

Útvonaltervezési problémák

Diplomamunka

Írta: Szabó Mátyás

Matematikus MSc

Témavezető:

Kis Tamás

Operációkutatási Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2013

Tartalomjegyzék

1. Az Általános Útvonaltervezési Probléma	1
1.1. A GRP(G) poliéder	1
1.2. Egyenlőtlenségek	5
1.2.1. R-páratlan vágások	6
1.2.2. K-komponens egyenlőtlenségek	7
1.2.3. n-reguláris út-híd (path-bridge) egyenlőtlenségek	9
1.2.4. Méhsejt egyenlőtlenségek	14
1.2.5. Megjegyzések	17
2. Algoritmusok	18
2.1. Kezdeti relaxáció	18
2.2. A Branch & Cut	20
2.3. Összefüggőségi egyenlőtlenségek	21
2.4. R-páratlan egyenlőtlenségek	21
2.5. K-C egyenlőtlenségek	22
2.5.1. Inicializálás	22
2.5.2. Első fázis	22
2.5.3. Második fázis	23
2.5.4. Harmadik fázis	23
2.6. Méhsejt egyenlőtlenségek	25
2.6.1. Inicializálás	25
2.6.2. Első fázis	25
2.6.3. Második fázis	26
2.6.4. Harmadik fázis	26
2.7. Diszjunktív vágások	27
2.8. Gomory vágások	29
3. Elemzés	30
3.1. A vizsgált gráfok	30

3.2. A program beállításai	31
3.3. Észrevételek	32
3.4. Összefoglalás	34
A Futási eredmények	36

Ábrák jegyzéke

1.	GRP példa	2
2.	R-páratlan vágások	6
3.	K-C konfiguráció	7
4.	K-C egyenlőtlenség bizonyítás	9
5.	Fogantyúk és fogak	10
6.	PBI biz 1.2.5 Lemma	12
7.	PBI biz. 1.2.9. Lemma	13
8.	Méhsejt példa	14
9.	Méhsejt pszeidotúra	15
10.	Méhsejt pszeidotúra kicserélés	17
11.	K-C algoritmus	22
12.	Diszjunktív vágás	28

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Kis Tamásnak, aki nem csak a témakör feldolgozását segítette észrevételeivel, de a program sikeres megírásához és teszteléséhez szükséges minden eszközt és információt rendelkezésemre bocsátott. Köszönetet mondok továbbá mindenkinek, aki a LEMON programcsomag fejlesztésében részt vett.

Bevezetés

Életünk során gyakran belebotlunk útvonaltervezési problémába. Milyen sorrendben érdemes bejárni egy bevásárlás során az üzleteket, hogy minél hamarabb végezzünk? Milyen sorrendben járja végig a postás az utcákat, hogy minél kevesebbet kelljen gyalogolnia? Milyen útvonalon nézzük meg egy város nevezetességeit, ha bizonyos utcákon feltétlenül teljes hosszukban végig szeretnénk menni?

Az első kérdés az utazó ügynök feladatként (TSP), a második kérdés kínai postás problémaként (CPP) ismert. A harmadik ezek egyfajta ötvözete, speciális esetként tartalmazza a megelőző kettőt. Ezt hívjuk általános útvonaltervezési problémának. (GRP)

Mivel a TSP NP-nehéz probléma, így a GRP is az (ez a formális definíció után nyilvánvaló lesz). Tehát az optimális megoldást kiszámoló hatékony algoritmus megadása komoly kihívást jelent. A dolgozatomban a feladattal kapcsolatos poliédes eredményeket tekintem át, és azoknak a segítségével adok egy általános tört vágásokat is felhasználó megoldó módszert.

1. fejezet

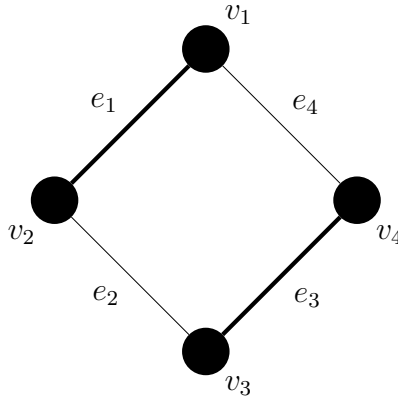
Az Általános Útvonaltervezési Probléma

1.1. A GRP(G) poliéder

1.1.1. Definíció. *General Routing Problem (GRP):* $G = (V, E)$ gráfban legyen \mathbf{E}_R a szükséges élek, \mathbf{V}_R a szükséges csúcsok halmaza. Keressük egy c_e nemnegatív élköltség mellett a legolcsóbb olyan zárt körutat, amely $\forall e \in \mathbf{E}_R \subseteq E$ élen és $\forall v \in \mathbf{V}_R \subseteq V$ csúcson legalább egyszer végighalad. (egy élen többször is végigmehetünk)

Megjegyzés. Feltehetjük, hogy $\mathbf{V}_R = V$. Először is ha $(u, v) \in \mathbf{E}_R$, akkor feltehető, hogy $u \in \mathbf{V}_R, v \in \mathbf{V}_R$. Ha pedig $\forall (u, v) \in \mathbf{E}_R$ -re $u \in \mathbf{V}_R$ és $v \in \mathbf{V}_R$, akkor például \mathbf{V}_R -en definiálhatunk egy teljes gráfot, amiben az élek költségei az eredeti gráfban a legrövidebb utak költségei. Ehhez a teljes gráfhoz hozzávéve az \mathbf{E}_R -beli éleket, ahol az drágább (az eredeti költséggel), a $V - \mathbf{V}_R$ -beli csúcsokat elhagyva, egy ekvivalens feladatot kapunk, amiben legfeljebb $|\mathbf{E}_R| + \binom{|\mathbf{V}_R|}{2}$ él van. Egy másik módszer: amíg $\mathbf{V}_R \neq V$ kiválasztunk egy $v \in V - \mathbf{V}_R$ csúcsot, és a rá illeszkedő $\delta(v)$ élhalmaz minden kételemű részhalmazához (cseresznye) beveszünk egy élt, melynek költsége a két eredeti él költségének az összege. (Tehát például $e = (u, v)$ és $f = (v, w)$ élek esetén lesz egy új $g = (u, w)$ él, és $c_g = c_e + c_f$.) Majd a v csúcsot és a rá illeszkedő éleket kitöröljük a gráfból. Így bármely két csúcs között továbbra is ugyanannyi a legrövidebb út költsége, és kitörölt él nem lehetett szükséges, hiszen $v \in V - \mathbf{V}_R$ volt. A továbbiakban végig feltesszük, hogy $V = \mathbf{V}_R$. Így **a gráf összefüggőségét is feltehetjük**. Ha nem összefüggő, nyilván nincs megoldás.

Megjegyzés. A feladatot másféleképpen is megfogalmazhatjuk: a szükséges éleken kívül mely éleket kell még bevinnünk, és hányszor ahhoz, hogy minimális súlyú olyan



1. példa. A vastag élek a szükséges élek, a vékony élek a nem szükséges élek.

körutat kapjunk, ami minden csúcson végighalad. A szükségesen felül bevett élek halmazát hívjuk **pszeudotúrának**. Hívjuk **megengedettnek** egy pszeudotúrát, ha a szükséges élekkel együtt körutat határoz meg, és minden csúcson végighalad. A megengedett megoldásaink tehát megfeleltethetők a megengedett pszeudotúráknak, innen-től így is fogunk rájuk gondolni. Az 1. példában Hamilton kört úgy kapunk, hogy e_4 -et és e_2 -t egyszer, a többi élet egyszer se vesszük hozzá a pszeudotúrához.

Minden megengedett megoldáshoz a fenti módon tartozik egy $|E|$ dimenziós vektor $\mathbb{R}^{|E|}$ -ben. Ezek közül az x vektorok közül szeretnénk találni egyet, amelyre $\sum_{e \in E} c_e x(e)$ minimális. A továbbiakban először bebizonyítjuk, hogy a megengedett megoldások konvex burka poliéder. Ezt hívjuk $GRP(G)$ -nek.

Jelölés. Az alábbi jelöléseket alkalmazzuk a dolgozat további részében:

- $x \in \mathbb{R}^{|E|}$. $\mathbf{x}(e)$ jelöli azt, hogy a körút hányszor halad át a szükségesen kívül az e élen. (például a 1. példában a Hamilton körhöz tartozó vektor: $x(e_1) = 0$, $x(e_2) = 1$, $x(e_3) = 0$, $x(e_4) = 1$)
- $S \subsetneq V$ -re $\delta(S)$ jelöli az S és $V - S$ közötti élek halmazát (vágás). $\delta_{\mathbf{R}}(S) = \delta(S) \cap E_{\mathbf{R}}$. 1. példánkban tehát $S = \{v_1\}$ -re $\delta(S) = \{e_1, e_4\}$, $\delta_{\mathbf{R}}(S) = \{e_1\}$
- $\mathbf{E}(S : T)$ jelöli $\delta(S) \cap \delta(T)$ -t. $\mathbf{E}_{\mathbf{R}}(S : T) = E(S : T) \cap E_{\mathbf{R}}$
- $\mathbf{E}(S)$ jelöli az S -en belüli élek halmazát
- $F \subset E$ esetén $\mathbf{x}(F) = \sum_{e \in F} x(e)$. A fenti példában $x(\delta(\{v_1\})) = 1 + 0 = 1$.
- $\mathbf{G}_{\mathbf{R}} = (V, E_{\mathbf{R}})$ összefüggő komponenseinek csúcshalmazai: V^1, \dots, V^p . Az ezek által feszített részgráfok: **R-összefüggő komponensek**. Belső élek halmaza: $\mathbf{E}_{\mathbf{B}} = \{(i, j) \in E \mid \exists k : i, j \in V^k\}$, külső élek halmaza: $\mathbf{E}_{\mathbf{K}} = E - E_{\mathbf{B}}$.

1.1.2. Definíció. A GRP megengedett (egész) megoldásainak \mathcal{H} halmaza:

$$x(\delta(S)) \geq 2, \quad \forall S \subset V, \delta_R(S) = \emptyset \quad (1.1)$$

$$x(\delta(\{v\})) \equiv |\delta_R(\{v\})| \pmod{2}, \quad \forall v \in V \quad (1.2)$$

$$x \in \mathbb{Z}_+^{|E|}. \quad (1.3)$$

Ennek konvex burka: $\mathbf{GRP}(G) = \text{conv}(\mathcal{H})$.

Erről szeretnénk belátni, hogy poliéder, de először jöjjön egy későbbiekben gyakran használt megfigyelés:

1.1.1. Lemma. Egy megengedett megoldásban:

$$x(\delta(S)) \equiv |\delta_R(S)| \pmod{2}, \quad \forall S \subsetneq V \quad (1.4)$$

Bizonyítás. A 1.1.2 definíció 1.2 pontjával:

$$x(\delta(S)) \equiv \sum_{v \in S} x(\delta(\{v\})) \equiv \sum_{v \in S} |\delta_R(\{v\})| \equiv |\delta_R(S)| \pmod{2} \quad (1.5)$$

ahol az 1. kongruencia abból adódik, hogy ha egy (u, v) élre, $u \in S$ és $v \in S$, akkor a $\sum_{v \in S} x(\delta(\{v\}))$ szummában $x((u, v))$ 2-szer szerepel. A 3. kongruencia hasonlóan adódik. \square

Jelölés. A bizonyítás során az alábbi jelöléseket használjuk:

- $\mathcal{H}^* = \{x \in \mathcal{H} \mid x_e \leq 1, \forall e \in E_R, x_e \leq 2, \forall e \in E_K\}$
- $\mathcal{Z} = \{z^e \mid \forall e \in E\}$, ahol $z^e \in \mathbb{R}^{|E|}$ és $z_a^e = 2$ pontosan akkor, ha $a = e$, egyébként 0.
- $\mathbf{q} = |E|$, az élek: e_1, \dots, e_q .

1.1.2. Lemma. Az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

1.1.2.1 Ha $x \in \mathcal{H}$, akkor $x' = (x + \sum_{i=1}^q N_i z^{e_i}) \in \mathcal{H}$ minden nemnegatív egészekből álló $\{N_1, N_2, \dots, N_q\}$ halmazra.

1.1.2.2 Ha $x \in \mathbf{GRP}(G)$, akkor $x' = (x + \sum_{i=1}^q N_i z^{e_i}) \in \mathbf{GRP}(G)$ minden nemnegatív egészekből álló $\{N_1, N_2, \dots, N_q\}$ halmazra.

1.1.2.3 Ha $x \in \mathcal{H}$, és $e \in E$ olyan, hogy (i) $x_e \geq 3$, vagy (ii) $e \in E_R$ és $x_e \geq 2$, akkor $x' = x - z^e \in \mathcal{H}$.

1.1.2.4 Ha $x \in \mathcal{H}$, akkor $\exists \{N_1, N_2, \dots, N_q\}$ egészek úgy, hogy $x' = (x - \sum_{i=1}^q N_i z^{e_i}) \in \mathcal{H}^*$

Bizonyítás. A 1.1.2.1 rész következik abból, hogy minden e élre egy nemnegatív egész páros számot adunk hozzá x_e -hez, tehát a megengedett megoldásokat definiáló (1)-(3) feltételek továbbra is teljesülnek.

Valamely $\lambda_j > 0$, és $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ és $x_j \in \mathcal{H}$ -ra $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$. Ekkor $x'_j = x_j + \sum_{i=1}^q N_i z^{e_i}$ -re $x'_j \in \mathcal{H}$ 1.1.2.1 miatt, tehát ugyanazzal a konvex kombinációval $x' = \sum_{j=1}^n \lambda_j x'_j \Rightarrow$ 1.1.2.2.

Egy megengedett túrát körökkel úgy csökkentve, hogy összefüggő maradjon, és továbbra is minden E_R -beli élen átmenjünk legalább egyszer, megengedett túrát kapunk. 1.1.2.3 ennek speciális esetei (2 hosszú körökre).

Ha $x \in \mathcal{H}$, de $x \notin \mathcal{H}^*$, akkor valamely $e \in E$ -re teljesül a 1.1.2.3 (i) vagy (ii) esetének feltétele. Tehát tudunk csökkenteni. Véges sok csökkentés után $x' \in \mathcal{H}^*$ -ba jutunk. \square

Mivel \mathcal{H}^* egy véges ponthalmaz, ezért $\text{conv}(\mathcal{H}^*)$ politóp. Tehát ahhoz, hogy $GRP(G)$ poliéder, elég a következőt belátni:

1.1.1. Tétel. $GRP(G) = \text{conv}(\mathcal{H}^*) + \text{cone}(\mathcal{Z})$

Bizonyítás. Először belátom, hogy $GRP(G) \subseteq \text{conv}(\mathcal{H}^*) + \text{cone}(\mathcal{Z})$. Ha $x \in \mathcal{H}$, akkor a 1.1.2.4 tulajdonság miatt $x = x' + \sum_{i=1}^q N_i z^{e_i}$ valamely N_i nemnegatív egészekre és $x' \in \mathcal{H}^*$ -ra. Tehát $x \in \mathcal{H} \Rightarrow x \in \mathcal{H}^* + \text{cone}(\mathcal{Z})$, következésképp $x \in \text{conv}(\mathcal{H}) \Rightarrow x \in \text{conv}(\mathcal{H}^*) + \text{cone}(\mathcal{Z})$.

A másik irány: $GRP(G) \supseteq \text{conv}(\mathcal{H}^*) + \text{cone}(\mathcal{Z})$. Ha $x \in \text{conv}(\mathcal{H}^*) + \text{cone}(\mathcal{Z})$, akkor $x = y + \lambda_1 z^{e_1} + \dots + \lambda_q z^{e_q} = y + 2(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$, ahol $y \in \text{conv}(\mathcal{H}^*)$ és $\lambda_i \geq 0$. Ezek a λ_i -k nem feltétlenül egészek, de $(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ előáll a kerekített vektorok valamely konvex kombinációjaként:

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_q) = \sum_{j=1}^m \alpha_j (N_1^j, \dots, N_q^j), \quad N_i^j \in \{[\lambda_i], \lceil \lambda_i \rceil\}, \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$$

Tehát $2(\lambda_1, \dots, \lambda_q) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \sum_{i=1}^q N_i^j z^{e_i}$, vagyis $x = \sum_{j=1}^m \alpha_j (y + \sum_{i=1}^q N_i^j z^{e_i})$. 1.1.2.2 miatt $y + \sum_{i=1}^q N_i^j z^{e_i} \in GRP(G)$, a konvexitása miatt tehát $x \in GRP(G)$. \square

Tehát a GRP problémát úgy is megfogalmazhatjuk, hogy minimalizálni szeretnénk $\sum_{e \in E} c_e x_e$ -t, $x \in GRP(G)$.

1.2. Egyenlőtlenségek

Az alábbiakban a $GRP(G)$ poliéderhez keresünk egyenlőtlenségeket, melyeket minden pontja teljesít. Ezek segítségével fogunk az algoritmus során optimális megengedett megoldást keresni.

Az alábbi két egyenlőtlenségcsalád a megengedett megoldások definíciójából következően nyilvánvalóan teljesül:

$$x_e \geq 0, \quad \forall e \in E \quad (1.6)$$

$$x(\delta(S)) \geq 2, \quad \forall S \subset V, \delta_R(S) = \emptyset \quad (1.7)$$

Ezen kívül, mivel 1.1.1 szerint $GRP(G) = \text{conv}(\mathcal{H}^*) + \text{cone}(\mathcal{Z})$, ezért minden extrémális pont $\text{conv}(\mathcal{H}^*)$ -ban van, tehát $c_e \geq 0$ miatt az alábbi egyenlőtlenségek feltehetőek (levágják a poliédert, de nem veszítünk optimális megoldást):

$$x_e \leq 2, \quad \forall e \in E \quad (1.8)$$

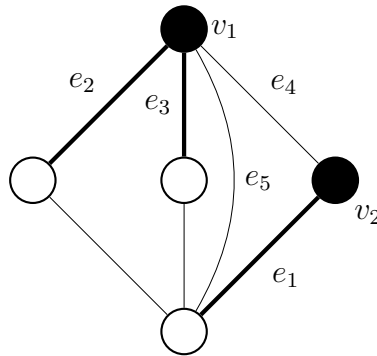
A fenti megfigyelés mögött az áll, hogy ha egy akármilyen túrában egy élen legalább 3-szor végigmegyünk, akkor úgy is túrát kapunk, ha 2-vel kevesebbszer megyünk végig. Tehát valójában $e \in E_R$ -re több is feltehető:

$$x_e \leq 1, \quad \forall e \in E_R \quad (1.9)$$

1.2.1. R-páratlan vágások

Egy megengedett túra minden vágáson páros sokszor megy át. Így ha egy S halmazból kilépő E_R -beli élek száma páratlan, akkor $x(\delta(S))$ is páratlan. Tehát legalább 1:

$$x(\delta(S)) \geq 1, \quad \forall S \subset V, |\delta_R(S)| \equiv 1 \pmod{2} \quad (1.10)$$



2. példa. R-páratlan vágások

A fenti gráfban a vastag élek a szükségesek, tehát $e_1, e_2, e_3 \in E_R$. Ekkor például $S_1 = \{v_2\}$ és $S_2 = \{v_1, v_2\}$ is R-páratlan vágást generál:

$$\begin{aligned} x(e_1) + x(e_4) &\geq 1 \\ x(e_1) + x(e_2) + x(e_3) + x(e_5) &\geq 1 \end{aligned}$$

Megjegyzés. Az R-páratlan vágások valójában T-vágások, ahol T az R-páratlan pontok halmaza. [8]

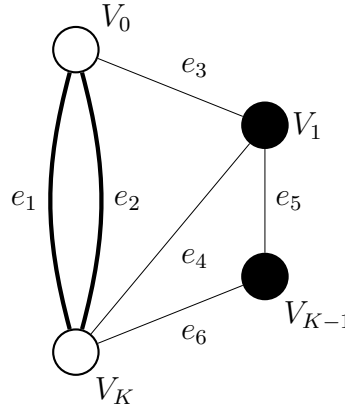
1.2.2. K-komponens egyenlőtlenségek

Legyen $K \geq 3$ -ra $\{V_0, \dots, V_K\}$ a V egy partíciója. Feltételek:

- V_1, \dots, V_{K-1} és $V_0 \cup V_K$ ponthalmazokból nem lép ki E_R -beli él,
- $|E_R(V_0 : V_K)| \geq 2$ és páros,
- $E(V_i : V_{i+1}) \neq \emptyset, i = 0, \dots, K - 1,$
- $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{K-1} x(\delta(V_0 \cup \dots \cup V_i)) - 2x(E(V_0 : V_K)).$

1.2.1. Tétel. A fenti feltételek teljesülése esetén:

$$F(x) \geq 2(K - 1) \tag{1.11}$$



3. példa. K-C konfiguráció

Példa. A fenti példában $e_1, e_2 \in E_R$, a többi él nem szükséges. Ez egy K-C konfiguráció, a hozzá tartozó egyenlőtlenség ebben a konkrét esetben ($K = 3$):

$$x(e_3) + 2x(e_4) + x(e_5) + x(e_6) + x(\mathbf{e}_1) + x(\mathbf{e}_2) \geq 4$$

Most rátérünk az egyenlőtlenség bizonyítására.

