tételt bizonyítás nélkül mondjuk ki. A bizonyítás megtalálható itt: [1].

6.2.2. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy egyszerű gráf, $|V| \geq 2$. Ha G merevkörű, akkor létezik a csúcsainak egy $v_1, \ldots, v_n$ szimpliciális sorrendje.*

6.2.6. Definíció. *Egy $\mathcal{H}$ hipergráfról azt mondjuk, hogy teljesíti a Helly tulajdonságot, ha $\mathcal{H}$ hiperéleinek bármely $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ páronként metsző részrendszerére: $\cap\{H : H \in \mathcal{H}'\} \neq \emptyset$.*

6.2.7. Definíció. *Egy $\mathcal{H}$ hipergráf $L(\mathcal{H})$ élgráfján egy olyan gráfot értünk, aminek a csúcsai a hipergráf hiperéleinek felelnek meg, és két csúcs akkor van összekötve, ha a nekik megfelelő hiperélek metszik egymást.*

6.2.3. Tétel. *Egy $\mathcal{H}$ hipergráf akkor és csak akkor fa hipergráf, ha $\mathcal{H}$ -ra teljesül a Helly tulajdonság és $\mathcal{H}$ élgráfja: $L(\mathcal{H})$ merevkörű.*

Bizonyítás. Először a szükséges irányt látjuk be. Legyen $T = (V, E)$ a $\mathcal{H}$ fa hipergráf egy alap fája. Definíció szerint minden $H \in \mathcal{H}$ hiperél megad egy részfát a T -ben. Ha veszünk olyan $H_1, \ldots, H_k$ hiperéleket, amelyek páronként metszik egymást, akkor éppen az előző tulajdonság miatt $\cap_{i=1}^{k} H_i \neq \emptyset$. Tehát a $\mathcal{H}$ hipergráfra teljesül a Helly tulajdonság.
Meg kell még mutatnunk, hogy $L(\mathcal{H})$ merevkörű. Indirekt tegyük fel, hogy $L(\mathcal{H})$ -ban létezik egy $h_0, \ldots, h_{k-1}, h_k (= h_0)$ átlómentes kör ($k \geq 4$). Ekkor a hipergráfban léteznek $H_0, \ldots, H_{k-1}, H_k (= H_0)$ hiperélek, úgy hogy $i \neq j$ esetén $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ pontosan akkor, ha i és j ciklikus értelemben két egymást követő index. Ekkor $\cup_{i=0}^{k-2} H_i$ is egy T_1 részfát ad meg a T -ben, mivel $h_0, \ldots, h_{k-2}$ egy összefüggő, körmentes részgráf az élgráfban. Ugyanakkor H_{k-1} is egy T_2 részfát határoz meg a T alapfában és $H_{k-1} \cap H_i = \emptyset$ minden $i = 1, \ldots, k-3$ -ra, ez pedig ellentmondás, mert ekkor a T_1 és a T_2 részfák egy kört adnának a T alap fában.
Térjünk rá az elégséges irányra. Indukcióval bizonyítunk a $|V| + |\mathcal{H}|$ -ra. Ha $\min\{|V| +$

$|\mathcal{H}|\} = 1$, akkor könnyen látható, hogy a hipergráf egy fa hipergráf lesz.
Az indukciós lépésben két esetet különítünk el. Ha létezik $\mathcal{H}$ -ban egy egypontú hiperél: $\{v\}$, akkor az indukciós feltevés alapján a $\mathcal{H}' = \mathcal{H} - \{v\}$ hipergráf fa hipergráf lesz és létezik egy $T = (V, E)$ alap fája. Ekkor a T alap fa az eredeti $\mathcal{H}$ hipergáfra is megfelelő lesz, mert a $\{v\}$ egypontú hiperél a T meglévő alapfában egy egypontú triviális részfát határoz meg.
A továbbiakban feltehető, hogy minden $\mathcal{H}$ -beli hiperél legalább két pontot tartalmaz.
Tudjuk, hogy $L(\mathcal{H})$ merevkörű, így létezik szimpliciális sorrendje a csúcsoknak: $v_1, \ldots, v_n$. A v_1 csúcs szomszédai egy teljes részgráfot feszítenek, mivel v_1 összes szomszédja a v_1 után van a sorrendben. Az eredeti hipergráfban jelölje H a v_1 csúcsnak megfelelő hiperélet. Ekkor minden H' és H'' hiperélre, amire $H' \cap H \neq \emptyset$ és $H'' \cap H \neq \emptyset$ a $H' \cap H''$ nem üres. A Helly tulajdonság alapján ekkor létezik egy olyan v csúcs, ami minden olyan H' hiperélben benne van, amire: $H' \cap H \neq \emptyset$.
Legyen $u \in H - \{v\}$ és hagyjuk el minden hiperélből ezt az u csúcsot: $\mathcal{H}' = \{H - \{u\} : H \in \mathcal{H}\}$. Ha veszünk egy H_* hiperélet, ami u -t tartalmazza, akkor $H_* \cap H \neq \emptyset$ és így $v \in H_*$.
Azt állítjuk, hogy a $\mathcal{H}'$ hipergráf is teljesíti a Helly tulajdonságot. A hipergráf csak olyan hiperéleken változik, amik tartalmazzák az u -t. A fenti megjegyzés miatt ezek a hiperélek mind tartalmazzák a v -t is, így ha hiperélek egy páronként metsző rendszere az eredeti hipergráfban rendelkezett egy közös ponttal, akkor ez az új hipergráfban is teljesülni fog.
A $\mathcal{H}'$ hipergráf élgráfja merevkörű lesz. Ez azért fog teljesülni, mert a $\mathcal{H}'$ élgráfja megegyezik az eredeti $\mathcal{H}$ hipergráf élgráfjával. Egyrészt az élgráf ponthalmaza ugyanaz marad, mert feltettük, hogy nincs egypontú hiperél. Másrészt, ha két hiperél metszette egymást az eredeti hipergráfban, akkor a $\mathcal{H}'$ -ben is fogja, hiszen ellenkező esetben lenne olyan $H' \in \mathcal{H}$ és $H'' \in \mathcal{H}$, hogy $H' \cap H'' = \{u\}$, ekkor viszont egy korábbi megjegyzés miatt $v \in H' \cap H''$, így a hiperélek az új hipergráfban is metszik egymást.
Alkalmazhatjuk az indukciós feltevést a $\mathcal{H}'$ hipergráfra, azaz $\mathcal{H}'$ egy fa hipergráf lesz, aminek létezik egy $T' = (V - \{u\}, E')$ alap fája. A T' segítségével megadunk egy T alap fát az eredeti V alaphalmazon, ami a $\mathcal{H}$ hipergráf alap fája lesz. T -t a T' -ből úgy kapjuk, hogy hozzávesszük az (u, v) élt. A $\mathcal{H}$ hipergráfban egy u -t elkerülő hiperél részfát alkot a T' -ben és így a T -ben is. Ha pedig egy olyan $H' \in \mathcal{H}$ -beli hiperélet veszünk, ami u -t tartalmazza, akkor egyrészt a neki megfelelő $H - \{u\}$ hiperél részfát alkot a T' -ben. Továbbá tudjuk, hogy minden u -t tartalmazó hiperél a v -t is tartalmazza, így a v pont benne lesz ebben a részfában, és ezt összekötve az új u csúccsal olyan részfát kapunk, ami T -ben lesz és pont a H' hiperélnek felel meg.

