Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Tóth László Márton
Matematikus MSc

Integrálgeometriai formulák

MSc - Szakdolgozat

Témavezető: Csikós Balázs
tanszékvezető egyetemi docens
Geometriai Tanszék

Budapest, 2013.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, dr. Csikós Balázsnak a szakdolgozat írása során nyújtott segítségét, szakmai útmutatását, munkám lelkiismeretes ellenőrzését és leginkább az irántam tanúsított türelmét. Szintén hálás vagyok az általa felvetett témáért, amelyet az első pillanattól fogva szemléletesnek és elegánsnak találtam.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Az integrálgeometriai formula nem egzakt matematikai fogalom. Olyan egyenlőségeket sorolunk ide, melyek egy geometriai objektum valamilyen mérőszámát fejezik ki egy integrál segítségével, és az integrálás is geometriai objektumok – például egyenesek, hipersíkok – téren történik „egyenletes” mérték szerint. Az egyenletesség alatt azt értjük, hogy valamilyen természetes csoporthatásra nézve a mérték invariáns. A legnevezetesebb példák a görbék hosszára vonatkozó Crofton-formula, és a konvex testek felszínére vonatkozó Cauchy-formula.

Mint azt a példák is mutatják, a témakör – jellegéből adódóan – alapvetően differenciálgeometriai, azonban szoros kapcsolatban van a geometriai valószínűségszámítással is. A híres Buffon-féle tűproblémában az integrál a metszéspontok számának várható értékében van elbújtatva.

A dolgozat első fejezetében ezeket a példákat vizsgáljuk meg tüzetesen. A differenciálgeometriai megközelítés során megtaláljuk a bizonyítástechnikai nehézségeket, melyek kezeléséhez komoly analitikus eszközökre van szükség. Az állításokra gyakran találunk intuitív érveléseket, melyekben visszatérő momentum az objektumok feldarabolása és összeragasztása, amit az tesz lehetővé, hogy az éppen aktuálisan vizsgált mérőszám és integrál is összeadódik ragasztásnál.

Ez a gondolat vezet a kiértékelések definíciójához. Egy μ függvényt egy L hálón kiértékelésnek nevezünk, ha bármely $A, B \in L$-re $\mu(A \vee B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \wedge \wedge B)$. Az L háló esetünkben mindig metszet- és uniózárt halmazrendszer lesz. A célunk az, hogy olyan eszköztárat építsünk fel, melynek segítségével az intuitív gondolatmenetek precízzé tehetőek.

A dolgozat nagy részében kompakt, konvex halmazokon, illetve ilyenek véges unióin értelmezett kiértékeléseket vizsgálunk. Konvex halmazok esetében ugyanis a politópokkal való közelíthetőség könnyít az analitikus nehézségeken. A térfogat és felszín mintájára bevezetjük előbb parallelotópok, majd konvex halmazok belső térfogatait, melyek központi szerepet töltenek be vizsgálódásainkban.

Az elmélet kiépítése után bebizonyítjuk a Hadwiger-tételt, miszerint a belső térfogatok bázisát adják a folytonos, egybevágóság-invariáns kiértékeléseknek. Ezzel rendkívül erős eszköz kerül a kezünkbe konvex halmazokról szóló integrálgeometriai formulák bizonyítására. Ha egy integrálról bebizonyítjuk, hogy kiértékelés, és teljesíti a folytonosságra és invarianciára tett feltételt, akkor biztosan a belső térfogatok lineáris kombinációja. Az integrál homogenitásának vizsgálatával – a halmazunkat α-szorosára növelve az integrál értéke α hanyadik hatványával szorzódik – azt is rögtön meg tudjuk mondani, hogy konstans szorzó erejéig melyik belső térfogatot kaptuk. Egy tetszőlegesen választott halmazon kiszámolva az integrált a konstans is meghatározható.

Az utolsó fejezetben a Hadwiger-tétel segítségével a belső térfogatokat összekapcsoljuk a Steiner–Minkowski-tételben bevezetett polinom együtthatóival, amivel az elmélet még jobban letisztul. Mindeközben számos integrálgeometriai formulával ismerkedünk meg.

1. Integrálgeometria a síkban

A síkbeli integrálgeometriát a Crofton-formulán keresztül közelítjük meg, és mutatjuk be. Ez a témakör legalapvetőbb tétele, mely egy görbe hossza, és a sík egyeneseinek a görbével vett metszéspontjainak száma közt teremt összefüggést.

Ebben a fejezetben a legtöbb tételünket a Crofton-formulára vezetjük vissza, és tapasztalni fogjuk, hogy több neves tétel és probléma válik könnyen kezelhetővé ezáltal. Érdemes azonban megjegyezni, hogy ezekre az állításokra sokszor közvetlen, és felettébb szemléletes bizonyítás is adható, melyeknek azonban kritikus pontja a töröttvonalról görbére való áttérés. Ez ugyan csak bizonyítástechnikai kérdés, de elég kellemetlen ahhoz, hogy kényelmesebb legyen a Crofton-formulára hivatkozni, ahol a görbék közelítését már elvégeztük. Mivel határozott célunk az integrálgeometria gondolatkörének bemutatása, ezért helyenként kitérünk az intuitív érvelésekre is.

1.1. Az egyenesek paraméterezése

Jelölje $\mathcal{E}$ az $\mathbb{R}^2$ euklideszi sík egyeneseinek halmazát, ezek persze jellemezhetők az origótól mért távolságuk, és irányuk (normálvektoruk szöge) segítségével. Legyen tehát $e_{\theta,d} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | cos(\theta) \cdot x + sin(\theta) \cdot y = d\} \in \mathcal{E}$, és tekintsük a $p : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{E}$, $p(\theta, d) = e_{\theta,d}$ szürjektív leképezést. Természetesen $e_{\theta,d} = e_{\tilde{\theta},\tilde{d}}$ akkor és csak akkor, ha $\theta - \tilde{\theta} = k \cdot \pi$ és $d = (-1)^k \tilde{d}$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Azt látjuk, hogy p-t a $[0, \pi) \times \mathbb{R}$ tartományra megszorítva már bijektív függvényt kapunk, és a (π, d) határpont p által ugyanoda képződik, mint a $(0, -d)$, vagyis $\mathcal{E}$-t a faktortopológiával ellátva egy nyílt Möbiusz-szalagot kapunk.

Ugyanez a faktorizálás egy μ mértéket is biztosít $\mathcal{E}$-n: legyen $A \subseteq \mathcal{E}$ mérhető akkor és csak akkor, ha $p^{-1}(A) \cap ([0, \pi] \times \mathbb{R})$ Lebesgue mérhető, és ekkor legyen $\mu(A) = \lambda(p^{-1}(A) \cap ([0, \pi] \times \mathbb{R}))$. Azért szorítkoztunk a $[0, \pi]$ intervallumra, hogy az egyenesek szöge lényegében egyértelmű legyen, de ennek a választásnak persze semmi jelentősége. Mivel a p szerinti őskép periodikus a $(\theta, d) \mapsto (\theta + \pi, -d)$ csúsztatva tükrözésre, mely a Lebesgue-mértéket nem változtatja, ezért a μ definíciójában $[0, \pi]$ helyett bármilyen $[a, a + \pi]$, $a \in \mathbb{R}$ intervallumot használhatunk.

1.1.1. Állítás. *A μ mérték invariáns a síkbeli egybevágóságokra nézve, azaz ha $\Phi \in$ $\in Iso(\mathbb{R}^2)$, és $A \subseteq \mathcal{E}$ mérhető, akkor $\Phi(A)$ is mérhető, és $\mu(\Phi(A)) = \mu(A)$.*

Bizonyítás. Az állítást elég $Iso(\mathbb{R}^2)$ egy generátorrendszerére bizonyítani. Jelölje F_α az origó körüli α szöggel vett forgatást minden $\alpha \in [0, 2\pi]$ szögre, E_a az x tengellyel párhuzamos, a-val való eltolást minden $a \in \mathbb{R}$ valós számra, és T az x tengelyre vett tükrözést. Ezek együtt generálják $Iso(\mathbb{R}^2)$-t, és meg fogjuk mutatni, hogy ezekre nézve μ invariáns. Mindhárom esetben megvizsgáljuk, hogy az adott egybevágóság miképpen transzformálja az A-hoz tartozó paramétereket.

Az origó körüli forgatásoknál $F_\alpha(e_{\theta,d}) = e_{\theta+\alpha,d}$, azaz $p^{-1}(F_\alpha(A))$ a (θ, d) síkon éppen $p^{-1}(A)$ eltoltja az $(\alpha, 0)$ vektorral, jelölje ezt az eltolást $\tilde{E}_\alpha$. A könnyebb érthetőség kedvéért különböztetjük meg E_α-tól, mert ugyan mindkettő $\mathbb{R}^2$-en hat, de

$\tilde{E}_\alpha$ esetén $\mathbb{R}^2$ alatt az egyenesek paraméterterét értjük. A Lebesgue-mérték eltolás-invarianciájából, a szöget kijelölő intervallumot $[\alpha, \alpha + \pi]$-nek választva adódik az állítás:

$$\mu(F_\alpha(A)) = \lambda\big(p^{-1}(F_\alpha(A)) \cap ([\alpha, \alpha+\pi] \times \mathbb{R})\big) = \lambda\big(\tilde{E}_\alpha(p^{-1}(A)) \cap ([\alpha, \alpha+\pi] \times \mathbb{R})\big) =$$

$$= \lambda\big(\tilde{E}_\alpha(p^{-1}(A) \cap ([0, \pi] \times \mathbb{R}))\big) = \lambda\big(p^{-1}(A) \cap ([0, \pi] \times \mathbb{R})\big) = \mu(A).$$

A T tükrözésnél $T(e_{\theta,d}) = e_{-\theta,d}$, vagyis ennek a (θ, d) síkon egy függőleges egyenesre való tükrözés felel meg, ami Lebesgue-mérték tartó, tehát

$$\lambda\big(p^{-1}(T(A)) \cap ([-\pi, 0] \times \mathbb{R})\big) = \lambda\big(p^{-1}(A) \cap ([0, \pi] \times \mathbb{R})\big).$$

Ennek bal oldala $\mu(T(A))$, jobb oldala pedig $\mu(A)$, ezzel T-re is beláttuk az invarianciát.

Végül a vízszintes eltolásoknál $E_a(e_{\theta,d}) = e_{\theta,d+a\cdot cos(\theta)}$. Vezessünk be erre egy jelölést, legyen $f(\theta, d) = (\theta, d + a \cdot cos(\theta))$, ennél a leképezésnél az első koordináta nem változik, így $f\big(p^{-1}(A)\big) \cap ([0, \pi] \times \mathbb{R}) = f\big(p^{-1}(A) \cap ([0, \pi] \times \mathbb{R})\big)$, vagyis elég az f-ről megmutatni, hogy tartja a Lebesgue-mértéket. Ezt könnyen ellenőrizhetjük a derivált leképezés determinánsának kiszámításával, és valóban 1-et kapunk. □

Miután megismerkedtünk az egyenesek terével, és a rajta értelmezett mértékkel, kimondjuk a fejezet központi tételét, a Crofton-formulát:

1.1.2. Tétel (Crofton-formula)**.** *Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ szakaszonként folytonosan differenciálható görbe, jelölje $n_\gamma(e)$ az $e \in \mathcal{E}$ egyenes γ-val vett metszéspontjainak számát, azaz $n_\gamma(e) = |\{t \in [a, b] | \gamma(t) \in e\}|$. Jelölje a γ görbe hosszát l_γ. Ekkor:*

$$l_\gamma = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}} n_\gamma d\mu$$

1.2. A Crofton-formula bizonyítása

Az alább ismertetett bizonyítás alapgondolata megtalálható M.P. do Carmo [1] könyvében. Az ott olvasható bizonyítást Csikós Balázs Differenciálgeometria 1. előadásain elhangzottak alapján tettük teljessé. Ismert a tételnek más bizonyítása is, mely a helyettesítéses integrálás tételének egy általánosítását használja, l. [2].

A bizonyítás során először szakaszra, majd töröttvonalra mutatjuk meg az állítást, majd végül a görbénket töröttvonallal fogjuk közelíteni.

Szakasz esetén az imént bizonyított egybevágóságinvariancia miatt feltehetjük, hogy a szakaszunk az origóban kezdődik, és vízszintes, vagyis végpontjai a (0,0) és (a,0) pontok, ahol $a \in \mathbb{R}$. Figyeljük meg, hogy n_γ értékkészlete jelen esetben $\{0,1,\infty\}$ lehet, azonban csak egyetlen olyan egyenes van, mely illeszkedik a szakaszra, így a ∞-t nullmértékű halmazon veszi fel, ezt tehát elhagyhatjuk. Akkor fogja egy egyenes metszeni a szakaszt, ha gyengén elválasztja a két végpontot, ami az egyenletével kifejezve:

$$\big[0 \cdot cos(\theta) + 0 \cdot sin(\theta) \leq d, \text{ és } a \cdot cos(\theta) + 0 \cdot sin(\theta) \geq d\big], \text{ vagy}$$
$$\big[0 \cdot cos(\theta) + 0 \cdot sin(\theta) \geq d, \text{ és } a \cdot cos(\theta) + 0 \cdot sin(\theta) \leq d\big]$$

Az egyenleteket egyszerűsítve:

$$a \cdot cos(\theta) \geq d \geq 0, \text{ vagy}$$
$$a \cdot cos(\theta) \leq d \leq 0$$

Azt látjuk, hogy d értéke be van szorítva az $a \cdot cos(\theta)$ függvény grafikonja, és az x tengely közé, ennek a tartománynak a területe a $0 \leq \theta \leq \pi$ megszorítással épp az $a \cdot cos(\theta)$ függvény félperiódusának görbe alatti területe,azaz $2a$. Az n_γ függvény egy $2a$ mértékű halmazon veszi fel az 1 értéket, integrálja tehát $2a$, mely pont a hossz kétszerese. Ezzel szakaszokra bebizonyítottuk az állítást. Egy pontból álló szakaszra adódik az alábbi, egyébként is triviális következmény.

1.2.1. Következmény. *Egy adott ponton átmenő egyenesek halmaza nullmértékű.* □

Legyen most T egy töröttvonal, mely az $I_1, I_2, \ldots I_k$ szakaszokból tevődik össze, a megfelelő metszéspontszámláló függvények pedig legyenek $n_T, n_{I_1}, n_{I_2}, \ldots, n_{I_k}$. Ha az $e \in \mathcal{E}$ nem megy át egyik csatlakozási ponton sem, akkor $n_T = n_{I_1} + n_{I_2} + \cdots + n_{I_k}$, és az előző következmény épp azt mondja, hogy ez az egyenlet majdnem mindenhol teljesül. Innen a szakaszokra már bizonyított formula összeadásával megkapjuk az állítást T-re.

$$l_T = \sum_{j=1}^{k} l_{I_j} = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}} n_{I_j} \, d\mu \right) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}} \sum_{j=1}^{k} n_{I_j} \, d\mu = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}} n_T \, d\mu$$

A görbék töröttvonallal való közelítése előtt szükségünk lesz előkészületekre. Használjuk a Sard-lemma egy speciális esetét, melynek segítségével egy görbét érintő egyenesek halmazáról fogjuk megmutatni, hogy nullmértékű.

1.2.2. Tétel (Sard-lemma, speciális eset)**.** *Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és $F : U \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény, $\Sigma = \{x \in U \mid \det F'(X) = 0\}$ a szinguláris pontok halmaza. Ekkor a kritikus értékek $F(\Sigma)$ halmaza Lebesgue nullmértékű.* □

Tekintsünk most egy $\gamma : [a;b] \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható görbét, legyen $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Vezessük be az F függvényt, mely az $U = \mathbb{R} \times (a;b) \to \mathbb{R}^2$ halmazon van értelmezve, és $F(\theta, t) = \big(\theta, x(t) \cdot cos(\theta) + y(t) \cdot sin(\theta)\big)$. Világos, hogy $F(\theta, t)$ pont a görbe $\gamma(t)$ pontján át húzott, θ szöghöz tartozó egyenes paraméterpárja. Érdemes megjegyezni, hogy F is folytonosan differenciálható. Kiszámítva F deriváltját:

$$F'(\theta, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x(t) \cdot sin(\theta) + y(t) \cdot cos(\theta) & x'(t) \cdot cos(\theta) + y'(t) \cdot sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

A determináns tehát $x'(t) \cdot cos(\theta) + y'(t) \cdot sin(\theta)$, ami épp a $\gamma'(t)$ sebességvektor és a $(cos(\theta), sin(\theta))$ normálvektor skaláris szorzata, vagyis pontosan akkor nulla, ha az $F(\theta, t)$ párhoz tartozó $e_{\theta, x(t)\cdot cos(\theta)+y(t)\cdot sin(\theta)}$ egyenes érinti a γ görbét. Hallgatólagosan megengedünk olyan $t \in [a, b]$ pontokat, ahol a görbe sebességvektora 0, ekkor bármely $\gamma(t)$-n átmenő egyenest érintőnek hívunk.

Tehát F-et a korábbi p leképezésünkkel komponálva azt kapjuk, hogy $p(F(U))$ éppen a γ görbe érintőinek halmaza. Az F függvényre alkalmazva a Sard-lemmát kapjuk, hogy $\lambda(F(U)) = 0$, amiből adódik, hogy $\mu(p(F(U))) = 0$, vagyis megkaptuk az alábbi következményt:

1.2.3. Következmény. *Egy folytonosan differenciálható görbe érintőinek halmaza μ-nullmértékű.* $\square$

Most már be tudjuk bizonyítani a Crofton-formulát görbékre is. Legyen tehát γ folytonosan differenciálható görbe, és jelölje T_i azt a γ-ba írt tört vonalat, melyet az $[a; b]$ intervallum 2^i részre osztásából kapunk. Vezessük be továbbá minden T_i-hez az n_i metszéspontszámláló függvényt.

Mivel egy ponton átmenő egyenesek halmaza nullmértékű, és az összes T_i-nek (minden $i \in \mathbb{N}$-re) együtt is csak megszámlálhatóan végtelen sok töréspontja van, ezért azon egyenesek halmaza, melyek valamely T_i töréspontján áthaladnak, nullmértékű. Az előző következményünk alapján azt is tudjuk, hogy γ érintői is nullmértékű halmazt alkotnak, így mindezen egyenesektől eltekintve az n_γ integrálja nem változik. Feltehető tehát, hogy egy általános e egyenes elkerüli a töréspontokat, és nem érintője a görbének.

Vegyük észre, hogy egy ilyen e egyenesre $n_i(e)$ monoton nő az i paraméterben. Ha a T_i töröttvonal egy I szakasza metszi e-t, akkor a T_{i+1} töröttvonalban I helyett megjelenő I_0 és I_1 szakaszok I-vel együtt egy olyan háromszöget határoznak meg, melynek I oldalát e belső pontban metszi, így a Pasch-axióma alapján van a háromszöggel még egy közös pontja, így metszi az $I_0 \cup I_1$ töröttvonalat. Ezt a T_i minden szakaszára elmondva adódik a monotonitás. Megmutatjuk, hogy $\lim_{i\to\infty} n_i(e) = n_\gamma(e)$.

Világos, hogy $n_\gamma(e) \geq n_i(e)\ \forall i$, hiszen ha egy szakasz két végpontja egy egyenes két oldalán van, akkor a görbe végpontokat összekötő íve is metszi az egyenest. Ezt a Bolzano tétel segítségével, a görbe mentén az egyenes normálvektorával vett skalárszorzatot követve láthatjuk. Legyen tehát $N \leq n_\gamma(e)$, és megmutatjuk, hogy egy küszöbindex után $N \leq n_i(e)$.

Mivel n_γ a metszéspontokat számolja, ezért persze találhatóak $t_1 < t_2 < \cdots < t_N$ időpontok az $[a; b]$ intervallumban, melyekre $\gamma(t_i) \in e$, és mivel feltettük, hogy az egyenes nem érinti a görbét, ezért található a t_i-knek olyan ε sugarú nyílt környezete, hogy a γ görbe megszorításai a $(t_i - \varepsilon; t_i)$, illetve $(t_i; t_i + \varepsilon)$ szakaszokra az egyenes két ellentétes oldalán vannak.