Bizonyítás. (1.2.1. Tétel) Legyen:

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = (K - 2)x(E(V_0 : V_K)) + \sum_{\substack{0 \leq i < j \leq K \\ (i,j) \neq (0,K)}} |j - i|x(E(V_i : V_j))$$

Nyilván $F(x) = F'(x)$, a bizonyítás során az utóbbival fogunk dolgozni.

Legyen tehát $x \in H$ egész megoldása $GRP(G)$ -nek. Először észrevehetjük, hogyha x -ben egy V_i -ből V_j -be menő élt $j \geq i + 2, (i, j) \neq (0, K)$ kicserélünk egy olyan

útra, ami csak V_k és V_{k+1} közötti ($i \leq k \leq j-1$), illetve V_l -en belüli ($i \leq l \leq j$) éleket használ, és az új túrához tartozó megoldást elnevezzük x' -nek, akkor $F'(x) = F'(x')$ (1 darab $|j-i|$ súlyú él helyett lesz $|j-i|$ darab 1 súlyú). Tehát az állítást elég arra az esetre belátni, amikor $j \geq i+2$, $(i, j) \neq (0, K)$ esetén $x(E(V_i : V_j)) = 0$. Két eset van:

1.2.1. Lemma. *Ha $\exists j \in \{0, \dots, K-1\}$, amire $x(E(V_j : V_{j+1})) = 0$, akkor $F'(x) \geq 2(K-1)$*

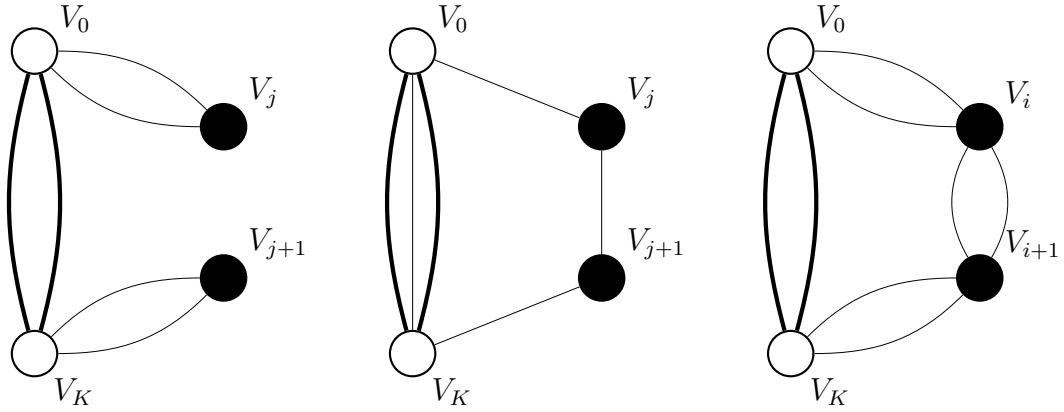
Bizonyítás. Ekkor minden V_i -re $i \in \{1, \dots, K-1\}$: $x(\delta(V_i)) \geq 2$ a 1.1.2 definíció 1.1 pontja alapján $\delta_R(V_i) = \emptyset$ miatt. Ugyanígy 1.1.1 lemma miatt $x(\delta(V_i))$ páros. Feltevésünk szerint él csak egymást követő V_i halmazok között megy. Tehát mivel az x által reprezentált túra összefüggő, ezért $i \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, K-1\}$ -re $x(E(V_i : V_{i+1})) \geq 1$. Ezenkívül tudjuk, hogy $x(\delta(V_j))$ páros, tehát $x(E(V_j : V_{j+1})) = 0$ miatt $x(E(V_{j-1} : V_j))$ páros. $x(\delta(V_{j-1}))$ szintén páros, tehát $x(E(V_{j-1} : V_j))$ párossága miatt $x(E(V_{j-2} : V_{j-1}))$ is páros. Indukcióval kapjuk, hogy $i \in \{1, \dots, j\}$ -re $x(E(V_{i-1} : V_i))$ páros. Tehát mivel $x(E(V_{i-1} : V_i)) \geq 1$, így $x(E(V_{i-1} : V_i)) \geq 2$. Teljesen analóg módon $i \in \{j+1, \dots, K-1\}$ -re $x(E(V_i : V_{i+1})) \geq 2$. Azaz $\sum_{0 \leq i \leq K-1} x(E(V_i : V_{i+1})) \geq 2(K-1)$, tehát $F'(x) \geq 2(K-1)$. \square

1.2.2. Lemma. *Ha $\forall j \in \{0, \dots, K-1\}$ -re $x(E(V_j : V_{j+1})) \geq 1$, akkor $F'(x) \geq 2(K-1)$*

Bizonyítás. Ha $x(E(V_0 : V_K)) \geq 1$, akkor $F'(x) \geq K + K - 2 = 2(K-1)$, tehát kész vagyunk.

Ha $x(E(V_0 : V_K)) = 0$, akkor az előzőhöz hasonló paritási megfontolással V_0 -ra (itt használjuk ki, hogy $|E_R(V_0 : V_K)|$ páros) $x(E(V_i : V_{i+1})) \geq 2$ minden $i = 0, \dots, K-1$, tehát $F'(x) \geq 2K > 2(K-1)$. \square

Jelölje $i = 0, \dots, K-1$ -re $P_i = \{x \in GRP(G) : x(E(V_i : V_{i+1})) = 0\}$ és $P_K = \{x \in GRP(G) : x(E(V_j : V_{j+1})) \geq 1 \forall j = 1, \dots, K-1\}$. Ekkor a fenti két lemma azt állítja, hogy ezekre a P_i konvex halmazokra teljesül az $F'(x) \geq 2(K-1)$ egyenlőtlenség, tehát a $conv(\cup_{i=0}^K P_i) = GRP(G)$ -re is teljesül. (diszjunktív elv) \square



4. ábra. A vékony élekre $x(e) > 0$. Esetek balról jobbra haladva: (1.2.1), (1.2.2)/1, (1.2.2)/2.

1.2.3. n -reguláris út-híd (path-bridge) egyenlőtlenségek

Legyen $p \geq 1$, $b \geq 0$ úgy, hogy $p + b \geq 3$ és páratlan. Legyen $n \geq 2$. Egy PB konfiguráció V -nek egy olyan partíciója A, Z, V_j^i halmazokra $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, n$, amire teljesülnek az alábbiak:

- V_j^i ponthalmazokból nem lép ki E_R -beli él,
- $|E_R(A : Z)| = b$,
- $E(A : V_1^i) \neq \emptyset$ és $E(V_n^i : Z) \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, p$,
- $E(V_j^i : V_{j+1}^i) \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, p$ és $j = 1, \dots, n - 1$.

Jelölés. Bizonyos esetekben egyszerűsíti a leírást, ezért bevezetjük a következő jelölést: $V_0^i = A$ és $V_{n+1}^i = Z$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$.

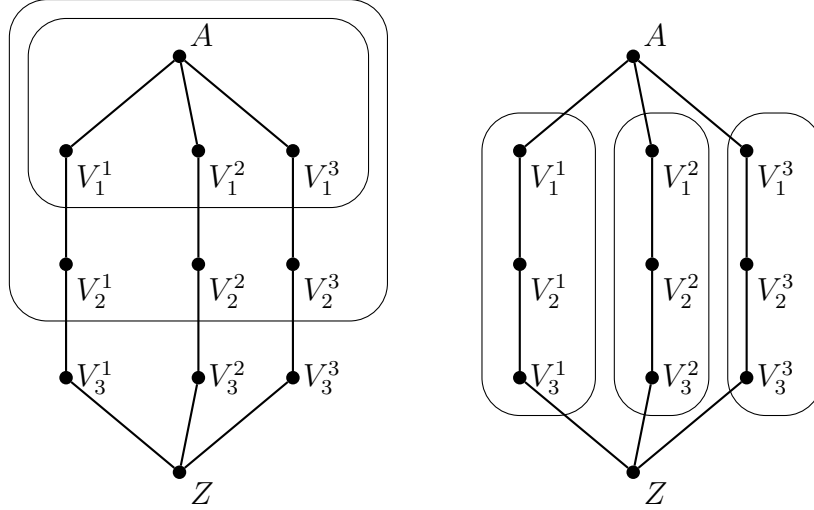
1.2.1. Definíció. Egy ilyenben definiálunk $n - 1$ **fogantyút**: H_1, \dots, H_{n-1} és p **fogat**: T_1, \dots, T_p a következőképpen. $\mathbf{H}_1 = A \cup V_1^1 \cup \dots \cup V_1^p$, $j > 1$ -re pedig: $\mathbf{H}_j = H_{j-1} \cup V_j^1 \cup \dots \cup V_j^p$. $\mathbf{T}_i = V_1^i \cup \dots \cup V_n^i$.

1.2.2. Tétel. A fenti feltételek teljesülése esetén:

$$\sum_{j=1}^{n-1} x(\delta(H_j)) + \sum_{i=1}^p x(\delta(T_i)) \geq np + n + p - 1 \quad (1.12)$$

1.2.3. Lemma. Ha $p=1$, akkor a PB konfiguráció teljesíti a (1.12) egyenlőtlenséget.

Bizonyítás. $p=1$ pontosan azt jelenti, hogy a konfigurációban egyetlen, a V_j^1 halmazokból álló út vezet A és Z között. Ezen kívül A és Z között még pontosan b



5. ábra. Bal oldalon: fogantyúk, Jobb oldalon: fogak

darab szükséges él, ahol $b \geq 2$, páros. Tehát a konfiguráció egy K-C konfiguráció $K = n + 1$ -re, $V_0 = A$, $V_K = Z$, $V_j = V_j^1$ jelölésekkel. A (1.12) egyenlőtlenség tehát a következőképp alakul:

$$\sum_{j=1}^{n-1} x(\delta(H_j)) + x(\delta(T_1)) \geq 2K - 2, \quad (1.13)$$

ahol a bal oldal a H_j és T_1 definíciója és $K - 1 = n$ miatt éppen $\sum_{j=0}^{K-1} x(\delta(V_0 \cup \dots \cup V_j)) - 2x(E(V_0 : V_K))$, pont mint a (1.11) egyenlőtlenségben. Tehát az állítás ekvivalens a K-C egyenlőtlenségekre vonatkozó (1.2.1. Tétel) állításával, amit már beláttunk. \square

A PB egyenlőtlenségek speciális esetként tartalmazzák a K-C egyenlőtlenségeket.

Jelölés. g_e jelölje a (1.12) egyenlőtlenségben egy él együtthatóját. Ekkor

$$g_e = \begin{cases} n - 1 & \text{minden } e \in E(A : Z) \text{ élre,} \\ |j - k| & \text{minden } e \in E(V_j^i : V_k^i) \text{ élre, } j \neq k \text{ hogy } |j - k| \leq n, \\ |j - k| + 2 & \text{minden } e \in E(V_j^i : V_k^l), i \neq l \text{ és } j, k = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (1.14)$$

adódik.

A 1.2.2. Tétel bizonyításához ezt fogjuk használni. Tehát a

$$\sum_{e \in E} g_e x(e) \geq np + n + p - 1 \quad (1.15)$$

egyenlőtlenséget fogjuk belátni.

1.2.4. Lemma. *Legyen $G' = (V', E')$ az a gráf, melyet úgy kapunk G -ből, hogy a V_j^i , A , Z halmazokat összehúztuk egy ponttá, majd a hurokéleket kitöröltük. Ekkor a 1.2.2. Tétel bizonyításához elég (1.15) egyenlőtlenség teljesülését a G' gráf túráira igazolni.*

Bizonyítás. $g_e = 0$ minden olyan e élre, ami egy V_j^i csúcshalmazon belül vezet. Ugyanígy az A -n és Z -n belüli élek g_e súlya is 0. Jelöljön x^* az eredeti G gráfban egy, a g_e súlyfüggvény szerinti legkisebb súlyú túrát. x' jelöljön a G' gráfban egy legkisebb súlyú túrát g_e , $e \in E'$ szerint. Ekkor $\sum_{e \in E} g_e x^*(e) \geq \sum_{e \in E'} g_e x'(e)$, hiszen az eredeti gráfbeli megengedett túra G' -re való megszorítása meghatároz egy vele megegyező súlyú megengedett túrát az összehúzott gráfban. Tehát ha (1.15) egyenlőtlenség teljesül G' -ben, akkor G -ben is. \square

A továbbiakban tehát A , V_j^i , Z csúcsokat jelölnek G' -ben.

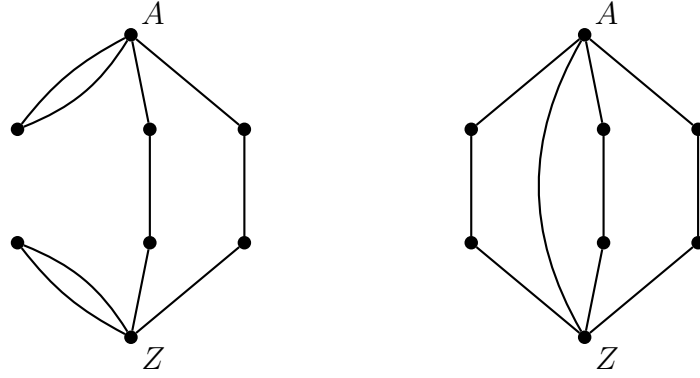
1.2.2. Definíció. *Hívjuk G' következő részgráfját **csontváznak**. $G_{sk} = (V', E_{sk})$, egy $e \in E'$ élre $e \in E_{sk}$ pontosan akkor, ha $e \in E(V_j^i : V_{j+1}^i)$, valamely $i = 1 \dots p$, $j = 0 \dots n + 1$. Ekkor az összes G_{sk} -beli él g_e súlya 1.*

1.2.5. Lemma. *G_{sk} -ban $p \geq 2$ esetén teljesül a (1.15) egyenlőtlenség.*

Bizonyítás. Először belátom, hogy ahhoz, hogy G_{sk} -ban egy $A - Z$ (nem egyélű) úton minden csúcsot bejárjon a túránk, legalább $n + 1$ él kell. Egy túrában minden belső pont foka legalább 2 (hiszen a túra összefüggő), páros (hiszen túra). Legyen i a szóban forgó út. G_{sk} -ban V_j^i -ből csak V_{j-1}^i -be és V_{j+1}^i -be megy él, tehát az összefüggőség miatt legfeljebb egy olyan j lehet, amire V_{j-1}^i és V_j^i között nem megy él a túrában. Ha van ilyen, akkor a túra által felhasznált élek száma azon az úton a fenti megfontolások miatt legalább $2n$. $2n > n + 1$, $n \geq 2$ miatt, tehát tényleg legalább $n + 1$ él kell.

Ha a szükséges éleken felül $\forall i = 1, \dots, p$ -re egy $(A, V_1^i, \dots, V_n^i, Z)$ utat veszünk be, az nem határoz meg túrát, hiszen $b + p$ páratlan, tehát a túrában A és Z foka páratlan lenne. $(x(\delta(A)) = p, |\delta_R(A)| = b, b \not\equiv p \pmod{2})$ Tehát be kell venni legalább egy $e \in E(A : Z)$ élet az x túrába, vagy valamely $A - Z$ úton többször végig kell menni (legfeljebb 1 él kivételével). Mindkettő legalább $n - 1$ -gyel növeli a túra g_e költségét (6 ábra), tehát a minimális túra összköltségére a G_{sk} gráfban a következő alsó becslést kapjuk: $n - 1 + p(n + 1) = np + n + p - 1$.

\square



6. ábra. Két lehetőség a paritás kiegyenlítésére

Következésképpen ha van egy túránk, amire $\sum_{e \in E'} g_e x(e) < np + n + p - 1$, akkor az mindenképpen használ a csontvázon kívül élet. A továbbiakban indirekt feltesszük, hogy van ilyen túra G' -ben, és legyen \bar{x} ezek közül olyan, ami a legkevesebb csontvázon kívüli élet tartalmazza.

1.2.6. Lemma. $2 \leq |k - j| \leq n$ és $e \in E(V_j^i : V_k^i)$ esetén $\bar{x}(e) = 0 \forall i \in \{1, \dots, p\}$.

Bizonyítás. Indirekt $\bar{x}(e) \geq 1$, ekkor ezt az élet ki lehetne cserélni \bar{x} -ben egy $|k - j|$ hosszú G_{sk} -beli útra V_j^i és V_k^i között, úgy, hogy a túra költsége nem változik. Ez ellentmondás, hiszen a kapott túra kevesebb csontvázon kívüli élet tartalmaz. \square

1.2.7. Lemma. Ha valamely x' túrára $\sum_{e \in E'} g_e x'(e) < np + n + p - 1$, akkor $\forall e \in E(A : Z)$ -re $x'(e) = 0$. Tehát nincs olyan ellenpélda, amely $E(A : Z)$ -beli élet használ.

Bizonyítás. Minden csúcsra igaz, hogy a rá illeszkedő legolcsóbb G' -beli él része a csontváznak. Ez nyilvánvaló, hiszen minden más f élre $g_f \geq 2$. Tegyük fel, hogy $e \in E(A : Z)$ és $x'(e) = 1$, és minden más f élre $x'(f) = 0$. Hogy tudjuk ezt legolcsóbban (esetleg $x'(e)$ értékét is növelve) megengedett túrává kiegészíteni? Minden csúcsra illeszkednie kell legalább 2 élnek. Ezt legolcsóbban p darab csontvázbeli út hozzávételével tudjuk megtenni (mint ahogy azt a 1.2.5 Lemma bizonyításában láttuk). Ennek a költsége viszont szintén a fent látott módon legalább $np + n + p - 1$. Tehát ez $e \in E(A : Z)$ -re $x'(e) \geq 1$ esetén alsó becslés $\sum_{e \in E} g_e x'(e)$ -re. Tehát ilyen x' egyáltalán nem lehet ellenpélda. \square

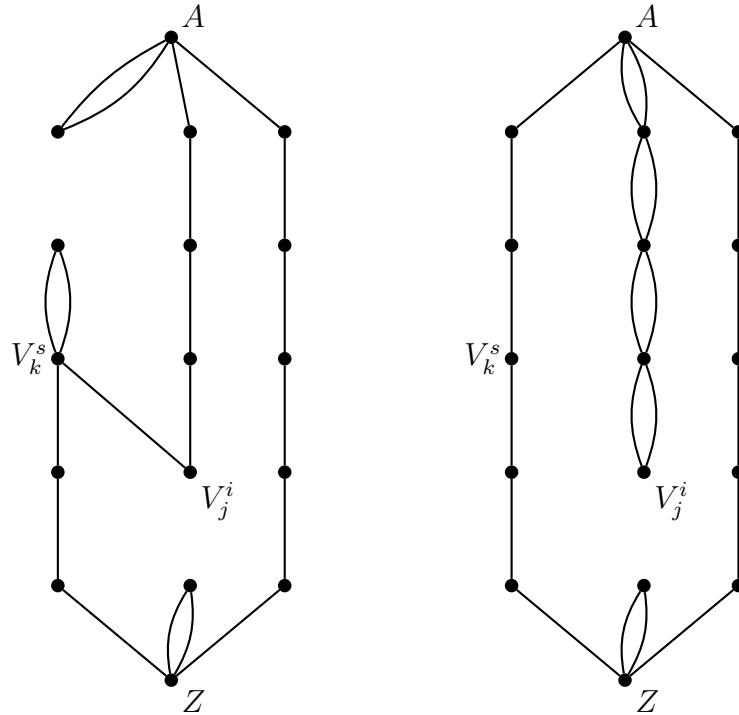
1.2.8. Lemma. $\exists i \neq s, j, k$, és $e \in E(V_j^i : V_k^s)$, hogy $\bar{x}(e) \geq 1$.