□

A továbbiakban belátunk egy másik jellemzést is fa hipergráfokra, aminek segítségével a hiperélek számában polinomiális algorimust tudunk adni az alap fa meghatározására egy fa hipergráfban.
Legyen $\mathcal{H}$ egy hipergráf a V alaphalmazon, továbbá legyen $w : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+ - \{0\}$ egy súlyfüggvény a hiperéleken. Definiáljuk a G_w teljes gráfot a V alaphalmazon a következő súlyfüggvénnyel:

$$c(u, v) = \sum \{w(H) : H \in \mathcal{H},\ \{u, v\} \subseteq H\}.$$

6.2.4. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ egy hipergráf a V alaphalmazon és $w : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+ - \{0\}$ egy súlyfüggvény a hiperéleken. A $\mathcal{H}$ hipergráf akkor és csak akkor lesz fa hipergráf, ha egy G_w -beli maximális súlyú feszítő fa alap fája lesz a $\mathcal{H}$ -nak.*

Bizonyítás. Elég a szükséges irányt bebizonyítani, az elégséges irány könnyen látható.
Ha veszünk egy tetszőleges T' feszítő fát a G_w gráfban, akkor:

$$c(T') = \sum_{\{u,v\} \in E(T')} c(u, v) \leq \sum_{H \in \mathcal{H}} (|H| - 1) w(H).$$

Hiszen minden H hiperélben legfeljebb $|H|-1$ darab T' -beli él lesz. Tudjuk, hogy $\mathcal{H}$ fa hipergráf, így létezik egy T alapfája. Definició szerint, ekkor minden hiperél egy részfát határoz meg a T -ben, azaz minden H hiperél pontosan $|H|-1$ darab T -beli élet fog tartalmazni és így a fenti egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül a T alap fára.
Ekkor minden maximális súlyú T_* feszítő fa is szükségképpen egyenlőséggel teljesíti a fenti egyenlőtlenséget:

$$c(T_*) = \sum_{H \in \mathcal{H}} (|H|-1)w(H).$$

Ez pedig azt jelenti, hogy minden H hiperélnek pontosan $|H|-1$ darab T_* -beli élet kell tartalmaznia, tehát minden hiperél egy részfát határoz meg T_* -ban, azaz T_* egy alap fája a $\mathcal{H}$ hipergráfnak.

□

Az előző tétel alapján könnyen tudunk polinomiális algoritmust adni, ami kiszámolja egy fa hipergráf alap fáját. Ehhez elég például a Kruskal algoritmust venni minimális súlyú feszítő fák meghatározására. Ha a nem negatív w súlyfüggvény mínusz egyszeresét vesszük, akkor könnyen kiszámítható a maximális súlyú feszítő fa G_w -ben, ez pedig megad egy alap fát az előző tétel szerint. Fontos kihangsúlyozni, hogy az így kapott alap fát meghatározó algoritmus polinomiális lesz a hipergráf hiperéleinek a számában.

Egy $H \in \mathcal{H}$ hiperélt nevezzünk v -elkerülőnek ($v \in V$), ha $v \notin H$. Egy maximális v -t elkerülő hiperél pedig legyen egy olyan tartalmazásra nézve maximális hiperél, ami v -elkerülő.
A következő lemma kulcs fontosságú lesz majd a utolsó előtti szakaszban.

6.2.2. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ egy fa hipergráf.*

$$\mathcal{H}_* = \{H \in \mathcal{H} : H \text{ egy maximális } v \text{ -elkerülő hiperél, valamilyen } v \in V \text{ -re}\}.$$

Ekkor a $\mathcal{H}_*$ egy T_* alap fája egyben a $\mathcal{H}$ -nak is alap fája lesz.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan $H \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_*$ hiperél, ami a T_* -ban nem alkot egy részfát. Ekkor létezik $u, u' \in H$, hogy az u -t az u' -vel összekötő T_* -beli egyértelmű P úton lesz olyan v csúcs, ami nincs benne H -ban. Ekkor a H egy v -elkerülő hiperél lesz, továbbá $\mathcal{H}_*$ -ban létezik olyan H' hiperél, ami tartalmazásra nézve maximális v -elkerülő és $H \subset H'$.
Ez viszont ellentmond annak, hogy T_* a $\mathcal{H}_*$ alap fája, mivel ekkor a P út nincs teljesen benne a H' hiperélben ($v \notin H'$).

□

6.3. Hiányos halmazok szubmoduláris rendszerekben

Ebben a szakaszban belátjuk, hogy ha a kiinduló (6.2) feladatban a g függvényre csak szubmodularitást követelünk meg, az f függvényt pedig kellően szépnek: uniformnak választjuk ($f(X) = f(Y)$ minden $\emptyset \neq X, Y \subseteq V$ -re), akkor nincs polinomiális algoritmus ami kiszámolná a minimális transzverzálisát a $\mathcal{W}(f, g)$ hipergráfnak.
Először belátunk egy lemmát, arról hogy tetszőleges $G = (V, E)$ gráf előáll, mint egy g szubmoduláris és egy f uniform halmazfüggvényhez elkészített $\mathcal{W}(f, g)$ hipergráf. Azután mutatunk egy olyan példát, amire $\mathcal{W}(f, g)$ nem fa-hipergráf.

6.3.1. Lemma. *Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf. Ekkor létezik olyan g szubmoduláris és f uniform halmazfüggvény a V alaphalmazon, hogy $E = \mathcal{W}(f, g)$.*

Bizonyítás. Legyen k tetszőleges valós szám. Definiáljuk az f halmazfüggvényt a következőképpen: $f(X) = k$ minden $\emptyset \neq X \subseteq V$ -re és $f(\emptyset) = 0$. A g halmazfüggvény pedig legyen a következő:

$$g(X) = k - i_G(X)$$

Ahol $i_G(X)$ szokásosan a G gráf X halmaz által feszített éleinek számát jelöli.
A g szubmoduláris, mivel $i_G(X)$ szupermoduláris, a mínusz egyszerese így szubmoduláris, a k konstans függvény pedig moduláris.
Ekkor egy $X \subseteq V$ halmaz akkor lesz hiányos, ha $i_G(X) \geq 1$, azaz az X legalább egy élt feszít. Könnyen meg lehet gondolni, hogy ekkor a tartalmazásra nézve minimális hiányos halmazok éppen azok az $\{u, v\}$ kételemű halmazok lesznek, amire $uv \in E$ egy él.
Azaz $\mathcal{W}(f, g) = E$.

□

6.3.1. Állítás. *Létezik olyan g szubmoduláris és f uniform halmazfüggvény, amire $\mathcal{W}(f, g)$ nem fa-hipergráf.*

Bizonyítás. Legyen a $G = (V, E)$ gráf egy 4 pontú kör. Legyenek f és g az előző lemma alapján olyanok, amikre $\mathcal{W}(f, g) = E$. Legyen L a $\mathcal{W}(f, g)$ hipergráf élgráfja. Az L is egy 4 pontú kör, aminek nincs átlója. Azaz a $\mathcal{W}(f, g)$ hipergráf élgráfja nem merevkörű, így a (6.2.3) tétel miatt $\mathcal{W}(f, g)$ nem fa-hipergráf.

□

6.3.1. Tétel. *Legyen g egy szubmoduláris halmazfüggvény. Ha* $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ *, akkor nem létezik a T_g -ben polinomiális algoritmus, ami kiszámolná a $\mathcal{W}(f, g)$ hipergráf minimális transzverzálisát, még akkor sem ha f uniform halmazfüggvény.(Emlékeztetünk, hogy T_g -vel azt az időt jelöltük, amibe egy tetszőleges halmaz g értékének a megadása kerül.)*

Bizonyítás. A problémát a minimális lefogási feladatra (irányítatlan gráfban az éleket lefogó minimális ponthalmaz meghatározása) vezetjük vissza, ami **NP** teljes.
Legyen $G = (V, E)$ tetszőleges irányítatlan gráf. Megmutatjuk, hogy ha létezik polinomiális algoritmus a minimális transzverzális meghatározására a $\mathcal{W}(f, g)$ hipergráfban, g szubmoduláris függvény esetén, akkor egy minimális lefogást is meg tudunk határozni a $G = (V, E)$ tetszőleges gráfban.
Az előző lemma alapján létezik olyan g szubmoduláris és f uniform halmazfüggvény, amire $\mathcal{W}(f, g) = E$. Ekkor egy R ponthalmaz pontosan akkor lesz lefogó, ha az R a $\mathcal{W}(f, g) = E$ transzverzálisa.
Tehát ha lenne egy minimális transzverzálist T_f -ben és T_g -ben polinomiális idő alatt kiszámoló algoritmusunk a $\mathcal{W}(f, g)$ -re, akkor egy minimális lefogó ponthalmazt is meg tudnánk határozni polinom időben a G gráfban.