Ezek után i-t olyan nagynak választva, hogy essen osztópont az összes t_i bal- és jobboldali környezetébe is, a T_i töröttvonalnak a $(t_i - \varepsilon; t_i + \varepsilon)$ szakaszon metszenie kell e-t. Persze ε megfelelő csökkentésével az is feltehető, hogy $t_i + \varepsilon < t_{i+1} - \varepsilon$, vagyis a környezetek diszjunktak, így azt kaptunk, hogy T_i legalább N pontban metszi e-t, azaz $N \leq n_i(e)$.

Mindezek után a monoton konvergencia tétel szerint:

$$\int_{\mathcal{E}} n_\gamma \, d\mu = \int_{\mathcal{E}} \lim_{i\to\infty} n_i \, d\mu = \lim_{i\to\infty} \int_{\mathcal{E}} n_i \, d\mu = \lim_{i\to\infty} 2 \cdot l_{T_i} = 2l_\gamma.$$

Ezzel a Crofton formulát folytonosan differenciálható görbékre bebizonyítottuk. Szakaszonként folytonosan differenciálhatóra az állítás egyszerűen szakaszonként összeadva adódik, azt kihasználva, hogy a töréspontokon átmenő egyenesektől eltekinthetünk.

1.3. Cauchy-formula a síkban

A Crofton-formula speciális eseteként tegyük fel, hogy a γ_K görbénk egy K konvex lemezt határol. K tehát kompakt, konvex, és a belseje nem üres. Az ilyen halmazokat a továbbiakban *konvex lemez*nek fogjuk nevezni. Világos, hogy a K konvex lemez kerülete γ_K hossza. Erre felírjuk a már bizonyított formulánkat:

$$l_{\gamma_K} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{E}} n_{\gamma_K} \, d\mu = \frac{1}{2}\int_0^\pi \int_{\mathbb{R}} n_{\gamma_K}(e_{\theta,t}) \, dt \, d\theta.$$

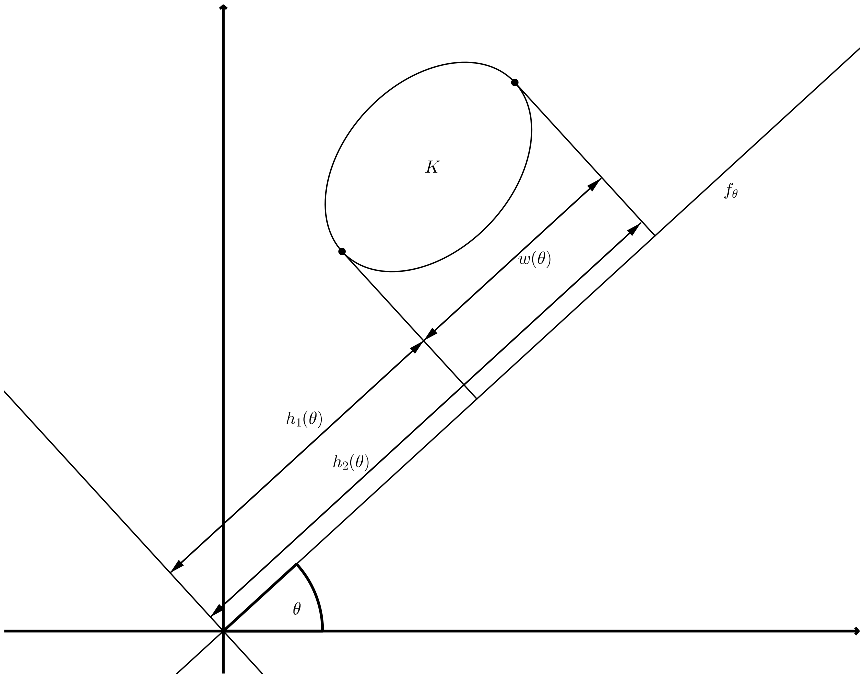
Vizsgáljuk meg, hogy az n_{γ_K} függvény milyen értékeket vehet fel. Persze felvehet 0-át, amikor az egyenes elkerüli K-t. Felvehet 1-et, amikor az egyenes érinti γ_K-t, és ∞-t is, amikor egy szakaszon illeszkedik rá, de ezen egyenesek halmaza korábbi vizsgálataink szerint nullmértékű (1.2.3 Következmény). Azt is láthatjuk, hogy 2-nél nagyobb véges értéket nem vehet fel n_{γ_K}, hiszen ha már van három határpont egy egyenesen, akkor a két szélső közti szakasz minden pontja határpont. Összegzésképpen azt mondhatjuk, hogy n_{γ_K} majdnem minden egyenesre 0 vagy 2 értéket vesz fel, attól függően, hogy az egyenes metszi-e a K halmazt.

Rögzítsünk egy $\theta \in [0, \pi)$ szöget, és ezzel együtt az origón áthaladó, θ argumentumú f_θ egyenest. Vizsgáljuk meg erre a θ-ra a belső integrált. A t paraméter futtatása megfelel egy f_θ-ra merőleges egyenes eltolásának, és a függvényérték mindaddig 2, amíg ez a merőleges egyenes metszi K-t. Éppen ezért vezessük be a következő jelöléseket: $h_1(\theta) = \min\{d \in \mathbb{R} | e_{\theta,d} \cap K \neq \emptyset\}$, és $h_2(\theta) = \max\{d \in \mathbb{R} | e_{\theta,d} \cap K \neq \emptyset\}$, így az integrált átírhatjuk a következő alakba:

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi \int_{\mathbb{R}} n_{\gamma_K}(e_{\theta,t}) \, dt \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} 2 \, dt \, d\mu = \int_0^\pi h_2(\theta) - h_1(\theta) \, d\theta.$$

Érdemes bevezetni a $w_K(\theta) = h_2(\theta) - h_1(\theta)$ függvényt. Ennek geometriai jelentése pontosan a K halmaz f_θ egyenesre vett vetületének hossza, ezt hívjuk a K halmaz θ irányú *szélesség*ének. Ezzel megkatuk az alábbi állítást:

1. ábra. Konvex lemez szélessége



1.3.1. Állítás (Cauchy-formula, speciális eset)**.** *Legyen K konvex lemez, melynek határa a γ_K szakaszonként folytonosan differenciálható zárt görbe. Jelölje K θ irányú szélességét $w_K(\theta)$. Ekkor $l_{\gamma_K} = \int_0^\pi w(\theta)d\theta = \pi w(K)$, ahol $w(K) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi w(\theta)d\theta$ a K halmaz átlagszélessége.* □

Érdemes megjegyezni, hogy a fenti gondolatmenetben mindössze annyi történt, hogy a már bizonyított integrálformulánkat lebontottuk, és észrevettük, hogy a metszési szám majdnem mindig 0 vagy 2.

Valójában a Cauchy-formulában a határra tett megszorítás felesleges. Konvex testek felszínét n dimenzióban is könnyen lehet definiálni beírt politópok segítségével, és a felszínt konstans szorzó erejéig mindig megkaphatjuk a tér minden irányába vett vetítések $(n-1)$-dimenziós mértékeinek átlagaként. Minderre a konvex halmazokkal foglalkozó fejezetben részletesen kitérünk. Addig is a síkbeli alkalmazásoknál elfogadjuk, hogy konvex lemezeknek van kerülete, és hogy a Cauchy-formula teljesül a határra tett megszorítás nélkül.

A formulánk speciális eseteként megkapjuk Barbier tételét:

1.3.2. Következmény. *Állandó szélességű konvex lemez kerülete megegyezik az azonos átmérőjű kör kerületével.* □

Felmerül a kérdés, hogy van-e állandó szélességű lemez a körön kívül? Ellenkező esetben Barbier tétele nem volna sokatmondó, így sejthető, hogy van. A legegyszerűbb példa a Reuleaux-háromszög. Ez egy szabályos háromszög, melynek minden csúcsából körívet húzunk a szemközti két csúcs között. Ez a konstrukció tetszőleges páratlan oldalú szabályos sokszöggel elvégezhető, de vannak teljesen „szabálytalan” példák is.

A speciális Cauchy-formula bizonyításának egyik fontos pontja volt, hogy egy egyenes majdnem mindig 0 vagy 2 pontban metszi a határt, és így az értékből le tudjuk olvasni a metszési viszonyt. Ez motiválja az Cauchy-formula következő átfogalmazását:

1.3.3. Állítás. *Legyen K konvex lemez, melynek kerülete $k(K)$. Ekkor az őt metsző egyenesek halmazának mértéke $k(K)$.*

Bizonyítás.

$$k(K) = \int_0^\pi w(\theta)d\theta = \int_0^\pi \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} 1 \; dt \; d\theta = \int_{\{e|e\cap K\neq\emptyset\}} d\mu = \mu\big(\{e|e\cup K \neq \emptyset\}\big).$$

□

Ennek az átfogalmazásnak a segítségével a formulánkat felhasználhatjuk geometriai valószínűségszámítási feladatok megoldására. Legyenek például K és L konvex lemezek, és $L \subseteq K$. Ekkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlen egyenes metszi L-et, feltéve, hogy metszi K-t egyszerűen $\frac{k(L)}{k(K)}$. Ez már önmagában is figyelemreméltó eredmény, azonban vizsgáljuk meg azt az esetet is, amikor a belső halmaz nem feltétlen konvex lemez.

Legyen tehát ismét K konvex lemez, és γ szakaszonként folytonosan differenciálható görbe, mely végig K-ban halad. Mivel n_γ viselkedése nem olyan egyszerű, mint korábban, ezért nem a metszés valószínűségéről, hanem a metszéspontok várható értékéről tudunk mondani valamit. Jelölje a K-t metsző egyenesek halmazát $\mathcal{E}(K)$, melynek mértékére $\mu(\mathcal{E}(K)) = k(K)$. Az $\mathcal{E}(K)$-beli egyenesek közül véletlenszerűen választva egyet a metszéspontok várható értéke:

$$\mathbf{E}(n) = \frac{\int_{\mathcal{E}(K)} n_\gamma \; d\mu}{k(K)} = \frac{2l_\gamma}{k(K)}.$$

Itt kihasználtuk, hogy n_γ eltűnik az $\mathcal{E}(K)$ halmazon kívül, hiszen ha egy egyenes metszi γ-t, akkor K-t is.

Az előző állításnak egyszerű következménye, hogy van olyan egyenes, mely a görbét legalább $\frac{2l_\gamma}{k(K)}$ pontban metszi, hiszen a metszéspontok maximuma nagyobb, mint az átlag. Ez utóbbi állítás önmagában nem integrálgeometriai. Visszatekintve azt látjuk, hogy a bizonyítás, melyen keresztül eljutottunk idáig a kombinatorikában előforduló valószínűségszámítási módszerek egy folytonos megfelelője: vegyünk egy véletlen egyenest, és bebizonyítjuk, hogy a metszéspontok száma pozitív valószínűséggel elég nagy. Amennyiben csak a γ görbe adott, és mi választhatjuk a K-t, a $\frac{2l_\gamma}{k(K)}$ hányados akkor a legnagyobb,ha K a görbe képének konvex burka.

1.4. A Buffon-féle tűprobléma

A síkbeli integrálgeometriai tételek sorába tartozik a méltán nevezetes Buffon-féle tűprobléma is. A kérdést még a 18. században vetette fel Georges-Louis Leclerc, Buffon grófja: egy végtelen padlón d távolságonként párhuzamos egyenes repedések találhatók, mekkora a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen leejtett $l \leq d$ hosszúságú tű metszi az egyenesek valamelyikét? A probléma figyelemreméltó, hiszen a válaszban megjelenik a π, míg a megoldás módszere megalapozta az integrálgeometria és geometriai valószínűségszámítás kapcsolatát.

Ebben a dolgozatban a feladatot nem a szokványos módon bizonyítjuk. Rögzítsük a tűt, és vegyünk fel a felezőpontja körül egy d átmérőjű K körlapot. Ezek után helyezzük el a padlót véletlenszerűen. A padló helyzetét egyértelműen meghatározza a középponthoz legközelebbi egyenes. Előfordulhat, hogy két ilyen egyenes is van, ekkor azonban mindketten érintik a K-t, így ennek valószínűsége az 1.2.3 következmény szerint nulla. Ezért ezeket az eseteket is úgy szimuláljuk, hogy egyetlen véletlen egyenest dobunk le, és így csak nullmértékű esetet „számolunk kétszer”, ami a végeredményt nem befolyásolja. Ezen kívül az is látszik, hogy csak ez az egy egyenes metszheti a tűt, megint eltekintve az $l = d$ esetben előálló nullmértékű kivételtől.

Persze az egyenes az $\mathcal{E}(K)$ halmazból kerül ki egyenletes valószínűséggel, így a tűvel vett metszéspontok számának várható értéke $\frac{2l}{k(K)} = \frac{2l}{\pi d}$. Egy szakasznak egy egyenessel 0 vagy 1 metszéspontja van, így a várható érték megegyezik a metszés valószínűségével.

Ez a bizonyítás egyből mutatja a kérdés lehetséges általánosítását. Engedjük meg, hogy a tű szakasz helyett tetszőleges szakaszonként folytonosan differenciálható γ görbe legyen, és a metszés valószínűsége helyett kérdezzük a metszéspontok számának várható értékét. Az előző gondolatmenet változtatás nélkül működik, ha a γ görbe befoglalható egy d átmérőjű körlapba. Az viszont világos, hogy bármely görbe felosztható ilyen darabokra, és a várható érték éppen a darabokra vett várható értékek összege, hiszen egy töréspont nulla valószínűséggel fog valamely egyenesre esni. Ezzel megkaptuk a következő tételt:

1.4.1. Tétel. *Egy γ szakaszonként folytonosan differenciálható görbét véletlenszerűen ledobva egy síkra, melyen d távolságonként párhuzamos egyenesek találhatók, a görbe egyenesekkel vett metszéspontjainak száma várhatóan* $\frac{2l_\gamma}{2d}$. $\square$

Ennek a tételnek bemutatjuk egy intuitív bizonyítását is, melyet nem részletezünk ki teljes egészében, de a gondolatmenet motiválja a később bevezetésre kerülő *kiértékelés* fogalmát.

Második bizonyítás: Tekintsünk egy l_1 hosszú szakaszt, és legyen az X_1 valószínűségi változó a szakasznak az egyenesekkel vett metszéspontjainak száma. Tekintsünk egy l_2 hosszúságú szakaszt, melyre ugyanígy adódik egy X_2 valószínűségi változó. Ragasszuk össze a két szakasz egy-egy végpontját, így a kapott töröttvonalra az $X_1 + X_2 - X_{1,2}$ valószínűségi változó adódik, ahol $X_{1,2}$ a közös végpont egyenesekkel vett metszéspontjainak számát adja. Persze a ragasztás után X_1 és X_2 nem függetlenek, de a várható értékek összeadódnak:

$$\mathbf{E}(X_1 + X_2 - X_{1,2}) = \mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(X_2) + \mathbf{E}(X_{1,2}) = \mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(X_2).$$

Világos, hogy az $E(X_1)$ szám nem függhet mástól, mint a szakasz egyetlen paraméterétől, a hosszától. Bevezetjük az f függvényt, ahol $f(t)$ a t hosszú szakasz egyenesekkel vett metszéspontjainak várható értéke. Ha az iménti ragasztást történetesen úgy végezzük, hogy a kapott töröttvonal ismét szakasz legyen, azt kapjuk, hogy $f(l_1 + l_2) = \mathbf{E}(X_1 + X_2 - X_{1,2}) = \mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(X_2) = f(l_1) + f(l_2)$.

Ebből következik, hogy a racionális számokra megszorítva f lineáris. Ha képzeletben egy hosszabb szakaszt egy rövidebbre rögzítünk látjuk, hogy a hosszabb szakasz mindig legalább annyi pontban metszi az egyeneseket, mint a rövidebb, így az f függvény t-ben monoton, így az egész $\mathbb{R}$-en lineáris, azaz $f(t) = ct$.

Több szakasz összeragasztásával tetszőleges töröttvonalra is látjuk, hogy a várható érték a hossz c-szerese. A γ görbét közelítsük a T töröttvonallal, ekkor a görbéhez tartozó Y valószínűségi változót a T-hez tartozó $X_1 + \cdots + X_k$ valószínűségi változó jól közelíti, és határátmenettel $\mathbf{E}(Y) = f(l_\gamma) = c \cdot l_\gamma$.

Itt a c továbbra is univerzális konstans, nem függ γ hosszától vagy alakjától. A meghatározásához válasszuk γ-t egy d átmérőjű kör kerületének. Ekkor persze a ledobott körvonal mindig két pontban metszi az egyeneseket, így várható értéke is $\mathbf{E}(Y) = 2$. A görbe hossza $d\pi$, így az egyenletünkbe beírva $2 = c \cdot d\pi$, amiből $c = \frac{2}{d\pi}$ adódik. Ezzel a tételt beláttuk. $\square$

Érdemes kiemelni két gondolatot a bizonyításból. Először is azt, hogy az egyenlőséget először egy konstanssal való szorzástól eltekintve bizonyítottuk, majd a lényegében bebizonyított tételt felhasználva, egy jól választott példa segítségével határoztuk meg a konstanst.

A második gondolat már nem annyira szembeötlő. A bizonyításunk alapjaiban azon múlik, hogy szakaszokat és görbéket össze tudunk ragasztani. Ha az A és B görbékre mint síkbeli halmazokra gondolunk, melyek esetleg átfednek, az átfedést $A \cap B$-vel jelölve a hosszra $l_{A\cup B} = l_A + l_B - l_{A\cap B}$, és ugyanez igaz a metszéspontok várható értékével is. Ez a tulajdonság lesz az alapja a kiértékelés fogalmának.

2. Konvex halmazok

Mint a Cauchy-formulából és következményeiből kiderült, az integrálgeometria kérdéskörében fontos szerepet játszanak a konvex halmazok. Éppen ezért külön fejezetet szánunk a konvex testek térfogatának és felszínének precíz bevezetésére, és az ezekhez kapcsolódó fontosabb tételek bizonyítására. A konvex halmazokkal kapcsolatos alapfogalmakat, mint például konvex burok, támaszhipersík, politóp és konvex halmaz lapja, Minkowski-összeg ismertnek tételezzük fel.

2.1. Approximáció politópokkal

Vizsgálatainkat az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben végezzük, ahol $d(x,y)$ jelöli az x és y pontok távolságát, és $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n | d(x,y) < r\}$ az x középpontú r sugarú nyílt gömböt. Hasonlóan $\overline{B}(x,r)$ az x középpontú, r sugarú zárt gömb. Jelölje $\mathcal{K}$ a kompakt, konvex részhalmazok halmazát, míg $\mathcal{K}^+$ ezek közül azokat, melyeknek belseje nem üres. $\mathcal{K}^+$ elemeit *konvex test*eknek, $n = 2$ esetben a korábbi szóhasználatnak megfelelően *konvex lemez*eknek nevezzük. *Konvex politóp*on, vagy röviden csak politópon véges sok pont konvex burkát érjük, és ezek halmazát $\mathcal{P}$-vel jelöljük, hasonlóan $\mathcal{P}^+$ jelöli azokat, melyeknek belseje nem üres.