Bizonyítás. $p + b$ páratlan, tehát van olyan s , hogy $\bar{x}(E(A : V_1^s)) \geq 2$. Tegyük fel indirekt, hogy nincs ilyen $i \neq s, j, k, e \in E(V_j^i : V_k^s)$, amire $\bar{x}(e) \geq 1$. Ekkor paritás miatt az \bar{x} -hoz tartozó túrában az s -hez tartozó út bármely két szomszédos csúcsa

között (legfeljebb 1 kivétellel) mindenhol legalább 2 él megy. De ekkor az \bar{x} -hoz tartozónál nem nagyobb súlyú túrát kapunk, ha ezek helyett az élek helyett egy s -hez tartozó $A - Z$ utat, és egy $f \in E(A : Z)$ élet veszünk be (6 ábra). Így ez is ellenpélda lenne, de ez (1.2.7. Lemma) miatt nem lehet az. \square

1.2.9. Lemma. $\forall i \neq s, j, k$, és $e \in E(V_j^i : V_k^s)$ -re $\bar{x}(e) = 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy valamely $i \neq s, j, k, e \in E(V_j^i : V_k^s)$ -re $\bar{x}(e) \geq 1$. Legyen ezek között e olyan, amire a k érték a legkisebb. Mivel e ilyen, ezért $t = 0, \dots, k - 1$ -re $\bar{x}(E(V_t^s : V_{t+1}^s)) \geq 2$ legfeljebb 1 kivétellel. $g_e = |j - k| + 2$. Tehát ha veszünk egy x' túrát, amit úgy kapunk, hogy \bar{x} -t módosítjuk úgy, hogy e élt kitöröljük, és $t = 0, \dots, k - 1$ -re $x'(E(V_t^s : V_{t+1}^s)) = 1$ legyen (függetlenül attól, hogy \bar{x} -ban mennyi volt), míg $t = 0, \dots, j - 1$ -re $x'(E(V_t^i : V_{t+1}^i)) = \bar{x}(E(V_t^i : V_{t+1}^i)) + 1$ legyen, akkor egy megengedett túrát kapunk, aminek a g_e súlya legfeljebb a következő értékkel nőtt: $j - (k - 2) - (|j - k| + 2) = 0$. Tehát a túra nem hosszabb, de kevesebb csontvázon kívüli élet tartalmaz, ellentmondásban \bar{x} választásával. (7. ábra) \square



7. ábra. V_j^i és V_k^s közötti él kicserélése után nem nő a g_e költség

Bizonyítás. (1.2.2. Tétel) A fenti lemmákból következik, hogy az egyenlőtlenség minden megengedett $x \in \mathcal{H}$ megoldásra teljesül. \square

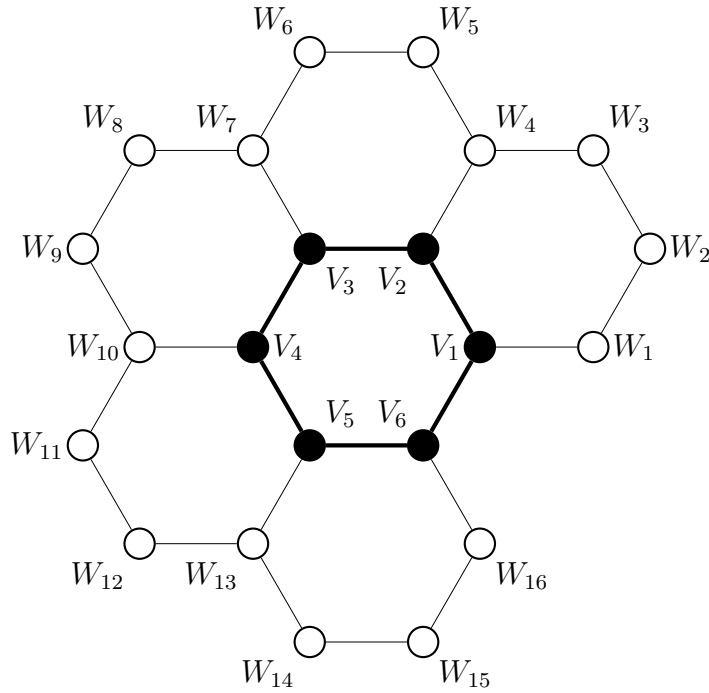
1.2.4. Méhsejt egyenlőtlenségek

Legyen $L \geq 2$, $K \geq 3$, $\{V_1, \dots, V_L, W_1, \dots, W_{K-1}\}$ egy partíciója V -nek, amire

- $(V_1 \cup \dots \cup V_L), W_1, \dots, W_{K-1}$ ponthalmazokból nem lép ki E_R -beli él,
- $\delta_R(V_i)$ pozitív és páros $\forall i$ -re,
- $\{V_1, \dots, V_L\}$ ponthalmaz E_R éleivel összefüggő gráfot alkot.

Továbbá legyen $T \subset E$ olyan, hogy abban a G' gráfban, melyet úgy kapunk G -ből, hogy a $V_1, \dots, V_L, W_1, \dots, W_{K-1}$ ponthalmazokat összehúzzuk egy ponttá, T egy fa, és teljesül rá, hogy

- T foka G' -ben minden V_i halmazra pontosan 1, minden W_j halmazra legalább 2,
- Minden (i, j) -re V_i és V_j között vezető (egyértelmű) T -beli út legalább 3 hosszú.



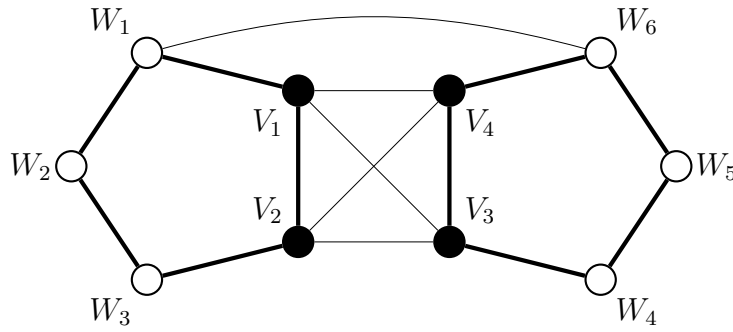
8. példa. Méhsejt konfiguráció. $L = 6$, $K = 17$. A vastag élek E_R -beli élek, T pedig a vékony élek.

Jelölje még γ_e minden $e = (u, v)$ G' -beli élre az u és v csúcsokhoz tartozó halmazok között vezető egyértelmű T -beli út élszámát, kivéve ha $u \in V_i$ és $v \in V_j$, valamely $i \neq j$ -re. Ekkor legyen 2-vel kevesebb. A G' -n kívüli élekre legyen 0.

1.2.3. Tétel. *A fenti feltételek teljesülése esetén minden $x \in GRP(G)$ -re igaz az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\sum_{e \in E} \gamma_e x(e) \geq 2(K - 1) \quad (1.16)$$

A bizonyítás során a $V_i, i = 1, \dots, L$ és $W_j, j = 1, \dots, K - 1$ halmazok bármelyikére megszorított gráf összefüggősége feltehető. Ugyanis ha van egy $x' \in GRP(G)$ vektor, ami megsérti a 1.16 egyenlőtlenséget, akkor (nem E_R -beli) él hozzávételével: $G' = (V, E \cup \{e\})$ -ben is van sértő $\bar{x} \in GRP(G')$ vektor: legyen $\bar{x}(e) = 0$, egyébként pedig $\bar{x} = x'$. Élek hozzávételével pedig az összefüggőség elérhető.



9. példa. Egy lehetséges túra. A vastag élek részei a pszeidotúrának,
 $E_R = E(V_1 \cup V_2 : V_3 \cup V_4), T = \cup_{i=1}^6 \delta(W_i)$

1.2.10. Lemma. *Ha $\bar{x} \in \mathcal{H}$ egy T -n kívüli élek számára minimális olyan pszeidotúra, amire $\sum_{e \in E} \gamma_e \bar{x}(e) < 2(K - 1)$, akkor $\bar{x}(e) = 0$, minden $e \in E(V_i : W_j), i \in \{1, \dots, L\}, j \in \{1, \dots, K - 1\}$ -re.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy \bar{x} -ben $\bar{x}(e) > 0$, ahol $e \in E(V_i, W_j)$ valamely (i, j) -re. Ekkor a \bar{x} -hez tartozó túrában kicserélve az e élt egy olyan G -beli útra, aminek G' -re való megszorítása a V_i és W_j között vezető egyértelmű T -beli út, egy γ költségre nézve nem drágább pszeidotúrát kapunk, ami kevesebb T -n kívüli élet tartalmaz, elletmondásban \bar{x} választásával. \square

1.2.11. Lemma. *Ha $\bar{x} \in \mathcal{H}$ egy T -n kívüli élek számára minimális olyan pszeidotúra, amire $\sum_{e \in E} \gamma_e \bar{x}(e) < 2(K - 1)$, akkor az $\{e \in E : e \in E(V_i : V_j) \text{ valamely } i, j = 1 \dots L, i \neq j\}$ halmaz nem tartalmaz kört G' -ben.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van egy ilyen kör, legyen a kör éleinek halmaza S . Ekkor legyen $x' \in \mathbb{R}^{|E|}$, hogy $x'(e) = \bar{x}(e), \forall e \in E - S$, és $x' = \bar{x}(e) - 1, \forall e \in S$. Ezt az x' -t növeljük $\forall i$ -re egy V_i -n belül úttal (vagy körrel) úgy, hogy $\forall v \in V_i$ -re $x'(\delta(v)) \geq \bar{x}(\delta(v))$ és $x'(\delta(v)) \equiv \bar{x}(\delta(v))$ legyen. Ezt az összefüggőségi feltevésünk, valamint

S halmaz definíciója miatt megtehetjük. Ez az x' ekkor szintén túra lesz, és γ súlya csökkent S súlyával, ami nemnegatív. Tehát $\sum_{e \in E} \gamma_e x'(e) < 2(K-1)$, és x' kevesebb T -n kívüli élet tartalmaz G' -re megszorítva, ellentmondva \bar{x} választásának. \square

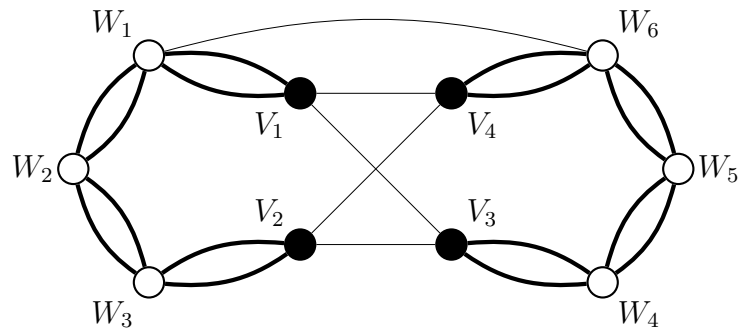
Bizonyítás. (1.2.3. Tétel) Tehát indirekt feltehetjük, hogy $\bar{x} \in \mathcal{H}$ olyan pszeudotúra, hogy V_i -ken nem határoz meg kört, nem használ $E(V_i : W_j)$ -beli éleket, de ellenpélda, tehát nem teljesül rá a méhsejt egyenlőtlenség. Bevezetünk néhány jelölést: legyenek $\alpha_1, \dots, \alpha_f$ azon részhalmazai $\{V_1, \dots, V_L\}$ -nek, melyek a pszeudotúrában egy komponensbe esnek. (tehát a komponensek száma f). Mivel nincs a gráfunkban kör, ezért ezeken az α_i halmazokon fát határoznak meg ezek az élek, így a pszeudotúrában az összes $\{V_1, \dots, V_L\}$ -beli halmaz között menő élek száma $m_b = \sum_{i=1}^f |\alpha_i| - 1$. Cseréljük ki ezeket az éleket az általuk meghatározott egyértelmű T -beli útra. A kapott túra legyen x' . Ekkor a γ költséget $2m_b$ -vel növeltük az élek költségének definíciója alapján: $\sum_{e \in E} \gamma_e \bar{x}(e) = \sum_{e \in E} \gamma_e x'(e) - 2m_b$. A kapott x' túrában az összefüggő komponensek száma nem több, mint az eredeti \bar{x} túrában, hiszen minden kitörölt élt helyettesítettünk egy úttal. Ezt a túra összsúlyának alsó becslésénél még használni fogjuk. De először nézzük meg, hogy x' egy összefüggő komponensének mennyi az összsúlya. Ehhez elég G' -ben néznünk a túrát, hiszen az azon kívüli élek súlya 0. Jelölje p az összefüggőségi komponensek számát x' -ben, és legyenek $i = 1 \dots p$ -re $\beta_i \subset \{V_1, \dots, V_L\}$, $J_i \subset \{W_1, \dots, W_{K-1}\}$ olyanok, hogy $\beta_i \cup J_i$ egy összefüggőségi komponens csúcshalmazát alkossák G' -ben. Tudjuk, hogy x' csak T -beli éleket használ. Tehát az összefüggőségi komponensbeli élek $\beta_i \cup J_i$ -n egy fát határoznak meg. Kérdés, hogy x' túrában hányszorosan szerepelnek. A méhsejt egyenlőtlenség definíciója miatt $\forall v \in \beta_i \cup J_i$ -re $\delta_R(v) \equiv 0 \pmod{2}$. Következésképpen $x(\delta(v)) \equiv 0 \pmod{2}$. És persze $x'(\delta(v)) \geq 1$, hiszen összefüggő. Tehát $\forall v \in \beta_i \cup J_i$ -re $x'(\delta(v)) \geq 2$ Tehát a fa minden levelére is. De ha v levél, akkor $\delta(v)$ egyetlen e élből áll G' -ben. Tehát ezen az e élen $x'(e) \geq 2$. Az ilyen (tehát levélbe menő) élektől eltekintve a maradék gráfra ugyanúgy teljesül, hogy fa, és hogy összefüggőség miatt $x'(\delta(v)) \geq 2$. Tehát indukcióval minden e élre az összefüggőségi komponensben azt kaptuk, hogy $x'(e) \geq 2$. Vagyis az x' túra γ súlyára a következő becslést kapjuk:

$$\sum_{e \in E} \gamma_e x'(e) \geq \sum_{i=1}^p 2(|\beta_i \cup J_i| - 1) = 2(K-1) + \sum_{i=1}^p 2|\beta_i - 1|$$

Ahol a fenti megjegyzésünk miatt $\sum_{i=1}^p 2|\beta_i - 1| \geq 2m_b$, tehát

$$\sum_{e \in E} \gamma_e \bar{x}(e) = \sum_{e \in E} \gamma_e x'(e) - 2m_b \geq 2(K-1)$$

Ellentmondásban \bar{x} választásával. □



10. példa. A (9. példa) a (V_1, V_2) és (V_3, V_4) élek T -beli úttal való kicserélése után

1.2.5. Megjegyzések

Az egyenlőtlenségek érvényességét a fentiekben tehát beláttuk. Ennél azonban több is igaz: bizonyos feltételek mellett ezek az egyenlőtlenségek oldaldefiniáló egyenlőtlenségek az $|E|$ dimenziós $GRP(G)$ poliéderben. Az alábbi állításokat nem bizonyítjuk.

1.2.4. Tétel. *Az (1.7) Összefüggőségi egyenlőtlenség pontosan akkor oldaldefiniáló, ha S és $V - S$ is összefüggő. [4]*

1.2.5. Tétel. *Az (1.10) R -páratlan egyenlőtlenség pontosan akkor oldaldefiniáló, ha S és $V - S$ is összefüggő. [4]*

1.2.6. Tétel. *Az (1.12) Út-híd egyenlőtlenség oldaldefiniáló. Speciálisan tehát a K -komponens egyenlőtlenség is. [9]*

1.2.7. Tétel. *Az (1.16) Méhsejt egyenlőtlenség oldaldefiniáló, ha az a gráf, melyet G -ből a V_i halmazok egy ponttá összehúzásával kapunk, 2-összefüggő. [4]*

2. fejezet

Algoritmusok

A fejezet elején vázlatosan leírjuk a megoldási módszert, amit a problémára alkalmazunk.

A fejezet további részében a probléma megoldásához használt algoritmusokat gyűjtjük össze. Az alábbiakban $x^* \in \mathbb{R}^{|E|}$ mindig a $GRP(G)$ poliéder aktuális relaxációjának egy optimális megoldása.

Az algoritmusok hatékonyságát a következő fejezetben fogjuk tárgyalni.

2.1. Kezdeti relaxáció

Kiindulásképpen kiszámolunk néhányat a fent megemlített egyenlőtlenségek közül. Ezek egy olyan poliédert határoznak meg, mely teljes egészében tartalmazza a $GRP(G)$ poliédert. Erre számoljuk ki a relaxált (tehát nem feltétlenül egészértékű) x^* optimumot.

A program az alábbi egyenlőtlenségekből indul ki:

$$\sum_{e \in E} x(e) \geq |V| - |E_R|$$

Ez nyilvánvalóan igaz, egy túra legalább $|V|$ élből áll, tehát egy pszeudotúra legalább $|V| - |E_R|$ -ből. Ez persze lehet nempozitív is, ez esetben ez az egyenlőtlenség semmitmondó.

A következő egyenlőtlenség-csoporthoz jelölje $R_1, \dots, R_l \subset V$ az R-összefüggő komponenseket.

$$\forall i \in \{1, \dots, l\} \quad \sum_{e \in \delta(R_i)} x_e \geq 2$$

Ezek az összefüggőségi egyenlőtlenségek (1.1) azon speciális esetei, amikor S és $V - S$ közül az egyik pontosan egy R-összefüggő komponensből áll.

Az alábbi egyenlőtlenségekben jelölje v_1, \dots, v_t az R-páratlan csúcsokat. (Tehát azokat a csúcsokat, melyekből páratlan számú E_R -beli él lép ki.)

$$\forall i \in \{1, \dots, t\} \quad \sum_{e \in \delta(v_i)} x_e \geq 1$$

Ezek az R-páratlan egyenlőtlenségek az egyelemű R-páratlan halmazokra.

Megjegyezzük, hogy előfordulhat, hogy $l = 0$ és $t = 0$. Ez egyrészt azt jelenti, hogy az R-összefüggőségi komponenseink száma 1, tehát a (V, E_R) gráf összefüggő. Másrészt, hogy nincs R-páratlan csúcs, tehát (V, E_R) gráfban minden pont foka páros. Ekkor tehát (V, E_R) Euler gráf, így az optimális pszeudotúrához tartozó megoldás (a költségfüggvényünk nemnegativitása miatt) az azonosan 0 vektor, ami éppen eme (V, E_R) gráf egy euler-sétájának felel meg.

Világos, hogy ha x^* megengedett megoldás, és valamely $e \in E - E_R$ -re $x^*(e) \geq 3$, vagy $e \in E_R$ -re $x^*(e) \geq 2$, akkor az x^{**} is megengedett megoldás lesz, amely x^* -től annyiban különbözik, hogy $x^{**}(e) = x^*(e) - 2$. (Ha egy túra egy élen legalább 3-szor végigmegy, akkor van olyan túra is, ami 2-vel kevesebbszer megy végig) Ezért a feladathoz hozzávehetjük a következő egyenlőtlenségeket is:

$$x(e) \leq 2 \quad \forall e \in E - E_R \quad (2.1)$$

$$x(e) \leq 1 \quad \forall e \in E_R \quad (2.2)$$

ugyanis ezzel optimális megoldást a költségfüggvény nemnegativitása miatt nem veszítünk.

2.2. A Branch & Cut

A feladatunk megoldására van egy kézenfekvő Branch & Cut algoritmus, mely a $GRP(G)$ megengedett megoldásainak tulajdonságaiból adódik. Kiindulunk a relaxációból, ezt lineáris programozási módszerrel (például duál szimplex módszer) megoldjuk, majd amennyiben a megoldás sért valamely 1.1 feltételt, akkor a hozzá tartozó összefüggőségi egyenlőtlenséggel (következő alfejezet) erősítjük a relaxációt és újraszámoljuk az optimumot. Amennyiben nem sért ilyet, akkor pontosan akkor nem optimális az aktuális megoldás, ha $[x^*$ vektor egy együthatója nem egész] vagy [valamely $v \in V$ -re a 1.2 paritási feltétel sérül]. Mindkét esetben „branching”-re, új ágak definiálására kerül sor. Első esetben, ha például az e élhez tartozó változó értéke nem egész, akkor az alábbi két ágot tudjuk definiálni:

$$x(e) \leq \lfloor x^*(e) \rfloor \quad (2.3)$$

$$x(e) \geq \lceil x^*(e) \rceil \quad (2.4)$$

Második esetben, ha a v csúchoz tartozó paritást $Par(v)$ jelöli ($Par(v)$ értéke 0 vagy 1), és $t := \frac{\sum_{e \in \delta(v)} x^*(e) - Par(v)}{2}$, akkor a két ág:

$$\sum_{e \in \delta(v)} x(e) \leq 2\lceil t \rceil + Par(v) \quad (2.5)$$

$$\sum_{e \in \delta(v)} x(e) \geq 2\lfloor t \rfloor + Par(v) \quad (2.6)$$

A második esetet kiválthatjuk slack (egész) változókkal. Ennek egyik haszna, hogy így teljes egészében a megoldó (a mi esetünkben CPLEX) branching szabályaira tudunk hagyatkozni, ami jelentős gyorsulást eredményez az elágazási fa bejárásakor. Másik oka, hogy a később tárgyalandó Gomory vágásokat ezeken a változókon érdemes alkalmazni. Jelölje ezeket az egész változókat $z(v) \geq 0$, $v \in V$. Ekkor $\forall v \in V$ -re hozzávesszük a következő sorokat a problémánkhoz:

$$\sum_{e \in \delta(v)} x(e) - 2z(v) = Par(v) \quad (2.7)$$

Ha ennek az $|E| + |V|$ dimenziós problémának (melyet tehát $GRP(G)$ egy relaxációjából a fenti sorok és változók hozzávételével kaptunk) (x^*, z^*) egy egészértékű megoldása, amelyben x^* teljesíti az 1.1 feltételeket, akkor x^* egy megengedett megoldása $GRP(G)$ -nek.