□

6.4. Pozimoduláris függvények struktúrája

6.4.1. Definíció. *Legyen $v \in V$ egy adott pont, illetve g egy halmazfüggvény a V alaphalmazon. Egy $X \subseteq V$ halmazt v tömörnek nevezünk az g -re nézve, ha $v \in X$ és teljesül a következő:*

$$g(X) < g(Y) \quad \forall Y \subset X \quad \textit{amire:} \quad v \in Y.$$

Egy $v \in V$ pontra a v tömör halmazok rendszerét jelöljük: S_v -vel. Továbbá az összes tömör halmazok rendszere legyen:

$$S(g) = \cup_{v \in V} S_v.$$

Ebben a fejezetben a következő tétel bizonyítását fogjuk tárgyalni néhány lemmán keresztül:

6.4.1. Tétel. *Ha g pozimoduláris halmazfüggvény, akkor $S(g)$ egy fa-hipergráf.*

A (6.2.3) tétel alapján elég belátni, hogy $S(g)$ merevkörű és teljesül rá a Helly tulajdonság.

6.4.1. Lemma. *Legyen g pozimoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon, továbbá legyenek $X_0, X_1, \ldots, X_{h-1}, X_h (= X_0)$ részhalmazai a V -nek, úgy hogy $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ pontosan akkor, ha i és j egymást követő számok. Legyen $Y_i = X_i \cap X_{i+1}$ minden $i = 0, 1, \ldots, h-1$ -re.*
Ekkor:

$$\sum_{i=0}^{h-1} g(X_i) \geq \sum_{i=0}^{h-1} g(Y_i).$$

Bizonyítás. Felhasználva g pozimodularitását és azt, hogy az X_i halmazok ciklikusan, egymást egy kör mentén metszve helyezkednek el, a következő egyenlőtlenségeket írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=0}^{h-1} g(X_i) &= \sum_{i=0}^{h-1} g(X_i) + g(X_{i+1}) \\
&\geq \sum_{i=0}^{h-1} g(X_i - X_{i+1}) + g(X_{i+1} - X_i) \\
&= \sum_{i=0}^{h-1} g(X_{i+1} - X_{i+2}) + g(X_{i+1} - X_i) \\
&\geq \sum_{i=0}^{h-1} g(X_i \cap X_{i+1}) + g(X_{i+1} \cap X_{i+2}) \\
&= \sum_{i=0}^{h-1} g(Y_i) + g(Y_{i+1}) = 2\sum_{i=0}^{h-1} g(Y_i).
\end{aligned}$$

Ahol a második egyenlőtlenségnél felhasználtuk, hogy csak két egymást követő halmaz metszi egymást, így: $(X_{i+1} - X_{i+2}) - (X_{i+1} - X_i) = X_{i+1} \cap X_i$ és $(X_{i+1} - X_i) - (X_{i+1} - X_{i+2}) = X_{i+1} \cap X_{i+2}$.

□

6.4.2. Lemma. *Legyen g pozimoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon. Legyenek $X_1, \ldots, X_h$ a V részhalmazai, $I = \{1, 2, \ldots, h\}$. Tetszőleges $J \subseteq I$ esetén legyen $Z_J = \cap_{j \in J} X_j$. Ha $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ minden $i, j \in I$ -re, akkor:*

$$\sum_{i \in I} g(X_i) \geq \sum_{i \in I} g(Z_{I-\{i\}} - Z_I). \tag{6.4}$$

Bizonyítás. h -ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. Kezdő lépésként legyen $h = 2$, ekkor $Z_{I-\{i\}} - Z_I = X_2 - (X_1 \cap X_2) = X_2 - X_1$, ha $i = 1$ és $Z_{I-\{i\}} - Z_I = X_1 - (X_1 \cap X_2) = X_1 - X_2$, ha $i = 2$. Ezzel pedig a (6.4) egyenlőtlenség éppen a pozimodularitási egyenlőtlenség lesz.

Az indukciós lépéshez tegyük fel, hogy minden $h \leq l$ -re igaz az egyenlőtlenség és szeretnénk $h = l + 1$ -re bizonyítani.

$$
\begin{aligned}
(h-1)\sum_{i\in I} g(X_i) &= \sum_{i\in I}\sum_{j\in I-\{i\}} g(X_j) \\
&\geq \sum_{i\in I}\sum_{j\in I-\{i\}} g(Z_{I-\{i,j\}} - Z_{I-\{i\}}) \quad \text{indukció alapján} \\
&= \sum_{i,j\in I\, i<j} g(Z_{I-\{i,j\}} - Z_{I-\{i\}}) + g(Z_{I-\{i,j\}} - Z_{I-\{j\}}) \\
&\geq \sum_{i,j\in I\, i<j} g(Z_{I-\{i\}} - Z_I) + g(Z_{I-\{j\}} - Z_I) \\
&= (h-1)\sum_{i\in I} g(Z_{I-\{i\}} - Z_I).
\end{aligned}
$$

Ahol a második egyenlőtlenség a pozimodularitás miatt teljesül, felhasználva, hogy $(Z_{I-\{i,j\}} - Z_{I-\{i\}}) - (Z_{I-\{i,j\}} - Z_{I-\{j\}}) = (Z_{I-\{i,j\}} - Z_{I-\{i\}}) \cap Z_{I-\{j\}} = Z_{I-\{j\}} - Z_I$. Ezzel az indukciós lépést beláttuk.

□

6.4.3. Lemma. *Legyen g pozimoduláris halmazfüggvény a V alaphalmazon. Tetszőleges $X \subseteq V$ -re legyen:*

$$A_X = \{v \in X : X \in S_v\}. \tag{6.5}$$

Azaz azon v pontok halmaza, amikre az X halmaz v tömör lesz.
Ha két $X, Y \in S(g)$ halmazra $X \cap Y \neq \emptyset$, akkor az $X \cap Y$ halmaz tartalmazni fogja vagy A_X -et, vagy A_Y -t.

Bizonyítás. A tétel feltételei alapján $X \cap Y$ nem üres. Feltehető, hogy $X - Y$ és $Y - X$ sem üresek, mivel ellenkező esetben $X \subseteq Y$ vagy $Y \subseteq X$ teljesülne és így $A_X \subseteq X = X \cap Y$, vagy pedig $A_Y \subseteq Y = X \cap Y$ alapján a tétel rögtön következik.
A pozimodularitási egyenlőtlenség alapján:

$$g(X) \geq g(X - Y) \quad \text{vagy} \quad g(Y) \geq g(Y - X)$$

Tegyük fel, hogy $g(X) \geq g(X - Y)$ teljesül (a másik eset hasonlóan kezelhető), ekkor az X halmaz nem lehet v tömör halmaz egy $v \in X - Y$ pontra, mert $X - Y$ egy valódi részhalmaza X -nek. Azaz kijött, hogy tetszőleges $v \in X$ pontra, amire az X halmaz v tömör: $v \in X \cap Y$ és így $A_X \subseteq X \cap Y$.