A K halmazra és $r > 0$ számra legyen $B(K,r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x,K) < r\} = \bigcup_{y \in K} B(y,r)$, ezt nevezzük a K halmaz r sugarú nyílt *paralleltartomány*ának. Értelemszerűen a $d(x,K)$ jelölésen az x pontnak a K kompakt halmaztól mért távolságát értjük. A $B(K,r)$ halmaz felírható $K + B(\mathbf{0},r)$ Minkowski-összegként, ami mutatja, hogy ha K konvex halmaz, akkor tetszőleges paralleltartománya is az. Hasonlóan értelmezzük a $\overline{B}(K,r) = \bigcup_{y \in K} \overline{B}(y,r)$ zárt paralleltartományt. Mivel mindig kompakt halmazok paralleltartományait vizsgáljuk, ezért $B(K,r)$ lezártja $\overline{B}(K,r)$. Bővebb halmaz paralleltarománya bővebb, és a fordított irány is igaz, azaz ha K és L konvex halmazok, melyekre $B(K,r) \subseteq B(L,r)$, akkor ebből $K \subseteq L$ következik. Valóban, ha volna $v \in K \setminus L$, akkor v egy hipersíkkal szigorúan elválasztható L-től. Válasszuk ε-t az L és a hipersík távolságánál kisebbnek, és v-ből az L-et nem tartalmazó féltér irányában, a hipersíkra merőlegesen $(r - \varepsilon)$-t haladva olyan ponthoz érünk, mely $(B(K,r) \setminus B(L,r))$ -ben van, ami ellentmondás. Tehát konvex testek körében $B(K,r) \subseteq B(L,r)$ akkor és csak akkor, ha $K \subseteq L$.

Világos, hogy $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{K}$, és $\mathcal{P}^+ \subseteq \mathcal{K}^+$, és az első tételünk azt fogalmazza meg, hogy konvex testek jól közelíthetők politópokkal.

2.1.1. Állítás. *Legyen $K \in \mathcal{K}^+$ konvex test.*

(a) Bármely $L \subseteq \operatorname{int}(K)$ kompakt halmazhoz és $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $P \subseteq \operatorname{int}(K)$ politóp, melyre $L \subseteq \operatorname{int}(P)$, és $K \subseteq B(P,\varepsilon)$.

(b) Bármely $O \in \operatorname{int}(K)$ ponthoz és $\eta > 1$ számhoz található olyan $P \subseteq K$ politóp, melyre $K \subseteq \operatorname{int}(N_{O,\eta}(P))$, ahol $N_{O,\eta}$ az O középpontú η arányú nagyítást jelöli.

Bizonyítás. Az (a) részben először vegyünk minden L-beli pont köré egy olyan szimplexet, mely még $\mathrm{int}(K)$-ban van, majd ezek közül L kompaktsága alapján válasszunk ki véges sokat, melyek fedik L-et, legyenek ezeknek csúcsai az $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ pontok. Ekkor az S_i-k konvex burka már biztosan tartalmazza L-et. A második feltétel biztosításához vegyünk fel minden $\mathrm{int}(K)$-beli pont köré egy ε sugarú gömböt, ezek együtt az egész K-t fedik, így annak kompaktsága biztosítja, hogy ezek közül kiválasztható véges sok, melyek továbbra is fedik K-t. Ezek középpontjai legyenek a $B_1, B_2, \ldots, B_l$ pontok, ekkor az S_i és B_j pontok közös konvex burkának ε sugarú paralleltartománya tartalmazza K-t. Így hát legyen $P = \mathrm{conv}(\{S_i, B_j | i = = 1 \ldots k,\ j = 1 \ldots l\})$.

A (b) részhez legyen $L = N_{O,1/\eta}$, ez persze $\mathrm{int}(K)$-ban van, ezért alkalmazhatjuk rá (tetszőleges ε-nal) az (a) rész állítását, a kapott P politóp megfelelő lesz. □

A fenti tétel adta lehetőségeket még jobban ki tudjuk aknázni, ha $\mathcal{K}$-t metrikával látjuk el. Legyen $K, L \in \mathbb{R}^n$ korlátos halmazokra

$$\delta(K, L) = inf\{\varepsilon | K \subseteq B(L, \varepsilon) \text{ és } L \subseteq B(K, \varepsilon)\}.$$

Ez a két halmaz *Hausdorff-távolság*a. A definícióból világos, hogy $\delta(K, L) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\overline{K} = \overline{L}$, ahol a felülvonás lezárást jelent. Ez azt jelenti, hogy ha kompakt halmazokra szorítkozunk, akkor két halmaz távolsága akkor és csak akkor 0, ha egybeesnek. Az is rögtön látszik, hogy a Hausdorff-távolság szimmetrikus. Végül a háromszög-egyenlőtlenség következik abból, hogy ha $K \subseteq B(L, \varepsilon)$ és $L \subseteq B(M, \eta)$, akkor ezeket összefűzve:

$$K \subseteq B(L, \varepsilon) \subseteq B\big(B(M, \eta), \varepsilon\big) = B(M, \varepsilon + \eta)$$

Összefoglalva azt kaptuk, hogy:

2.1.2. Állítás. *A Hausdorff-távolság metrika $\mathbb{R}^n$ kompakt részhalmazain.* □

2.1.3. Állítás. *$\mathcal{P}$ sűrű részhalmaz $\mathcal{K}$-ban, $\mathcal{K}$ pedig zárt részhalmaz a kompakt halmazok terében.*

Bizonyítás. A 2.1.1 állítás (a) pontjából azonnal adódik, hogy $\mathcal{P}^+$ sűrű $\mathcal{K}^+$-ban. Általában elmondható, hogy egy konvex halmaz a maga feszítette affin altérben konvex test, azaz erre az altérre szorítkozva már nem üres a belseje, így tudjuk használni az előbbi eredményt. A 2.1.1 állításból adódó, az affin altérben lévő P politóp pedig az eredeti tér dimenziójától függetlenül ε-nál kisebb Hausdorff-távolságra van K-tól.

$\mathcal{K}$ zártságához vegyünk egy nem konvex, de kompakt C halmazt. Mivel C nem konvex, vannak olyan $X, Y \in C,\ Z \in [X; Y]$ pontok, hogy $Z \notin C$. C kompaktságából következik, hogy ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy $B(Z, \varepsilon) \cap C = \emptyset$. Állítjuk, hogy ha $\delta(C', C) < \varepsilon/2$, akkor C' sem lehet konvex, azaz $\mathcal{K}$ komplementere nyílt. C'-nek biztosan van pontja a $B(X, \varepsilon/2)$ és $B(Y, \varepsilon/2)$ gömbökben, legyenek ezek rendre X' és Y'. Ekkor az $[X'; Y']$ szakasz metszi a $B(Z, \varepsilon/2)$ gömböt. Másrészt $B(Z, \varepsilon/2) \cap \cap B(C, \varepsilon/2) = \emptyset$, hiszen $B(Z, \varepsilon) \cap C = \emptyset$. Mivel $\delta(C', C) < \varepsilon/2$ miatt $C' \subseteq B(C, \varepsilon/2)$, így $B(Z, \varepsilon/2) \cap C' = \emptyset$. $B(Z, \varepsilon/2)$-ben van $[X'; Y']$-nek pontja, ami így nem lehet C'-beli, ezért C' nem lehet konvex. □

2.2. Felszín és térfogat

Minden politóp Jordan-mérhető, és a 2.1.1 állítás (b) pontja szerint minden K konvex testhez tudunk találni $P \subseteq K \subseteq Q$ politópokat, melyek térfogatainak különbsége tetszőlegesen kicsi lehet. Jelölje V_n az n-dimenziós Jordan-mértéket.

2.2.1. Állítás. *Minden $K \in \mathcal{K}^+$ konvex test Jordan-mérhető, és*

$$V_n(K) = \sup\{V_n(P) | P \in \mathcal{P}^+,\ P \subseteq \mathrm{int}(K)\} = \inf\{V_n(Q) | Q \in \mathcal{P}^+,\ K \subseteq \mathrm{int}(Q)\} \quad \square$$

A *felszín* bevezetése már egy kicsit több munkát igényel. Amennyiben $n \geq 2$, egy politóp felszínén a hiperlapok $(n-1)$-dimenziós mértékeinek összegét értjük, és $S(P)$-vel jelöljük. A későbbi alkalmazások érdekében érdemes megvizsgálni, hogy mi történik egy $(n-1)$-dimenziós hipersíkban lévő mérhető halmaz $(n-1)$-dimenziós térfogatával, ha merőlegesen vetítjük egy hipersíkra.

2.2.2. Lemma. *Legyenek H_1 és H_2 metsző affin hipersíkok, és $p : H_1 \to H_2$ a merőleges vetítés. Ekkor minden $M \subseteq H_1$ Jordan-mérhető halmazra $V_{n-1}(p(M)) = \cos(\alpha) V_{n-1}(M)$, ahol α a két sík közbezárt szöge.*

Bizonyítás. Világos, hogy a merőleges vetítés megkapható egy $H_1 \cap H_2$ körüli forgatás, majd ugyanezen tengely mentén történő $cos(\alpha)$ arányú merőleges affinitás kompozíciójaként. A forgatás nem változtatja a mértéket, míg az affinitás a halmazt egy dimenziójában ($H_1 \cap H_2$-re merőlegesen) húzza össze, éppen a bizonyítandó aránnyal. $\square$

Érdemes megjegyezni, hogy a lemma az $\alpha = 0$ esetben is igaz, amikor is H_1 és H_2 párhuzamosak. Ennek segítségével bebizonyítjuk a következő állítást, mely a síkbeli háromszög-egyenlőtlenség általánosításának is tekinthető.

2.2.3. Állítás. *Legyen L a $P \in \mathcal{P}^+$ politóp egy hiperlapja, ilyenkor $V_{n-1}(L) < \frac{1}{2} S(P)$.*

Bizonyítás. Az állítás azzal ekvivalens, hogy az L-től különböző hiperlapok térfogatösszege nagyobb, mint az L térfogata. Vetítsük a többi hiperlapot L hipersíkjára, ekkor a vetületek fedik L-et, tehát az össztérfogat legalább akkora, mint L térfogata. A vetítés során a hiperlapok térfogata a 2.2.2 lemma alapján nem nőhetett, sőt csökkent is minden olyan esetben, amikor a vetített lap nem párhuzamos L-el, így szigorú egyenlőtlenséget kapunk. $\square$

2.2.4. Állítás. *Legyenek $P_1, P_2 \in \mathcal{P}^+$ politópok, melyekre $P_1 \subseteq P_2$. Ekkor $A(P_1) \leq A(P_2)$.*

Ezt az állítást $n = 2$ esetben a már bizonyított, speciális Cauchy-formulából azonnal megkapjuk, hiszen sokszögek határa tekinthető szakaszonként folytonosan differenciálható görbének. A formulát felírva, és kihasználva, hogy bővebb konvex halmaz minden irányban szélesebb, megkapjuk az állítást.

Bizonyítás. Jelölje $k(P_1, P_2)$ a P_1 azon L hiperlapjainak számát, melyek ténylegesen a P_2-ben vannak, azaz $L \nsubseteq \partial P_2$. Amennyiben $k = 0$, a két politóp egybeesik, így felszínük egyenlő. Ezek után a $k(P_1, P_2)$ számra vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Az indukciós lépésben vegyük P_1-nek egy olyan L hiperlapját, melyre $L \nsubseteq \partial P_2$. Vágjuk ketté a P_2 politópot, L hipersíkja mentén a P_2' és P_2'' politópokra, ahol $P_1 \subseteq$ $\subseteq P_2'$. Legyen a két politóp közös hiperlapja $L' = \langle L \rangle \cap P_2$. Ekkor kihasználva, hogy $k(P_1, P_2') < k(P_1, P_2)$, az indukciós feltevésünk biztosítja, hogy $S(P_1) \leq S(P_2')$. A P_2'' politópra pedig alkalmazzuk az előbbi állításunkat, miszerint $S(P_2'') > 2V_{n-1}(L')$. Ezeket összerakva kapjuk, hogy $S(P_1) \leq S(P_2') + S(P_2'') - 2V_{n-1}(L') = S(P_2)$, ezzel az indukciós lépést befejeztük. □

Most már könnyedén be tudjuk vezetni tetszőleges K konvex test felszínét. A térfogat mintájára vegyük az összes beírt és köréírt politópot, és vizsgáljuk ezek felszínét. A 2.2.4 állítás szerint bármely beírt politóp felszíne kisebb, mint bármely köréírté. Másrészt vegyük észre, hogy egy $N_{O,\lambda}$ középpontos hasonlóságnál $S(N_{O,\lambda}(P)) = \lambda^{n-1} S(P)$, hiszen a felszín $(n-1)$-dimenziós térfogatok összege. Így a 2.1.1 állítás segítségével azt látjuk, hogy tudunk úgy politópokat K-ba és K köré írni, hogy azok felszínei tetszőlegesen közel legyenek egymáshoz. Ezt fogalmazza meg a következő állítás:

2.2.5. Állítás. *Bármely $K \in \mathcal{K}^+$ konvex testre* $\sup\{S(P) | P \in \mathcal{P}^+,\ P \subseteq \mathrm{int}(K)\} =$ $= \inf\{S(Q) | Q \in \mathcal{P}^+,\ K \subseteq \mathrm{int}(Q)\}$. *Ezt az $S(K)$-val jelölt közös értéket nevezzük a K konvex test felszínének.* □

Mind a térfogat, mind a felszín monoton halmazfüggvény, azaz ha két konvex testre $K \subseteq L$, akkor $V_n(K) \leq V_n(L)$, illetve $S(K) \leq S(L)$. További közös vonásuk, hogy *homogén*ek, azaz középpontos hasonlóságnál mindig a hasonlósági arány egy fix hatványszorosára változnak. A térfogat esetén az arány n-edik, míg a felszín esetén az $(n-1)$-edik hatványszorosára.

2.2.6. Állítás. *Konvex testek térfogata és felszíne folytonos a Hausdorff-metrikára nézve.*

Bizonyítás. Legyen $K \in \mathcal{K}^+$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Vegyünk fel egy O pontot K belsejében, és O középponttal nagyítsuk és kicsinyítsük K-t rendre $\eta < 1$ és $1 < \lambda$ arányokkal, így kapjuk a $K_1 \subseteq K$ és $K \subseteq K_2$ konvex testeket. $V_n(K_1) = \eta^n V_n(K)$, és $V_n(K_2) = \lambda^n V_n(K)$, tehát az η és λ arányokat 1-hez elég közel megválasztva elérhető, hogy

$$V_n(K) - \varepsilon \leq V_n(K_1) \leq V_n(K_2) \leq V_n(K) + \varepsilon.$$

Legyen $\delta_1 = d\big(K_1, (\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{int}(K))\big) = \inf\{d\big(x, (\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{int}(K))\big) | x \in K_1\}$, és hasonlóan $\delta_2 = d\big(K, (\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{int}(K_2))\big)$, mely számok a halmazok kompaktságából adódóan pozitívak. Ezeknek a jelentősége az, hogy ha $\delta(K, L) < \delta_1$ akkor a Hausdorff-metrika definíciója szerint $K \subseteq B(L, \delta_1)$, míg a δ_1 úgy lett megválasztva, hogy $B(K_1, \delta_1) \subseteq K$, így a kettőből együtt $B(K_1, \delta_1) \subseteq B(L, \delta_1)$ következik, mely a halmazok konvexitása miatt biztosítja, hogy $K_1 \subseteq L$. Hasonlóan, ha $\delta(K,L) < \delta_2$ akkor $L \subseteq B(K,\delta_2) \subseteq$ $\subseteq K_2$. Így tehát azt látjuk, hogy ha $\delta(K,L) < \min\{\delta_1,\delta_2\}$, akkor $K_1 \subseteq L \subseteq K_2$, amiből a térfogat monotonitásának segítségével:

$$V_n(K) - \varepsilon \leq V_n(K_1) \leq V_n(L) \leq V_n(K_2) \leq V_n(K) + \varepsilon.$$

Ezzel a V_n térfogatfüggvény K-beli folytonosságát beláttuk. A felszín folytonosságának bizonyítása szóról szóra ugyanígy történik azzal a különbséggel, hogy a hasonlóságnál a felszín η^{n-1}-gyel, illetve λ^{n-1}-gyel szorzódik, és úgy kell 1-hez kellően közel választani ezeket, hogy a felszín változzon legfeljebb ε-nal. □

2.3. Cauchy-formula a felszínre

A síkban megismert 1.3.1 állítás mintájára keresünk formulát konvex testek felszínére. A síkbeli esettel analóg módon most is levetítjük a testünket a hipersíkokra, majd a vetületek eggyel kisebb dimenziós térfogatait átlagoljuk. Mielőtt azonban tételünket kimondjuk, bevezetünk néhány jelölést. Az $\mathbb{R}^n$ tér tömör, nyílt egységgömbjét jelölje $\mathbf{B}^n = B(\mathbf{0},1)$, míg a ennek határát $\mathbf{S}^{n-1}$. Jelölje a zárt gömb térfogatát $\omega_n = V_n(\overline{\mathbf{B}^n})$, míg a felszínét $\kappa_n = S(\overline{\mathbf{B}^n})$. Egy $V \leq \mathbb{R}^n$ lineáris altér ortogonális kiegészítőterét jelölje $V^\perp$, míg az egyszerűség kedvéért egy $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén legyen $v^\perp = \langle v \rangle^\perp$, azaz a v normálvektorú lineáris hipersík. Végül pedig jelölje p_H a $H \leq \mathbb{R}^n$ lineáris hipersíkra való merőleges vetítést.

2.3.1. Tétel. *Bármely $K \in \mathcal{K}^+$ konvex testre*

$$S(K) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} V_{n-1}\big(p_{v^\perp}(K)\big)\, dv.$$

Bizonyítás. Legyen $P \in \mathcal{P}^+$ politóp, melynek hiperlapjai $\{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$, az ezekhez tartozó külső normálvektorok $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$. Egy H hipersíkra vetítésnél a kép ismét politóp lesz, melynek majdnem minden pontja kétszeresen van fedve a hiperlapok vetületei által. Egy olyan képpont, melyre ez nem teljesül a vetület határára esik, vagy több hiperlap metszetének vetülete. Azonban mindkét esetben a kivételes pontok halmaza nullmértékű, így igaz a következő egyenlőség:

$$V_{n-1}\big(p_H(P)\big) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} V_{n-1}\big(p_H(L_i)\big).$$

Ezek után az integrált felírva

$$\int_{\mathbf{S}^{n-1}} V_{n-1}\big(p_{v^\perp}(P)\big)\ dv = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} V_{n-1}\big(p_{v^\perp}(L_i)\big)\ dv =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} \cos\big(\alpha(L_i, v^\perp)\big) V_{n-1}(L_i)\ dv =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} V_{n-1}(L_i)\int_{\mathbf{S}^{n-1}} \big|\cos\big(\alpha(u_i, v)\big)\big|\ dv.$$

A fenti kifejezésekben $\alpha(L_i, v^\perp)$ az $\langle L_i\rangle$ és $v^\perp$ hipersíkok szögét jelöli (melyet mindig $\pi/2$-nél kisebbnek definiálunk). Hasonlóan $\alpha(u_i, v)$ az u_i és v vektorok szögét jelöli. Mivel a két vektor épp a hipersíkok normálvektora, ezért a szögek koszinuszainak abszolút értéke megegyezik. Mivel minden vektorunk egység hosszúságú, így $|\cos(\alpha(u_i, v))| = |u_i \cdot v|$, ahol a jobb oldal a vektorok skaláris szorzatának abszolút értékét jelöli.

Vegyük észre, hogy az $\int_{\mathbf{S}^{n-1}} |u_i \cdot v|\ dv$ kifejezés nem függ u_i-től. Tekintsük ugyanis az $f_u : \mathbf{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, $f_u(v) = |u \cdot v|$ függvényeket. Jelöljünk ki egy tetszőleges $w \in \mathbf{S}^{n-1}$ vektort, és legyen $\phi_i \in O(n)$ olyan ortogonális transzformáció, melyre $\phi_i(u_i) = w$. Ekkor $f_{u_i} = f_w \circ \phi_i$, és mivel az $\mathbf{S}^{n-1}$-en a felszíni mérték $O(n)$-invariáns, ezért ezek integrálja az egész téren egyenlő.