A programunk egy x^* relaxált optimumnál természetesen nem csak az összefüggőségi feltételeket ellenőrzi le. A fejezet további részében leírt szeparációs algoritmusok

bármelyikének sikeressége esetén hozzávesszük a talált egyenlőtlenséget az aktuális relaxációnkhoz, és újraszámoljuk az optimumot. Elágazás akkor történik, ha már nem találunk többet.

2.3. Összefüggőségi egyenlőtlenségek

Egy x^* vektor pontosan akkor sért valamely összefüggőségi egyenlőtlenséget, ha abban a $G' = (V', E')$ gráfban, melyet G -ből az R-összefüggő komponensek összehúzásával kapunk, az x^* súlyozásra van 2-nél kisebb súlyú vágás. Ezt $|V'| - 1$ folyamalgoritmussal le tudjuk ellenőrizni (egy kitüntetett csúcsból az összes többibe keresünk maximális folyamatot). Tehát ha egy ilyen feltételt sért az algoritmus, akkor azt minden esetben meg tudjuk találni polinomiális időben. Legyen a vágásban szereplő élek halmaza: C . Ekkor az egyenlőtlenség:

$$\sum_{e \in C} x_e \geq 2 \tag{2.8}$$

Ezzel tér vissza az algoritmus.

2.4. R-páratlan egyenlőtlenségek

Egy x^* vektor pontosan akkor sért R-páratlan egyenlőtlenséget, ha a G gráfban az x^* élsúlyozás mellett van olyan $E(S : V - S)$ vágás, melyben S páratlan R-páratlan csúcsot tartalmaz, és $x^*(E(S : V - S)) < 1$. Van olyan minimális súlyú R-páratlan vágás (Padberg és Rao [10] cikke alapján), ami előáll mint két R-páratlan csúcs közötti minimális vágás. Tehát R-páratlan csúcspárok közötti minimális súlyú vágások meghatározásával és a paritások leellenőrzésével polinomiális időben meg tudunk határozni egy minimális súlyú R-páratlan vágást. Amennyiben ennek értéke kisebb, mint 1, akkor az ehhez tartozó R-páratlan egyenlőtlenséget sérti az aktuális megoldás. Ebben az esetben ezzel az egyenlőtlenséggel tér vissza az algoritmus.

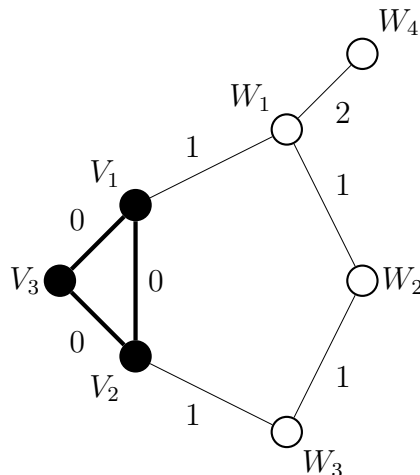
2.5. K-C egyenlőtlenségek

Az előbbi két egyenlőtlenség-osztályra tehát tudtunk egzakt algoritmust adni. Erre azonban csak heurisztikát fogunk. Nem tudjuk, hogy NP-nehéz-e x^* vektorhoz egy sértő K-C egyenlőtlenséget találni... A heurisztika amit adni fogunk Corberán, Letchford és Sanchis 2001-es [2] cikkében leírt algoritmuson alapszik.

2.5.1. Inicializálás

Adott a $G = (V, E)$ gráfunk és a szükséges élek $E_R \subseteq E$ halmaza, valamint x^* vektor. Az algoritmus bemenetként megkapja néhány R-összefüggőségi komponens unióját: H . Ehhez fogunk megpróbálni sértő K-C konfigurációt készíteni úgy, hogy $H = V_0 \cup V_K$. A bemenethez tartozik még egy $0 \leq \epsilon < 1$ paraméter.

Először leellenőrizzük, hogy H -ból tényleg nem megy ki szükséges él, illetve, hogy a H elhagyásával keletkező gráf összefüggő. Ezek nyilván szükséges feltételei egy ilyen K-C konfiguráció létezésének.



11. példa. Példa a K-C algoritmus egy kezdeti konfigurációjára. Az élre írt számok az aktuális pszeudotúra súlya. A vastag él a szükséges élek $H = V_1 \cup V_2 \cup V_3$

2.5.2. Első fázis

Az első fázis célja meghatározni bizonyos $V_0(i) \subsetneq H$ halmazokat, melyeket egy későbbi fázisban kipróbálunk V_0 halmazként. (Nyilván a H szerinti komplementere lesz a V_K)

Először meghatározzuk azokat a $v_i \in H$ csúcsokat, melyekből megy x^* -pozitív él valamely $u \notin H$ csúcsba. Ezeket fogjuk külső csúcsnak hívni. Ha a külső csúcsok száma, vagy azon komponensek összes száma, melyekbe vezet él külső csúcsból ki-

sebb, mint 2, akkor nincs H halmazra K-C konfiguráció, hiszen a $K \geq 3$ feltétel nem teljesülhet.

Most nézzük azt a $G' = (H, E')$ gráfot, melyet G -ből minden H -n kívüli csúcs elhagyásával kaptunk. Hagyjuk el azokat az $e \in E'$ éleket, melyekre $x^*(e) \leq \epsilon$. A maradék gráf összefüggő komponensei közül tartjuk meg azokat, melyekből pozitív páros sok szükséges él lép ki G -ben, és tartalmaznak külső csúcsot. Ezek lesznek a $V_0(i)$ halmazaink. A következő fázist minden ilyen halmazra futtatjuk.

Példa. Tehát a 11. példában $V_0(1) = V_1$, $V_0(2) = V_2$.

2.5.3. Második fázis

Ennek a fázisnak a célja egy K-C konfiguráció megtalálása. Először az éppen aktuális V_0 és V_K halmazt, valamint a maradék R-összefüggő komponenszt összehúzzuk egy ponttá, és kitöröljük az $E(V_0 : V_K)$ éleket. A maradékban keresünk egy x^* szerint maximális súlyú feszítőfát. Ennek a feszítőfának a V_0 és V_K közötti egyértelmű útja lesz a K-C konfigurációnk. Először megnézzük, hogy elég hosszú-e (tehát tartalmaz-e még legalább 2 csúcsot). Ha nem, elvetjük és megyünk a következő V_0 halmazra. Ha igen, az esetlegesen maradó úton kívüli csúcsokat beleillesztjük a konfiguráció valamelyik pontjába. Mindig egy levelet összehúzzunk az illeszkedő él mentén. Ezt iteráljuk, amíg van levél (a V_0 és V_K -n kívül). Ezzel megkaptuk a K-C konfigurációnkat.

Példa. Tehát a 11. példában először $V_0 = V_1$, $V_K = V_2 \cup V_3$. A többi R-összefüggő komponens mind 1-pontú, tehát összehúzás nem történik. Az út 4 hosszú, $4 > 3$, úgyhogy nem vetjük el a konfigurációt. A W_4 egy levél, a (W_1, W_4) él mentén összehúzzuk. A K-C konfiguráció tehát a következő halmazokból áll (sorrendben): $V_1, W_1 \cup W_4, W_2, W_3, V_2 \cup V_3$.

2.5.4. Harmadik fázis

Ebben a fázisban leellenőrizzük a K-C egyenlőtlenséget az aktuális konfigurációra, illetve keresünk ebből a konfigurációból további konfigurációkat. Két ötletet alkalmazunk feltéve, hogy a kiinduló K-C konfigurációnk hossza nagyobb mint 3.

Egyrészt $1 \leq i \leq K - 1$ -re a konfiguráció szomszédos V_i és V_{i+1} halmazainak összehúzásával újabb K-C konfigurációkat tudunk nyerni. Ezt nem végezzük el minden lehetséges módon, hanem csak abban az esetben, ha $x^*(\delta(V_0 \cup \dots \cup V_i)) > 2$. Ezáltal elérjük, hogy a K-C egyenlőtlenség jobb oldala az összehúzás során kevessebbel csökkenjen, mint a bal oldala, tehát a kapott egyenlőtlenség jobban sérüljön.

(Ha a kiinduló konfigurációban sérült, most is sérülni fog, ha ott nem sérült, akkor lehet, hogy most már igen.)

Másrészt a V_0 és V_K csúcsokba is össze tudjuk húzni a szomszédos csúcsokat (összesen $K - 3$ -at), hogy K-C konfigurációt kapjunk. Itt szintén meg lehet nézni, hogy érdemes-e egy összehúzást megtenni, de mivel ez esetben a V_0 és V_K között menő élek eltérő együtthatója miatt kicsit bonyolultabb, ettől a programban eltekintünk, és inkább kipróbáljuk az összes lehetőséget.

A végén az algoritmus visszatér a talált sértett egyenlőtlenség(sereg)gel, ha van ilyen.

Példa. *A 11. példában az előző fázisban említett konfiguráció rögtön sértő. Kiszámolva az együtthatókat az alábbi egyenlőtlenség adódik:*

$$2(x(V_1, V_2) + x(V_1, V_3)) + x(V_1, W_1) + x(W_1, W_2) + x(W_2, W_3) + x(W_3, V_2) \geq 6$$

Behelyettesítve az aktuális pszeudotúrát: $4 \geq 6$, tehát sértő. A harmadik fázis során a (V_1, W_1) , (W_1, W_2) , (W_2, W_3) , (W_3, V_2) mindegyikére igaz, hogy összehúzva a konfigurációt ezek mentén az élek mentén egy sértő konfigurációt kapunk. Ebben az esetben tehát több egyenlőtlenséget is hozzáadunk a relaxációnkhoz.

2.6. Méhsejt egyenlőtlenségek

Erre az osztályra is egy heurisztikát adunk. Erről sem tudjuk, hogy NP-nehéz-e x^* vektorhoz egy sértő méhsejt egyenlőtlenséget találni. Ez a heurisztika is a fenti [2] cikkben leírt algoritmuson alapszik. Hasonló ötletek lesznek, mint a K-C szeparációs heurisztikában.

2.6.1. Inicializálás

Adott a $G = (V, E)$ gráfunk és a szükséges élek $E_R \subseteq E$ halmaza, valamint x^* vektor. Az algoritmus bemenetként megkapja néhány R-összefüggőségi komponens unióját: H . Ehhez fogunk megpróbálni sértő méhsejt konfigurációt készíteni úgy, hogy $H = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_L$.

Itt is leellenőrizzük, hogy H -ból tényleg nem megy ki szükséges él, illetve, hogy a H elhagyásával keletkező gráf összefüggő. Ezek nyilván szükséges feltételei egy ilyen méhsejt konfiguráció létezésének.

2.6.2. Első fázis

Az első fázis célja meghatározni a $V_0, V_1, \dots, V_L \subsetneq H$ halmazokat.

Jelöljük a H -n kívüli R-összefüggő komponenseket nemnegatív számokkal. Először minden $v_i \in H$ csúcsra fenntartunk egy címkét, ezt inicializáljuk -1 -gyel. Ha megy v_i -ből x^* -pozitív súlyú él H -n kívülre, akkor felülírjuk annak a komponensnek a számával, amelybe a legnagyobb súlyú ilyen él megy v_i -ből.

Amíg van -1 címkéjű csúcs, csináljuk a következőt: végigmegyünk a H -n belüli éleken x^* súlyozás szerint nem növekvő sorrendben. Ha ez az él nem azonos címkéjű csúcsokat köt össze, akkor legyen $a < b$ a két szóban forgó címke. Két eset van. Ha $a = -1$, akkor a -t felülírjuk b -vel. Ha a nemnegatív, akkor az összes a értékű csúcsot felülírjuk b -vel.

Tehát H -n belül minden csúcsnak van egy nemnegatív címkéje. Sorban leellenőrizzük, az azonos címkéjű csúcshalmazokra, hogy R-páratlanok-e. Jelölje az ilyenek közül a maximális címkét b . Az összes R-páratlan halmazt címkéjét felülírjuk ezzel a b -vel. Ebben a pillanatban tehát az igaz, hogy az azonos címkéjű csúcsok egy olyan partícióját adják H -nak, melyben minden halmaz R-páros. Ezek a halmazok lesznek a V_0, V_1, \dots, V_L halmazaink.

Le kell még ellenőriznünk, hogy a V_i halmazokat egy ponttá összehúzza, a szükséges élek összefüggő részgráfját adják H -nak. Ha nem, illetve ha $L = 1$, akkor elvetjük a konfigurációt. Ha $L = 2$, akkor lefuttatjuk az ez előtt tárgyalt K-C-kereső algoritmust erre a 2-elemű partícióra. Ha $L \geq 3$, akkor megyünk a második fázisra.

2.6.3. Második fázis

E fázis célja egy méhsejt konfiguráció megtalálása. Kétszer futtatjuk. Először kitöröljük az x^* súlyozás szerint 0-éleket, másodszer benne hagyjuk.

A V_i komponenseinket és a H -n kívüli R-összefüggő komponenseket összehúzzuk egy ponttá. A továbbiakban ezen a G' gráfon dolgozunk.

Először megkeressük az összefüggő komponenseket abban a G'' gráfban, amit G' -ből úgy kapunk, hogy minden élet kitörölünk V_i -k között. Minden egyes ilyen komponensre megpróbálunk egy méhsejt konfigurációt készíteni úgy, hogy a komponensen kívüli V_i halmazokat beolvasszunk valamelyik komponensen belüli V_j halmazba. Hasonlóan járunk el a külső R-összefüggő komponensekkel. (Az így keletkező halmazokat W_1, \dots, W_{K-1} -gyel jelöljük) Mindkét halmaztípusból legalább 2 kell, hogy esélyünk legyen egy méhsejt konfigurációt készíteni. Ha kevesebb van, elvetjük az aktuális komponensst.

Most veszünk egy x^* súlyozásra maximális súlyú feszítőfát. Ez akkor méhsejt-konfiguráció, ha a $\forall i$ -re a V_i csúcs foka 1, és $\forall i, j$ -re a V_i és V_j közötti egyértelmű fa-beli út hossza legalább 3.

Ha V_i foka $d \geq 2$, akkor megnézzük, hogy a szomszédai (ezek szükségképpen W_i típusú csúcsok, hiszen minden H -n belüli élt töröltünk) feszítenek-e fát. Ha igen, akkor módosítjuk az aktuális (eredetileg maximális) feszítőfát a következőképpen: a V_i -re illeszkedő élek közül a legolcsóbbat megtartjuk, a többi töröljük, a szomszédosság-fa éleit bevesszük. Ha a szomszédos csúcsok nem feszítenek fát, akkor elvetjük az aktuális komponensst. Ezt iteráljuk amíg van 1-nél nagyobb fokú csúcs.

Ha ezek után $\exists i, j$, hogy a V_i és V_j közötti út csak 2 hosszú, elvetjük az aktuális komponensst.

Ha eddig eljutottunk, akkor már biztosan készíthetünk egy méhsejt-konfigurációt. Azokat a W_i halmazokat, melyeknek a foka 1, (tehát a leveleket) beolvasszunk a szomszédjába. Ezt iteráljuk addig, amíg van ilyen. Ha nincs ilyen, akkor az aktuális konfigurációnk egy méhsejt-konfiguráció. Kiszámoljuk az együtthatókat, és ha az aktuális megoldás sérti a méhsejt-egyenlőtlenséget, akkor hozzávesszük a feladatunkhoz.

2.6.4. Harmadik fázis

Méhsejt konfigurációból is próbálkozhatunk újabb (kisebb) méhsejt-konfigurációkat csinálni. Erre szolgál a harmadik fázis.

Kiszámolunk egy c_e súlyt a fa-beli élekre. Egy e élre $c_e = \sum_{f \in E_e} x^*(e)$, ahol E_e jelöli azon $h = (u, v)$ élek halmazát, amire a méhsejt konfigurációban az u -hoz és

v -hez tartozó halmazok közötti egyértelmű út átmegy e -n. Ha egy $e \in T$ élre $c_e > 2$, és összehúzza egy méhsejt konfigurációt kapunk, akkor (mivel a hozzá tartozó egyenlőtlenség jobb oldala 2-vel csökkent, a bal oldala pedig pontosan c_e -vel) egy olyan egyenlőtlenséget kapunk, ami jobban sérül mint az, amiből kiindultunk.

Ennek megfelelően az algoritmus először keres egy olyan W_i csúcsot, aminek nincs V_j szomszédja. Ezáltal W_i nem lehet rajta 3 hosszú úton valamely V_i és V_j között, vagyis a rá illeszkedő összes él összehúzható. Amennyiben valamelyik illeszkedő e élre $c_e > 2$, akkor összehúzzuk a konfigurációt az e él mentén. Ezt iteráljuk amíg találunk ilyen W_i csúcsot és rá illeszkedő élt.

2.7. Diszjunktív vágások

Legyen az aktuális relaxáció $P = Ax \geq b, x \geq 0$ ahol $A \in \mathbb{R}^{nm}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, n = |E|$, ahol $G = (V, E)$ a gráfunk. Jelölje (mint eddig is) x^* az optimális megoldást, és legyen $v \in V$ egy csúcs, amelynek a szomszédos élein a megoldás összértéke nem egész, vagy nem megfelelő paritású. Jelölje egyszerűség kedvéért $\{1, \dots, k\}$ a v -re illeszkedő élek indexeit, $\{k+1, \dots, n\}$ pedig a nem illeszkedőket. Jelölje $\alpha \in \mathbb{R}^n$ azt a vektort, amiben az első k elem 1-es, az összes többi 0. Jelölje K a $\sum_{i=1}^k x^*_i$ -hez legközelebbi, nála kisebb megfelelő paritású egész számot.

Ekkor P_1 poliéder:

$$Ax \geq b \quad (2.9)$$

$$\sum_{i=1}^k x_i \geq K + 2 \quad (2.10)$$

A P_2 poliéder:

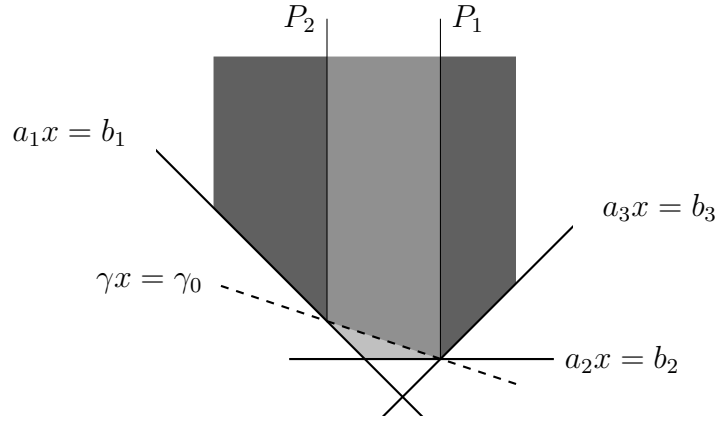
$$Ax \geq b \quad (2.11)$$

$$\sum_{i=1}^k -x_i \geq -K \quad (2.12)$$

$P_1 \cup P_2$ tartalmaz minden megengedett megoldást, tehát ha találunk egy egyenlőtlenséget, amit minden $z \in \text{conv}(P_1 \cup P_2)$ pont teljesít, akkor $GRP(G)$ pontjai is teljesítik.

Minden P_1 -re érvényes egyenlőtlenség előáll valamely $\lambda \in \mathbb{R}^m$ és $\mu \in \mathbb{R}$ -re a következő alakban:

$$(\lambda A + \mu \alpha)x \geq \lambda b + \mu(K + 2) \quad (2.13)$$



12. ábra. Példa egy diszjunktív vágásra 2 dimenzióban.