□

6.4.4. Lemma. *Legyen g pozimoduláris halmazfüggvény. Ekkor az $S(g)$ hipergráf L élgráfja merevkörű.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy L nem merevkörű.
Legyen $X_0, X_1, \ldots, X_h (= X_0)$ egy az L -beli átlómentes körnek megfelelő halmazok $S(g)$ -ben ($h \geq 4$). Legyen $Y_i = X_i \cap X_{i+1}$. Mivel az X_i halmazok egymást követve egy kör mentén metszik egymást, ezért $Y_i \neq \emptyset$ minden $i = 0, 1, \ldots, h-1$ -re, továbbá $Y_i \cap Y_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ -re.
Tudjuk, hogy $X_0 \cap X_1 \neq \emptyset$, így a (6.4.3) lemma alapján:

$$A_{X_0} \subseteq Y_0 \quad \text{vagy} \quad A_{X_1} \subseteq Y_0$$

Tegyük fel, hogy $A_{X_1} \subseteq Y_0$ teljesül (a másik eset hasonlóan kezelhető), ekkor alkalmazzuk megint a (6.4.3) lemmát: $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, így $A_{X_1} \subseteq Y_1$ vagy $A_{X_2} \subseteq Y_1$, mivel $Y_0 \cap Y_1 = \emptyset$, így csak az utóbbi fordulhat elő.
A fenti gondolatmenetet ismételve kapjuk, hogy:

$$A_{X_{i+1}} \subseteq Y_i \quad \forall i = 0, 1, \ldots, h-1$$

Tudjuk, hogy $X_{i+1} \in S(g)$, azaz $X_{i+1} \in S_v$ valamilyen v pontra. Az előbbi miatt viszont, azon v pontok, amikre X_{i+1} halmaz v tömör lesz, benne vannak az Y_i -ben, így létezik egy $v \in Y_i \subset X_{i+1}$, amire az X_{i+1} halmaz v tömör lesz, és így definíció alapján:

$$g(Y_i) > g(X_{i+1}) \quad \forall i = 0, 1, \ldots, h-1$$

Ekkor viszont:

$$\sum_{i=0}^{h-1} g(Y_i) > \sum_{i=0}^{h-1} g(X_i),$$

ami ellentmond a (6.4.1) lemmának és ezzel a bizonyítás kész.

□

A (6.4.1) tétel belátásához már csak elég megmutatni, hogy $S(g)$ -re teljesül a Helly tulajdonság.

6.4.5. Lemma. *Legyen g pozimoduláris halmazfüggvény, továbbá legyen $\mathcal{F} = \{X_1, \ldots, X_h\} \subseteq S(g)$ olyan részhalmazrendszere $S(g)$ -nek, amire teljesül, hogy $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ bármely két $\mathcal{F}$ -beli halmazra. $I = \{1, \ldots, h\}$.*
Ekkor létezik egy $X_i \in \mathcal{F}$, hogy $A_{X_i} \subseteq \cap_{i \in I} X_i = Z_I$.

Bizonyítás. A h -ra vonatkozó indukcióval bizonyítunk. $h = 2$ esetén az állítás éppen megegyezik a (6.4.3) lemmával.
Az indukciós lépéshez tegyük fel, hogy $h \leq l$ -re tudjuk az állítást és szeretnénk $h = l + 1$ -re bizonyítani. Indirekt tegyük fel, hogy $A_{X_i} \nsubseteq Z_I$ tetszőleges $i \in I$ -re.
Az indirekt feltevés miatt és az indukciós feltevés miatt, ekkor minden $j \in I$ -re létezik egy $i(j) \in I - \{j\}$ index, hogy:

$$A_{X_{i(j)}} \subseteq Z_{I-\{j\}} \quad \text{de} \quad A_{X_{i(j)}} \nsubseteq Z_I.$$

Azaz $A_{X_{i(j)}} \cap (Z_{I-\{j\}} - Z_I) \neq \emptyset$. Ekkor:

$$g(X_{i(j)}) < g(Z_{I-\{j\}} - Z_I) \tag{6.6}$$

Mivel egyrészt $Z_{I-\{j\}} - Z_I$ egy nem üres valódi részhalmaza $X_{i(j)}$ -nek, másrészt $A_{X_{i(j)}} \cap (Z_{I-\{j\}} - Z_I) \neq \emptyset$ miatt az $X_{i(j)}$ halmaz v tömör lesz egy $v \in Z_{I-\{j\}} - Z_I$ pontra.
Vegyük észre, hogy az $i(j)$ indexek befutják az I indexhalmazt, ahogy j befutja az I -t. Tegyük fel, hogy $i(j) = i(j')$ valamilyen $j \neq j'$ indexpárra, ekkor:

$$A_{X_{i(j)}} = A_{X_{i(j')}} \subseteq Z_{I-\{j\}} \cap Z_{I-\{j'\}} = Z_I,$$

ami ellentmondana az indirekt feltevésnek. Végül a (6.6) egyenlőtlenségeket összegezve, kapjuk:

$$\sum_{j \in I} g(X_{i(j)}) = \sum_{i \in I} g(X_i) < \sum_{i \in I} g(Z_{I-\{j\}} - Z_I).$$

Ez viszont ellentmond a (6.4.2) lemmának és így az indukciós lépést beláttuk.

□

6.4.1. Következmény. *Legyen g pozimoduláris halmazfüggvény. Ekkor $S(g)$ -re teljesül a Helly tulajdonság.*

Bizonyítás. Az előző lemma alapján tudjuk, hogy ha $S(g)$ -nek van egy páronként metsző részrendszere: $X_1, \ldots, X_h$, akkor lesz olyan i, amire $A_{X_i} \subseteq \cap_{i=1}^h X_i$. A_{X_i} pedig nem üres halmaz, mivel $X_i \in S(g)$ miatt az X_i halmaz valamilyen v pontra v tömör lesz. Azaz $\cap_{i=1}^h X_i \neq \emptyset$.

□

Beláttuk, hogy $S(g)$ teljesíti a Helly tulajdonságot, illetve az élgráfja merevkörű, így a (6.2.3) tétel alapján $S(g)$ fa hipergráf lesz és ezzel beláttuk a (6.4.1) tételt.

6.5. Hiányos halmazok pozimoduláris rendszerekben

Ebben a szakaszban kiderül, hogy mi a kapcsolat az előző fejezetbeli tömör halmazok és a $\mathcal{W}(f,g)$ rendszer között. Belátjuk, hogy ha f moduloton és g pozimoduláris halmazfüggvény, akkor a $\mathcal{W}(f,g)$ fa hipergráf lesz, ami lehetővé teszi a hatékony minimális transzverzális keresést.

6.5.1. Definíció. *Legyen f egy halmazfüggvény a V alaphalmazon. Az f halmazfüggvényt modulotonnak nevezzük, ha minden nem üres $X \subseteq V$ halmazra létezik egy $v_X \in X$ pont, hogy:*

$$f(Y) \geq f(X) \quad \forall Y \subseteq X \quad \textit{amire:} \quad v_X \in Y.$$

6.5.1. Lemma. *Legyen r a V csúcsain értelmezett függvény: $r : V \to \mathbb{R}_+$. Továbbá legyen f a következő halmazfüggvény a V -n:*

$$f(X) = \begin{cases} \max_{v \in X} r(v) & \textit{ha } X \neq \emptyset \\ 0 & \textit{ha } X = \emptyset \end{cases}$$

Ekkor az f moduloton lesz.

Bizonyítás. Legyen $\emptyset \neq X \subseteq V$. Válasszunk egy olyan $v_* \in X$ elemet, amire $r(v_*) = \max_{v \in X} r(v)$. Ekkor minden $Y \subseteq X$ -re, amire $v_* \in Y$ teljesül, hogy:

$$f(X) = \max_{v \in X} r(v) = r(v_*) = \max_{v \in Y} r(v) = f(Y)$$

□

6.5.2. Definíció. *Legyen $\mathcal{E}$ a V -beli részhalmazok egy rendszere. $\mathcal{E}$ Sperner rendszer, ha $\mathcal{E}$ -nek semelyik két különböző tagja se tartalmazza egymást: $E \nsubseteq E'$ és $E' \nsubseteq E$, ha $E, E' \in \mathcal{E}$.*

A következő tételben belátjuk, hogy $\mathcal{W}(f,g)$ fa hipergráf, ha g pozimoduláris és f moduloton halmazfüggvények, sőt egy újabb jellemzést is kapunk fa hipergráfokra.