Mivel az integrál megegyezik az összes u_i-re, így kiemelhető:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} V_{n-1}(L_i)\int_{\mathbf{S}^{n-1}} |u_i \cdot v|\ dv = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbf{S}^{n-1}} |w \cdot v|\ dv\right)\left(\sum_{i=1}^{k} V_{n-1}(L_i)\right) = c_n \cdot S(P).$$

Itt $c_n = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} |w \cdot v|\ dv$ egy csak a dimenziótól függő konstans. Az előbbi egyenlőséget megmutatjuk tetszőleges K konvex testre is. Legyenek $P \subseteq K \subseteq Q$ be- és köréírt politópok, ekkor a térfogat monotonitását az integrálon belül felhasználva:

$$c_n S(P) = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} V_{n-1}\big(p_{v^\perp}(P)\big)\ dv \le \int_{\mathbf{S}^{n-1}} V_{n-1}\big(p_{v^\perp}(K)\big)\ dv \le$$
$$\le \int_{\mathbf{S}^{n-1}} V_{n-1}\big(p_{v^\perp}(Q)\big)\ dv = c_n S(Q).$$

Ebből határátmenettel:

$$c_n S(K) \le \int_{\mathbf{S}^{n-1}} V_{n-1}\big(p_{v^\perp}(K)\big)\ dv \le c_n S(K).$$

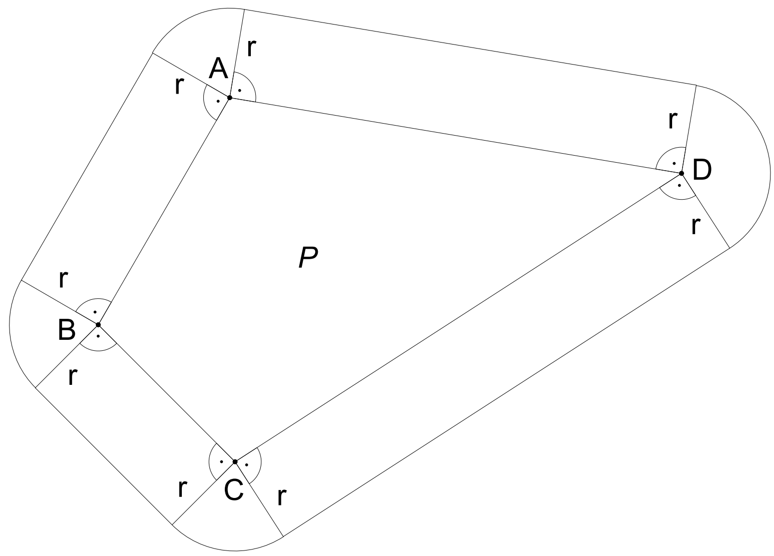
Végül a c_n konstans meghatározásához legyen $K = \overline{\mathbf{B}^n}$, ekkor a felszín κ_n, míg minden vetület egy $n-1$-dimenziós zárt, tömör gömb, melynek $n-1$-dimenziós térfogata ω_{n-1}. Az integrálban tehát konstans függvényt integrálunk, méghozzá egy κ_n mértékű halmazon, így az egyenlet a $c_n\kappa_n = \kappa_n\omega_{n-1}$ alakot ölti, melyből $c_n = \omega_{n-1}$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

2.3.2. Következmény. *Tetszőleges* $w \in \mathbf{S}^{n-1}$ *vektorra* $\int_{\mathbf{S}^{n-1}} |w \cdot v|\, dv = 2\omega_{n-1}$. □

2.4. A Steiner–Minkowski-tétel

Írjuk fel egy síkbeli P sokszög r sugarú zárt paralleltartományának területét! A paralleltartomány felbomlik a következő részekre: az eredeti sokszög, minden oldalra kifelé állított r szélességű téglalap, és a csúcsoknál egy-egy r sugarú körcikk. A

2. ábra. Sokszög normálfelbontása



körcikkeket összetolva persze épp egy teljes körlapot kapunk, így a terület $V_2(P) + k(P)r + \pi r^2$, ahol $k(P)$ a sokszög kerületét jelöli. A kapott terület r-nek másodfokú polinomja, és az együtthatók között szerepel P területe, és kerülete is. Ugyanezt a jelenséget szeretnénk megvizsgálni magasabb dimenzióban is.

Legyen K konvex test, és $a \in \partial K$ esetén $N_K(a) = \{x \in \big(\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{int}(K)\big) | d(x,K) = d(x,a)\}$ azon pontok halmaza, melyekhez K-ból az a pont van a legközelebb. K konvexitásából következik, hogy ha $a \neq b$, akkor $N_K(a) \cap N_K(b) = \emptyset$. Ha $x \in N_K(a)$, akkor az $x - a$ vektorra merőleges, a-n áthaladó hipersík támaszhipersíkja a K halmaznak az a pontban, és megfordítva, a-ból bármely ottani támaszhipersíkra merőlegesen kifelé mutató félegyenes $N_K(A)$-ban van. Minden K-n kívüli ponthoz van K-ban legközelebbi, ezért $K \cup \bigcup_{a \in \partial K} N_K(a) = \mathbb{R}^n$, vagyis a tér felbomlik az $N_K(a)$ halmazok uniójára. Legyen $\vec{N}_K(a) = \{x - a | x \in N_K(a)\}$ az $N_K(a)$-beli vektorok halmaza. Mivel egy konvex testnek minden irányból van támaszhipersíkja, ezért $\bigcup_{a \in \partial K} \vec{N}_K(a) = \mathbb{R}^n$, vagyis minden *irány* megtalálható valamelyik $\vec{N}_K(a)$-ban. Amennyiben L valódi lapja K-nak, és $a, b \in \mathrm{relint}(L)$, akkor a hozzájuk tartozó támaszhipersíkok megegyeznek, ezért $\vec{N}_K(a) = \vec{N}_K(b)$, és $N_K(b) = t_{b-a}\big(N_K(a)\big)$, ahol t_v a $v \in \mathbb{R}^n$ vektorral való eltolás.

Poliéderekre ez a felbontás még átláthatóbb. Jelölje a $P \in \mathcal{P}^+$ laphálóját $\mathcal{L}(P)$, és $L \in \mathcal{L}(P)$ esetén legyen $\vec{N}_P(L) = \vec{N}_P(a)$ tetszőleges $a \in \mathrm{relint}(L)$ választással. $\langle L \rangle$ és $\langle \vec{N}_P(L) \rangle$ merőleges kiegészítők, amiből következik, hogy $\dim(\vec{N}_P(L)) = n - \dim(L)$, és $L_1 \subseteq L_2$ lapokra $\vec{N}_P(L_1) \supseteq \vec{N}_P(L_2)$, vagyis az $\{\vec{N}_P(L) | L \in \mathcal{L}(P)\}$ halmaz a tartalmazásra nézve $\mathcal{L}(P)$-vel duálisan izomorf hálót alkot. Ennek következményeként $\bigcup_{a \in P \text{ csúcs}} \vec{N}_P(a) = \mathbb{R}^n$.

P valódi lapjaira definiáljuk a hozzájuk tartozó normáltartományt:

$$N_P(L) = \overline{\bigcup_{a \in \mathrm{relint}(L)} N_P(a)} = \{x \in (\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{int}(K)) | d(x,P) = d(x,L)\}.$$

$L = P$ esetén legyen $N_P(P) = P$, így a kapott normáltartományok együtt fedik az egész teret, és páronként közös belső pont nélküliek. Az $N_P(L)$ normáltartomány egybevágó az $L \times \vec{N}_P(L)$ direkt szorzattal.

Ebből a felbontásból természetes módon kapjuk a $\overline{B}(P,r)$ paralleltartomány felbontását, legyen $D_P(L,r) = N_P(L) \cap \overline{B}(P,r)$, és hasonlóan $\vec{D}_P(L,r) = \vec{N}_P(L) \cap \cap \overline{B}(\mathbf{0},r)$. Továbbra is igaz, hogy $D_P(L,r)$ egybevágó az $L \times \vec{D}_P(L,r)$ direkt szorzattal.

A $\overline{B}(P,r) = \bigcup_{\emptyset \neq L \in \mathcal{L}(P)} D_P(L,r)$ felbontásból a térfogatra a következő egyenlőség adódik:

$$V_n\big(\overline{B}(P,r)\big) = \sum_{\emptyset \neq L \in \mathcal{L}(P)} V_{\dim(L)}(L) \cdot V_{n-\dim(L)}\big(\vec{D}_P(L,r)\big).$$

A térfogat homogenitásából $V_{n-\dim(L)}(\vec{D}_P(L,r)) = V_{n-\dim(L)}(\vec{D}_P(L,1)) \cdot r^{n-\dim(L)}$. Ezeket a kiemeléseket elvégezve, és az azonos fokú tagokat összevonva kapjuk, hogy:

$$V_n\big(\overline{B}(P,r)\big) = \sum_{i=0}^{n} m_i(P) r^i, \text{ ahol } m_i(P) = \sum_{\emptyset \neq L \in \mathcal{L}(P), \dim(L) = n-i} V_{n-i}(L) \cdot V_i\big(\vec{D}_P(L,1)\big).$$

Itt az $m_i(P)$ együtthatók csak P-től függnek. A konstans tag definíciójában megjelenik a $V_0(\vec{D}_P(P,1))$ tényező, ami értelmetlen, lévén V_0-t nem definiáltuk. Mindenesetre ennek értékét 1-nek véve (amiről később látni fogjuk, hogy nem alaptalan) $m_0(P) = V_n(P)$, és valóban ez az összegben az egyetlen tag, ami nulladfokú. Ugyanez a probléma fennáll az m_n együtthatónál is, ami pedig $\bigcup_{a \in P \text{ csúcs}} \vec{D}_P(a,1) = \overline{B}(\mathbf{0},1)$ következtében ω_n-nel egyenlő.

Könnyen átírható még az m_1 együttható is, hiszen egy L hiperlapra

$$V_{n-1}(L) \cdot V_1\big(\vec{D}_P(L,1)\big) = V_{n-1}(L).$$

Ezek összege éppen a politóp $S(P)$ felszíne. Ezzel teljességében általánosítottuk a síkbeli esetet. A következő tételben bebizonyítjuk egy ugyanilyen polinom létezését tetszőleges konvex test esetén.

2.4.1. Tétel (Steiner, Minkowski). *Tetszőleges $K \in \mathcal{K}^+$ konvex testhez léteznek $m_i(K) \geq 0$ együtthatók ($i = 0, \dots, n$), hogy a test r sugarú paralleltartományára*

$$V_n\big(\overline{B}(K,r)\big) = \sum_{i=0}^{n} m_i(K) r^i$$

ahol az m_i-k K-ban folytonosak, és speciálisan $m_0(K) = V_n(K)$, $m_1(K) = S(K)$ és $m_n(K) = \omega_n$.

Bizonyítás. Mivel a polinom létezését politópokra már igazoltuk, ezért vegyünk egy P_k politópsorozatot, mely a Hausdorff-metrikában K-hoz tart. Ekkor található kellően nagy R sugár, melyre az összes P_k politóp egy R sugarú gömbben található. Ebből $\sum_{i=0}^{n} m_i(P_k) r^i \leq \omega_n (R+r)^k$, így $m_i(P_k)$-ra k-tól független korlátot adhatunk: $m_i(P_k) \leq (R+r)^d / r^i$ tetszőleges r pozitív számra. Mivel az $m_i(P_k)$ számsorozat korlátos, megfelelő konvergens részsorozatra szorítkozva feltehető, hogy $m_i(P_k)$ konvergens. Ezt a véges sok i indexre elvégezve tehát olyan P_k részsorozatra tértünk át, melyre $m_i(P_k)$ konvergens minden i-re. Legyen tehát $m_i(K) = \lim_{k\to\infty} m_i(P_k)$.

A $\overline{B}(K,r)$ halmaz térfogatát szeretnénk felírni, méghozzá a $\overline{B}(P,r)$ halmazok térfogatainak segítségével. A térfogat folytonosságát már beláttuk, tehát ha bebizonyítanánk, hogy $\lim_{k\to\infty} \overline{B}(P_k, r) = \overline{B}(K,r)$, akkor a térfogatot felírhatnánk limeszként. Vegyük észre, hogy éppen a $\overline{B}(\;.\;, r)$ operátor folytonosságát szeretnénk használni. Valójában $\overline{B}(\;.\;, r)$ távolságtartó is, amiből következik, hogy folytonos. A távolságtartás abból látszik, hogy $K_1 \subseteq \overline{B}(K_2, \varepsilon)$ akkor és csak akkor, ha $\overline{B}(K_1, r) \subseteq \subseteq \overline{B}\big(\overline{B}(K_2,\varepsilon), r\big) = \overline{B}\big(\overline{B}(K_2, r), \varepsilon\big)$. Így

$$V_n(\overline{B}(K,r)) = V_n(\overline{B}(\lim_{k\to\infty} P_k, r)) = V_n(\lim_{k\to\infty} \overline{B}(P_k, r)) = \lim_{k\to\infty} V_n(\overline{B}(P_k, r)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{n} m_i(P_k) r^i = \sum_{i=0}^{n} \lim_{k\to\infty} m_i(P_k) r^i = \sum_{i=0}^{n} m_i(K) r^i.$$

Beláttuk tehát, hogy a paralleltartomány térfogata polinomfüggvénye az r-nek. Márpedig egy polinomfüggvény meghatározza az együtthatóit, így látjuk, hogy az $m_i(K)$ számok valóban csak i-től és K-tól függnek, a politópok részsorozatának választásától nem. A K-tól való folytonos függést is hasonlóan indokolhatjuk, hiszen a V_n folytonosságából következik, hogy ha $K_i \to K$, akkor $\forall r > 0$-ra a K_i-hez tartozó paralleltartományok térfogata tart $\overline{B}(K,r)$-hez, azaz a megfelelő polinomfüggvények pontonként konvergálnak egy polinomfüggvényhez, ebből pedig az egyes együtthatók konvergenciája már következik. Végül pedig a folytonosság következményeként kapjuk az m_0, m_1 és m_n együtthatókra vonatkozó állításokat, hiszen azokat politópokra már meggondoltuk. $\square$

A tételünkben megjelenő $m_i(K)$ együtthatóknak a későbbiekben komoly figyelmet szentelünk. Addig is jegyezzük meg, hogy konvex testek térfogata és felszíne is rendelkezik a Buffon tűproblémánál kiemelt tulajdonsággal, vagyis hogy ha A és B konvex testekre $A \cup B$ is konvex, akkor $V_n(A \cup B) = V_n(A) + V_n(B) - V_n(A \cap B)$. Zárásként kimondjuk a Steiner–Minkowski-tétel egy szemléletes következményét.

2.4.2. Tétel. *Tetszőleges $K \in \mathcal{K}^+$ konvex testre*

$$S(K) = \lim_{r \to 0} \frac{V_n\big(\overline{B}(K,r)\big) - V_n(K)}{r}$$

Bizonyítás. A paralleltartomány térfogatát leíró polinom konstans tagja kiesik, az osztás után $m_1(K) = S(K)$ lesz az új konstans, ami persze épp a 0-ban felvett határérték. $\square$

3. Kiértékelések

A következő fejezetben bevezetjük a *kiértékelés*ek fogalmát, melyet a korábban kiemelt példákból absztrahálunk.

Legyen S halmaz, $\emptyset \in L$ pedig S részhalmazainak egy halmaza, vagyis $L \subseteq P(S)$. Feltesszük továbbá, hogy L zárt a véges metszet- és unióképzésre, vagyis az L-beli halmazok disztributív hálót alkotnak a tartalmazásra, mint részbenrendezésre nézve. Egy $\mu : L \to \mathbb{R}$ függvény kiértékelés, ha minden $A, B \in L$ esetén

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B), \text{ és} \tag{3.0.1}$$

$$\mu(\emptyset) = 0. \tag{3.0.2}$$

Az egyik első probléma, amivel szembesülünk az, hogy a konvex halmazok – melyeknek körében a kiértékeléseket vizsgálni szeretnénk – nem zártak az unióképzésre. Ezt még könnyen meg tudjuk kerülni, ha konvex halmazok véges unióiról beszélünk. Ekkor azonban az előző fejezetben bevezetett térfogatot és felszínt már nem tudjuk minden további indoklás nélkül értelmezni.

3.1. Kiértékelések kiterjesztése

Vizsgáljuk meg általánosan a kérdést. Legyen $G \subseteq L$ olyan metszetzárt halmazrendszer, mely *generálja* az L hálót abban az értelemben, hogy minden $A \in L$ halmaz előáll $A = B_1 \cup \ldots \cup B_k$ alakban, ahol $B_i \in G$. Világos, hogy ha μ kiértékelés az egész L-en, akkor a 3.0.1 ismételt alkalmazásával kapjuk, a 3.1.1 formulát.

$$\mu(B_1 \cup \ldots \cup B_k) = \sum_{1 \le i \le k} \mu(B_i) - \sum_{1 \le i < j \le k} \mu(B_i \cap B_j) + \ldots \tag{3.1.1}$$

Ez a szita-formula megfelelője a μ kiértékelésre. Tehát ha μ kiértékelés, akkor elég csak egy olyan $G \subseteq L$ halmazon ismerni az értékeit, mely generálja L-et.

Minket pont az ellenkező irány érdekel, amikor a leendő kiértékelésünk adott G-n, és szeretnénk látni, hogy van-e az egész L-en olyan kiértékelés, mely kiterjesztése a már adott értékeknek. Persze a 3.1.1 segítségével ki tudjuk terjeszteni, azonban semmi sem garantálja a jóldefiniáltságot.

Egy $\mu' : G \to \mathbb{R}$ halmazfüggvényt akkor hívunk *kiértékelés*nek, ha teljesíti a 3.0.1 egyenletet minden olyan esetben, amikor A, B, és $A \cup B$ is G-beli halmazok. Mivel általában nem tudjuk, hogy $A \cup B \in G$, ezért nem tudjuk iterálni a 3.0.1 egyenletet, így G-n nem feltétlen teljesül a 3.1.1 formula.

Formálisan bevezetjük a μ szerinti integrálást S-en, mert ennek létezése szorosan összefügg a kiértékelés kiterjeszthetőségével. Jelölje I_A az $A \in L$ halmaz karakterisztikus függvényét, vagyis $I_A : S \to \{0,1\}$, mely pontosan A elemein vesz fel 1-et. Egy $f : S \to \mathbb{R}$ függvényt *egyszerű*nek hívunk, ha előáll L-beli halmazok karakterisztikus függvényeinek véges lineáris kombinációjaként, $f = \sum_{i=1}^{k} c_i I_{A_i}$, ahol minden $A_i \in L$.

Egy függvény egyszerűsége persze függhet attól, hogy mely L hálót vizsgáljuk, szükség esetén ezt hangsúlyozni fogjuk. Az egyszerű függvények vektorteret alkotnak, hiszen a felbontásban szereplő halmazrendszerek összefinomíthatóak L metszetzártsága miatt.

Ha G generálja az L-et, akkor egy f egyszerű függvény felbontásában feltehető, hogy minden A_i halmaz G-beli. Valóban, minden L-beli halmaz előáll G-beliek uniójaként, és néhány halmaz uniójának karakterisztikus függvénye kifejezhető a következőképpen:

$$I_{B_1\cup\ldots\cup B_k} = \sum_{1\leq i\leq k} I_{B_i} - \sum_{1\leq i<j\leq k} I_{B_i\cap B_j} + \cdots + (-1)^{k-1} I_{B_1\cap\ldots\cap B_k}.$$

Legyen μ' kiértékelés G-n, ekkor tudjuk definiálni az előbbi f egyszerű függvény μ' szerint vett integrálját:

$$\int f\ d\mu' = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu'(A_i).$$

Mivel az f felbontása nem egyértelmű, ezért persze az előbbi integrálról sem látjuk, hogy jóldefiniált volna.

3.1.1. Tétel. *Legyen G generáló halmaza az L hálónak, és μ' kiértékelés G-n. A következő állítások ekvivalensek:*

(a) A μ' kiértékelés kiterjed az egész L háló egy kiértékeléséve.

(b) A μ'-re teljesül a szita-formula

$$\mu'(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_{1\leq i\leq k} \mu' A_i - \sum_{1\leq i<j\leq k} \mu'(A_i \cap A_j) + \ldots$$

minden esetben, amikor $A_1 \cup \ldots \cup A_k \in G$.