P_2 -re érvényes egyenlőtlenségek pedig valamely $\lambda' \in \mathbb{R}^m$ és $\mu' \in \mathbb{R}$ -re:

$$(\lambda'A - \mu'\alpha)x \geq \lambda'b - \mu'K \quad (2.14)$$

Ha tehát a következő programnak ($\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma_0 \in \mathbb{R}$) az optimális megoldása negatív, akkor a $\gamma x \geq \gamma_0$ egyenlőtlenség egy érvényes egyenlőtlenség a $GRP(G)$ -re, melyet x^* sért.

$$\min \gamma x^* - \gamma_0 \quad (2.15)$$

$$\gamma \geq \lambda A + \mu \alpha \quad (2.16)$$

$$\gamma \geq \lambda' A - \mu' \alpha \quad (2.17)$$

$$\gamma_0 \leq \lambda b + \mu(K + 2) \quad (2.18)$$

$$\gamma_0 \leq \lambda' b - \mu' K \quad (2.19)$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i + \sum_{i=1}^m \lambda'_i + \mu + \mu' = 1 \quad (2.20)$$

$$\lambda, \lambda', \mu, \mu' \geq 0 \quad (2.21)$$

Ekkor tehát hozzávehetjük a $\gamma x \geq \gamma_0$ egyenlőtlenséget, ezzel a relaxációnk erősebb lett. A 2.20 egyenlőség biztosítja a korlátosságot.

2.8. Gomory vágások

Gomory vágást $\min\{cx : A'x = b', x \geq 0\}$ alakú probléma egy x^* bázismegoldásából kaphatunk. Tehát először át kell írni ebbe a formába, illetve a vágás kiszámolása után vissza kell írni. A program által használt és e fejezetben tárgyalt algoritmusok közül ez az egyetlen, melynek implementációjára nem került sor. Ennek fő oka, hogy a CPLEX megoldónak van egy saját implementációja, melyet használhatunk. Legyen t egy olyan index, amire van egészértékűségi feltételünk, de x^*_t nem egész. (t -t lehetőleg válasszuk a 2.7-nél bevezetett paritási változók közül). Jelölje a bázisbeli változók indexeinek halmazát B , a bázison kívüli változók indexeinek halmazát N . Jelölje az egészértékű változóink halmazát I , a nem egészértékűekét J . Ekkor a t -hez tartozó egyenlet az aktuális szimplex-táblában: $x_t + \sum_{j \in N} d_{tj}x_j = d_{t0}$. Jelölje továbbá $f_j = \{d_{tj}\}$. Ekkor érvényes az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{f_0} \sum_{\substack{j \in N \cap I, \\ f_j \leq f_0}} f_j x_j - \frac{1}{1 - f_0} \sum_{\substack{j \in N \cap I, \\ f_j > f_0}} (f_j - 1)x_j + \frac{1}{f_0} \sum_{\substack{j \in N \cap J, \\ d_{tj} \geq 0}} d_{tj}x_j - \frac{1}{1 - f_0} \sum_{\substack{j \in N \cap J, \\ d_{tj} < 0}} d_{tj}x_j \geq 1$$

Megjegyzés. Sajnos a CPLEX nem biztosít (legalábbis az általam használt 11.2-es verzió) megfelelő kontrollt arra nézve, hogy egy megoldás során pontosan mikor illetve mely változókra keressen Gomory vágást, a talált Gomory vágást mikor vegye be a feladatba, és mikor vesse el (például esetleges numerikus problémák miatt). A mi esetünkben sikeres R -páratlan, K -komponens, illetve Méhsejt vágáskeresés után bizonyos esetben annyira változik a feladat, hogy érdemes lehet, és mint azt látni fogjuk (a diszjunktív vágások segítségével) a gyakorlatban úgy tűnik érdemes is újra tört vágásokat keresni. A programon tehát egy jó Gomory vágás implementáció a megfelelő beállításokkal akár érezhetően gyorsíthatna. Erre időhiány miatt nem került sor.

3. fejezet

Elemzés

Ebben a fejezetben a program futását elemezzük. Megnézzük, hogy különböző méretű és fajtájú gráfokon és különböző beállításokkal hogyan teljesítenek a vágásaink.

3.1. A vizsgált gráfok

Két halmazba sorolhatók a gráfok, melyeken az algoritmust futtattam. Az egyik halmaz a Corberán honlapján megtalálható gráfok [5]. Ezekből van három féle, összesen 40 darab. A neveik így kezdődnek: GRP (10), ALBA (15), MADR (15). Ebből a GRP és az ALBA nevű gráfok Albaida, a MADR pedig Madrigueras spanyol városok utcahálózatából bizonyos élek elhagyásával és véletlen élek szükségessé tételével kapott gráfok. Az ALBA és GRP gráfoknak 174 éle van összesen, míg a MADR gráfoknak 316. Az ALBA és MADR gráfok nevei után 2 szám van (pl. ALBA_3_2 vagy MADR_7_4), amiből az első azt jelöli, hogy milyen valószínűséggel tették egy élet szükségessé. A 3 azt jelenti, hogy 0.3 valószínűséggel, az 5 azt, hogy 0.5 valószínűséggel, míg a 7 azt, hogy 0.7 valószínűséggel. Az ezekhez a gráfokhoz (továbbiakban Corberán gráfok) tartozó futások táblázatai a függelék végén az A.5.-től az A.12-ig találhatóak.

A Corberán gráfokon a program 2 kivételtől eltekintve már csak az R-páratlan egyenlőtlenségeket használva is nagyon gyorsan lefutott, szinte alig kellett B&C csúcsot bejárni. Ez a 2 kivétel a GRP4 és a GRP10 nevezetű gráfok (Az A.5 és A.6 táblázatokban).

A másik halmaz az általam készített gráfok. Ezek nevei PLN24_2_ -vel kezdődnek. Ennek a jelölésnek az oka a következő: a gráfokat úgy kaptam, hogy véletlenszerűen kijelöltem a sík egy A4-es lapnak megfelelő arányú téglalapjának pontjai közül 200-at (ebből jön az első 2-es), majd hozzávettem annyi véletlen élt, és úgy, hogy

a következők teljesüljenek: a gráfnak a pontok aktuális helyzete egy síkbarajzolása legyen (ezért PLN...), legalább 400 élt adjunk hozzá (ebből jön a 4-es) és ezen felül legyen összefüggő (így 500 él körül lett általában a gráfok mérete). Ezek közül az élek közül 0.2 valószínűséggel választottam ki szükséges éleket (ebből jön a második 2-es). Az élek költsége az euklideszi távolság alsó egészrésze (azért hasznos, ha egész, mert így a futás során adódó esetleges numerikus problémák könnyebben kiszűrhetők). Miután generáltam egy ilyen gráfot, megnéztem, hogy milyen hosszú ideig fut az algoritmus, és amennyiben gyorsan optimumot talált, elvettem és generáltam egy újat. Összesen 20 gráfot generáltam a módszerrel. Ezekhez a gráfokhoz (továbbiakban saját gráfok) a függelék elején az A.1.-től az A.4-ig található táblázatok.

3.2. A program beállításai

Összesen 7 különböző beállítással futtattam a programot minden gráfon. Ezek annyiban térnek el, hogy bizonyos algoritmusok bizonyos beállításokban ki vannak kapcsolva. A kikapcsolható algoritmusok az R-páratlan vágást kereső algoritmus, a K-komponens és méhsejt heurisztikák, illetve a Gomory és diszjunktív vágást kereső algoritmusok. Tehát az egyetlen algoritmus, ami mindig be van kapcsolva, az összefüggőségi. Ez persze szükséges is, e nélkül nem találhatnánk meg az optimális megoldást. A 7 különböző beállítás a következő:

- **None**: A választhatók közül semmi sincs bekapcsolva.
- **R-odd**: Csak az R-páratlan egyenlőtlenségek vannak bekapcsolva.
- **Disj, Gom**: Csak a diszjunktív és Gomory vágások vannak bekapcsolva.
- **R-odd, K-C, H-C**: A diszjunktív és Gomory vágásokon kívül minden be van kapcsolva.
- **R-odd, K-C, H-C, Gom**: Csak a diszjunktív vágás nincs bekapcsolva.
- **R-odd, Disj, Gom**: A K-C és méhsejt heurisztikák vannak kikapcsolva.
- **All**: Minden be van kapcsolva.

Az általam implementált algoritmusok meghatározott sorrendben követik egymást. Először R-páratlan vágást keresünk, ha ilyet nem találtunk, akkor K-komponenst, ha ilyet sem találtunk akkor méhsejtet és végül ha eddig nem találtunk semmit, akkor diszjunktív vágást. Minden esetben akkor tekintünk egy egyenlőtlenséget az aktuális x^* megoldás által sértettnek, ha legalább 0.01-gyel sérti az egyenlőtlenséget. Ha

nem lenne egy ilyen korlát, akkor sértett diszjunktív vágást minden nem megengedett megoldáshoz tudnánk találni, tehát elméletileg branching nélkül megtalálnánk az optimumot. Gyakorlatilag azonban, mivel lebegőpontos (tehát nem végtelen pontosságú) aritmetikát használunk, egy idő után numerikus problémák adódnának.

A Gomory vágásokat nem tudjuk kontrollálni, tapasztalat alapján a futás legelején hozzáadódik az összes, amit akkor a CPLEX talál, később pedig már nem keres.

Érdekes lehetne megvizsgálni, hogy ha nem mindig számoljuk újra az optimumot sértett egyenlőtlenség megtalálása után, illetve ha más sorrendben futtatjuk az algoritmusokat az hogyan befolyásolja a futás menetét. Ez a futási sorrend a Corberán 2001-es cikkében javasolt sorrenden alapszik, ők javasolták az R-páratlan vágásokat keresni először. [2]

3.3. Észrevételek

Gráfcsoport	R-odd	D, G	R, K, H	R, K, H, G	R, D, G	All
Érdekes gráfok	17834	19532	5995	1835	202	243
Többi GRP	4	14022	1	0	0	0
Albaida	15	2467	15	3	0	0
Madrigueras	96	483	43	22	0	0

3.1. táblázat. Az optimumig bejárt B&C csúcsok különböző beállításokban

A már sokszor említett cikkben [2] szó volt róla, hogy a poliéderes megközelítés mennyire hatékony, és hogy (az itt is szereplő gráfokon) R-páratlan, K-C, méhsejt és út-híd egyenlőtlenségek keresésével szinte mindig (branching nélkül is) gyorsan megtalálható az optimális megoldás. Azért csak szinte, mert a már említett két nehezebb esetben (GRP4 és GRP10) nem. A programom ennél annyival tud kevesebbet, hogy nincs út-híd vágáskereső heurisztika implementálva, illetve hogy, noha a cikkben leírtak alapján készítettem a K-C és méhsejt vágásgeneráló heurisztikát, az ő méréseik alapján ezek kicsit még hatékonyabbnak tűnnek, tehát valami különbségnek lennie kell.

Annyival viszont mindenképpen több, hogy vannak Gomory és diszjunktív vágások. A fő kérdés, amit a továbbiakban vizsgálunk, hogy ezek a vágások mennyire bizonyulnak hasznosnak erre a konkrét problémára önmagukban, illetve mennyit segítenek, ha kiegészítik a GRP-ben oldalakat definiáló vágásokat.

A továbbiakban elsősorban a saját gráfokkal, a GRP4 és GRP10 gráfokkal fogunk

foglalkozni, a többiek általában túl egyszerűek. Ez tehát összesen 22 gráf. A fenti táblázatban ezek a gráfok az „érdekes gráfok”. Az összehasonlítás alapja a különböző beállításokkal bejárt B&C csúcsok száma. Ez azt mutatja meg, hogy az éppen aktuálisan bekapcsolt algoritmusok által generált vágások mennyire „jól” közelítik meg a poliédert.

Tehát a fenti táblázat és a függelékben szereplő futási eredmények alapján az alábbi megfigyeléseket tehetjük:

- Amikor csak a **diszjunktív** és **Gomory** vágások vannak bekapcsolva, az a 22 érdekes esetből 6-szor (saját: 1,10,13,18; GRP4, GRP10) már önmagában kisebb B&C fát eredményez, mintha csak az **R-páratlan** egyenlőtlenségek vannak bekapcsolva, és ebből 5-ször (a saját 1-est kivéve) annál is kisebbet, mint amikor az R-páratlan mellett a K-C és méhsejt heurisztikák is be vannak kapcsolva.
- Amikor az **R-páratlan** mellett a **diszjunktív** és **Gomory** vágások vannak bekapcsolva, az minden esetben kevesebb bejárt B&C csúcsot eredményez annál, amikor az **R-páratlan** mellett a **K-C** és **méhsejt** heurisztikák vannak bekapcsolva. Sőt, a bejárt csúcsok száma általában nagyságrendekkel kisebb, a 22-ből 13 esetben legfeljebb 10 a bejárt csúcsok száma és ebből 7-szer 0, tehát 7-szer az R-páratlan, diszjunktív, Gomory vágások a gyökérpontban megtalálják az optimumot.
- Amikor **minden** be van kapcsolva, az 22-ből 21-szer kisebb (általában ebben az esetben is sokkal kisebb) B&C fát eredményez, mint amikor a **diszjunktív** vágásokat kikapcsoljuk. Tehát (ilyen szempontból legalábbis) érdemes tört vágásokat generálni az oldaldefiniáló vágások után is.
- Ha esetleg sem az **R-páratlan** vágások önmagukban, sem a **diszjunktív** és **Gomory** vágások önmagukban nem hatékonyak, attól még együtt lehetnek nagyon hatékonyak (a PLN24_2_8 gráf erre a legjobb példa).
- Amikor vegyesen vannak bekapcsolva tört (Gomory, Diszjunktív) illetve oldaldefiniáló (R-páratlan, K-C, Méhsejt) vágások, az minden beállításban sokkal jobban (szokkal kisebb B&C fa, jobb alsó korlát a gyökérpontban, nehéz probléma esetén gyorsabb futás) teljesít, mint ha csak az egyik típusból vannak bekapcsolva vágások.

3.4. Összefoglalás

Megállapíthatjuk tehát, hogy a vizsgált Általános Útvonaltervezési probléma (GRP) megoldásakor a tört vágások önmagukban is hasznosak lehetnek. Nem minden esetben jobbak a szakirodalomban már tesztelt és hatékonynak bizonyult [2] oldaldefiniáló vágások.

Ha pedig a tört vágásaink kiegészítik az oldaldefiniáló vágásokat, akkor nagyságrendekkel tudják növelni azok hatékonyságát. Különösen azoknál a gráfoknál, melyeknél az oldaldefiniáló vágások önmagukban nem bizonyulnak hatékonynak.

Irodalomjegyzék

- [1] Egon Balas. Disjunctive programming. *Annals of Discrete Mathematics*, 5:3–51, 1979.
- [2] A. Corberán, A.N. Letchford, and J.M. Sanchis. A cutting plane algorithm for the general routing problem. *Mathematical programming*, 90(2):291–316, 2001.
- [3] A. Corberán and J.M. Sanchis. A polyhedral approach to the rural postman problem. *European Journal of Operational Research*, 79(1):95–114, 1994.
- [4] A. Corberán and J.M. Sanchis. The general routing problem polyhedron: facets from the rpp and gtsp polyhedra. *European Journal of Operational Research*, 108(3):538–550, 1998.
- [5] A. Corberán. Arc routing problems: Data instances. <http://www.uv.es/corberan/instancias.htm>. Megnyitva: 2013-05-17.
- [6] Gérard Cornuéjols, Jean Fonlupt, and Denis Naddef. The traveling salesman problem on a graph and some related integer polyhedra. *Mathematical Programming*, 33(1):1–27, 1985.
- [7] Matteo Fischetti, Andrea Lodi, and Andrea Tramontani. On the separation of disjunctive cuts. *Mathematical Programming*, 128(1-2):205–230, 2011.
- [8] András Frank, András Sebő, et al. Covering directed and odd cuts. In *Mathematical Programming at Oberwolfach II*, pages 99–112. Springer, 1984.
- [9] Adam N Letchford. New inequalities for the general routing problem. *European Journal of Operational Research*, 96(2):317–322, 1997.
- [10] Manfred W Padberg and M Ram Rao. Odd minimum cut-sets and b-matchings. *Mathematics of Operations Research*, 7(1):67–80, 1982.

A függelék

Futási eredmények

Az alábbiakban találhatók a teszteredmények. Minden táblázat bal felső sarka jelöli, hogy melyik gráfcso magból vettük őket. Minden gráfra (első oszlop) 7 különböző beállítással (második oszlop) futtattam a programot. Az első oszlopban a gráf neve alatt szerepel a csúcsok száma, a szükséges élek száma és az összes él száma.

A következő két oszlop (Tot Time, RN Time) jelöli a futás összidejét illetve a gyökércsúcsban eltöltött időt másodpercben. Az esetleges zárójel azt jelenti, hogy a két érték megegyezik, mivel nem történt Branching.

A következő oszlop (B&C Nodes) jelöli az összes bejárt Branch csúcs számát. (A 0 és az 1 is azt jelöli, hogy nem történt Branching.)

A következő 6 oszlop a B&C fa gyökércsúcsában megtalált vágások száma. A „-” jel azt jelöli, hogy az adott vágás nincs bekapcsolva abban a beállításban. A (Tot Conn) oszlop az összes összefüggőségi egyenlőtlenség száma, a zárójel itt is azt jelenti, hogy az érték megegyezik a gyökérpontbeli értékkel, mivel nem volt Branching. (A B&C fa bejárása során az összefüggőségi egyenlőtlenség az egyetlen amit keresünk.)

Az (Init LB) oszlop a kezdeti beállításokkal kapott alsó korlát a feladatra, míg az (RN LB) a gyökércsúcsban kapott alsó korlát.

Az utolsó (Value) oszlop értéke vagy LB-vel, vagy OPT-tal kezdődik. Ha LB-vel, az azt jelenti, hogy az időkorlát (nagyjából 600 másodperc) lejárt után sem kaptunk optimális eredményt (nem tudtuk bejárni a teljes B&C fát). Ez esetben az utána következő érték a pszeudotúra költségére alsó korlát, majd zárójelben a túra költségére alsó korlát. Ha OPT-tal, akkor a bejárás sikeres volt, megtaláltuk az optimumot, ez esetben az utána következő érték az optimális pszeudotúra értéke, majd zárójelben az optimális túra értéke.