6.5.1. Tétel. *Legyen $\mathcal{E}$ egy V -beli Sperner rendszer. $\mathcal{E}$ akkor és csak akkor lesz fa hipergráf, ha $\mathcal{E} = \mathcal{W}(f,g)$ egy g pozimoduláris és f moduloton V -beli halmazfüggvényre.*

Bizonyítás. Először az elegendőséget látjuk be. A következő összefüggés megmutatja, hogy a kiindulási probléma: (6.2) hogyan kapcsolódik az előző szakaszbeli v tömör halmazokhoz:

$$\mathcal{W}(f,g) \subseteq S(g).$$

Legyen $X \in \mathcal{W}(f,g)$ egy tartalmazásra nézve minimális hiányos halmaz. Megmutatjuk, hogy $X \in S(g)$. Tudjuk, hogy $g(X) < f(X)$ és $g(Y) \geq f(Y)$ minden nem üres $Y \subset X$ valódi részhalmazra. Mivel f moduloton, így definíció szerint létezik egy $v \in X$ pont, hogy $f(Y) \geq f(X)$ minden $Y \subseteq X$, amire $v \in Y$.
Mivel X hiányos halmaz, így: $g(Y) \geq f(Y) \geq f(X) > g(X)$ minden $Y \subset X$ valódi részhalmazra, amire $v \in Y$. Ez pont azt jelenti, hogy az X halmaz v tömör lesz és így $X \in S(g)$. Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{W}(f,g) \subseteq S(g)$. A (6.4.1) tétel alapján tudjuk, hogy $S(g)$ fa hipergráf mivel g pozimoduláris, továbbá minden fa hipergráf részhipergráfja is fa hipergráf, így a tétel elégséges irányát bebizonyítottuk.

A szükséges irányt egy külön tételben is megfogalmazzuk:

6.5.2. Tétel. *Legyen $\mathcal{E}$ egy Sperner rendszer a V alaphalmazon, és legyen $\mathcal{E}$ fa hipergráf. Ekkor létezik egy olyan w nemnegatív súlyozás az $\mathcal{E}$ hiperélein, amire $\mathcal{E} = \mathcal{W}(f,g)$, ahol f -et és g -t a következőképpen definiáljuk:*

$$g(X) = \sum\{w(E) : E \in \mathcal{E},\, E \cap X \neq \emptyset,\, E - X \neq \emptyset\} \tag{6.7}$$

$$f(X) = \max_{v \in X} r(v) \tag{6.8}$$

ahol $f(\emptyset) = 0$ és:

$$r(v) = \sum\{w(E) : v \in E,\, E \in \mathcal{E}\} \quad \forall\, v \in V.$$

Bizonyítás. Egy hipergráf vágásfüggvénye szimmetrikus és szubmoduláris halmazfüggvény, így pozimoduláris is, tehát a fenti g függvény pozimoduláris lesz. A (6.5.1) állítás miatt a fenti f függvény moduloton.
A tételt néhány állításon keresztül fogjuk bebizonyítani.

6.5.1. Állítás. *Ha w egy tetszőleges nemnegatív súlyfüggvény a hiperéleken, illetve f és g a tétel szerint definiált halmazfüggvények, akkor minden $X \in \mathcal{W}(f,g)$ halmaz tartalmaz legalább egy $E \in \mathcal{E}$ hiperélt.*

Bizonyítás. Legyen $X \in \mathcal{W}(f,g)$ egy hiányos halmaz, továbbá $v \in X$ egy olyan csúcs, amire $r(v) = f(X)$, azaz $r(v) = \max_{u \in X} r(u)$.
Ekkor $f(X) = r(v) \leq \sum\{w(E) : E \in \mathcal{E},\, E \cap X \neq \emptyset\}$, hiszen az X halmazba belemetsző hiperélek súlya legalább akkora, mint a v csúcsra illeszkedő hiperélek súlya.
Indirekt tegyük fel, hogy nem létezik olyan $E \in \mathcal{E}$ hiperél, amire $E \subseteq X$. Ekkor:

$$g(X) = \sum\{w(E) : E \in \mathcal{E},\, E \cap X \neq \emptyset\} \geq r(v) \geq f(X).$$

Ez viszont azt jelenti, hogy X mégse hiányos halmaz, ellentmondásban az $X \in \mathcal{W}(f,g)$ -vel.

$\square$

A fenti állításból az adódik, hogy ha egy $E \in \mathcal{E}$ hiperél egyben hiányos halmaz is, akkor E automatikusan tartalmazásra nézve minimális hiányos halmaz lesz. Valóban: ha lenne egy $X \subset E$ hiányos halmaz, akkor az előző állítás szerint létezik $E' \subseteq X$ hiperél, viszont ekkor az E hiperél tartalmazná az E' hiperélt, ami nem lehetséges, mert a hiperélek egy

Sperner rendszert alkotnak.

Legyen $|\mathcal{E}| = m$. Mivel $\mathcal{E}$ egy fa hipergráf, így a (6.2.3) tétel szerint az $\mathcal{E}$ élgráfja: $L(\mathcal{E})$ merevkörű. Az élgráf pontjainak ekkor létezik egy szimpliciális sorrendje: $v_1, \ldots, v_m$. Jelöljük a v_i -nek megfelelő hiperélt E_i -vel a hipergráfban. A szimpliciális sorrend definiciója alapján egy v_i csúcs azon v_j szomszédai, amik a sorrendben i után következnek $(j > i)$ egy teljes gráfot feszítenek. Ennek megfelelően vegyük a hipergráfban egy rögzített i esetén azon E_j hiperéleket, amikre $E_j \cap E_i \neq \emptyset$ és $i < j$. Tudjuk, hogy ők páronként metszik egymást továbbá a (6.2.3) tétel alapján $\mathcal{E}$-re teljesül a Helly tulajdonság, így az összes metszete sem üres:

$$\cap\{E_j \cap E_i : E_j \cap E_i \neq \emptyset,\, j > i\} \neq \emptyset \quad i = 1, \ldots, m \tag{6.9}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathcal{E}_i^< = \{E_j \in \mathcal{E} : E_j \cap E_i \neq \emptyset,\, j < i\} \tag{6.10}$$
$$\mathcal{E}_i^> = \{E_j \in \mathcal{E} : E_j \cap E_i \neq \emptyset,\, j > i\} \tag{6.11}$$
$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i^< \cap \mathcal{E}_i^> \tag{6.12}$$

Ha $\mathcal{E}_i^> \neq \emptyset$ akkor (6.9) -et felírhatjuk úgyis hogy :

$$\cap\{E \cap E_i : E \in \mathcal{E}_i^>\} \neq \emptyset.$$

Definiáljuk a w súlyfüggvényt induktívan, (ekkor az f és a g halmazfüggvényeket is véglegesen megadjuk).
Legyen $w(E_1) = 1$, továbbá:

$$w(E_i) = \sum\{w(E) : E \in \mathcal{E}_i^<\} + 1 \tag{6.13}$$

A fenti súlyfüggvénnyel a tételben definiált módon előálló f és g függvényre ekkor a következő teljesül:

6.5.2. Állítás. *Minden $E_i \in \mathcal{E}$ hiányos halmaz lesz (a fenti f -re és g -re nézve).*

Bizonyítás. Két esetre bontjuk a bizonyítást:
1.eset $\mathcal{E}_i^> = \emptyset$.

$$g(E_i) = \sum\{w(E) : E \in \mathcal{E}, E \cap E_i \neq \emptyset\} = \sum\{w(E) : E \in \mathcal{E}_i^<, E \cap E_i \neq \emptyset\}$$

Ahol kihasználtuk, hogy $\mathcal{E}$ Sperner rendszer, így a hiperélek nem tartalmazhatják egymást. $g(E_i)$ -t tovább becsülve:

$$g(E_i) < \sum\{w(E) : E \in \mathcal{E}_i^<, E \cap E_i \neq \emptyset\} + 1 = w(E_i) \leq f(E_i).$$

Ezzel pedig beláttuk, hogy az E_i hiányos az 1.esetben.
2.eset $\mathcal{E}_i^> \neq \emptyset$.
Ekkor tudjuk, hogy $\cap\{E \cap E_i : E \in \mathcal{E}_i^>\} \neq \emptyset$ és emiatt létezik egy $v^* \in E_j \cap E_i$ minden olyan $j > i$ -re, amire $E_i \cap E_j \neq \emptyset$.