(c) A μ' kiértékelés által definiált integrál az egyszerű függvényeken jóldefiniált.

Bizonyítás. Ha μ' kiterjeszthető, akkor a kiterjesztettre a 3.0.1 egyenlet ismétlésével kapjuk a szita formulánkat, mely többek között G-beli halmazokkal is teljesül, ezzel az (a) $\Rightarrow$ (b) irányt beláttuk.

A (b) $\Rightarrow$ (c) irány igazolásához indirekten tegyük fel, hogy egy egyszerű függvény két különböző felírásából különböző integrálok adódnak. A felírások különbsége ekkor olyan felírása az azonosan nulla függvénynek, melynek integrálja nem nulla:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i I_{A_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} c_i \mu'(A_i) \neq 0.$$

Vegyük az A_i halmazok összes lehetséges metszetét: $L_1 = A_1, \dots, L_k = A_k,\ L_{k+1} = A_1 \cap A_2,\ L_{k+2} = A_1 \cap A_3,\ \dots,\ L_p = A_1 \cap \dots \cap A_k$. A kapott $\{L_i\}$ rendszer továbbra is G-beli halmazokból áll, és metszetzárt. Vegyünk olyan α_i együtthatókat, melyekre:

$$\sum_{i=q}^{p} \alpha_i I_{L_i} = 0, \quad \sum_{i=q}^{p} \alpha_i \mu'(L_i) \neq 0.$$

Az indirekt feltevésünk pont az volt, hogy ilyen lineáris kombináció van, most az összes ilyen közül vettük azt, melyre q a lehető legnagyobb. A maximalitásból következik, hogy $\alpha_q \neq 0$, különben nézhetnénk a szummát $(q+1)$-től.

Állítjuk, hogy $L_q \subseteq L_{q+1} \cup \dots \cup L_p$. Ellenkező esetben egy $x \in L_q \setminus \left(\bigcup_{i=q+1}^{p} L_i\right)$ elemben kiértékelve a függvényt $\alpha_q = \sum_{i=q}^{p} \alpha_i I_{L_i}(x) = 0$ adódna, amit láttunk, hogy lehetetlen.

Ekkor viszont az $L_q = \left(\bigcup_{i=q+1}^{p} (L_q \cap L_i)\right)$ egyenlőség mutatja, hogy L_q felírható magasabb indexű L_j halmazok uniójaként, és így karakterisztikus függvénye is kifejezhető a magasabb indexű halmazok karakterisztikus függvényeivel, a karakterisztikus függvényekre felírt szita-formula segítségével. Az $\alpha_q I_{L_q}$ tag helyére ezt beírva, majd az azonos karakterisztikus függvények együtthatóit összevonva kapjuk a β_i együtthatókat, melyekkel $\sum_{i=q+1}^{p} \beta_i I_{L_i} = 0$. A (b) állítás viszont éppen azt garantálja, hogy a $\mu'(L_q)$ érték is felírható a szita-formulával, és így ugyanazokkal az összevonásokkal ugyanazokat a β_i együtthatókat kapva $\sum_{i=q+1}^{p} \beta_i \mu'(L_i) \neq 0$, ami ellentmond q maximalitásának. Ezzel a (b) $\Rightarrow$ (c) implikációt beláttuk.

Végül a (c) $\Rightarrow$ (a) irányhoz definiáljuk a μ kiértékelést az egész L-en a $\mu(A) = \int I_A d\mu'$ formula segítségével. Ekkor $I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_{A \cap B}$ alapján, az integrál linearitását használva azonnal adódik, hogy μ kiértékelés L-en. A bizonyítást befejeztük. □

A bizonyítás utolsó szakaszából látszik, hogy ha T az egyszerű függvények terén értelmezett lineáris függvény, akkor a $\mu(A) = T(I_A)$ halmazfüggvény kiértékelés, melyre $\int f\, d\mu = T(f)$ minden f egyszerű függvényre, tehát bijektív kapcsolat van a kiértékelések, és az egyszerű függvényeken értelmezett lineáris függvények között.

Mivel $I_{A \setminus B} = I_A - I_{A \cap B}$, ami továbbra is egyszerű függvény, így egy L-en értelmezett kiértékelés kiterjeszthető a $B(L)$ halmazrendszerre, ahol $B(L)$ a legkisebb olyan L-et tartalmazó halmazrendszer, mely nem csak a véges metszetre és unióra zárt, hanem halmazok különbségének képzésére is.

3.2. Kiterjesztés konvex halmazokról

Mint azt már említettük, konvex halmazok véges unióin szeretnénk kiértékeléseket vizsgálni. A 2. fejezet jelöléseivel összhangban jelölje $\mathcal{K}_n$ az n-dimenziós euklideszi tér kompakt, konvex halmazainak halmazát. $\mathcal{K}_n$-beli halmazok véges unióját *polikonvex*nek hívjuk, és ezek halmazát Polycon(n)-nel jelöljük. Mivel $\mathcal{K}_n$ metszetzárt, ezért

Polycon(n) háló, melyet persze $\mathcal{K}_n$ generál. A 3.1.1 tétel segítségével terjesszük ki a konvex halmazokon lévő kiértékeléseinket – mint például a térfogatot, vagy ahogy később látni fogjuk, a felszínt – Polycon(n)-re!

Egy kiértékelés *konvex-folytonos*, ha minden $K_i \to K$ esetben, ahol a K_i halmazok *konvexek* teljesül, hogy $\mu(K_i) \to \mu(K)$. Ennek nem kell teljesülnie, ha a K_i halmazokat Polycon(n)-ből vesszük. A konvergenciát konvex halmazok esetén a Hausdorff-metrikára nézve értjük.

3.2.1. Tétel. *Bármely $\mathcal{K}_n$-en adott konvex-folytonos μ kiértékelés egyértelműen kiterjeszthető* Polycon(n) *egy kiértékelésévé.*

Bizonyítás. Elég bebizonyítanunk, hogy tudunk μ szerint integrált definiálni. A dimenzióra vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Az állítás $n = 0$ dimenzióban semmitmondó. Indirekten tegyük fel, hogy n dimenzióban léteznek $K_1, \ldots K_k$ konvex halmazok, melyekre

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{K_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(K_i) = 1.$$

Tegyük fel továbbá, hogy k minimális, vagyis kevesebb halmaz esetén ha a karakterisztikus függvények összege nulla, akkor az integrál is. Vegyünk egy olyan H affin hipersíkot, melyhez tartozó H^+ és H^- zárt félterek közül az egyik diszjunkt K_1-től, legyen $K_1 \subseteq \operatorname{int}(H^+)$. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{K_i \cap H^+} = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{K_i} \right) I_{H^+} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{K_i \cap H^-} = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{K_i} \right) I_{H^-} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{K_i \cap H} = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{K_i} \right) I_{H} = 0.$$

Mivel μ kiértékelés, így az integrálhoz tartozó összeget szét tudjuk szedni:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(K_i \cap H^+) \right) + \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(K_i \cap H^-) \right) - \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(K_i \cap H) \right) = 1.$$

A három tag közül kettő eltűnik. Amikor H-val metszünk, akkor az indukciós feltétel szerint kell az összegnek nullának lennie, míg ha H^--szal, akkor $K_1 \cap H^- = \emptyset$ miatt k-nál kevesebb halmazunk van, így az integrál 0. Vagyis azt kaptuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{K_i \cap H^+} = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(K_i \cap H^+) = 1.$$

Ezt az eljárást végezzük el a $H_1, H_2, \ldots$ hipersíkokkal, melyekre $K_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i^+$. Ilyen hipersíkok vannak, hiszen minden racionális koordinátájú csúcsokkal rendelkező, K_1-től diszjunkt szimplexet el tudunk választani hipersíkkal K_1-től, és bármely külső pont beírható ilyen szimplexbe. Az előbbi gondolatmenetet követve kapjuk, hogy $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(K_i \cap H_1^+ \cap \ldots \cap H_q^+) = 1$ tetszőleges q-ra, és μ folytonosságából $q \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i I_{K_i \cap K_1} = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(K_i \cap K_1) = 1.$$

Ezt sorban elismételjük a $K_2, K_3, \ldots, K_k$ halmazokkal is. Legyen $K = K_1 \cap \ldots \cap$ $\cap K_k$, ekkor

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) I_K = 0, \quad \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) \mu(K) = 1.$$

Az első feltétel szerint vagy $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$, vagy $K = \emptyset$. A második feltétel szerint viszont $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \neq 0$, így marad a $K = \emptyset$ eset. Viszont a második feltételből $\mu(\emptyset) =$ $= \mu(K) \neq 0$ is következik, ami ellentmondás. Ezzel a tételünket bebizonyítottuk. □

3.3. Kiértékelések parallelotópokon

Legyünk egyelőre szerényebbek, és szorítkozzunk csupán a tengelypárhuzamos parallelotópokra, illetve ezek véges unióira. A tételünk bizonyítása persze működik, hiszen ezek is konvex halmazok, azonban ebben az esetben nem kell felhasználnunk a μ kiértékelés folytonosságát. Az imént a H hipersíkunkat úgy vettük fel, hogy $K_1 \subseteq \mathrm{int}(H^+)$. Ennek azért volt jelentősége, mert így $K_1 \subseteq \mathrm{int}(H^-) = \emptyset$ alapján az ellenpéldánk minimalitására hivatkozva mondhattuk, hogy a $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(K_i \cap H^-)$ összeg eltűnik.

Parallelotópok esetén egy kicsit máshogy járunk el: az ellenpéldában nem a parallelotópok számát, hanem az n-dimenziós parallelotópok számát választjuk minimálisnak. Egy parallelotópot akkor hívunk n-dimenziósnak, ha nem tartalmazza hipersík. Az általános esetben H^+ belsejébe kellett esnie K_1-nek, azonban most a H-t vehetjük az egyik n-dimenziós parallelotóp (P_1) hiperlapjára illeszkedőnek. Ekkor a $P_1 \cap \mathrm{int}(H^-)$ halmaz ugyan nem üres, de H-ba esik, így az n-dimenziós parallelotópok száma csökken, tehát megint hivatkozhatunk a $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(P_i \cap H^-)$ összeg eltűnésére. Mindezzel azt nyerjük, hogy a P_1 zárt félterek metszeteként való előállításánál csak véges sok féltérre van szükségünk, így nem kell kihasználnunk a μ folytonosságát.

Előbb persze be kell bizonyítani, hogy egy ellenpéldában mindig van n-dimenziós parallelotóp. Legyen m az n-dimenziós parallelotópok száma az ellenpéldánkban, erre az m-re nézve választottuk minimálisnak az ellenpéldát. Tegyük fel, hogy $m =$ $= 0$. Ekkor minden P_i-hez találunk őt tartalmazó hipersíkot. Legyenek $H_1, \ldots, H_l$ olyanok, hogy az uniójuk fedi az összes P_i-t. Ha $l = 1$, akkor az egész ellenpélda egy hipersíkban van, ami ellentmond a dimenzióra vonatkozó indukciós feltevésnek. Általában tetszőleges H_j esetén igaz, hogy $\sum_{i=1}^k \alpha_i I_{P_i \cap H_j} = 0$, ezért az indukciós feltevés miatt $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(P_i \cap H_j) = 0$. Ugyanez igaz akkor is, ha nem egy hipersíkra, hanem két hipersík metszetére szorítkozunk. Így az integrált fel tudjuk bontani a szita formulával:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(P_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu\big(P_i \cap (H_1 \cup \ldots \cup H_l)\big) =$$
$$= \sum_{i=1}^k \alpha_i \left(\sum_{1 \le j \le m} \mu(P_i \cap H_j) - \sum_{1 \le j < h \le k} \mu\big(P_i \cap (H_j \cap H_h)\big) + \ldots \right).$$

A zárójelet felbontva, majd minden tagban a szummákat felcserélve csupa 0 tagot kapunk, így az egész kifejezés is nulla, holott azt tettük fel, hogy nem az. Ezzel beláttuk, hogy minden ellenpéldában van n-dimenziós P_i.

A kitérő előtt ott tartottunk, hogy az n-dimenziós P_1-et előállítottuk véges sok féltér metszeteként, és ezekkel a félterekkel metszve az összes P_i-t továbbra is ellenpéldát kellett kapnunk. Itt megint dolgozni kell egy kicsit, hiszen nem tudunk áttérni az összes P_i metszetére, mivel csak az n-dimenziósakat tudjuk metszetként előállítani a korábbi módszerrel. Legyen $P = P_1 \cap \ldots \cap P_m$, ezeket tudjuk félterek metszeteként előállítani, és a 3.2.1 tétel bizonyításának mintájára kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \right) I_P + \sum_{i=m+1}^k \alpha_i I_{P_i \cap P} = 0, \qquad \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \right) \mu(P) + \sum_{i=m+1}^k \alpha_i \mu(P_i \cap P) = 1.$$

Az első összeg mindkét tagja külön-külön is 0 kell hogy legyen. Mivel minden ellenpéldában van n-dimenziós parallelotóp, így P biztosan n-dimenziós, így egy $x \in P \setminus \big(P_{m+1} \cup \ldots \cup P_k\big)$ pontban kiértékelve kapjuk, hogy $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 0$. Ilyen x pont van, hiszen az n-dimenziós P-t nem tudjuk véges sok kisebb dimenziós P_i-vel lefedni. Így $\sum_{i=m+1}^k \alpha_i I_{P_i \cap P} = 0$, és mivel itt nincs n-dimenziós parallelotóp, ezért nem lehet ellenpélda, vagyis $\sum_{i=m+1}^k \alpha_i \mu(P_i \cap P) = 0$. Így P-re megkapjuk ugyanazt az ellentmondást, amit a 3.2.1 bizonyításának végén K-ra kaptunk. Mindezzel azt bizonyítottuk be, hogy:

3.3.1. Tétel. *Bármely parallelotópokon értelmezett μ kiértékelés egyértelműen kiterjed parallelotópok véges unióira.* $\square$

Vezessük be a ezeknek a véges unióknak a halmazára a $\mathrm{Par}(n)$ jelölést. Szeretnénk megérteni $\mathrm{Par}(n)$ kiértékeléseit. Itt egy kiértékelést akkor hívunk folytonosnak, ha $P_i \to P$ parallelotópok esetén $\mu(P_i) = \mu(P)$.

Egy L hálón adott kiértékelést egy G csoport L-en vett hatására nézve *invariáns*nak mondunk, ha minden $g \in G$, $A \in L$ esetén $\mu(gA) = \mu(A)$. Milyen csoport hat $\mathrm{Par}(n)$-en, melyre természetesnek tekintenénk, hogy a kiértékeléseinknek –

amiket a térfogat és a felszín motivált – invariánsnak kell lennie? Az euklideszi tér eltolásai persze hatnak $\mathrm{Par}(n)$-en, és a tér koordinátáinak permutációi is tengelypárhuzamos parallelotópot ugyanilyenbe visznek. Egy $\mathrm{Par}(n)$-en értelmezett kiértékelés invarianciáját – amennyiben nem pontosítjuk a csoport pontos megnevezésével – ezekre a transzformációkra értjük.

Legyen $n = 1$, ekkor minden $A \in \mathrm{Par}(1)$ halmaz zárt intervallumok véges uniója. Tekintsük a következő két kiértékelést:

$$\mu_0^1(A) = A \text{ összefüggő komponenseinek száma,}$$

$$\mu_1^1(A) = A \text{ komponenseinek összhossza.}$$

Mindkettő folytonos és invariáns kiértékelés. Megmutatjuk, hogy lényegében csak ez a két folytonos és invariáns kiértékelés van $\mathrm{Par}(1)$-en, azaz minden ilyen μ kiértékelés ennek a kettőnek lineáris kombinációja. Legyen egy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ pontra $\mu(\{x\}) = c$, ez persze az eltolásinvariancia miatt nem függ x-től. Tekintsük a $\mu' = \mu - c\mu_0^1$ kiértékelést, ez továbbra is folytonos és invariáns, és a pontokon eltűnik. Vezessük be az $f(x) = \mu'([0, x])$ függvényt, mely folytonos. Mivel μ' invariáns, ezért bármely x hosszú A intervallumra $\mu'(A) = f(x)$. Legyenek A és B olyan intervallumok, melyeknek metszete egyetlen pont, legyenek rendre x és y hosszúak.

$$f(x + y) = \mu'(A \cup B) = \mu'(A) + \mu'(B) - \mu'(A \cap B) = f(x) + f(y)$$

Mivel f folytonos, ezért lineáris, vagyis valamilyen $r \in \mathbb{R}$-re $f(x) = rx$. Ez viszont pont azt jelenti, hogy az A intervallumra $\mu'(A) = r\mu_1^1(A)$, vagyis az intervallumokon $\mu = c\mu_0^1 + r\mu_1^1$, és a kiterjesztés szerint ekkor $\mathrm{Par}(n)$-en is. Ezzel 1 dimenzióban karakterizáltuk a folytonos, invariáns kiértékeléseket. Ez a bizonyítás erősen emlékeztet a Buffon-féle tűproblémánál látott gondolatmenetre, melyet – többek között – pont ennek a kapcsolatnak az érdekében ismertettünk.

Magasabb dimenzióban gondolkodva jelölje σ_k a k-adik n-változós elemi szimmetrikus polinomot:

$$\sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} \ldots x_{i_k}, \quad \sigma_0 = 1$$

3.3.2. Állítás. *Minden $n \in \mathbb{N}$-re és $0 \le k \le n$-re egyértelműen létezik olyan folytonos, invariáns μ_k^n kiértékelés $\mathrm{Par}(n)$-en, mely minden P parallelotópon a $\mu_n^k(P) = \sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$ értéket veszi fel, ahol $x_1, \ldots, x_n$ a parallelotóp élhosszai.*

Bizonyítás. A 3.3.1 tétel alapján elég meggondolni, hogy a fenti halmazfüggvények parallelotópok körében valóban kiértékelések. Egy P tengelypárhuzamos parallelotóp a tengelyekre vett $I_1, \ldots, I_n$ merőleges vetületeinek a Descartes-szorzata, azaz $P = I_1 \times \ldots \times I_n$. Oldalhossz alatt persze az I_j intevallumok hosszait értjük. A P^1 és P^2 parallelotópok uniója pontosan akkor lesz szintén parallelotóp, ha az előbbi vetületek közül $(n - 1)$ darab pontosan megegyezik, az n-edik vetületek pedig metszőek. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy az $I_2^1 = I_2^2, \ldots, I_n^1 = I_n^2$ szakaszok egyeznek meg, míg $I_1^1 \cap I_1^2 \neq \emptyset$. Legyenek az $I_2, \ldots, I_n$ intervallumok hosszai rendre $x_2, \ldots, x_n$, míg az I_1^1 és I_1^2 intervallumoké rendre y és z, és az $I_1^1 \cap I_1^2$ átfedés hossza x. Ekkor az unió megfelelő élhossza persze $y + z - x$, így μ_k^n definícióját felírva:

$$\mu_k^n(P_1 \cup P_2) = \sigma_k(y + z - x, x_2, \ldots, x_n) = \sigma_k(y, x_2, \ldots, x_n)+$$
$$+\sigma_k(z, x_2, \ldots, x_n) - \sigma_k(x, x_2, \ldots, x_n) = \mu_k^n(P_1) + \mu_k^n(P_2) - \mu_k^n(P_1 \cap P_2).$$

Itt a második egyenlőség azért igaz, mert az első változót nem tartalmazó tagok a jobb oldali három szimmetrikus polinomban megegyeznek, és az egyik esetben negatív előjellel vesszük őket, így az ilyen tagokból összevonás után 1 darab marad. Az első változót tartalmazó tagok viszont lineárisak ebben a változóban, így ott az első változó értékeit összevonhatjuk, így éppen a bal oldali szimmetrikus polinom első változót tartalmazó tagjait kapjuk. □

Vegyük észre, hogy μ_k^n nem érzékeny arra, hogy a politópra milyen befoglaló térben gondolunk. Legyen ugyanis $k \leq m < n$, és $Q \in \mathrm{Par}(n)$ olyan, hogy $Q \subseteq \subseteq H$, ahol H egy m-dimenziós tengelypárhuzamos affin altér. Ekkor H-n belül tudjuk értelmezni a $\mu_k^m(Q)$ értéket, ami megegyezik a $\mu_k^n(Q)$ értékkel, hiszen ha egy szimmetrikus polinom néhány változójába nullát helyettesítünk, akkor visszakapjuk a kevesebb változós megfelelő szimmetrikus polinomot. Ennek megfelelően jelölésünkben elhagyjuk a dimenzió feltüntetését. Az n-dimenziós P parallelotópra a $\mu_0(P), \ldots, \mu_n(P)$ értékeket a parallelotóp *belső térfogatai*nak nevezzük, utalva arra, hogy nem függnek a befoglaló tér dimenziójától. A térfogat szó indokolt, hiszen $\mu_n(P) = V_n(P)$, és $\mu_{n-1} = \frac{1}{2}S(P)$.