1-5 Planar GRP (Saját)		Tot Time	RN Time	B&C Nodes	RN Conn	R-odd	K-C	H-C	Disj	Gom	Tot Conn	Init LB	RN LB	Value
PLN24_2_1 200/83/421	None	602.959s	0.324852s	82500	627	-	-	-	-	-	4395	5476.5	6810.5	LB: 7014 (11658)
	R-odd	29.562s	27.2562s	274	1043	93	-	-	-	-	1290	5476.5	6999	OPT: 7047 (11691)
	Disj, Gom	6.66214s	3.79797s	224	757	-	-	-	51	52	2055	5476.5	7030.07	OPT: 7047 (11691)
	R-odd, K-C, H-C	33.7272s	32.066s	144	1043	97	10	7	-	-	1287	5476.5	7011	OPT: 7047 (11691)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	16.6435s	14.8999s	132	882	30	8	2	-	45	1520	5476.5	7041.07	OPT: 7047 (11691)
	R-odd, Disj, Gom	32.7251s	32.7194s	3	882	42	-	-	53	46	882	5476.5	7045.03	OPT: 7047 (11691)
	All	24.5904s	(24.5904s)	0	882	37	14	2	34	42	(882)	5476.5	7047	OPT: 7047 (11691)
PLN24_2_2 200/95/454	None	604.125s	0.345077s	176420	211	-	-	-	-	-	2359	2963	3708.5	LB: 3914 (7839)
	R-odd	20.8091s	18.1919s	733	237	70	-	-	-	-	550	2963	3892	OPT: 3956 (7881)
	Disj, Gom	11.449s	2.68129s	2627	357	-	-	-	45	52	1117	2963	3932.61	OPT: 3956 (7881)
	R-odd, K-C, H-C	23.0017s	20.3825s	733	237	70	0	0	-	-	550	2963	3892	OPT: 3956 (7881)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	13.3271s	12.5163s	77	334	31	0	0	-	37	457	2963	3946.88	OPT: 3956 (7881)
	R-odd, Disj, Gom	22.409s	(22.409s)	0	349	47	-	-	22	34	(349)	2963	3956	OPT: 3956 (7881)
	All	25.4306s	(25.4306s)	0	349	47	0	0	22	34	(349)	2963	3956	OPT: 3956 (7881)
PLN24_2_3 200/96/470	None	603.543s	0.252132s	141330	125	-	-	-	-	-	1260	3385	4113	LB: 4366 (9272)
	R-odd	30.9987s	30.423s	75	182	91	-	-	-	-	203	3385	4388	OPT: 4454 (9360)
	Disj, Gom	16.4356s	2.27334s	2870	228	-	-	-	55	45	556	3385	4426.08	OPT: 4454 (9360)
	R-odd, K-C, H-C	36.3s	35.6487s	75	182	91	0	0	-	-	203	3385	4388	OPT: 4454 (9360)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	36.8256s	36.4798s	28	213	93	0	0	-	34	216	3385	4443.13	OPT: 4454 (9360)
	R-odd, Disj, Gom	46.5779s	(46.5779s)	0	216	105	-	-	26	30	(216)	3385	4454	OPT: 4454 (9360)
	All	46.2556s	(46.2556s)	0	216	105	0	0	26	30	(216)	3385	4454	OPT: 4454 (9360)
PLN24_2_4 200/106/504	None	602.581s	0.343076s	68344	319	-	-	-	-	-	6197	2735.5	3079	LB: 3252.5 (7649.5)
	R-odd	31.2563s	25.84s	546	1032	95	-	-	-	-	2157	2735.5	3278	OPT: 3318 (7715)
	Disj, Gom	14.9091s	3.62443s	1317	402	-	-	-	26	54	1994	2735.5	3271.67	OPT: 3318 (7715)
	R-odd, K-C, H-C	33.9726s	27.9413s	546	1032	95	0	0	-	-	2157	2735.5	3278	OPT: 3318 (7715)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	15.6763s	9.25178s	750	621	22	0	0	-	46	1497	2735.5	3286.5	OPT: 3318 (7715)
	R-odd, Disj, Gom	31.2037s	30.4163s	50	873	57	-	-	51	40	883	2735.5	3291.82	OPT: 3318 (7715)
	All	44.6833s	43.9168s	50	873	57	0	0	51	40	883	2735.5	3291.82	OPT: 3318 (7715)
PLN24_2_5 200/82/428	None	603.63s	0.718428s	67722	952	-	-	-	-	-	9304	3799.5	4523	LB: 4717.5 (8549.5)
	R-odd	17.3337s	8.40661s	1039	1328	32	-	-	-	-	3709	3799.5	4679	OPT: 4754 (8586)
	Disj, Gom	41.5355s	21.64s	1570	1244	-	-	-	120	35	3378	3799.5	4732.03	OPT: 4754 (8586)
	R-odd, K-C, H-C	28.3549s	19.254s	870	1337	54	54	1	-	-	3845	3799.5	4684.45	OPT: 4754 (8586)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	13.1813s	9.41869s	393	957	22	0	0	-	45	1680	3799.5	4718.9	OPT: 4754 (8586)
	R-odd, Disj, Gom	25.9574s	22.6788s	198	968	43	-	-	43	38	2031	3799.5	4735.13	OPT: 4754 (8586)
	All	29.8686s	26.4948s	198	968	43	0	0	43	38	2031	3799.5	4735.13	OPT: 4754 (8586)

A.1. táblázat. Teszteredmények saját gráfokon 1-5.

6-10 Planar GRP (Saját)		Tot Time	RN Time	B&C Nodes	RN Conn	R-odd	K-C	H-C	Disj	Gom	Tot Conn	Init LB	RN LB	Value
PLN24_2_6 200/91/502	None	602.618s	0.286959s	65082	226	-	-	-	-	-	6753	2991	3608	LB: 3751 (8175)
	R-odd	30.2127s	15.9674s	2034	391	54	-	-	-	-	1263	2991	3772	OPT: 3828 (8252)
	Disj, Gom	436.446s	4.13403s	64424	867	-	-	-	17	48	3788	2991	3774.75	OPT: 3828 (8252)
	R-odd, K-C, H-C	39.5598s	18.6833s	2934	391	54	34	0	-	-	2125	2991	3773	OPT: 3828 (8252)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	15.8655s	11.7586s	441	885	37	0	0	-	34	1751	2991	3809	OPT: 3828 (8252)
	R-odd, Disj, Gom	61.0008s	60.9303s	6	1194	85	-	-	81	23	1196	2991	3826.08	OPT: 3828 (8252)
	All	113.215s	(113.215s)	1	1195	82	79	0	88	25	(1195)	2991	3828	OPT: 3828 (8252)
PLN24_2_7 200/88/519	None	603.207s	0.997553s	62137	837	-	-	-	-	-	16800	3547.5	4079.75	LB: 4172 (7711)
	R-odd	154.806s	23.6122s	16537	1589	90	-	-	-	-	4340	3547.5	4192.29	OPT: 4250 (7789)
	Disj, Gom	431.644s	6.29871s	47987	456	-	-	-	23	48	9932	3547.5	4211.14	OPT: 4250 (7789)
	R-odd, K-C, H-C	63.3233s	31.8694s	3727	1589	103	96	0	-	-	2906	3547.5	4200.9	OPT: 4250 (7789)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	37.0192s	25.211s	1089	474	61	62	39	-	28	1788	3547.5	4230.5	OPT: 4250 (7789)
	R-odd, Disj, Gom	127.415s	126.818s	28	718	163	-	-	126	24	817	3547.5	4246.76	OPT: 4250 (7789)
	All	184.092s	(184.092s)	1	752	176	68	45	128	24	(752)	3547.5	4250	OPT: 4250 (7789)
PLN24_2_8 200/102/481	None	603.267s	0.354907s	85453	548	-	-	-	-	-	1506	3184	3833	LB: 4005.5 (9074,5)
	R-odd	548.8s	16.6523s	112479	617	76	-	-	-	-	1183	3184	4028.5	OPT: 4119 (9188)
	Disj, Gom	560.612s	2.13722s	126352	490	-	-	-	16	69	1133	3184	4038.83	OPT: 4119 (9188)
	R-odd, K-C, H-C	130.406s	28.5275s	18118	626	102	84	0	-	-	1025	3184	4053.5	OPT: 4119 (9188)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	61.4439s	10.2062s	10625	596	33	0	0	-	49	885	3184	4073.5	OPT: 4119 (9188)
	R-odd, Disj, Gom	39.0527s	36.6856s	352	622	88	-	-	45	37	720	3184	4093.25	OPT: 4119 (9188)
	All	67.9376s	61.7542s	784	628	98	63	0	62	35	814	3184	4097.41	OPT: 4119 (9188)
PLN24_2_9 200/98/489	None	603.31s	0.34989s	96528	650	-	-	-	-	-	5849	3532.5	3914	LB: 4036.25 (8339.25)
	R-odd	44.0509s	39.0757s	793	806	137	-	-	-	-	1117	3532.5	4070.5	OPT: 4102 (8405)
	Disj, Gom	56.8451s	3.99036s	9369	544	-	-	-	37	55	2239	3532.5	4074.97	OPT: 4102 (8405)
	R-odd, K-C, H-C	51.6451s	49.1739s	251	806	140	0	81	-	-	1216	3532.5	4077.5	OPT: 4102 (8405)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	34.1862s	33.6038s	28	734	68	46	61	-	41	736	3532.5	4093.84	OPT: 4102 (8405)
	R-odd, Disj, Gom	36.917s	36.331s	31	743	78	-	-	23	40	743	3532.5	4094.38	OPT: 4102 (8405)
	All	49.4696s	48.699s	74	734	69	46	61	22	41	781	3532.5	4094.38	OPT: 4102 (8405)
PLN24_2_10 200/84/423	None	602.378s	0.394965s	72611	918	-	-	-	-	-	5906	3691.5	4518.5	LB: 4700 (8392)
	R-odd	52.8705s	42.2945s	1286	1012	96	-	-	-	-	2487	3691.5	4666.5	OPT: 4737 (8429)
	Disj, Gom	6.14852s	5.2925s	46	1237	-	-	-	65	42	1560	3691.5	4722.37	OPT: 4737 (8429)
	R-odd, K-C, H-C	62.9716s	54.4554s	915	1012	107	2	9	-	-	2720	3691.5	4677	OPT: 4737 (8429)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	38.4627s	37.9517s	27	1357	67	2	6	-	38	1658	3691.5	4719.5	OPT: 4737 (8429)
	R-odd, Disj, Gom	37.5889s	37.3105s	10	1394	59	-	-	38	37	1752	3691.5	4726.75	OPT: 4737 (8429)
	All	55.0724s	54.7236s	13	1351	73	2	6	29	37	1739	3691.5	4726.75	OPT: 4737 (8429)

A.2. táblázat. Teszteredmények saját gráfokon 6-10.

11-15 Planar GRP (Saját)		Tot Time	RN Time	B&C Nodes	RN Conn	R-odd	K-C	H-C	Disj	Gom	Tot Conn	Init LB	RN LB	Value
PLN24_2_11 200/99/499	None	602.962s	0.517538s	54517	468	-	-	-	-	-	4641	3409	3899	LB: 4014 (8449)
	R-odd	71.7664s	39.7078s	3390	567	115	-	-	-	-	1707	3409	4063.25	OPT: 4112 (8547)
	Disj, Gom	62.0323s	13.6169s	4833	421	-	-	-	96	42	2236	3409	4083.54	OPT: 4112 (8547)
	R-odd, K-C, H-C	57.9667s	51.7338s	550	567	129	40	1	-	-	1103	3409	4075.75	OPT: 4112 (8547)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	44.1871s	43.4536s	40	497	95	19	1	-	29	576	3409	4095.7	OPT: 4112 (8547)
	R-odd, Disj, Gom	58.7377s	(58.7377s)	0	574	93	-	-	62	28	(574)	3409	4112	OPT: 4112 (8547)
	All	58.8459s	(58.8459s)	0	574	101	19	1	44	28	(574)	3409	4112	OPT: 4112 (8547)
PLN24_2_12 200/108/541	None	604.749s	0.335384s	110372	633	-	-	-	-	-	1475	2097	2475	LB: 2597 (6776)
	R-odd	40.5851s	28.9911s	2853	678	107	-	-	-	-	847	2097	2637	OPT: 2669 (6848)
	Disj, Gom	85.1606s	6.51138s	21172	804	-	-	-	99	54	1089	2097	2641.62	OPT: 2669 (6848)
	R-odd, K-C, H-C	45.9411s	34.373s	2853	678	107	0	0	-	-	847	2097	2637	OPT: 2669 (6848)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	14.6641s	12.1232s	607	642	36	0	0	-	45	762	2097	2649.5	OPT: 2669 (6848)
	R-odd, Disj, Gom	86.6276s	(86.6276s)	0	823	129	-	-	132	36	(823)	2097	2669	OPT: 2669 (6848)
	All	168.709s	(168.709s)	0	916	166	15	0	183	33	(916)	2097	2669	OPT: 2669 (6848)
PLN24_2_13 200/91/457	None	603.031s	0.282852s	79431	456	-	-	-	-	-	3011	3228	3850	LB: 4058 (7624)
	R-odd	26.4268s	19.4691s	904	680	60	-	-	-	-	1092	3228	4064.5	OPT: 4125 (7691)
	Disj, Gom	16.7001s	15.1493s	140	960	-	-	-	149	47	1024	3228	4111.9	OPT: 4125 (7691)
	R-odd, K-C, H-C	28.3344s	21.7605s	904	680	60	0	0	-	-	1092	3228	4064.5	OPT: 4125 (7691)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	8.05508s	7.11295s	104	1162	11	0	0	-	54	1200	3228	4100.75	OPT: 4125 (7691)
	R-odd, Disj, Gom	16.6015s	16.2716s	33	1180	15	-	-	48	48	1199	3228	4113.5	OPT: 4125 (7691)
	All	28.463s	28.1287s	33	1180	15	0	0	48	48	1199	3228	4113.5	OPT: 4125 (7691)
PLN24_2_14 200/106/483	None	603.177s	0.283067s	129863	192	-	-	-	-	-	830	2954	3504	LB: 3632.5 (8266.5)
	R-odd	35.3478s	31.5466s	760	200	90	-	-	-	-	253	2954	3677.12	OPT: 3725 (8359)
	Disj, Gom	9.63466s	4.27067s	1006	231	-	-	-	60	48	364	2954	3711.5	OPT: 3725 (8359)
	R-odd, K-C, H-C	38.7895s	35.2671s	590	200	94	0	1	-	-	253	2954	3679.38	OPT: 3725 (8359)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	20.8665s	20.2952s	52	223	54	0	0	-	41	244	2954	3716	OPT: 3725 (8359)
	R-odd, Disj, Gom	28.879s	(28.879s)	0	240	70	-	-	44	35	(240)	2954	3725	OPT: 3725 (8359)
	All	32.8649s	(32.8649s)	0	240	70	0	0	44	35	(240)	2954	3725	OPT: 3725 (8359)
PLN24_2_15 200/96/463	None	602.337s	0.317058s	92702	481	-	-	-	-	-	3301	3901.5	4278	LB: 4516.75 (8253.75)
	R-odd	27.4346s	26.8789s	58	493	92	-	-	-	-	582	3901.5	4525	OPT: 4573 (8310)
	Disj, Gom	12.9396s	7.6608s	786	509	-	-	-	60	58	865	3901.5	4546.71	OPT: 4573 (8310)
	R-odd, K-C, H-C	38.847s	37.95s	58	493	92	0	0	-	-	582	3901.5	4525	OPT: 4573 (8310)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	57.2504s	56.9218s	3	659	62	0	1	-	47	661	3901.5	4561.28	OPT: 4573 (8310)
	R-odd, Disj, Gom	69.6897s	(69.6897s)	0	655	67	-	-	56	43	(655)	3901.5	4573	OPT: 4573 (8310)
	All	86.6511s	(86.6511s)	0	659	76	0	1	56	43	(659)	3901.5	4573	OPT: 4573 (8310)

A.3. táblázat. Teszteredmények saját gráfokon 11-15.

16-20 Planar GRP (Saját)		Tot Time	RN Time	B&C Nodes	RN Conn	R-odd	K-C	H-C	Disj	Gom	Tot Conn	Init LB	RN LB	Value
PLN24_2_16 200/98/485	None	602.618s	0.333702s	83421	660	-	-	-	-	-	3125	3268.5	3855	LB: 4064 (8499)
	R-odd	41.3154s	32.7344s	1062	845	107	-	-	-	-	1160	3268.5	4244.25	OPT: 4288 (8723)
	Disj, Gom	603.381s	10.3016s	67540	933	-	-	-	90	49	2544	3268.5	4207.83	LB: 4256.33 (8691.33)
	R-odd, K-C, H-C	44.4211s	35.7981s	1062	845	107	0	0	-	-	1160	3268.5	4244.25	OPT: 4288 (8723)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	39.3941s	36.487s	305	741	110	0	0	-	33	1058	3268.5	4264.25	OPT: 4288 (8723)
	R-odd, Disj, Gom	60.6906s	(60.6906s)	0	1077	149	-	-	38	25	(1077)	3268.5	4288	OPT: 4288 (8723)
	All	64.9508s	(64.9508s)	0	1077	149	0	0	38	25	(1077)	3268.5	4288	OPT: 4288 (8723)
PLN24_2_17 200/94/486	None	601.932s	0.341028s	64190	774	-	-	-	-	-	4161	3244	3600.5	LB: 3743.5 (7629.5)
	R-odd	139.445s	103.871s	3303	1151	212	-	-	-	-	2196	3244	3746.5	OPT: 3814 (7700)
	Disj, Gom	63.5892s	11.5251s	6573	799	-	-	-	86	50	1941	3244	3771.59	OPT: 3814 (7700)
	R-odd, K-C, H-C	169.56s	150.658s	1430	1177	258	16	18	-	-	1743	3244	3774.5	OPT: 3814 (7700)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	95.1184s	64.9985s	2647	908	107	12	3	-	40	1943	3244	3785.11	OPT: 3814 (7700)
	R-odd, Disj, Gom	268.826s	267.266s	19	1147	283	-	-	173	23	1172	3244	3806.99	OPT: 3814 (7700)
	All	294.798s	289.024s	111	915	257	16	14	150	21	1104	3244	3808.23	OPT: 3814 (7700)
PLN24_2_18 200/95/503	None	604.554s	0.421442s	81991	883	-	-	-	-	-	5045	3135	3556.5	LB: 3791.5 (8105.5)
	R-odd	78.7883s	21.4736s	9024	1345	58	-	-	-	-	3707	3135	3755	OPT: 3853 (8167)
	Disj, Gom	22.4988s	6.68285s	2034	811	-	-	-	50	56	3340	3135	3829.5	OPT: 3853 (8167)
	R-odd, K-C, H-C	99.1298s	30.7146s	12805	1345	62	23	1	-	-	3617	3135	3776.5	OPT: 3853 (8167)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	15.0163s	10.9196s	570	822	20	31	0	-	49	1879	3135	3833.86	OPT: 3853 (8167)
	R-odd, Disj, Gom	69.8673s	(69.8673s)	1	942	76	-	-	96	38	(942)	3135	3853	OPT: 3853 (8167)
	All	45.2869s	44.9315s	35	920	47	31	1	60	44	924	3135	3844	OPT: 3853 (8167)
PLN24_2_19 200/109/523	None	602.514s	0.342561s	74210	597	-	-	-	-	-	2871	2657	3037.5	LB: 3179.5 (7489.5)
	R-odd	36.4069s	16.7653s	2359	833	47	-	-	-	-	1385	2657	3162.5	OPT: 3233 (7543)
	Disj, Gom	26.3102s	9.92483s	2176	906	-	-	-	84	34	1411	2657	3188.44	OPT: 3233 (7543)
	R-odd, K-C, H-C	40.5622s	21.1058s	2359	833	47	0	0	-	-	1385	2657	3162.5	OPT: 3233 (7543)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	22.5759s	20.5321s	193	1001	42	0	0	-	30	1143	2657	3201.59	OPT: 3233 (7543)
	R-odd, Disj, Gom	74.4546s	74.4019s	3	1014	86	-	-	98	25	1014	2657	3223.92	OPT: 3233 (7543)
	All	98.902s	98.8702s	3	1014	86	0	1	100	25	1014	2657	3224.07	OPT: 3233 (7543)
PLN24_2_20 200/99/520	None	603.559s	0.389269s	62852	777	-	-	-	-	-	13360	3177	3566.12	LB: 3719.5 (8131.5)
	R-odd	54.7022s	40.7533s	1829	1172	102	-	-	-	-	2670	3177	3803.83	OPT: 3845 (8257)
	Disj, Gom	603.19s	61.1539s	62981	1434	-	-	-	201	49	10547	3177	3786	LB: 3821.47 (8233.47)
	R-odd, K-C, H-C	60.713s	57.8212s	254	1178	129	25	1	-	-	1483	3177	3822.24	OPT: 3845 (8257)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	39.8442s	37.7328s	150	1497	82	19	0	-	31	1747	3177	3823.92	OPT: 3845 (8257)
	R-odd, Disj, Gom	300.749s	300.739s	3	1653	182	-	-	255	33	1653	3177	3842.83	OPT: 3845 (8257)
	All	275.92s	(275.92s)	1	1535	171	26	0	203	30	(1535)	3177	3845	OPT: 3845 (8257)

A.4. táblázat. Teszteredmények saját gráfokon 16-20.