A következő egyenlőtlenségeket írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
f(E_i) &= \max_{v\in E_i} r(v) \\
&\geq r(v^*) \\
&= \sum\{w(E) : v^* \in E,\, E \in \mathcal{E}\} \\
&\geq w(E_i) + \sum\{w(E) : E \in \mathcal{E}_i^{>}\} \\
&= 1 + \sum\{w(E) : E \in \mathcal{E}_i^{<}\} + \sum\{w(E) : E \in \mathcal{E}_i^{>}\} \\
&> \sum\{w(E) : E \in \mathcal{E}_i\} \\
&= g(E_i).
\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy az E_i hiányos halmaz a 2.esetben is.

□

Beláttuk, hogy minden $E \in \mathcal{E}$ hiperél hiányos, továbbá ekkor E automatikusan tartalmazásra nézve minimális hiányos halmaz lesz, így $\mathcal{E} = \mathcal{W}(f, g)$ a fentiekben definiált w súlyfüggvénnyel megadott g pozimoduláris és f moduloton halmazfüggvényekre.
Ezzel a (6.5.2) tétel bizonyítását befejeztük és így a (6.5.1) tétel szükséges irányával is készen vagyunk.

□

□

6.6. Hiányos halmazok szubmoduláris és pozimoduláris rendszerekben

Ebben a szakaszban feltesszük, hogy a g függvény szubmoduláris és pozimoduláris is egyszerre, továbbá f moduloton. A szakasz végén egy polinomiális algoritmust adunk a kiinduló (6.1) illetve az azzal ekvivalens (6.2) problémára, azaz a célunk továbbra is egy R minimális transzverzális meghatározása a $\mathcal{W}(f, g)$ tartalmazásra nézve minimális hiányos halmazok hipergráfjában.
Az előző szakaszban beláttuk, hogy $\mathcal{W}(f, g)$ fa hipergráf lesz, ha g pozimoduláris és f moduloton. A fa hipergráfokra vonatkozó minimális transzverzálist kiszámoló algoritmussal meg tudunk adni egy minimális transzverzálist fa hipergráfokra, méghozzá a hiperélek számában polinomiális idő alatt, amennyiben rendelkezünk egy explicit listával a hiperélekről. A $\mathcal{W}(f, g)$ halmaz mérete azonban exponenciális is lehet a $|V|$ -ben. Ezt orvosolandó használhatjuk a (6.2.2) lemmát, ami szerint elég csak a maximális v -elkerülő hiperélekre szorítkoznunk, ha meg akarunk határozni egy alap fát a fa hipergráfban. Ez motiválja a következő fogalom bevezetését:

6.6.1. Definíció. *s elkerülő t tömör halmaznak hívunk olyan $X \subseteq V$ halmazokat, amikre az X halmaz egyrészt t tömör (a g halmazfüggvényre nézve), másrészt $s \notin X$. Jelölje továbbá S_t^s azon X halmazok rendszerét, amelyek tartalmazásra nézve maximális s -elkerülő t tömör halmazok. Az összes maximális elkerülő tömör halmazt pedig jelölje $S'(g)$, tehát: $S'(g) = \cup_{s\in V}(\cup_{t\in V-\{s\}} S_t^s)$.*

Szükségünk lesz néhány korábbi fogalomra a halmazcsaládokkal kapcsolatban. $\mathcal{C}_{ts}$ -el jelöltük a t pontot tartalmazó, de s -et nem tartalmazó halmazok családját. Egy g szubmoduláris halmazfüggvény esetén beszélhetünk egy tartalmazásra nézve minimális g

-t minimalizáló halmazról a $\mathcal{C}_{ts}$ családon belül. Egy ilyen halmaz egyértelmű, hiszen ha két ilyen halmaz is lenne, akkor mivel mindkettő tartalmazza s -et, a metszetük nem üres. Továbbá könnyű belátni, hogy az ilyen halmazok metszet-unióra zártak, ezzel pedig kapnánk egy tartalmazásra nézve kisebb minimalizáló halmazt, ami ellentmondás. Jelöljük tehát a g -t minimalizáló tartalmazásra nézve minimális egyértelmű $\mathcal{C}_{ts}$ -beli halmazt N_s^t -vel.
A következő lemma segít meghatározni a maximális s -elkerülő t tömör halmazokat és garantálni fogja, hogy a maximális elkerülő tömör halmazokból nincs túl sok.

6.6.1. Lemma. *Legyen g egy szubmoduláris halmazfüggvény a V -n, továbbá legyen N_s^t a fent definiált halmaz ($s, t \in V$, $s \neq t$)*

- *(i) A tartalmazásra nézve maximális s -elkerülő t tömör halmaz egyértelműen meghatározott és éppen N_s^t halmazzal egyenlő*
- *(ii) $|S'(g)| \leq n(n-1)$.*

Bizonyítás. Először az (i) pontot látjuk be. Legyen N egy maximális s elkerülő t tömör halmaz, belátjuk, hogy ő egyértelmű.
A g szubmodularitása alapján tetszőleges olyan $X \in \mathcal{C}_{st}$ halmazra, amire $X \nsubseteq N$:

$$g(X) + g(N) \geq g(X \cap N) + g(X \cup N) \geq g(X \cap N) + g(N).$$

Ebből pedig azt kapjuk, hogy $g(X) \geq g(X \cap N)$. Az $X \cap N$ nem üres, hiszen a t benne van. $X \cap N \neq X$, mert $X \nsubseteq N$, azaz $X \cap N$ egy valódi nem üres t -t tartalmazó részhalmaza az X -nek, így $g(X) \geq g(X \cap N)$ miatt az X halmaz nem lehet t tömör. Ez pedig azt bizonyítja, hogy az N halmaz egyértelmű.
Megmutatjuk, hogy $N = N_s^t$, azaz az N_s^t halmaz egy maximális s elkerülő t tömör halmaz. Tudjuk, hogy N_s^t egy tartalmazásra nézve minimális g függvényt minimalizáló halmaz, így egy Y valódi részhalmazára, ami t -t tartalmazza: $g(Y) > g(N_s^t)$, azaz N_s^t egy s -elkerülő t tömör halmaz lesz. Már csak azt kell belátni, hogy N_s^t tartalmazásra nézve maximális. Ehhez legyen $Z \supset N_s^t$ egy s -et elkerülő halmaz. $g(Z) \geq g(N_s^t)$, mivel N_s^t egy g -t minimalizáló halmaz a $\mathcal{C}_{ts}$ családon ($t \in Z$). Tehát Z nem lehet t tömör halmaz és ezzel megkaptuk, hogy N_s^t maximális s elkerülő t tömör halmaz lesz.

Az (ii) pont azonnal következik az (i) -ből, mivel adott (s, t) rendezett pontpárra pontosan egy darab maximális s elkerülő t tömör halmaz létezik, így az összes maximális, elkerülő, tömör halmazok száma legfeljebb $n(n-1)$, ha $|V| = n$.