Egy μ kiértékelés *egyszerű*, ha minden olyan $P \in \mathrm{Par}(n)$-re, mely n-nél kevesebb dimenziós $\mu(P) = 0$, és *monoton növő*, ha $P \subseteq Q$ esetén $\mu(P) \leq \mu(Q)$. Hasonlóan definiálhatjuk a *monoton csökkenő* kiértékeléseket, és egy kiértékelés *monoton*, ha növő vagy csökkenő. A μ_n kiértékelés egyszerű és monoton növő, és az alábbi tétel mutatja, hogy ezek a tulajdonságok konstans erejéig karakterizálják is.

3.3.3. Tétel. *Legyen μ eltolásinvariáns egyszerű kiértékelés* $\mathrm{Par}(n)$*-en, mely folytonos vagy monoton. Ekkor μ konstans erejéig megegyezik a térfogattal, azaz létezik $c \in \mathbb{R}$, hogy $\mu(P) = c\mu_n(P)$ $\forall P \in \mathrm{Par}(n)$.*

Bizonyítás. Legyen $c = \mu([0;1]^n)$, és vágjuk fel ezt $(1/k)$ oldalú zárt kockákra. Ezek μ-értékei az eltolásinvarianca miatt megegyeznek, és összegük c, hiszen metszeteik legfeljebb $(n-1)$-dimenziósak, így azokon μ eltűnik. Ezzel megkaptuk, hogy $\mu([0;1/k]^n) = c/k^n = c\mu_n([0;1/k]^n)$. Ebből már következik, hogy bármely racionális oldalhosszakkal rendelkező P parallelotópra $\mu(P) = c\mu_n(p)$, hiszen P megfelelő k-ra összerakható $(1/k)$ oldalú kockákból. Ezek után akár a folytonosságra, akár a monotonitásra hivatkozva kapjuk az állítást tetszőleges oldalú parallelotópokra. Végül a kiterjesztési tételünkből tudjuk, hogy ha a két kiértékelés megegyezik parallelotópokon, akkor az egész $\mathrm{Par}(n)$-en is. □

3.3.4. Tétel. *A belső térfogatok* $\mathrm{Par}(n)$*-en bázisát adják a folytonos, eltolásokra és koordináták permutálására invariáns kiértékeléseknek.*

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk, $n = 1$ esetben az állítást már beláttuk. Vegyünk most egy H tengelypárhuzamos hipersíkot, erre megszorítva a μ kiértékelés továbbra is folytonos és invariáns, így H-n belüli halmazokon az indukciós feltevés szerint $\mu = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\mu_i$. Az egyenlőségben szereplő kiértékelések invarianciájából következik, hogy ezek a c_i konstansok nem függnek H választásától, hiszen bármely két tengelypárhuzamos hipersík egymásban vihető a koordináták permutálása, és egy eltolás segítségével. Tekintsük a $\mu - \sum_{i=0}^{n-1} c_i\mu_i$ kiértékelést, ez bármely tengelypárhuzamos hipersíkon 0, és így az n-nél kisebb dimenziós $\mathrm{Par}(n)$-beli halmazokon eltűnik. Mivel folytonos, invariáns kiértékelések lineáris kombinációja, így maga is folytonos, invariáns, tehát a 3.3.3 tétel szerint a térfogat konstansszorosa: $\mu - \sum_{i=0}^{n-1} c_i\mu_i = c_n\mu_n$, ezzel az állítást beláttuk. □

Miről lehet felismerni, hogy egy μ folytonos, invariáns kiértékelésünk valamelyik μ_k belső térfogat, vagy legalábbis annak konstansszorosa? Egy μ $\mathrm{Par}(n)$-en adott kiértékelés *k-adfokú homogén*, ha bármely $\alpha \geq 0$-arányú φ középpontos nagyításra nézve $\mu\big(\varphi(P)\big) = \alpha^k\mu(P)$ minden $P \in \mathrm{Par}(n)$ halmazon. Természetesen a μ_k belső térfogat k-adfokú homogén, hiszen parallelotópokon a k-adik szimmetrikus polinomból származik, ami pedig k-adfokú homogén.

3.3.5. Tétel. *Megyen μ egy $\mathrm{Par}(n)$-en adott k-adfokú homogén, folytonos, invariáns kiértékelés, $0 \leq k \leq n$. Ekkor létezik $c \in \mathbb{R}$, hogy $\mu = c\mu_k$.*

Bizonyítás. Az előző tételből tudjuk, hogy $\mu = \sum_{i=0}^{n} c_i\mu_i$ alakban. Értékeljük ki μ-t a $K_\alpha = [0;\alpha]^n$ kockákon:

$$\mu(K_\alpha) = \sum_{i=0}^{n} c_i\mu_i(K_\alpha) = \sum_{i=0}^{n} c_i\alpha^i\mu_i(K_1) = \sum_{i=0}^{n} c_i\alpha^i\binom{n}{i},$$

$$\mu(K_\alpha) = \alpha^k\mu(K_1) = \alpha^k\sum_{i=0}^{n} c_i\mu_i(K_1) = \sum_{i=0}^{n} c_i\alpha^k\binom{n}{i}.$$

A két egyenlet jobb oldalán lévő kifejezések tehát minden $\alpha \geq 0$-ra megegyeznek, ami csak akkor lehet, ha $i \neq k$ esetben $c_i = 0$, ami éppen a tétel állítása. □

A későbbiekben a belső térfogatokat fogjuk kiterjeszteni konvex halmazokra, és szeretnénk megkapni a 3.3.4 megfelelőjét is a kiterjesztett belső térfogatokkal.

3.4. Mértékek Grassmann-sokaságokon

A belső térfogatok kiterjesztéséhez szükségünk lesz arra, hogy valamilyen fix dimenziós affin alterek terén integráljunk. A síkban könnyen tudtunk definiálni mértéket az egyenesek terén, azonban magasabb dimenzióban ez nem mindig ilyen egyszerű. A következő szakasz célja egy egybevágóságinvariáns mértékek definiálása affin alterek terein. A mértékeinket úgy szeretnénk skálázni, hogy a formuláink minél egyszerűbb alakot öltsenek. Ehhez jó kiindulás a konvex testekre bizonyított Cauchy-formula. Legyen K konvex test az n-dimenziós térben. Ekkor a Cauchy-formula szerint

$$S(K) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} V_{n-1}\big(p_{v^\perp}(K)\big)\ dv.$$

A parallelotópokon láttuk, hogy $\mu_{n-1}(P) = \frac{1}{2}S(P)$, ezért elég természetes az összes konvex testek halmazán értelmezni μ_{n-1}-et, mint a felszín felét. A hipersíkban $(n-1)$-dimenziós térfogatot mérünk, ami megegyezik a μ_{n-1} kiértékeléssel a parallelotópokon, és az előbbihez hasonló módon kiterjeszthetjük μ_{n-1}-et a hipersíkbeli konvex halmazokra azok térfogataként. Az integrált pedig nézhetjük az egységgömb helyett az egyenesek terén, hiszen minden egyenes két pontban metszi a gömböt. Jelölje $\mathrm{Gr}(1,n)$ az n-dimenziós tér egyeneseinek halmazát, vagyis az $(n-1)$-dimenziós projektív teret. Az $\mathbf{S}^{n-1}$ felszíni mértékéből adódik egy mérték $\mathrm{Gr}(1,n)$-en: egyenesek egy halmazának mértékét definiálhatjuk az egységgömbbel vett metszeteik halmazának felszíni mértékeként. A kapott mértéket skálázzuk úgy, hogy az egész tér mértéke 1 legyen. Az integrálunk a következő alakot ölti:

$$\mu_{n-1}(K) = \alpha \int_{\mathrm{Gr}(1,n)} \mu_{n-1}\big(p_{l^\perp}(K)\big)\ dl$$

Itt az α konstans ismét meghatározható azzal, hogy K-nak az egységgömböt választjuk. Az egységgömb felszínét a 2.4.2 segítségével könnyedén megkaphatjuk:

$$\lim_{r\to 0} \frac{(1+r)^n\omega_n - \omega_n}{r} = n\omega_n.$$

Ekkor a formulát felírva megkapjuk α-t:

$$\frac{n\omega_n}{2} = \alpha\omega_{n-1}, \quad \alpha = \frac{n\omega_n}{2\omega_{n-1}}.$$

Most ismét skálázzuk át a $\mathrm{Gr}(1,n)$-en lévő mértéket, de most úgy, hogy az egész tér mértéke α legyen, és jelölje ezt a mértéket τ_n. Bevezetjük a $[n]$ jelölést az egész $\mathrm{Gr}(1,n)$ tér mértékére. Ekkor

$$\tau_n\big(\mathrm{Gr}(1,n)\big) = \frac{n\omega_n}{2\omega_{n-1}} = [n].$$

Ez a τ_n mérték $O(n)$-invariáns, hiszen a felszíni mértékből származik, és úgy skáláztuk, hogy vele felírva a Cauchy-formulát a konstansok eltűnnek:

$$\mu_{n-1}(K) = \int_{\mathrm{Gr}(1,n)} \mu_{n-1}(p_{l^\perp}(K))\ d\tau_n.$$

Célunk hasonló mérték bevezetése magasabb dimenziós alterekből álló sokaságokon is. Jelölje $\mathrm{Lin}(n)$ az n-dimenziós tér lineáris altereinek halmazát. Ezek hálót alkotnak a tartalmazásra nézve, melynek a $\mathbf{0}$ vektorból álló altér minimális eleme, míg a teljes $\mathbb{R}^n$ maximális eleme. Jelölje $\mathrm{Gr}(k,n) \subseteq \mathrm{Lin}(n)$ a k-dimenziós alterek halmazát. Alterek egy $V_0 \le V_1 \le \ldots \le V_n$ sorozatát *zászló*nak nevezünk, ha

$\dim(V_i) = i,\ \forall i \in \{0, \dots, n\}$. Minden zászlóra $V_0 = \mathbf{0}$, és $V_n = \mathbb{R}^n$. Jelölje $\mathrm{Flag}(n)$ a zászlók halmazát. Minden zászlóhoz gyárthatunk páronként merőleges egyenesek egy sorozatát a következőképpen:

$$l_1 = V_1,\ l_2 = V_2 \cap V_1^{\perp},\ l_3 = V_3 \cap V_2^{\perp},\ \dots\ ,\ l_n = V_n \cap V_{n-1}^{\perp}.$$

A megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, hiszen a zászló visszakapható az egyenesekből, $V_i = \langle l_1, \dots, l_i \rangle$. Legyen $f : \mathrm{Flag}(n) \to \mathbb{R}$ egy függvény, és jelölje $\tilde{f}(l_1, \dots, l_n) = f(V_0, \dots, V_n)$ a megfelelőjét az egyenesekre. Definiáljunk $\mathrm{Flag}(n)$-en integrált a következő formulával:

$$\int_{\mathrm{Flag}(n)} f\ d\phi_n = \int_{\mathrm{Gr}(1,n)} \dots \int_{\mathrm{Gr}(1,2)} \int_{\mathrm{Gr}(1,1)} \tilde{f}(l_1, \dots, l_n)\ d\tau_1(l_n)\ d\tau_2(l_{n-1})\ \dots\ d\tau_n(l_1).$$

A bal oldali integrált a jobb oldal segítségével definiáljuk minden olyan esetben, amikor az értelmes. A motiváció egyszerű, az l_1 egyenest körbeforgatjuk $\mathrm{Gr}(1,n)$-en, ezt persze a megfelelő τ_n mérték szerint tesszük. Rögzített l_1-re az l_2 már csak $l_1^{\perp}$-ben mozoghat, vagyis őt $\mathrm{Gr}(1, n-1)$-en forgatjuk körbe, megint csak a vonatkozó τ_{n-1} mérték szerint, és így tovább. Ha a belső $(n-1)$ integrált tekintjük rögzített l_1-re, akkor az tekinthető egy $\mathrm{Flag}(n-1)$-en vett integrálnak az $l_1^{\perp}$ hipersíkon. Vagyis az integrált definiálhatjuk rekurzívan is a következő formulával. Jelölje $\tilde{\tau}_n$ azt a mértéket $\mathrm{Gr}(n-1,n)$-en, melyet a τ_n mértékből kapunk az egyenesek és hipersíkok ortogonális dualitásával:

$$\int_{\mathrm{Flag}(n)} f\ d\phi_n = \int_{\mathrm{Gr}(n-1,n)} \int_{\mathrm{Flag}(V_{n-1})} f_{V_{n-1}}\ d\phi_{n-1}\ d\tilde{\tau}_n(V_{n-1})\ \text{, ahol}$$

$$f_{V_{n-1}}(\mathbf{0}, U_1, \dots, U_{n-2}, V_{n-1}) = f(\mathbf{0}, V_{n-1}^{\perp}, \langle U_1, V_{n-1}^{\perp} \rangle, \dots, \langle U_{n-2}, V_{n-1}^{\perp} \rangle, \mathbb{R}^n).$$

Ezzel persze definiáltuk a ϕ_n mértéket is, és a τ_i-k $O(k)$-invarianciájából adódik, hogy ϕ_n is $O(n)$-invariáns. Az egész $\mathrm{Flag}(n)$ halmaz mértékére:

$$\phi_n\big(\mathrm{Flag}(n)\big) = [n][n-1][n-2]\dots[1] = \frac{n\omega_n (n-1)\omega_{n-1} \dots 1\omega_1}{2\omega_{n-1} 2\omega_{n-2} \dots 2\omega_0} = \frac{n!\,\omega_n}{2^n}.$$

Erre az értékre bevezetjük az $[n]!$ jelölést, ez tehát $\mathrm{Flag}(n)$ mértékét jelöli. Sikerült a zászlókon forgatásinvariáns mértéket definiálnunk, de valójában $\mathrm{Gr}(k,n)$-en szeretnénk mértéket kapni. Ezért egy $A \in \mathrm{Gr}(k,n)$ halmazra legyen $\mathrm{Flag}(A)$ azon zászlók halmaza, melyek „áthaladnak” A-n, azaz $\mathrm{Flag}(A) = \{(V_0, \dots, V_n) \in \mathrm{Flag}(n) | V_k \in A\}$. Kézenfekvő A-t $\mathrm{Flag}(A)$ segítségével mérni, így bevezetjük a ν_k^n $O(n)$-invariáns mértéket $\mathrm{Gr}(k,n)$-en:

$$\nu_k^n(A) = \frac{\phi_n(\mathrm{Flag}(A))}{[k]!\,[n-k]!}.$$

A normálást a következő intuíció sugallja. V_k rögzítésével a $V_0, \dots, V_{k-1}, V_k$ alterek egy Flag(k)-val izomorf halmazon futhatnak, míg hasonlóan a $V_k, V_{k+1}, \dots, V_n$ alterek egy Flag($n-k$)-val izomorf halmazon. Ezért minden V_k-t $[k]!\,[n-k]!$-szor számoltunk. A teljes $\mathrm{Gr}(k,n)$ mértékét felírva pedig kapjuk, hogy

$$\nu_k^n(\mathrm{Gr}(k,n)) = \frac{[n]!}{[k]!\,[n-k]!} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n}{k} \frac{\omega_n}{\omega_k \omega_{n-k}}.$$

Mindeddig lineáris alterek halmazait mértük. A mértékünk kiterjesztése az affin esetre már nem okoz nehézséget. Jelölje $\mathrm{Aff}(n)$ az n-dimenziós tér affin altereinek halmazát, és $\mathrm{Graff}(k,n)$ ezek közül a k-dimenziósakat. Ezek persze jellemezhetőek az origóba eltolt példányukkal, és egy pontjukkal. Legyen $V \in \mathrm{Graff}(k,n)$, ekkor jelölje $V^\perp$ a rá merőleges affin alterek közül az origón áthaladót. $V_0 = (V^\perp)^\perp$ éppen az előbb említett lineáris altér, melynek eltoltja a $p(V) = V \cap V^\perp$ vektorral maga V. Rendeljük hát hozzá V-hez a $(V_0, p(V))$ párt, ezzel minden affin altérnek adtunk paramétert. Másfelől minden U lineáris altérhez, és $p \in U^\perp$ vektorhoz a $t_p(U)$ affin altér paraméterei éppen (U,p), ahol t_p a p vektorral való eltolást jelöli.

Legyen $f : \mathrm{Graff}(k,n) \to \mathbb{R}$ függvény, ekkor értelmezzük az $\widehat{f} : \mathrm{Gr}(k,n) \times \times \mathbb{R}^n$ függvényt, legyen $\widehat{f}(U,p) = f\big(t_p(U)\big)$. A $\mathrm{Graff}(k,n)$-en való integrálást ekkor visszavezetjük $\mathrm{Gr}(n,k)$ és $\mathbb{R}^{n-k}$ esetére, melyeken már tudunk integrálni:

$$\int_{\mathrm{Graff}(k,n)} f \; d\lambda_k^n = \int_{\mathrm{Gr}(k,n)} \int_{U^\perp} \widehat{f}(U,p) \; dp \; d\nu_k^n.$$

A bal oldali integrált a jobb oldal segítségével definiáljuk minden olyan esetben, amikor az létezik. A kapott λ_k^n eltolásinvariáns. Vegyünk ugyanis egy $w \in \mathbb{R}^n$ vektor, és komponáljuk az f függvényünket t_w-vel, ekkor $\widehat{f \circ t_w}(U,p) = (f \circ t_w)\big(t_p(U)\big) = f\big(t_{p+w}(U)\big) = f\big(t_{p+w|_{U^\perp}}(U)\big)$, ahol $w|_{U^\perp}$ jelöli a w vektor $U^\perp$-re vett merőleges vetületét. Ekkor

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{Graff}(k,n)} f \circ t_w \; d\lambda_k^n &= \int_{\mathrm{Gr}(k,n)} \int_{U^\perp} f\big(t_{p+w|_{U^\perp}}(U)\big) \; dp \; d\nu_k^n = \\ &= \int_{\mathrm{Gr}(k,n)} \int_{U^\perp} f\big(t_p(U)\big) \; dp \; d\nu_k^n = \int_{\mathrm{Graff}(k,n)} f \; d\lambda_k^n.\end{aligned}$$

Közben kihasználtuk a Lebesgue-integrál eltolásinvarianciáját. Hasonlóan megmutatjuk, hogy λ_k^n az $O(n)$-beli transzformációkra is invariáns. Legyen $\varphi \in O(n)$, és komponáljuk f-et φ-vel: $\widehat{f \circ \varphi}(U,p) = (f \circ \varphi)\big(t_p(U)\big) = f\big(t_{\varphi(p)(\varphi(U))}\big)$. Ki fogjuk használni, hogy a ν_k^n mérték $O(n)$-invariáns, és hogy ha a p vektor befutja az U alteret, akkor $\varphi(p)$ befutja $\varphi(U)$-t, sőt mi több φ mértéktartó is abban az értelemben, hogy egy U-beli mérhető halmaz képének mértéke – $\varphi(U)$-ban – változatlan marad.

$$\int_{\mathrm{Graff}(k,n)} f\circ\varphi\; d\lambda_k^n = \int_{\mathrm{Gr}(k,n)}\int_{U^\perp} f\big(t_{\varphi(p)}(\varphi(U))\big)\; dp\; d\nu_k^n =$$
$$= \int_{\mathrm{Gr}(k,n)}\int_{\varphi(U)^\perp} f\big(t_r(\varphi(U))\big)\; dr\; d\nu_k^n = \int_{\mathrm{Graff}(k,n)} f\; d\lambda_k^n.$$

A két invarianciát összefoglalva λ_k^n invariáns az egybevágóságokra nézve.