1-5 GRP (Corberán)		Tot Time	RN Time	B&C Nodes	RN Conn	R-odd	K-C	H-C	Disj	Gom	Tot Conn	Init LB	RN LB	Value
GRP1 116/61/174	None	0.665712s	0.207775s	169	517	-	-	-	-	-	887	4183	5363.33	OPT: 5625 (9659)
	R-odd	4.01966s	3.93674s	4	871	43	-	-	-	-	871	4183	5617	OPT: 5625 (9659)
	Disj, Gom	0.316088s	(0.316088s)	0	440	-	-	-	8	27	(440)	4183	5625	OPT: 5625 (9659)
	R-odd, K-C, H-C	5.34012s	5.25806s	4	871	43	0	0	-	-	871	4183	5617	OPT: 5625 (9659)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	0.949376s	(0.949376s)	0	449	4	0	0	-	28	(449)	4183	5625	OPT: 5625 (9659)
	R-odd, Disj, Gom	0.666217s	(0.666217s)	0	449	4	-	-	0	28	(449)	4183	5625	OPT: 5625 (9659)
	All	0.960938s	(0.960938s)	0	449	4	0	0	0	28	(449)	4183	5625	OPT: 5625 (9659)
GRP2 116/64/174	None	606.875s	0.167318s	356184	541	-	-	-	-	-	3452	3748	4642	LB: 5152 (9860)
	R-odd	9.34532s	(9.34532s)	1	652	120	-	-	-	-	(652)	3748	5569	OPT: 5569 (10277)
	Disj, Gom	186.284s	4.63115s	110303	612	-	-	-	109	19	1952	3748	5219.88	OPT: 5569 (10277)
	R-odd, K-C, H-C	10.7376s	(10.7376s)	1	652	120	0	0	-	-	(652)	3748	5569	OPT: 5569 (10277)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	8.30779s	8.30564s	2	569	98	0	0	-	12	569	3748	5558	OPT: 5569 (10277)
	R-odd, Disj, Gom	7.45371s	(7.45371s)	0	569	98	-	-	10	12	(569)	3748	5569	OPT: 5569 (10277)
	All	8.71569s	(8.71569s)	0	569	98	0	0	10	12	(569)	3748	5569	OPT: 5569 (10277)
GRP3 116/61/174	None	0.389904s	0.178506s	68	577	-	-	-	-	-	728	3937	5484	OPT: 5688 (9536)
	R-odd	3.12101s	3.11897s	2	689	38	-	-	-	-	689	3937	5678	OPT: 5688 (9536)
	Disj, Gom	0.211868s	(0.211868s)	0	529	-	-	-	6	45	(529)	3937	5688	OPT: 5688 (9536)
	R-odd, K-C, H-C	4.70602s	(4.70602s)	0	689	40	28	0	-	-	(689)	3937	5688	OPT: 5688 (9536)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	1.13833s	(1.13833s)	0	529	4	0	0	-	45	(529)	3937	5688	OPT: 5688 (9536)
	R-odd, Disj, Gom	0.572134s	(0.572134s)	0	529	4	-	-	0	45	(529)	3937	5688	OPT: 5688 (9536)
	All	1.0902s	(1.0902s)	0	529	4	0	0	0	45	(529)	3937	5688	OPT: 5688 (9536)
GRP4 116/88/174	None	178.837s	0.210871s	129698	388	-	-	-	-	-	4747	2576	4296	OPT: 5186 (11420)
	R-odd	177.242s	0.157561s	129698	388	0	-	-	-	-	4747	2576	4296	OPT: 5186 (11420)
	Disj, Gom	25.3507s	20.5044s	1757	865	-	-	-	477	16	2824	2576	4992.65	OPT: 5186 (11420)
	R-odd, K-C, H-C	243.646s	2.33193s	30798	492	4	3171	0	-	-	3500	2576	4492	OPT: 5186 (11420)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	23.4262s	2.72093s	8867	698	3	526	20	-	30	3550	2576	4772.52	OPT: 5186 (11420)
	R-odd, Disj, Gom	37.6538s	33.0966s	1789	935	8	-	-	510	18	2406	2576	5008.06	OPT: 5186 (11420)
	All	59.5792s	47.9578s	1333	725	16	757	92	506	19	2057	2576	5025.41	OPT: 5186 (11420)
GRP5 116/72/174	None	11.2647s	0.157064s	10513	323	-	-	-	-	-	690	3620	4872	OPT: 5191 (10490)
	R-odd	3.53692s	(3.53692s)	0	371	55	-	-	-	-	(371)	3620	5191	OPT: 5191 (10490)
	Disj, Gom	0.699055s	0.411188s	172	348	-	-	-	34	30	468	3620	5135.33	OPT: 5191 (10490)
	R-odd, K-C, H-C	4.08144s	(4.08144s)	0	371	55	0	0	-	-	(371)	3620	5191	OPT: 5191 (10490)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	3.47174s	(3.47174s)	0	346	38	0	0	-	21	(346)	3620	5191	OPT: 5191 (10490)
	R-odd, Disj, Gom	3.10391s	(3.10391s)	0	346	38	-	-	0	21	(346)	3620	5191	OPT: 5191 (10490)
	All	3.43668s	(3.43668s)	0	346	38	0	0	0	21	(346)	3620	5191	OPT: 5191 (10490)

A.5. táblázat. Teszteredmények Corberán GRP gráfokon 1-5.

6-10 GRP (Corberán)		Tot Time	RN Time	B&C Nodes	RN Conn	R-odd	K-C	H-C	Disj	Gom	Tot Conn	Init LB	RN LB	Value
GRP6 116/126/174	None	0.250006s	0.128203s	197	23	-	-	-	-	-	23	2568	3196	OPT: 3442 (12335)
	R-odd	1.27005s	(1.27005s)	0	23	28	-	-	-	-	(23)	2568	3442	OPT: 3442 (12335)
	Disj, Gom	0.127202s	(0.127202s)	0	16	-	-	-	4	23	(16)	2568	3442	OPT: 3442 (12335)
	R-odd, K-C, H-C	1.42517s	(1.42517s)	0	23	28	0	0	-	-	(23)	2568	3442	OPT: 3442 (12335)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	0.212113s	(0.212113s)	0	16	1	0	0	-	25	(16)	2568	3442	OPT: 3442 (12335)
	R-odd, Disj, Gom	0.193054s	(0.193054s)	0	16	1	-	-	0	25	(16)	2568	3442	OPT: 3442 (12335)
	All	0.182s	(0.182s)	0	16	1	0	0	0	25	(16)	2568	3442	OPT: 3442 (12335)
GRP7 116/52/174	None	6.38224s	0.175567s	3311	503	-	-	-	-	-	1725	4525.5	6111	OPT: 6618 (9985)
	R-odd	4.54669s	4.49069s	7	807	87	-	-	-	-	807	4525.5	6609	OPT: 6618 (9985)
	Disj, Gom	0.934362s	(0.934362s)	0	874	-	-	-	81	27	(874)	4525.5	6618	OPT: 6618 (9985)
	R-odd, K-C, H-C	6.5698s	6.47338s	9	787	79	4	3	-	-	807	4525.5	6557	OPT: 6618 (9985)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	5.01758s	(5.01758s)	0	949	67	14	1	-	23	(949)	4525.5	6618	OPT: 6618 (9985)
	R-odd, Disj, Gom	3.00333s	(3.00333s)	0	952	45	-	-	6	25	(952)	4525.5	6618	OPT: 6618 (9985)
	All	5.32415s	(5.32415s)	0	949	67	14	1	0	23	(949)	4525.5	6618	OPT: 6618 (9985)
GRP8 116/81/174	None	1.19589s	0.171947s	622	467	-	-	-	-	-	672	5044	6592	OPT: 6814 (9674)
	R-odd	2.92016s	2.89008s	17	532	50	-	-	-	-	532	5044	6768	OPT: 6814 (9674)
	Disj, Gom	0.296563s	(0.296563s)	0	506	-	-	-	21	32	(506)	5044	6814	OPT: 6814 (9674)
	R-odd, K-C, H-C	6.04477s	(6.04477s)	0	532	70	29	0	-	-	(532)	5044	6814	OPT: 6814 (9674)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	0.823374s	(0.823374s)	0	506	8	2	0	-	29	(506)	5044	6814	OPT: 6814 (9674)
	R-odd, Disj, Gom	0.647755s	(0.647755s)	0	506	7	-	-	4	30	(506)	5044	6814	OPT: 6814 (9674)
	All	0.854519s	(0.854519s)	0	506	8	2	0	0	29	(506)	5044	6814	OPT: 6814 (9674)
GRP9 116/59/174	None	15.2853s	0.182897s	10040	427	-	-	-	-	-	735	3329	3852	OPT: 4506 (12108)
	R-odd	3.17094s	(3.17094s)	1	467	64	-	-	-	-	(467)	3329	4506	OPT: 4506 (12108)
	Disj, Gom	3.87353s	0.776631s	1708	503	-	-	-	61	28	669	3329	4291.67	OPT: 4506 (12108)
	R-odd, K-C, H-C	3.682s	(3.682s)	1	467	64	0	0	-	-	(467)	3329	4506	OPT: 4506 (12108)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	2.08197s	(2.08197s)	0	500	36	0	0	-	23	(500)	3329	4506	OPT: 4506 (12108)
	R-odd, Disj, Gom	1.87274s	(1.87274s)	0	500	36	-	-	0	23	(500)	3329	4506	OPT: 4506 (12108)
	All	2.09089s	(2.09089s)	0	500	36	0	0	0	23	(500)	3329	4506	OPT: 4506 (12108)
GRP10 116/87/174	None	143.828s	0.151133s	101322	393	-	-	-	-	-	5659	2480	4200	OPT: 5122 (11260)
	R-odd	141.438s	0.145802s	101322	393	0	-	-	-	-	5659	2480	4200	OPT: 5122 (11260)
	Disj, Gom	22.7045s	18.1045s	1934	880	-	-	-	505	17	2686	2480	4933.55	OPT: 5122 (11260)
	R-odd, K-C, H-C	473.928s	2.2052s	49918	501	0	4023	0	-	-	3785	2480	4396	OPT: 5122 (11260)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	24.5746s	1.02384s	13247	670	0	151	8	-	37	4383	2480	4666.51	OPT: 5122 (11260)
	R-odd, Disj, Gom	22.6234s	18.0389s	1934	880	0	-	-	505	17	2686	2480	4933.55	OPT: 5122 (11260)
	All	75.0836s	62.2012s	2721	852	0	246	208	511	19	2210	2480	4944.06	OPT: 5122 (11260)

A.6. táblázat. Teszteredmények Corberán GRP gráfokon 6-10.

1-5 Madrigueras (Corberán)		Tot Time	RN Time	B&C Nodes	RN Conn	R-odd	K-C	H-C	Disj	Gom	Tot Conn	Init LB	RN LB	Value
MADR_3_1 196/86/316	None	533.668s	0.431967s	69876	1362	-	-	-	-	-	18997	7680	8375	OPT: 8680 (15645)
	R-odd	42.2652s	29.3384s	841	2282	72	-	-	-	-	6255	7680	8577.5	OPT: 8680 (15645)
	Disj, Gom	31.4006s	19.7867s	653	1514	-	-	-	154	23	4912	7680	8611.09	OPT: 8680 (15645)
	R-odd, K-C, H-C	83.9568s	79.6023s	167	2296	133	40	22	-	-	3318	7680	8618.15	OPT: 8680 (15645)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	65.2013s	62.1689s	78	1599	97	48	35	-	14	2812	7680	8643.36	OPT: 8680 (15645)
	R-odd, Disj, Gom	167.823s	167.799s	2	1607	175	-	-	115	10	1607	7680	8675.12	OPT: 8680 (15645)
	All	175.691s	(175.691s)	0	1719	199	55	74	125	9	(1719)	7680	8680	OPT: 8680 (15645)
MADR_3_2 196/108/316	None	602.901s	0.232824s	116705	99	-	-	-	-	-	7819	7037.5	7575	LB: 7997.5 (15867.5)
	R-odd	30.5595s	30.0828s	15	377	82	-	-	-	-	379	7037.5	8100	OPT: 8155 (16025)
	Disj, Gom	16.124s	3.25681s	2272	356	-	-	-	127	31	2511	7037.5	8074.51	OPT: 8155 (16025)
	R-odd, K-C, H-C	54.0371s	53.7746s	10	400	124	1	4	-	-	400	7037.5	8105	OPT: 8155 (16025)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	55.9843s	55.7338s	5	361	112	20	0	-	21	367	7037.5	8132.5	OPT: 8155 (16025)
	R-odd, Disj, Gom	32.5276s	(32.5276s)	0	373	72	-	-	21	22	(373)	7037.5	8155	OPT: 8155 (16025)
	All	59.4639s	(59.4639s)	0	361	112	20	0	20	20	(361)	7037.5	8155	OPT: 8155 (16025)
MADR_3_3 196/102/316	None	413.83s	0.301809s	71004	795	-	-	-	-	-	7067	7295	8077.5	OPT: 8555 (16020)
	R-odd	23.316s	21.2199s	150	1243	68	-	-	-	-	2071	7295	8473.33	OPT: 8555 (16020)
	Disj, Gom	12.3256s	8.58032s	270	949	-	-	-	128	29	2474	7295	8519.21	OPT: 8555 (16020)
	R-odd, K-C, H-C	36.7882s	35.3415s	71	1243	89	12	3	-	-	1606	7295	8487.77	OPT: 8555 (16020)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	49.8085s	46.7285s	153	1138	82	15	0	-	22	1760	7295	8513.92	OPT: 8555 (16020)
	R-odd, Disj, Gom	101.398s	(101.398s)	0	1164	172	-	-	86	14	(1164)	7295	8555	OPT: 8555 (16020)
	All	124.054s	(124.054s)	0	1158	195	17	2	86	17	(1158)	7295	8555	OPT: 8555 (16020)
MADR_3_4 196/101/316	None	602.122s	0.255965s	72607	486	-	-	-	-	-	11436	7355	8062.5	LB: 8460 (16155)
	R-odd	45.2384s	43.5623s	64	1261	107	-	-	-	-	1828	7355	8536.75	OPT: 8680 (16375)
	Disj, Gom	25.296s	20.5399s	330	1049	-	-	-	219	22	3125	7355	8624.71	OPT: 8680 (16375)
	R-odd, K-C, H-C	59.6666s	55.5981s	171	1261	120	37	104	-	-	2580	7355	8539.34	OPT: 8680 (16375)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	62.073s	61.0542s	27	1074	107	18	9	-	20	1279	7355	8637.27	OPT: 8680 (16375)
	R-odd, Disj, Gom	114.539s	(114.539s)	0	1141	168	-	-	132	17	(1141)	7355	8680	OPT: 8680 (16375)
	All	142.367s	(142.367s)	0	1093	203	30	42	116	14	(1093)	7355	8680	OPT: 8680 (16375)
MADR_3_5 196/95/316	None	66.0298s	0.238939s	12710	583	-	-	-	-	-	4920	7645	8357.5	OPT: 8755 (15900)
	R-odd	21.1219s	19.532s	120	1034	73	-	-	-	-	1706	7645	8710	OPT: 8755 (15900)
	Disj, Gom	6.28915s	6.09629s	3	960	-	-	-	144	22	960	7645	8753.57	OPT: 8755 (15900)
	R-odd, K-C, H-C	30.3609s	30.1432s	9	1034	97	2	11	-	-	1050	7645	8740.89	OPT: 8755 (15900)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	25.7004s	(25.7004s)	1	987	62	9	37	-	23	(987)	7645	8755	OPT: 8755 (15900)
	R-odd, Disj, Gom	26.6722s	(26.6722s)	0	962	58	-	-	74	23	(962)	7645	8755	OPT: 8755 (15900)
	All	26.2688s	(26.2688s)	0	987	62	9	37	12	23	(987)	7645	8755	OPT: 8755 (15900)

A.7. táblázat. Teszteredmények Corberán Madrigueras gráfokon 1-5.

6-10 Madrigueras (Corberán)		Tot Time	RN Time	B&C Nodes	RN Conn	R-odd	K-C	H-C	Disj	Gom	Tot Conn	Init LB	RN LB	Value
MADR 5_1 196/163/316	None	605.457s	0.158827s	403686	54	-	-	-	-	-	391	6010	6355	LB: 6860 (18180)
	R-odd	13.6887s	13.4191s	119	54	72	-	-	-	-	69	6010	6835	OPT: 6920 (18240)
	Disj, Gom	1.65772s	0.881655s	232	27	-	-	-	89	38	34	6010	6894.38	OPT: 6920 (18240)
	R-odd, K-C, H-C	15.0382s	14.7635s	119	54	72	0	0	-	-	69	6010	6835	OPT: 6920 (18240)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	22.4558s	(22.4558s)	0	50	79	0	0	-	37	(50)	6010	6920	OPT: 6920 (18240)
	R-odd, Disj, Gom	20.9944s	(20.9944s)	0	50	79	-	-	0	37	(50)	6010	6920	OPT: 6920 (18240)
	All	22.5751s	(22.5751s)	0	50	79	0	0	0	37	(50)	6010	6920	OPT: 6920 (18240)
MADR 5_2 196/156/316	None	605.197s	0.173314s	345776	22	-	-	-	-	-	1777	5715	5925	LB: 6435 (18370)
	R-odd	20.0801s	(20.0801s)	1	101	93	-	-	-	-	(101)	5715	6560	OPT: 6560 (18495)
	Disj, Gom	0.416069s	(0.416069s)	0	78	-	-	-	53	47	(78)	5715	6560	OPT: 6560 (18495)
	R-odd, K-C, H-C	21.4491s	(21.4491s)	1	101	93	0	0	-	-	(101)	5715	6560	OPT: 6560 (18495)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	3.75673s	(3.75673s)	0	78	11	0	0	-	50	(78)	5715	6560	OPT: 6560 (18495)
	R-odd, Disj, Gom	3.27505s	(3.27505s)	0	78	11	-	-	0	50	(78)	5715	6560	OPT: 6560 (18495)
	All	3.79802s	(3.79802s)	0	78	11	0	0	0	50	(78)	5715	6560	OPT: 6560 (18495)
MADR 5_3 196/148/316	None	85.7539s	0.164634s	75566	73	-	-	-	-	-	747	6160	6410	OPT: 6955 (17985)
	R-odd	14.2194s	13.8624s	82	127	69	-	-	-	-	151	6160	6892.5	OPT: 6955 (17985)
	Disj, Gom	4.34469s	3.138839s	536	99	-	-	-	120	30	229	6160	6883.8	OPT: 6955 (17985)
	R-odd, K-C, H-C	23.232s	23.0146s	39	127	89	0	5	-	-	137	6160	6902.5	OPT: 6955 (17985)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	26.3622s	25.9514s	39	96	72	0	0	-	27	103	6160	6924.17	OPT: 6955 (17985)
	R-odd, Disj, Gom	54.6832s	(54.6832s)	0	96	124	-	-	95	27	(96)	6160	6955	OPT: 6955 (17985)
	All	49.968s	(49.968s)	0	96	108	3	2	81	26	(96)	6160	6955	OPT: 6955 (17985)
MADR 5_4 196/152/316	None	605.151s	0.167832s	293064	175	-	-	-	-	-	4251	5857.5	6217.5	LB: 6772.5 (18432.5)
	R-odd	57.7885s	57.3513s	16	500	147	-	-	-	-	500	5857.5	6862.5	OPT: 6915 (18575)
	Disj, Gom	12.3775s	5.61559s	2925	384	-	-	-	139	38	1040	5857.5	6839.62	OPT: 6915 (18575)
	R-odd, K-C, H-C	57.6271s	57.1911s	16	500	147	0	0	-	-	500	5857.5	6862.5	OPT: 6915 (18575)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	33.2754s	32.6694s	8	503	85	0	0	-	31	503	5857.5	6892.5	OPT: 6915 (18575)
	R-odd, Disj, Gom	45.1588s	(45.1588s)	0	506	106	-	-	8	28	(506)	5857.5	6915	OPT: 6915 (18575)
	All	44.6041s	(44.6041s)	0	506	106	0	0	8	28	(506)	5857.5	6915	OPT: 6915 (18575)
MADR 5_5 196/147/316	None	140.317s	0.223954s	81393	198	-	-	-	-	-	1914	5900	6322.5	OPT: 6790 (17545)
	R-odd	11.0058s	10.7667s	44	236	68	-	-	-	-	240	5900	6730	OPT: 6790 (17545)
	Disj, Gom	2.49142s	2.2561s	31	248	-	-	-	109	37	314	5900	6748.69	OPT: 6790 (17545)
	R-odd, K-C, H-C	12.105s	11.8594s	44	236	68	0	0	-	-	240	5900	6730	OPT: 6790 (17545)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	6.33881s	6.17159s	23	208	21	0	0	-	39	210	5900	6742.5	OPT: 6790 (17545)
	R-odd, Disj, Gom	16.9165s	(16.9165s)	0	226	64	-	-	58	28	(226)	5900	6790	OPT: 6790 (17545)
	All	22.3076s	(22.3076s)	0	226	64	19	0	53	30	(226)	5900	6790	OPT: 6790 (17545)

A.8. táblázat. Teszteredmények Corberán Madrigueras gráfokon 6-10.