□

A fenti lemma után minden szükséges előkészülettel megvagyunk, ami a kiindulási probléma megoldásához kell. Az előző lemma alapján meg tudjuk határozni az $S'(g)$ halmazt, ehhez elég az N_s^t halmazokat megkapni. Az N_s^t halmaz egy általános szubmoduláris függvényt minimalizáló, tartalmazásra nézve minimális halmaz a $\mathcal{C}_{ts}$ családon belül. Egy ilyen halmaz megadható általános szubmoduláris függvény minimalizálás segítségével lásd [4]. Azaz összeségében az $S'(g)$ halmaz polinomiális időben kiszámolható.

Az $S'(g)$ hipergráf fa hipergráf, ráadásul az $S(g)$ részhipergráfja. A (6.4.1) tétel miatt $S(g)$ fa hipergráf lesz mivel g pozimoduláris halmazfüggvény. $S'(g) \subseteq S(g)$ mivel $S(g)$ a tömör halmazok összessége volt, míg $S'(g)$ a maximális elkerülő tömör halmazok voltak. Tehát az $S(g)$ fa hipergráf részhipergráfja: $S'(g)$ is fa hipergráf.

Az előző lemma garantálja, hogy az $S'(g)$ hipergráf hiperéleinek száma $|V| = n$ -ben polinomiális, konkrétan $n(n-1)$ -nél kisebb. A (6.2.4) tétel adott nekünk egy eljárást egy fa hipergráf alap fájának a meghatározására, amennyiben rendelkezünk a hiperélek egy egzakt listájával. Tehát $S'(g)$ fa hipergráfra ekkor van egy polinomiális algoritmusunk, ami kiszámolja $S'(g)$ egy alap fáját.

A (6.2.2) lemma azt mondta ki, hogy ha meg akarjuk határozni egy fa hipergráf alap fáját, akkor elég csak a maximális v -elkerülő hiperélek részhipergráfját venni és annak egy alap fája jó lesz az eredeti fa hipergráf alap fájának. A lemmát az $S(g)$ fa hipergráfra alkalmazva vegyük észre, hogy $S(g)$ maximális v -elkerülő hiperélei éppen az $S'(g)$ részhipergráf lesz, tehát $S'(g)$ alap fája $S(g)$ -nek is alap fája. Azaz az $S(g)$ fa hipergráf alap fáját is meg tudjuk polinomiális idő alatt adni.

A célunk egy minimális R transzverzális kiszámolása a $\mathcal{W}(f,g)$ hipergráfra. A (6.5.1) tétel alapján tudjuk, hogy ha g pozimoduláris és f moduloton, akkor $\mathcal{W}(f,g)$ egy fa hipergráf. A tétel bizonyítása során azt is beláttuk, hogy $\mathcal{W}(f,g) \subseteq S(g)$, tehát a $\mathcal{W}(f,g)$ egy részhipergráfja az $S(g)$ fa hipergráfnak, így $S(g)$ alap fája $\mathcal{W}(f,g)$ -nek is alap fája lesz. Mivel $S(g)$ alap fáját polinomiális időben meg tudtuk határozni, így ugyanígy $\mathcal{W}(f,g)$ alap fája is polinom időben megkapható.

Végül a (6.2.1) tételen alapuló Minimális transzverzális algoritmussal ki tudjuk számolni a $\mathcal{W}(f,g)$ fa hipergráf egy R minimális transzverzálisát. Ehhez szükségünk van a $\mathcal{W}(f,g)$ egy alap fájára, amit polinomiális időben meg tudunk adni. Továbbá tegyük fel, hogy rendelkezünk egy eljárással, ami $C(n)$ időben eldönti, hogy egy adott halmaz transzverzálisa -e a $\mathcal{W}(f,g)$ -nek vagy sem.

A fenti érvelést a következő tételben foglalhatjuk össze:

6.6.1. Tétel. *Legyen g egy pozimoduláris, szubmoduláris, nemnegatív halmazfüggvény a V alaphalmazon, továbbá f szintén nemnegatív és moduloton ($f(\emptyset) = 0$). Ekkor kiszámolható egy minimális méretű R halmaz, amire $f(X) \leq g(X)$ minden $X \subseteq V - R$ esetén, a $C(n)$ -ben polinomiális idő alatt.*

6.7. Forrástelepítési probléma lokális élösszefüggőségi előírással

Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan élsúlyozott gráf, továbbá $r : V \to \mathbb{R}_+$ egy alsó korlát függvény a V csúcsain. Egy $R \subseteq V$ csúcshalmazt forrásnak fogunk hívni, ha $\lambda(R, v) \geq r(v)$ minden $v \in V - R$ csúcsra, ahol $\lambda(R, v)$ jelöli a minimális R -et és v -t elválasztó vágás értékét. Tehát a fenti feltételt ilyen alakban írhatjuk: $d_G(X) \geq r(v)$ minden olyan X halmazra, amire $X \subseteq V - R$ és $v \in X$.
Olyan $R \subseteq V$ forrást keresünk, ami minimális méretű:

$$|R| \quad \text{minimális, úgy hogy:}$$

$$d_G(X) \geq \max_{v \in X} r(v) \quad \forall X \subseteq V - R.$$

A problémára eredetileg Tamura és társai [20] találtak polinomiális algoritmust. Nagamochi és Ibaraki [1] a könyvükben megmutatták, hogy hogyan lehet visszavezetni a fenti feladatot az előző szakaszbeli feladatra. Vegyük észre, hogy a fenti feladat éppen a (6.1) probléma. Legyen $g(X) = d_G(X)$, továbbá:

$$f(X) = \begin{cases} \max_{v \in X} r(v) & \text{ha } X \neq \emptyset \\ 0 & \text{ha } X = \emptyset \end{cases}$$

Az előző szakasz (6.6.1) tétele szerint a (6.1) problémára létezik polinomiális algoritmus a $C(n)$ -ben, ha az f függvény moduloton, a g függvény pedig szubmoduláris és pozimoduláris.
A (6.5.1) lemmában éppen azt bizonyítottuk, hogy a fenti f halmazfüggvény moduloton. Tudjuk, hogy a g halmazfüggvény szubmoduláris és pozimoduláris.

Ahhoz, hogy a (6.1) problémát meg tudjuk oldani szükségünk volt egy eljárásra, ami ellenőrzi egy adott R ponthalmazról, hogy az transzverzális -e vagy sem és az ehhez szükséges lépésszámot $C(n)$ -el jelöltük.
Ebben az alkalmazásban $C(n)$ polinomiális lesz az n -ben. Egy $R \subseteq V$ halmaz akkor volt transzverzális, ha: $g(X) \geq f(X)$ minden $X \subseteq V - R$ halmazra, ez pedig azzal ekvivalens, hogy:

$$\min\{g(X) : u \in X,\, X \subseteq V - R\} \geq r(u) \quad \forall\, u \in V - R. \tag{6.14}$$

Ez pedig általános szubmoduláris függvény minimalizáló algoritmusok segítségével megoldható: [4]. Definiáljuk a g' halmazfüggvényt a $V - (R \cup \{u\})$ alaphalmazon:

$$g'(X) = g(X \cup \{u\}) \quad \text{ahol } X \subseteq V - (R \cup \{u\}).$$

Belátható, hogy az így kapott g' halmazfüggvény is szubmoduláris, így ha minden $u \in V - R$ -re elkészítjük a megfelelő g' halmazfüggvényt, majd minimalizáljuk, akkor a (6.14) feltétel eldönthető polinomiális időben.