3.5. Konvex testek belső térfogatai

Konvex testek térfogata éppen azon pontok halmazának mértéke, melyek a testben vannak. A felszín a Cauchy-formula szerint szorosan összefügg a konvex testet metsző egyenesek halmazának mértékével. Ezek az észrevételek azt vetítik előre, hogy a definiálni kívánt belső térfogatoknak erősen össze kell függniük a halmazt metsző valamilyen fix dimenziós alterek halmazának mértékével.

3.5.1. Lemma. *Legyenek A és B kompakt konvex halmazok, melyekre $A\cup B$ is konvex. Ha a V lineáris altér legalább 1 dimenziós, és $V\cap A\neq\emptyset$ és $V\cap B\neq\emptyset$, akkor $V\cap(A\cap B)\neq\emptyset$.*

Bizonyítás. Tekintsük a $V\cap A$ és $V\cap B$ halmazokat. Véve az egyikből egy a, a másikból egy b pontot, az összekötő $[a;b]$ szakasz végig $V\cap(A\cup B)$-ben van, hiszen ez is konvex. $[a;b]\subseteq(V\cap A)\cup(V\cap B)$, és indirekten feltéve, hogy $V\cap(A\cap B) = \emptyset$ azt látjuk, hogy $[a;b]$-ben $[a;b]\cap A$ és $[a;b]\cap B$ zárt halmazok, melyek egymás komplementerei. Ez viszont ellentmond $[a;b]$ összefüggőségével. □

Rögzítsük az n dimenziót, és $A\subseteq\mathbb{R}^n$ halmazra jelölje $\mathrm{Graff}(k,A)$ azoknak a k-dimenziós affin altereknek a halmazát $\mathrm{Graff}(k,n)$-ben, melyek metszik A-t. Az előző lemma állítása épp az, hogy ha A és B kompakt konvex halmazok uniója is konvex, akkor
$$\mathrm{Graff}(k,A)\cap\mathrm{Graff}(k,B) = \mathrm{Graff}(k,A\cap B).$$

Emellett teljesen triviális a $\mathrm{Graff}(k,A)\cup\mathrm{Graff}(k,B) = \mathrm{Graff}(k,A\cup B)$ egyenlőség. Ennek segítségével fel tudjuk írni $\mathrm{Graff}(k,A\cup B)$ mértékét:

$$\begin{aligned}\lambda_k^n\big(\mathrm{Graff}(k,A\cup B)\big) &= \lambda_k^n\big(\mathrm{Graff}(k,A)\big) + \lambda_k^n\big(\mathrm{Graff}(k,A)\big) -\\ &\quad - \lambda_k^n\big(\mathrm{Graff}(k,A)\cap\mathrm{Graff}(k,B)\big) =\\ &= \lambda_k^n\big(\mathrm{Graff}(k,A)\big) + \lambda_k^n\big(\mathrm{Graff}(k,B)\big) -\\ &\quad - \lambda_k^n\big(\mathrm{Graff}(k,A\cap B)\big).\end{aligned}$$

Vagyis a $\mu(A) = \lambda_k^n\big(\mathrm{Graff}(k,A)\big)$ függvény kiértékelés a konvex testeken, így kiterjed a polikonvex halmazok egy kiterjesztésévé. Erről a kiértékelésről szeretnénk megmutatni, hogy parallelotópokra visszaadja a belső térfogatok fogalmát.

A λ_k^n mérték invariáns az egybevágóságokra nézve, így ha az előbbi kiterjesztést tengelypárhuzamos parallelotópokon vizsgáljuk, akkor az eltolásokra és koordinátapermutációkra invariáns kiértékelést kapunk. Megmutatjuk a folytonosságot és homogenitást is.

Legyen P parallelotóp, és a hozzá tartozó $\mathrm{Graff}(k,P)$ halmaz karakterisztikus függvénye f_P. Ekkor

$$\mu(P) = \lambda_k^n\big(\mathrm{Graff}(k,P)\big) = \int_{\mathrm{Graff}(k,n)} f_P \, d\lambda_k^n = \int_{\mathrm{Gr}(k,n)} \int_{U^\perp} \widehat{f_P}(U,p) \, dp \, d\nu_k^n.$$

Vizsgáljuk a belső integrált egy fix $U \in \mathrm{Gr}(k,n)$-re. $\widehat{f_P}(U,p)$ pontosan akkor 1, ha p beleesik a P parallelotóp $U^\perp$ altérre vett merőleges vetületébe, különben nulla. Vagyis a belső integrál értéke $V_{n-k}\big(p_{U^\perp}(P)\big)$, ahol $p_{U^\perp}$ az $U^\perp$-re vett merőleges vetítést jelöli. Ezt behelyettesítve:

$$\mu(P) = \int_{\mathrm{Gr}(k,n)} V_{n-k}\big(p_{U^\perp}(P)\big) \, d\nu_k^n.$$

Ebből a képletből kiolvasható, hogy a kiértékelésünk $(n-k)$-adfokú homogén, hiszen az $(n-k)$-dimenziós térfogat is az. Másfelől ha $P_i \to P$ parallelotópok konvergens sorozata, akkor a merőleges vetületek is konvergálnak a megfelelő merőleges vetülethez, így a térfogat folytonosságból adódóan a vetületek térfogatai tartanak P vetületének térfogatához. Mivel a vetítés az altér állásától függetlenül a Hausdorff-távolságot nem növelheti, ezért a $V_{n-k}\big(p_{U^\perp}(P_i)\big) \to V_{n-k}\big(p_{U^\perp}(P)\big)$ konvergencia U-ban is egyeneletes, így az integrálás után is igaz lesz, hogy $\mu(P_i) \to \mu(P)$, azaz a μ kiértékelés folytonos. A 3.3.5 tételre hivatkozva a következő eredményt kaptuk:

3.5.2. Állítás. *Minden $k \leq n$ esetén létezik C_k^n konstans, hogy minden $P \in \mathrm{Par}(n)$ parallelotópra*

$$\mu_{n-k}(P) = C_k^n \lambda_k^n\big(\mathrm{Graff}(k,P)\big). \ \square$$

Ennek fényében definiáljuk egy K kompakt, konvex halmazra a $\mu_{n-k}^n(K) = C_k^n \lambda_k^n\big(\mathrm{Graff}(k,K)\big)$ kiértékeléseket. Ezeket kiterjesztjük $\mathrm{Polycon}(n)$-re, és belső térfogatoknak fogjuk őket nevezni. Ezek konvex-folytonosak, azaz ha $K_i \to K$, ahol K_i konvex halmazok, akkor $\mu_{n-k}^n(K_i) \to \mu_{n-k}^n(K)$. A folytonosság pontosan úgy következik a V_{n-k} térfogat folytonosságából, mint parallelotópokra. $\mathrm{Par}(n)$-en már beláttuk, hogy a belső térfogatok nem függnek a befoglaló tér dimenziójától. Konvex halmazokra ezt csak később fogjuk elvégezni, és addig ezt a jelölésben is feltüntetjük. Ugyancsak később fogjuk a C_k^n konstansokat meghatározni.

Fontos hangsúlyozni, hogy a 3.5.2 állítás csak a parelleletópokra igaz, nem pedig $\mathrm{Par}(n)$ minden elemére. Ugyanígy, a konvex halmazokon definiált képlet sem lesz igaz minden $\mathrm{Polycon}(n)$-beli halmazra.

Már a síkbeli integrálgeometria vizsgálatánál láttuk, hogy egy konvex lemezt metsző egyenesek halmazának mértéke a kerülettel függ össze, és ez azon múlott, hogy az egyenesek majdnem mindig két pontban metszették a konvex lemezünk határát. Ez persze polikonvex lemezekre már nem teljesülne, így ha ezekről akarunk mondani valamit, akkor nem elég a metsző egyenesek halmazának mértékét vizsgálni, hanem ezen a halmazon valami megfelelő függvényt kell integrálni, mint a sík esetében tettük a metszési számmal.

Figyelmünket a belső térfogatok közül eddig a μ_n és μ_{n-1} kiértékelésekre – a térfogatra és a felszínre – összpontosítottuk. Vizsgáljuk meg a másik végletet, és foglaljuk össze, hogy mit tudunk a μ_0^n kiértékelésről. Egy dimenzióban – ahol $\mathrm{Par}(1) = \mathrm{Polycon}(1)$ – ez az összefüggő komponensek száma. Magasabb dimenzióban parallelotópokon ez a 0-adik szimmetrikus polinom, tehát mindig 1 értéket vesz fel. Írjuk fel a 3.5.2 állításban szereplő egyenletünket valami P parallelotópra:

$$1 = \mu_{n-n}^n(P) = C_n^n \lambda_n^n\big(\underbrace{\mathrm{Graff}(n,P)}_{=\mathrm{Graff}(n,n)}\big) = C_n^n \nu_k^n\big(\mathrm{Gr}(n,n)\big) = C_n^n \binom{n}{n}\frac{\omega_n}{\omega_n} = C_n^n.$$

Ezzel a C_n^n konstansot meghatároztuk, és most pontosan ugyanezt felírhatjuk egy konvex K halmazra, hiszen az az észrevételünk, hogy $\mathrm{Graff}(n,P) = \mathrm{Graff}(n,n)$ igaz akkor is, ha P helyett tetszőleges K-val nézzük. Így

$$\mu_0^n(K) = \lambda_n^n\big(\mathrm{Graff}(n,K) = 1.$$

Vagyis μ_0^n egy olyan folytonos kiértékelés, mely minden nemüres, kompakt, konvex halmazon 1. Azonnal látjuk, hogy nem függ a befoglaló tér dimenziójától, ezért ezt – kizárólag μ_0 esetén – mostantól nem jelöljük.

Emlékezzünk vissza, hogy a korábbi gondolatmenetünkben az $\widehat{f_P}(U,p)$ függvény integráljáról meggondoltuk, hogy éppen egy merőleges vetület $(n-k)$-dimenziós térfogata. Az $\widehat{f_P}(U,p)$ függvény a következő:

$$\widehat{f_P}(U,p) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t_p(U) \cap P \neq \emptyset, \\ 0 & \text{ha } t_p(U) \cap P = \emptyset. \end{cases}$$

Ezt a függvényt éppen azért használtuk, mert jelzi a metszési viszonyt. Vegyük észre, hogy P parallelotópra a $\mu_0\big(P \cap t_p(U)\big)$ függvény pontosan megegyezik az előzővel. Ha a metszet nem üres, akkor biztosan kompakt, konvex halmaz, így μ_0 rajta 1-et vesz fel. Mivel azonban μ_0 maga is kiértékelés, ezért $\widehat{f_P}(U,p)$-t lecserélve esetleg kaphatunk olyan formulát, mely nem csak a parallelotópokon igaz, hanem az egész $\mathrm{Par}(n)$-en, illetve hasonlóan polikonvex környezetben. Sőt, ezt lényegében be is láttuk! Definiáljuk a $\tilde{\mu}_{n-k}^n$ függvényt az alábbi módon:

$$\tilde{\mu}_{n-k}^n(L) = C_k^n \int_{\mathrm{Gr}(k,n)} \int_{U^\perp} \mu_0\big(L \cap t_p(U)\big)\, dp\, d\nu_k^n(U) = C_k^n \int_{\mathrm{Graff}(k,n)} \mu_0(L \cap V)\, d\lambda_k^n(V).$$

Itt a definícióban *nincs* kikötve hogy L konvex, vagyis Polycon(n) bármely eleme lehet. Mivel μ_0 kiértékelés a V altérre megszorítva is:

$$\mu_0\big((A \cup B) \cap V\big) = \mu_0\big(A \cap V\big) + \mu_0\big((B \cap V\big) - \mu_0\big((A \cap B) \cap V\big).$$

Ez pedig az integráláson keresztül öröklődik $\tilde{\mu}^n_{n-k}$-ra, tehát ez is kiértékelés. Viszont $\tilde{\mu}^n_{n-k}$ a konvex halmazokon megegyezik a μ^n_{n-k} kiértékeléssel. Egy konvex halmazra μ^n_{n-k}-et felírva, az integrálban az $\widehat{f_K}(U,p)$ függvényt $\mu_0\big(K \cap t_p(U)\big)$-ra cserélve – ezzel az értéket nem változtatva – kapjuk $\tilde{\mu}^n_{n-k}$-et. Ebből viszont következik, hogy a konvex halmazokra szorítkozva $\tilde{\mu}^n_{n-k}$ konvex-folytonos kiértékelés, melynek egyértelmű kiterjesztése megegyezik μ^n_{n-k} kiterjesztésével.

A μ_0 kiértékelés 1 dimenzióban éppen az összefüggőségi komponensek száma, így egy síkbeli L polikonvex lemezre $\mu_0(L \cap e)$ majdnem mindig az e egyenes határral vett metszési számának fele. Ez is mutatja, hogy mennyire hasonló jellegű általánosítás a $\tilde{\mu}^n_{n-k}$ definíciója a síkban látott példákhoz, amikor a metszés valószínűsége helyett a metszési szám várható értékét tudtuk meghatározni.

Ennek a szakasznak a zárásaként az előbbi integrált átrendezzük a Cauchy-formulához hasonló alakba:

$$\mu^n_{n-k}(K) = C^n_k \lambda^n_k\big(\mathrm{Graff}(k,P)\big) = C^n_k \int_{\mathrm{Gr}(k,n)} \int_{U^\perp} I_{(p_{U^\perp}(K))}(p)\ dp\ d\nu^n_k =$$

$$= C^n_k \int_{\mathrm{Gr}(k,n)} \mu^{n-k}_{n-k}\big(p_{U^\perp}(K)\big)\ d\nu^n_k = C^n_k \int_{\mathrm{Gr}(n-k,n)} \mu^{n-k}_{n-k}\big(p_V(K)\big)\ d\nu^n_{n-k}.$$

Az utolsó lépésben egyszerűen annyit tettünk, hogy az U futtatása helyett áttértünk rögtön a $V = U^\perp$ futtatására, persze a megfelelő mérték szerint. Érdemes μ^n_{n-k} helyett μ^n_k-re felírni az előbbi egyenlőséget. Az alábbi tétel a Cauchy-formula közvetlen általánosítása. Azt fogalmazza meg, hogy az n-dimenzióban értelmezett μ^n_k konstans szorzó erejéig megegyezik a k-dimenziós alterekre vett merőleges vetületek k-dimenziós térfogatainak átlagával.

3.5.3. Állítás. *Bármely $K \in \mathcal{K}_n$-re*

$$\mu^n_k(K) = C^n_{n-k} \int_{\mathrm{Gr}(k,n)} \mu^k_k\big(p_U(K)\big)\ d\nu^n_k. \ \square$$

Ez az eredmény ugyan tényleg általánosítása a Cauchy-formulának, de némi hiányérzetet mégis hagy maga után. A bal oldalon álló kiértékelést alterek egy halmazának mértékeként definiáltuk, és az állítás bizonyítása sem állt másból, mint a mértéket adó integrál egyszerű átírásából. A valódi eredményt abban érezzük, hogy $k = n - 1$ esetben a bal oldalon lévő $\mu^n_{n-1}(K)$ érték éppen a felszín fele. A felszín fogalmához szemléletes – és kimerítő – úton jutottunk el, és ezért érezhetjük azt, hogy ebben az esetben a tételünk több, mint az integrálok átírása. Valójában azonban a felszín nem egyedülálló, hiszen ha egy fix n-dimenziós térben éppen a

k-adik belső térfogat lenne érdeklődésünk tárgya, és azt definiálnánk politópokra, akkor belső- illetve külső közelítéssel azonnal adódna kompakt, konvex halmazokra, és a konvex-folytonosságból tudjuk, hogy ez jól definiált volna, vagyis felépíthetnénk μ_k^n-et „szemléletesen” is. Mindebből a tanulság talán az, hogy a kiépített eszköztár – a kiértékelések kiterjesztési tétele, a belső térfogatok folytonossága és kapcsolata Grassmann-sokaságokon vett integrálokkal – elég erős ahhoz, hogy gyors bizonyítást adjon egyébként nehezebb állításokra is.

A következő fejezetben rátérünk ennek az eszköztárnak a legerősebb tételére, melynek segítségével még jobban letisztul a konvex-folytonos, invariáns kiértékelések, és a belső térfogatok fogalma is.

4. Hadwiger tétele

Ebben a fejezetben bebizonyítjuk a 3.3.4 tétel megfelelőjét Polycon(n)-re. A felépítés is hasonló lesz, mint parallelotópok esetén. Először feltételeket keresünk arra, hogy egy egyszerű kiértékelés a térfogat konstansszorosa legyen, és ennek felhasználásával indukcióval bizonyítjuk, hogy a belső térfogatok bázisát adják a folytonos, invariáns kiértékeléseknek. A továbbiakban a térfogatra mint kiértékelésre fogunk gondolni, ezért a V_n jelölés helyett a μ_n jelölést fogjuk használni.

A Hadwiger-tétel itt bemutatott bizonyítása Daniel A. Klein nevéhez fűződik, és a [6] cikkben jelent meg.

4.1. Támaszfüggvények

Még a síkbeli konvex lemezek szélességének definiálásakor vezettünk be olyan függvényeket, melyek minden irányhoz hozzárendelték az adott irányra merőleges támaszhipersíkok origótól mért távolságát. A szélesség két ilyen távolság különbsége volt. Ennek mintájára definiáljuk a $K \in \mathcal{K}_n$-beli halmaz $h_K : \mathbf{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ támaszfüggvényét:

$$h_K(u) = \sup\{x \cdot u | x \in K\} = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} | t_{\alpha u}(u^\perp) \cap K \neq \emptyset\}.$$

A fenti definícióban K kompaktsága miatt valójában mindig maximumot veszünk. Az is világos, hogy ha $K, L \in \mathcal{K}_n$, és $K + L$ jelöli a Minkowski-összegüket, akkor $h_{K+L} = h_k + h_L$. Valóban, ha $x \in K + L$, akkor találhatók hozzá $k \in K$ és $l \in L$ pontok, hogy $x = k + l$. Ekkor

$$u \cdot x = u \cdot (k + l) = u \cdot k + u \cdot l \leq h_K(u) + h_L(u).$$

Így a bal oldal maximuma is kisebb a korlátnál, azaz $h_{K+L}(u) \leq h_K(u) + h_L(u)$ minden $u \in \mathbf{S}^{n-1}$-re. Másrészt viszont legyenek k és l azok a vektorok, melyeken $h_K(u)$ és $h_L(u)$ rendre felvétetik, ekkor $k + l \in K + L$ mutatja, hogy $h_{K+L}(u) \geq$ $\geq h_K(u) + h_L(u)$. Vagyis tényleg $h_{K+L}(u) = h_K(u) + h_L(u)$.

Tekintsük a h_K és h_L támaszfüggvények különbségének abszolút értékben vett maximumát $\mathbf{S}^{n-1}$-en, legyen ez d. Ekkor az előbbi állítás szerint:

$$h_{\overline{B}(K,d)} = h_{K+\overline{B}(\mathbf{0},d)} = h_K + h_{\overline{B}(\mathbf{0},d)} = h_K + d \geq h_L.$$

Ez az egyenlőtlenség K és L felcserélésével is igaz marad, és a kettő együtt pont azt fogalmazza meg, hogy $L \subseteq \overline{B}(K, d)$ és $K \subseteq \overline{B}(L, d)$. A d szám definíciójából adódóan d a legkisebb ilyen szám. Mindebből az következik, hogy a K és L halmazok Hausdorff-távolsága megegyezik a támaszfüggvényeik távolságával a maximumnorma által indukált metrikára nézve. Megjegyezzük, hogy ez egy triviális bizonyítását adja annak a ténynek, hogy a $\overline{B}(\, . \, , r) : \mathcal{K}_n \to \mathcal{K}_n$ leképezés távolságtartó.