11-15 Madrigueras (Corberán)		Tot Time	RN Time	B&C Nodes	RN Conn	R-odd	K-C	H-C	Disj	Gom	Tot Conn	Init LB	RN LB	Value
MADR_7_1 196/211/316	None	45.311s	0.160878s	61660	4	-	-	-	-	-	172	4325	4585	OPT: 5260 (21065)
	R-odd	9.80186s	(9.80186s)	0	17	85	-	-	-	-	(17)	4325	5260	OPT: 5260 (21065)
	Disj, Gom	0.402275s	0.392181s	3	29	-	-	-	79	36	29	4325	5257	OPT: 5260 (21065)
	R-odd, K-C, H-C	9.86118s	(9.86118s)	0	17	85	0	0	-	-	(17)	4325	5260	OPT: 5260 (21065)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	3.63408s	(3.63408s)	0	30	22	0	0	-	45	(30)	4325	5260	OPT: 5260 (21065)
	R-odd, Disj, Gom	3.4631s	(3.4631s)	0	30	22	-	-	0	45	(30)	4325	5260	OPT: 5260 (21065)
	All	3.73061s	(3.73061s)	0	30	22	0	0	0	45	(30)	4325	5260	OPT: 5260 (21065)
MADR_7_2 196/238/316	None	3.52133s	0.197742s	5304	0	-	-	-	-	-	0	4520	4560	OPT: 4930 (22535)
	R-odd	14.1367s	(14.1367s)	0	0	79	-	-	-	-	(0)	4520	4930	OPT: 4930 (22535)
	Disj, Gom	0.233458s	(0.233458s)	0	0	-	-	-	63	34	(0)	4520	4930	OPT: 4930 (22535)
	R-odd, K-C, H-C	14.1163s	(14.1163s)	0	0	79	0	0	-	-	(0)	4520	4930	OPT: 4930 (22535)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	3.54757s	(3.54757s)	0	0	21	0	0	-	40	(0)	4520	4930	OPT: 4930 (22535)
	R-odd, Disj, Gom	3.38614s	(3.38614s)	0	0	21	-	-	0	40	(0)	4520	4930	OPT: 4930 (22535)
	All	3.40733s	(3.40733s)	0	0	21	0	0	0	40	(0)	4520	4930	OPT: 4930 (22535)
MADR_7_3 196/219/316	None	99.9901s	0.202731s	162459	0	-	-	-	-	-	4	4322.5	4492.5	OPT: 5135 (21415)
	R-odd	16.16s	(16.16s)	0	4	90	-	-	-	-	(4)	4322.5	5135	OPT: 5135 (21415)
	Disj, Gom	0.268409s	(0.268409s)	0	2	-	-	-	59	40	(2)	4322.5	5135	OPT: 5135 (21415)
	R-odd, K-C, H-C	16.1581s	(16.1581s)	0	4	90	0	0	-	-	(4)	4322.5	5135	OPT: 5135 (21415)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	3.16477s	(3.16477s)	0	2	10	0	0	-	52	(2)	4322.5	5135	OPT: 5135 (21415)
	R-odd, Disj, Gom	3.22537s	(3.22537s)	0	2	10	-	-	0	52	(2)	4322.5	5135	OPT: 5135 (21415)
	All	3.07838s	(3.07838s)	0	2	10	0	0	0	52	(2)	4322.5	5135	OPT: 5135 (21415)
MADR_7_4 196/225/316	None	18.6438s	0.191548s	31690	0	-	-	-	-	-	2	4047.5	4202.5	OPT: 4775 (21775)
	R-odd	13.9599s	(13.9599s)	0	2	105	-	-	-	-	(2)	4047.5	4775	OPT: 4775 (21775)
	Disj, Gom	0.371425s	(0.371425s)	0	2	-	-	-	87	38	(2)	4047.5	4775	OPT: 4775 (21775)
	R-odd, K-C, H-C	16.5988s	(16.5988s)	0	2	105	0	0	-	-	(2)	4047.5	4775	OPT: 4775 (21775)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	6.94922s	(6.94922s)	0	2	31	0	0	-	47	(2)	4047.5	4775	OPT: 4775 (21775)
	R-odd, Disj, Gom	6.45105s	(6.45105s)	0	2	31	-	-	0	47	(2)	4047.5	4775	OPT: 4775 (21775)
	All	6.00511s	(6.00511s)	0	2	31	0	0	0	47	(2)	4047.5	4775	OPT: 4775 (21775)
MADR_7_5 196/223/316	None	445.78s	0.155787s	743647	0	-	-	-	-	-	0	4617.5	4712.5	OPT: 5375 (22000)
	R-odd	18.5046s	(18.5046s)	0	0	83	-	-	-	-	(0)	4617.5	5375	OPT: 5375 (22000)
	Disj, Gom	0.387159s	(0.387159s)	0	0	-	-	-	100	47	(0)	4617.5	5375	OPT: 5375 (22000)
	R-odd, K-C, H-C	18.7243s	(18.7243s)	0	0	83	0	0	-	-	(0)	4617.5	5375	OPT: 5375 (22000)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	4.06597s	(4.06597s)	0	0	22	0	0	-	71	(0)	4617.5	5375	OPT: 5375 (22000)
	R-odd, Disj, Gom	8.76909s	(8.76909s)	0	0	22	-	-	0	71	(0)	4617.5	5375	OPT: 5375 (22000)
	All	8.60281s	(8.60281s)	0	0	22	0	0	0	71	(0)	4617.5	5375	OPT: 5375 (22000)

A.9. táblázat. Teszteredmények Corberán Madrigueras gráfokon 11-15.

1-5 Albaida (Corberán)		Tot Time	RN Time	B&C Nodes	RN Conn	R-odd	K-C	H-C	Disj	Gom	Tot Conn	Init LB	RN LB	Value
ALBA ₃ ¹ 116/51/174	None	5.86814s	0.181794s	2868	574	-	-	-	-	-	1491	4042	5381	OPT: 5732 (9830)
	R-odd	2.95671s	2.80222s	32	955	43	-	-	-	-	1036	4042	5680	OPT: 5732 (9830)
	Disj, Gom	7.84072s	3.05119s	1827	715	-	-	-	114	14	1858	4042	5607.28	OPT: 5732 (9830)
	R-odd, K-C, H-C	3.45494s	3.30358s	32	955	43	0	0	-	-	1036	4042	5680	OPT: 5732 (9830)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	1.77802s	1.73917s	8	606	12	4	1	-	17	614	4042	5698.89	OPT: 5732 (9830)
	R-odd, Disj, Gom	1.54944s	(1.54944s)	0	586	14	-	-	33	16	(586)	4042	5732	OPT: 5732 (9830)
	All	4.41517s	(4.41517s)	0	631	21	9	6	53	13	(631)	4042	5732	OPT: 5732 (9830)
ALBA ₃ ² 116/46/174	None	1.61259s	0.25273s	471	878	-	-	-	-	-	1277	4666	6383.33	OPT: 6716 (9812)
	R-odd	3.24069s	3.09586s	16	970	43	-	-	-	-	1171	4666	6634	OPT: 6716 (9812)
	Disj, Gom	2.22084s	2.17832s	8	1007	-	-	-	116	8	1027	4666	6705.83	OPT: 6716 (9812)
	R-odd, K-C, H-C	3.98458s	3.79836s	16	970	43	0	0	-	-	1171	4666	6634	OPT: 6716 (9812)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	2.83385s	2.74503s	10	902	22	0	0	-	12	1004	4666	6675.31	OPT: 6716 (9812)
	R-odd, Disj, Gom	2.35718s	(2.35718s)	0	922	22	-	-	25	9	(922)	4666	6716	OPT: 6716 (9812)
	All	2.99011s	(2.99011s)	0	922	22	0	0	25	9	(922)	4666	6716	OPT: 6716 (9812)
ALBA ₃ ³ 116/44/174	None	1.13064s	0.172253s	258	751	-	-	-	-	-	1434	4490	5924	OPT: 6201 (10100)
	R-odd	1.88905s	1.82509s	17	1173	41	-	-	-	-	1196	4490	6164	OPT: 6201 (10100)
	Disj, Gom	0.438213s	0.422876s	3	918	-	-	-	8	32	937	4490	6182.33	OPT: 6201 (10100)
	R-odd, K-C, H-C	2.26407s	2.19896s	17	1173	41	0	0	-	-	1196	4490	6164	OPT: 6201 (10100)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	1.08782s	1.00902s	11	934	4	0	0	-	30	973	4490	6185	OPT: 6201 (10100)
	R-odd, Disj, Gom	0.819779s	(0.819779s)	0	937	7	-	-	19	29	(937)	4490	6201	OPT: 6201 (10100)
	All	1.52496s	(1.52496s)	0	937	7	0	0	19	29	(937)	4490	6201	OPT: 6201 (10100)
ALBA ₃ ⁴ 116/49/174	None	2.13962s	0.22325s	584	602	-	-	-	-	-	1557	4165	5678.67	OPT: 5926 (9558)
	R-odd	3.48099s	3.44654s	7	804	52	-	-	-	-	842	4165	5899.33	OPT: 5926 (9558)
	Disj, Gom	1.22888s	0.924657s	53	1121	-	-	-	54	13	1384	4165	5861.52	OPT: 5926 (9558)
	R-odd, K-C, H-C	5.70289s	5.66338s	3	804	54	2	3	-	-	842	4165	5907	OPT: 5926 (9558)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	5.35801s	5.34088s	3	1120	42	0	0	-	8	1158	4165	5913.75	OPT: 5926 (9558)
	R-odd, Disj, Gom	3.84133s	(3.84133s)	0	1120	42	-	-	5	8	(1120)	4165	5926	OPT: 5926 (9558)
	All	4.85429s	(4.85429s)	0	1120	42	0	2	5	7	(1120)	4165	5926	OPT: 5926 (9558)
ALBA ₃ ⁵ 116/57/174	None	12.7337s	0.187202s	6862	539	-	-	-	-	-	1629	4395	5295	OPT: 5856 (10033)
	R-odd	3.64494s	3.62019s	6	615	45	-	-	-	-	615	4395	5839	OPT: 5856 (10033)
	Disj, Gom	3.42746s	3.25953s	13	613	-	-	-	95	31	659	4395	5776.69	OPT: 5856 (10033)
	R-odd, K-C, H-C	4.72284s	(4.72284s)	0	615	48	50	0	-	-	(615)	4395	5856	OPT: 5856 (10033)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	1.66868s	(1.66868s)	0	554	6	0	0	-	35	(554)	4395	5856	OPT: 5856 (10033)
	R-odd, Disj, Gom	0.915827s	(0.915827s)	0	554	6	-	-	0	35	(554)	4395	5856	OPT: 5856 (10033)
	All	1.39239s	(1.39239s)	0	554	6	0	0	0	35	(554)	4395	5856	OPT: 5856 (10033)

A.10. táblázat. Teszteredmények Corberán Albaida gráfokon 1-5.

6-10 Albaida (Corberán)		Tot Time	RN Time	B&C Nodes	RN Conn	R-odd	K-C	H-C	Disj	Gom	Tot Conn	Init LB	RN LB	Value
ALBA ₅ 116/88/174	None	274.793s	0.166607s	360193	93	-	-	-	-	-	474	3374	4322	OPT: 4785 (11581)
	R-odd	5.56552s	5.55896s	3	109	74	-	-	-	-	109	3374	4775	OPT: 4785 (11581)
	Disj, Gom	2.08469s	0.315423s	1244	91	-	-	-	44	27	163	3374	4635.8	OPT: 4785 (11581)
	R-odd, K-C, H-C	8.33325s	8.32687s	3	109	74	0	0	-	-	109	3374	4775	OPT: 4785 (11581)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	6.23438s	6.21206s	5	134	47	0	0	-	15	134	3374	4775	OPT: 4785 (11581)
	R-odd, Disj, Gom	6.44431s	(6.44431s)	0	136	51	-	-	13	15	(136)	3374	4785	OPT: 4785 (11581)
	All	6.43628s	(6.43628s)	0	136	51	0	0	13	15	(136)	3374	4785	OPT: 4785 (11581)
ALBA ₅ 116/92/174	None	1.44568s	0.137872s	1629	64	-	-	-	-	-	135	3219	4179	OPT: 4641 (11581)
	R-odd	3.27118s	(3.27118s)	0	104	82	-	-	-	-	(104)	3219	4641	OPT: 4641 (11581)
	Disj, Gom	0.253494s	(0.253494s)	0	72	-	-	-	28	49	(72)	3219	4641	OPT: 4641 (11581)
	R-odd, K-C, H-C	3.81811s	(3.81811s)	0	104	82	0	0	-	-	(104)	3219	4641	OPT: 4641 (11581)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	1.2077s	(1.2077s)	0	72	6	0	0	-	49	(72)	3219	4641	OPT: 4641 (11581)
	R-odd, Disj, Gom	1.03109s	(1.03109s)	0	72	6	-	-	0	49	(72)	3219	4641	OPT: 4641 (11581)
	All	0.724295s	(0.724295s)	0	72	6	0	0	0	49	(72)	3219	4641	OPT: 4641 (11581)
ALBA ₅ 116/92/174	None	2.65257s	0.194735s	3872	116	-	-	-	-	-	191	3432	3890	OPT: 4322 (10497)
	R-odd	1.99602s	(1.99602s)	0	145	57	-	-	-	-	(145)	3432	4322	OPT: 4322 (10497)
	Disj, Gom	0.166732s	(0.166732s)	0	119	-	-	-	5	48	(119)	3432	4322	OPT: 4322 (10497)
	R-odd, K-C, H-C	2.04871s	(2.04871s)	0	145	57	0	0	-	-	(145)	3432	4322	OPT: 4322 (10497)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	0.438679s	(0.438679s)	0	119	4	0	0	-	50	(119)	3432	4322	OPT: 4322 (10497)
	R-odd, Disj, Gom	0.330139s	(0.330139s)	0	119	4	-	-	0	50	(119)	3432	4322	OPT: 4322 (10497)
	All	0.424299s	(0.424299s)	0	119	4	0	0	0	50	(119)	3432	4322	OPT: 4322 (10497)
ALBA ₅ 116/88/174	None	2.41036s	0.16243s	3349	108	-	-	-	-	-	155	3140	4230	OPT: 4719 (10734)
	R-odd	1.80997s	1.65462s	143	108	37	-	-	-	-	130	3140	4567	OPT: 4719 (10734)
	Disj, Gom	0.290405s	0.256805s	27	126	-	-	-	39	25	126	3140	4696	OPT: 4719 (10734)
	R-odd, K-C, H-C	2.07283s	1.91888s	143	108	37	0	0	-	-	130	3140	4567	OPT: 4719 (10734)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	0.926051s	0.90579s	16	128	10	0	0	-	34	128	3140	4697.84	OPT: 4719 (10734)
	R-odd, Disj, Gom	2.51098s	(2.51098s)	0	128	45	-	-	19	25	(128)	3140	4719	OPT: 4719 (10734)
	All	3.03222s	(3.03222s)	0	128	45	0	0	19	25	(128)	3140	4719	OPT: 4719 (10734)
ALBA ₅ 116/91/174	None	0.920266s	0.127081s	847	70	-	-	-	-	-	287	3400	3712	OPT: 4332 (10911)
	R-odd	2.06118s	(2.06118s)	0	190	52	-	-	-	-	(190)	3400	4332	OPT: 4332 (10911)
	Disj, Gom	0.214933s	(0.214933s)	0	81	-	-	-	22	34	(81)	3400	4332	OPT: 4332 (10911)
	R-odd, K-C, H-C	2.43081s	(2.43081s)	0	190	52	0	0	-	-	(190)	3400	4332	OPT: 4332 (10911)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	0.453185s	(0.453185s)	0	67	4	0	0	-	43	(67)	3400	4332	OPT: 4332 (10911)
	R-odd, Disj, Gom	0.318777s	(0.318777s)	0	67	4	-	-	0	43	(67)	3400	4332	OPT: 4332 (10911)
	All	0.436526s	(0.436526s)	0	67	4	0	0	0	43	(67)	3400	4332	OPT: 4332 (10911)

A.11. táblázat. Teszteredmények Corberán Albaida gráfokon 6-10.

11-15 Albaida (Corberán)		Tot Time	RN Time	B&C Nodes	RN Conn	R-odd	K-C	H-C	Disj	Gom	Tot Conn	Init LB	RN LB	Value
ALBA 7 1 116/118/174	None	611.694s	0.124804s	1097338	11	-	-	-	-	-	26	2789	3218	LB: 4058.5 (12298.5)
	R-odd	21.3049s	20.6361s	11	11	211	-	-	-	-	11	2789	4341	OPT: 4374 (12614)
	Disj, Gom	610.86s	0.335987s	1004068	13	-	-	-	79	32	21	2789	3947.78	LB: 4290 (12530)
	R-odd, K-C, H-C	28.0715s	27.618s	11	11	211	0	0	-	-	11	2789	4341	OPT: 4374 (12614)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	25.9658s	25.8777s	4	13	180	0	0	-	19	13	2789	4373	OPT: 4374 (12614)
	R-odd, Disj, Gom	25.2483s	(25.2483s)	0	13	180	-	-	9	19	(13)	2789	4374	OPT: 4374 (12614)
All	24.404s	(24.404s)	0	13	180	0	0	9	19	(13)	2789	4374	OPT: 4374 (12614)	
ALBA 7 2 116/122/174	None	10.2494s	0.1152s	23773	0	-	-	-	-	-	2	2538	2908	OPT: 3562 (12129)
	R-odd	3.05173s	(3.05173s)	0	0	90	-	-	-	-	(0)	2538	3562	OPT: 3562 (12129)
	Disj, Gom	0.255082s	0.252897s	3	2	-	-	-	90	30	2	2538	3557.93	OPT: 3562 (12129)
	R-odd, K-C, H-C	3.61652s	(3.61652s)	0	0	90	0	0	-	-	(0)	2538	3562	OPT: 3562 (12129)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	1.80379s	(1.80379s)	0	0	33	0	0	-	31	(0)	2538	3562	OPT: 3562 (12129)
	R-odd, Disj, Gom	1.36677s	(1.36677s)	0	0	33	-	-	0	31	(0)	2538	3562	OPT: 3562 (12129)
All	1.38492s	(1.38492s)	0	0	33	0	0	0	31	(0)	2538	3562	OPT: 3562 (12129)	
ALBA 7 3 116/113/174	None	612.213s	0.125514s	1179738	7	-	-	-	-	-	34	2480	2742	LB: 3376 (11868)
	R-odd	7.40517s	7.40116s	3	20	131	-	-	-	-	20	2480	3547	OPT: 3559 (12051)
	Disj, Gom	11.4404s	1.04966s	13735	22	-	-	-	92	29	43	2480	3361.51	OPT: 3559 (12051)
	R-odd, K-C, H-C	10.5494s	(10.5494s)	0	20	133	0	1	-	-	(20)	2480	3559	OPT: 3559 (12051)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	6.87263s	(6.87263s)	0	24	79	0	0	-	16	(24)	2480	3559	OPT: 3559 (12051)
	R-odd, Disj, Gom	6.00253s	(6.00253s)	0	24	79	-	-	0	16	(24)	2480	3559	OPT: 3559 (12051)
All	5.30684s	(5.30684s)	0	24	79	0	0	0	16	(24)	2480	3559	OPT: 3559 (12051)	
ALBA 7 4 116/119/174	None	617.002s	0.119532s	1388478	2	-	-	-	-	-	2	2456	2806	LB: 3479 (12114)
	R-odd	7.49627s	(7.49627s)	0	2	176	-	-	-	-	(2)	2456	3582	OPT: 3582 (12217)
	Disj, Gom	8.7099s	0.236992s	17638	2	-	-	-	52	23	2	2456	3341.5	OPT: 3582 (12217)
	R-odd, K-C, H-C	13.4285s	(13.4285s)	0	2	176	0	0	-	-	(2)	2456	3582	OPT: 3582 (12217)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	10.7424s	(10.7424s)	0	2	106	0	0	-	12	(2)	2456	3582	OPT: 3582 (12217)
	R-odd, Disj, Gom	11.2366s	(11.2366s)	0	2	106	-	-	0	12	(2)	2456	3582	OPT: 3582 (12217)
All	11.0922s	(11.0922s)	0	2	106	0	0	0	12	(2)	2456	3582	OPT: 3582 (12217)	
ALBA 7 5 116/116/174	None	4.02551s	0.110175s	9037	8	-	-	-	-	-	14	2714	3484	OPT: 4077 (12058)
	R-odd	5.03813s	(5.03813s)	0	8	129	-	-	-	-	(8)	2714	4077	OPT: 4077 (12058)
	Disj, Gom	0.168829s	(0.168829s)	0	8	-	-	-	39	46	(8)	2714	4077	OPT: 4077 (12058)
	R-odd, K-C, H-C	5.36479s	(5.36479s)	0	8	129	0	0	-	-	(8)	2714	4077	OPT: 4077 (12058)
	R-odd, K-C, H-C, Gom	1.54522s	(1.54522s)	0	8	19	0	0	-	43	(8)	2714	4077	OPT: 4077 (12058)
	R-odd, Disj, Gom	1.11683s	(1.11683s)	0	8	19	-	-	0	43	(8)	2714	4077	OPT: 4077 (12058)
All	1.2033s	(1.2033s)	0	8	19	0	0	0	43	(8)	2714	4077	OPT: 4077 (12058)	

A.12. táblázat. Teszteredmények Corberán Albaida gráfokon 11-15.