Konklúzió

Foglaljuk össze röviden, hogy a szakdolgozat milyen témákat érintett. Szimmetrikus halmazfüggvényekről szóló témákkal foglalkoztunk. Elsőként szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvények minimalizálását vettük, Queyranne tételére három különböző bizonyítást is láttunk. Ezután szimmetrikus szubmoduláris függvényekre vonatkozó Gomory-Hu fa alkalmazások következtek: T vágás, k vágás feladat. A következő fejezetben ferdén szupermoduláris függvények fedéseiről szóló tételeket láttunk néhány alkalmazással együtt. A harmadik fejezet is minimalizálási problémákkal foglalkozott, de itt nem az összes halmazon kerestünk minimumot, hanem csak bizonyos halmazcsaládokon. Goemans tétele megmutatta, hogy hogyan lehet visszavezetni a parity halmazcsaládokon való optimalizálást az általános szubmoduláris függvény minimalizálásra. Alkalmazásként láttuk, hogy hogyan lehet második legkisebb értékeket meghatározni, illetve s-t T páros és páratlan vágásokról is szó volt. Beláttuk, hogy egy szimmetrikus szubmoduláris függvény minimalizálása adott pontpárt elválasztó halmazokon ekvivalens az általános szubmoduláris függvény minimalizálással. Az utolsó fejezetben a fa hipergráfok segítségével minimális transzverzálist kerestünk szubmoduláris pozimoduláris illetve moduloton halmazfüggvények által definiált halmazrendszerben.

Mindenképpen meg kell említenünk, hogy milyen további tételek és témakörök vannak, amik a jelen dolgozatba nem kerültek bele. Első helyen Fehér Borbála: Szubmoduláris függvények és alkalmazásaik című szakdolgozatát kell említenünk. Ez a szakdolgozat részletesen tárgyalja, hogy mi a kapcsolat a gráf minimális vágását meghatározó Nagamochi Ibaraki algoritmus és a szimmetrikus szubmoduláris minimalizálás között. Ebben a szakdolgozatban általánosabban szerepel Queyranne algoritmusa: kiderül hogy hogyan lehet minimalizálni szimmetrikus és keresztező szubmoduláris, illetve szubmoduláris és pozimoduláris halmazfüggvényeket, sőt meg lehet adni az összes tartalmazásra nézve minimális optimális halmazt is. Ugyanitt megtalálható a szimmetrikus szubmoduláris Gomory-Hu fa létezéséről szóló bizonyítás is, egy külön fejezet pedig a szimmetrikus szubmoduláris függvények extrém halmazaival foglalkozik.

Ferdén szupermoduláris halmazfüggvények fedéseiről további eredmények találhatók Frank András és Király Tamás összefoglaló munkájában [21]. Bernáth Attila és Király Tamás [23] cikke Szigeti Zoltán tételéhez kapcsolodó további alkalmazásokat és összefüggéseket tartalmaz. Király Tamás félig ferdén szupermoduláris függvények fedéseiről szóló tételének további alkalmazásai vannak: [8]. Király Tamás egy másik cikke [22] szimmetrikus szupermoduláris függvények uniform hipergráfokkal való fedésével foglalkozik. Halmazcsaládokon való minimalizálásra is vannak további eredmények. Goemans megmutatta [18], hogy hogyan lehet a Queyranne algoritmust módosítani, úgy hogy szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvényeket tudjunk minimalizálni tartalmazásra nézve zárt halmazcsaládokon. A parity halmazcsaládokon való optimalizálás kapcsán meg kell említenünk Fülöp Ottilía disszertációját, amiben egy másik eljárás található a problémára. Narayanan cikkében [12] egy előfeldolgozó algoritmus is található általános szubmoduláris függvényekre, ami nem került bele a jelen dolgozatba.

Számos izgalmas nyitott kérdést is meg lehet fogalmazni, amik a szimmetrikus halmazfüggvények témaköréhez kapcsolódnak. Szimmetrikus szubmoduláris függvény Gomory-Hu fájának vannak-e további alkalmazásai, illetve a jelen szakdolgozatban szereplő alkalmazások nem adnak-e további eredményeket konkrét halmazfüggvényekre, például hipergráf vágásfüggvényére. Rögzített k esetén a szimmetrikus szubmoduláris k vágás feladat is nyitott, Nagamochi és Ibaraki $k = 3$ esetre talált algoritmust. A Gomory-Hu fák kapcsán további kérdés, hogy nincs-e olyan struktúra, ami egy pontot és egy halmazt vagy két halmazt elválasztó lokális élösszefüggőségeket kódolja el, akár a gráf esetén akár szimmetrikus szubmoduláris halmazfüggvényre. Narayanan cikke kapcsán felvetődik a kérdés, hogy nincs-e olyan konstrukció, ami az általános szubmoduláris függvény minimalizálást visszavezeti a szimmetrikus szubmoduláris függvény minimalizálásra. További kérdés, hogy Narayanan előfeldolgozó algoritmusa nem ad-e valamilyen eredményt konkrét szubmoduláris függvények esetén.

Irodalomjegyzék

[1] H. Nagamochi, T. Ibaraki, Algorithmic Aspects of Graph Connectivity, Cambridge University Press, 2008

[2] S. Iwata, L. Fleischer, S. Fujishige, A combinatorical strongly polinomial algorithm for minimizing submodular functions, J. ACM 48:4 (2001), 761- 777.

[3] R. Gomory, T. Hu, Multi-terminal network flows, SIAM J. Appl. Math., 9 (1961), 551-570.

[4] M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver, Geometric Algorithms and Combinatorical Optimization,

[5] M. Queyranne, Minimizing symetric submodular functions, Math. Progr. 82 (1998), 3-12.

[6] Fujishige, S.: Submodular Functions and Optimization, 2nd edn., Ann. Discrete Math., vol. 58, Elsevier, Amsterdam (2005)

[7] Király, T.: Merging hyperedges to meet edge-connectivity requirements. EGRES Technical Report No. 2005-08. Hungarian version: Mat. Lapok 13(1), 2831 (2007a)

[8] Király, T.: Applications of Eulerian splitting-off. EGRES Technical Report No. 2007-01. In: Proceedings of HungarianJapanese Symposium on Discrete Mathematics and its Applications, pp. 298307 (2007b)

[9] Szigeti, Z.: Hypergraph connectivity augmentation. Math. Program., Ser. B 84(3), 519527 (1999)

[10] R. Rizzi. On minimizing symmetric set functions. Combinatorica, 20(3):445450, Mar. 2000.

[11] M. X. Goemans and V. S. Ramakrishnan. Minimizing submodular functions over families of sets. Combinatorica, 15(4):499513, Dec. 1995.

[12] H. Narayanan. A note on the minimization of symmetric and general submodular functions. Discrete Applied Mathematics, 131(2):513522, 2003.

[13] A. Schrijver. A combinatorial algorithm minimizing submodular function in strongly polynomial time. J. Comb. Theory B-80(2000),346-355

[14] H. Nagamochi and T. Ibaraki. Computing Edge-Connectivity in multigraphs and capacitated graphs. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 5(1):5466, Feb. 1992.

[15] H. Nagamochi and T. Ibaraki. A linear-time algorithm for finding a sparse k -connected spanning subgraph of a k -connected graph. Algorithmica, 7(1):583596, June 1992.

[16] M. Stoer and F. Wagner. A simple min-cut algorithm. Journal of the ACM, 44(4):585591, 1997.

[17] A. Frank. On the edge-connectivity algorithm of Nagamochi and Ibaraki. Laboratoire Artemis, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble, 1994.

[18] M.X. Goemans and J. A. Soto. Symmetric submodular function minimization under hereditary family constraints (2010)

[19] H. Nagamochi and T. Ibaraki, A fast algorithm for computing minimum 3-way and 4-way cuts, Math. Progr. 88 (2000), 507-520.

[20] H. Tamura, M. Sengoku, S. Shinoda, and T. Abe, Location problems on undirected flow networks, Inst. Electron. Inform. Comm. Eng. Trans. E73 (1990), 1989-1993.

[21] A. Frank and T. Király, A survey on covering supermodular functions, W. Cook, L. Lovász, and J. Vygen (eds.), Research Trends in Combinatorial Optimization, pp. 87-126, Springer, Berlin 2009.

[22] Covering symmetric supermodular functions by uniform hypergraphs. J. Comb. Theory, Ser. B 91, 185-200 (2004)

[23] Bernáth A., Király T.: Covering symmetric skew-supermodular functions with hyperedges. EGRES technical report No. 2008-05 (2008)