Egy $K \in K_n$ halmaz pontosan akkor középpontosan szimmetrikus az origóra nézve, ha a h_K függvény *páros*, vagyis $h_K(-u) = h_K(u)$. Jelölje $\mathcal{K}_n^c$ a konvex halmazok közül azokat, melyek – nem feltétlenül az origóra – középpontosan szimmetrikusak.

A következő lemma bizonyítástechnikai eszköze lesz a fejezet legfontosabb, eltolásinvariáns egyszerű kiértékelésekről szóló tételének. *Zonotóp*on véges sok szakasz Minkowski-összegét értjük, míg *zonoid*on olyan halmazt, mely a Hausdorff-metrikában előáll zonotópok határértékeként. A lemma bizonyításában olyan elméletre fogunk hivatkozni, melyet ebben a dolgozatban nem építünk fel részletesen.

Legyen egy $g : \mathbf{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ függvény koszinusz-transzformáltja a $C(g)$ függvény, amit az alábbi képlet definiál:

$$\big(C(g)\big)(u) = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} g(v)|u \cdot v| \; dv.$$

Erről szeretnénk felhasználni, hogy lineáris szürjekció a páros, sima függvényeken. Ennek bizonyításához vezessük be az $\mathbb{R}^n$-en értelmezett k-adfokú homogén polinomok halmazára a $\mathcal{H}^k$ jelölést, és ezek $\mathbf{S}^{n-1}$-re vett megszorításaira a $\mathcal{S}^k$ jelölést. Ekkor $\mathcal{S}^k$ minden k-ra véges dimenziós vektortér. Válasszunk minden k-ra egy $Y_{k,1}, \dots, Y_{k,m(k)}$ ortonormált bázist $\mathcal{S}^k$-ban. Jelölje $L_2(\mathbf{S}^{n-1})$ az $\mathbf{S}^{n-1}$-en négyzetesen integrálható valós függvényeket. Ezek Hilbert-teret alkotnak – nullmértékű halmazon különböző függvényeket azonosítva – az $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} fg \; d\sigma$ skalárszorzattal. Belátható, hogy az $\{Y_{i,j} | i \in \mathbb{N}, 0 \le j \le m(i)\}$ teljes ortonormált rendszer $L_2(\mathbf{S}^{n-1})$-ben. A Funk–Hecke-tétel következményeként bármely $Y_k \in \mathcal{S}^k$ függvényre $C(Y_k) = c_k Y_k$, ahol c_k csak k-tól – és a teljes tér n dimenziójától – függő konstans, ami pontosan akkor nulla, ha k páratlan. Az elmélet felépítése, és a Funk–Hecke-tétel bizonyítása megtalálható a [7] cikkben.

Szeretnénk látni, hogy egy G páros függvény benne van a $C(.)$ leképezés értékkészletében. Válasszuk minden k-ra Y_k-t a G függvény $\mathcal{S}^k$ altérre vett vetületének:

$$Y_k = \sum_{j=1}^{m(k)} \langle G, Y_{k,j}\rangle Y_{k,j}, \text{ ekkor}$$

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k.$$

Világos, hogy páratlan k-ra egy k-adfokú homogén függvény páratlan, tehát G-vel vett skalárszorzata 0. Ebből az következik, hogy Y_k=0 minden páratlan k-ra. Páros k-ra viszont Y_k nem nulla sajátértékhez tartozó sajátvektora a $C(.)$ leképezésnek. Tekintsük a $g = \sum_{i \in \mathbb{N}} (c_{2i})^{-1} Y_{2i}$ függvényt. Az összeg létezésének bizonyítása megfelelő simasági feltétel mellett megtalálható a [8] könyvben. Erre a g-re:

$$C(g) = \sum_{i \in \mathbb{N}} C\big((c_{2i})^{-1} Y_{2i}\big) = \sum_{i \in \mathbb{N}} Y_{2i} = G.$$

Tehát valóban tudtunk olyan g páros függvényt találni, melyre $C(g) = G$.

4.1.1. Lemma. *Legyen $K \in \mathcal{K}_n^c$ olyan konvex halmaz, melynek h_K támaszfüggvénye sima. Ekkor K-hoz találhatók Y_1, Y_2 zonoidok, melyekkel $K + Y_1 = Y_2$.*

Bizonyítás. A $C(.)$ leképezés szürjektivitása alapján található olyan $g : \mathbf{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ sima páros függvény, melyre $C(g) = h_K$. Jelölje g^+ és g^- rendre a g függvény pozitív és negatív részét, ekkor

$$h_k + \int_{\mathbf{S}^{n-1}} g^-(v)|u \cdot v| \; dv = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} g^+(v)|u \cdot v| \; dv.$$

Tekintsük például a jobb oldali integrál egy közelítő összegét. A felszínt felosztjuk az $A_1, \dots, A_k$, a felszíni mérték szerint mérhető halmazokra, és mindegyikből választunk egy $v_i \in A_i$ vektort. Ekkor a közelítő összeg

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma(A_i) g^+(v_i)|u \cdot v_i|,$$

ahol σ a felszíni mérték $\mathbf{S}^{n-1}$-en.

Az $|u \cdot v_i|$ mint u-nak függvénye éppen a $[-v_i, v_i]$ szakasz támaszfüggvénye. Mivel a közelítő összeg ilyenek lineáris kombinációja, és a támaszfüggvények összeadása megfelel a halmazok Minkowski-összegének képzésének, ezért minden közelítő összeghez tartozik egy zonotóp. Persze a közelítő összegekkel közelített integrálhoz tartozó halmaz a zonotópok határértéke a Hausdorff-metrikában, vagyis zonoid. Legyenek tehát a Y_1 és Y_2 azok a halmazok, melyeket rendre a bal- illetve jobboldali integrálok mint u változóban $\mathbf{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ támaszfüggvények meghatároznak. Ekkor a támaszfüggvények és konvex halmazok összeadásának kapcsolatából kapjuk, hogy $K + Y_1 = Y_2$. □

Nem vizsgáltuk meg, hogy egy függvény mikor lesz konvex halmaz támaszfüggvénye. Az előző bizonyítás során onnan tudjuk, hogy az integrálok támaszfüggvények, hogy a hozzájuk tartó közelítő összegek zonotópok támaszfüggvényei voltak, melyek egyben konvex halmazok is, így a Hausdorff-metrikában konvex halmazhoz tartanak, mert a konvex halmazok zárt halmazt alkotnak a kompaktok között. Mivel a támaszfüggvényeknek a maximumnormában konvergálni ugyanaz, mint a konvexek halmazoknak a Hausdorff-metrikában konvergálni, ezért az integrál éppen a zonotópok határértékének támaszfüggvénye.

Felmerül azonban a kérdés, hogy miért egyenletes a közelítő összegek konvergenciája u-ban? Egy közelítő összeg is folytonos u-ban, és a közelített integrál is. Ezért ha egy alsó vagy felső közelítő összeg az u pontban ε-nál közelebb van az integrál értékéhez, akkor ez u egy környezetében is teljesül. Minden pont köré vegyünk fel egy ilyen környezetet, ezek fedik az egész $\mathbf{S}^{n-1}$-et. $\mathbf{S}^{n-1}$ kompaktságából kapunk véges sok környezetet, és minden környezethez egy hozzá tartozó alsó és felső közelítő összeget úgy, hogy a környezeten az alsó és felső közelítő összeg is ε-nál közelebb van az integrál értékéhez. Ekkor a véges sok közelítő összeghez tartozó felosztások összefinomításával kapott felosztásra az alsó és felső közelítő összeg is ε-nál közelebb van az integrál értékéhez minden $u \in \mathbf{S}^{n-1}$-re. Ezzel a konvergencia egyenletességét is beláttuk.

4.2. A térfogat jellemzése polikonvex halmazokon

Még egy utolsó lemmára szükségünk van, mielőtt belekezdhetünk a lényegi tétel bizonyításába. Legyen $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ a standard ortonormált bázis az $\mathbb{R}^n$ vektortérben. Jelölje $S_\mathcal{B} \subseteq SO(n)$ azon irányítástartó ortogonális transzformációkat, melyek a $\mathcal{B}$-nek $(n-2)$ elemét helyben hagyják.

4.2.1. Lemma. *Minden $SO(n)$-beli transzformáció előáll $S_\mathcal{B}$-beliek kompozíciójaként, vagyis $S_\mathcal{B}$ generálja $SO(n)$-et.*

Bizonyítás. Az állítás $n = 2$ esetben semmitmondó, $n \geq 3$ esetben indukcióval bizonyítunk. Legyen $\phi \in SO(n)$, és tegyük fel, hogy $\phi(e_n) = v \neq e_n$. Ekkor veszünk egy ψ $SO(n)$-beli leképezést, melyre $\psi(e_n) = e_n$, és a $\psi(v)$ vektor az $\langle e_{n-1}, e_n\rangle$ síkba esik. Ezt meg tudjuk tenni, hiszen az e_n helyben hagyása mellett a v vetületét az $\langle e_1, \dots, e_{n-1}\rangle$ hipersíkban be tudjuk forgatni e_{n-1} irányába. Ráadásul ez a ψ transzformáció az indukciós feltevés szerint előáll $S_\mathcal{B}$-beliek szorzataként. Mivel $\psi(v) \in \langle e_{n-1}, e_n\rangle$, található olyan $\eta \in S_\mathcal{B}$, melyre $\eta\big(\psi(v)\big) = e_n$. Ekkor $\eta\psi\phi(e_n) = = e_n$ miatt az indukciós feltevést alkalmazni tudjuk $\vartheta = \eta\psi\phi$-re. Mivel η maga $S_\mathcal{B}$-beli, míg ψ és ϑ ilyenek szorzataként előáll, ezért $\phi = \psi^{-1}\eta^{-1}\vartheta$ is előáll $S_\mathcal{B}$-beliek szorzataként. □

Erre azért volt szükségünk, mert a következő tételt a lehető legáltalánosabban szeretnénk bizonyítani. A 3.3.3 tétel mintájára szeretnénk elégséges feltételeket arra, hogy egy egyszerű kiértékelés a térfogat konstansszorosa legyen.

4.2.2. Tétel. *Legyen μ egyszerű, eltolásinvariáns, és folytonos kiértékelés* Polycon(n)-*en, melyre $\mu([0;1]^n) = 0$ és minden $K \in \mathcal{K}_n$-re $\mu(K) = \mu(-K)$, ahol $-K$ jelöli a K halmaz origóra vett középpontos tükörképét. Ekkor $\mu(L) = 0$ minden $L \in$* $\in$ Polycon(n)*-re.*

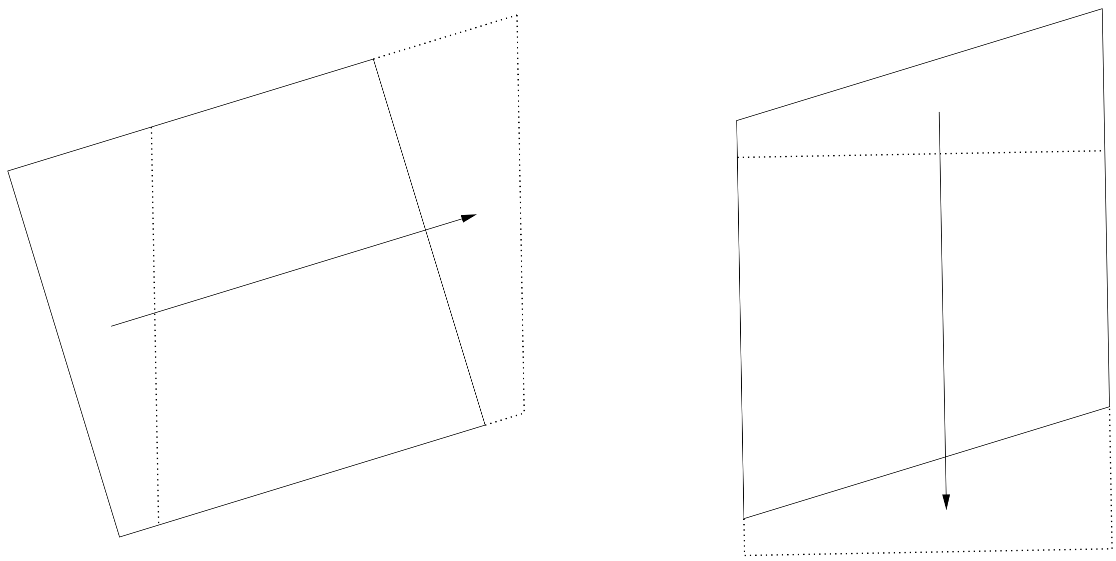
A tétel tehát azt fogalmazza meg, hogy ha egy egyszerű, folytonos kiértékelés az eltolásokon túl egyetlen középpontos tükrözésre is invariáns, és egy kockán eltűnik, akkor már minden konvex – és polikonvex – halmazon eltűnik.

Bizonyítás. A kiterjesztési tételünk szerint elég megmutatni, hogy $\mu(K) = 0$ minden $K \in \mathcal{K}_n$ halmazra.

Az $n = 1$ esetben a tétel nem mond semmi újat, hiszen ekkor a konvex testek és a parallelotópok megegyeznek, parallelotópokra pedig már beláttuk a 3.3.3 tételt, amit alkalmazva azonnal kapjuk az állítást. Az $n \geq 2$ esetben indukcióval bizonyítunk.

Ismét a 3.3.3 mintájára elmondható, hogy mivel a μ kiértékelésünk eltűnik az egységkockán, ezért az $1/k$ oldalú kockákon is, ebből adódóan a racionális oldalhosszúságú *tengelypárhuzamos* parallelotópokon, majd a folytonosság következtében az összes tengelypárhuzamos parallelotópon. Először a tengelypárhuzamosság feltételétől szeretnénk megszabadulni, ebben lesz segítségünkre a 4.2.1 lemma. Legyen ugyanis $n = 2$ esetben C egy tengelypárhuzamos parallelotóp, míg D egy elforgatottja, vagyis valami más ortonormált bázisra nézve tengelypárhuzamos. Azt már tudjuk, hogy $\mu(C) = 0$, és a 3. ábra mutatja, hogy C és D átdarabolhatóak egymásba vágások, eltolások, és összeillesztések segítségével. Mivel μ egyszerű, és a darabok metszetei kisebb dimenziósak, így $\mu(D) = 0$ adódik.

3. ábra. Téglalapok átdarabolása eltolásokkal



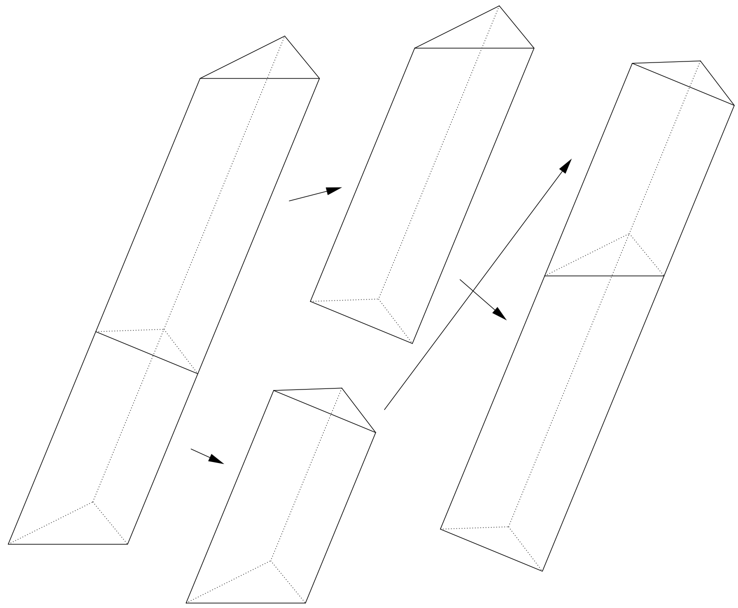
Tetszőleges n dimenzióban az előbbi átdarabolás a tengelypárhuzamos C paralleletópot egy $\psi \in S_{\mathcal{B}}$-beli transzformációval elforgatott $\psi(C)$-be viszi. Az átdarabolás nem változtatja meg a μ értékét, így $\mu\big(\psi(C)\big) = \mu(C)$. Ezt minden $\psi \in S_{\mathcal{B}}$ transzformációra elmondhatjuk, és mivel ezek generálják $SO(n)$-t, ezért beláttuk, hogy bármely ortonormált bázishoz viszonyítjuk a tengelypárhuzamosságot, a paralleletópok μ-értéke nulla. Röviden: bármilyen állású D téglára $\mu(D) = 0$.

Tekintsük a $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n = 0\}$ hipersíkon a τ_H kiértékelést, ahol $K \in \mathcal{K}_{n-1}$-re $\tau_H(K) = \mu\big(K \times [0;1]\big)$. Ez a τ_H eltolásinvariáns, folytonos, $\tau_H([0;1]^{n-1}) = 0$, és persze $\tau_h(K) = \tau_H(-K)$. Az indukciós feltevésünk szerint tehát τ_H azonosan 0. Ekkor viszont a racionális végpontú $[a;b]$ intervallumokkal is $\mu(K \times$ $\times\ [a;b]) = 0$, hiszen $K \times [a;b]$ megkapható $K \times [0;1/k]$ típusú darabokból, ezekre pedig $\mu(K \times [0;1/k]) = (1/k)\mu(K \times [0;1]) = 0$. A folytonosságból adódóan pedig azt sem kell kikötni, hogy a és b racionálisak legyenek, vagyis μ eltűnik minden konvex alapú merőleges hasábon.

A H hipersíkot bármilyen állásúnak választhatjuk, hiszen az indukciós lépés használatához a triviálisan öröklődő tulajdonságok mellett csak azt kell bebizonyítanunk, hogy τ_H a hipersíkbeli egységkockán 0. Mivel beláttuk, hogy μ bármilyen állású kockán 0, ezért a H-beli egységkockára állítotton is. A τ_H-ra ez előbbi gondolatmenetet végigmondva azt kapjuk, hogy bármilyen állású, konvex alapú, merőleges hasábon

μ eltűnik. Ezúttal a merőlegesség feltételétől szeretnénk megszabadulni. A 4. ábra mutatja, hogy ezt hogyan tudjuk megtenni.

4. ábra. Hasábok átdarabolása



Vegyünk egy K kompakt, konvex halmazt egy hipersíkban, majd toljuk el a hipersíkon kívülre, és az eltolt példány minden pontját kössük össze az ősképével. Ha az eltolás vektora merőleges a síkra, akkor merőleges hasábot kapunk, általános esetben azonban nem. Ilyenkor vágjuk ketté a ferde hasábunkat az eltolás irányára merőleges hipersíkkal, majd az alap és fedőlapokat toljuk össze. Mivel ezek amúgy is egymás eltoltjai voltak, ezt meg tudjuk tenni.

Ez a módszer azonban csak akkor működik, amikor az eltolás irányára merőleges hipersíkkal az ábrán látható módon tudjuk kettévágni a hasábunkat, vagyis a hipersík elkerüli az eredeti konvex halmazt és az eltoltját is. Ezt akkor nem tudjuk megtenni, ha a hasábunk túl „széles”, tehát az alapjának átmérője nagy a magasságához képest. Ebben az esetben viszont az alapot kisebb átmérőjű halmazokra bontva a magasság nem változik, azonban az átmérő tetszőlegesen csökkenthető. A kapott „vékony” hasábokra aztán alkalmazható a fenti átdarabolás, melynek segítségével merőleges hasábokat kapunk, ezeken viszont a μ eltűnik, így az eredeti ferde hasábon is 0.

Vizsgáljuk meg, hogy egy P politóp és egy szakasz Minkowski-összege hogyan bomlik fel kezelhető darabokra. Legyen $v \in \mathbb{R}^n$, és tekintsük a $P + [\mathbf{0}; v]$ összeget. Legyenek a P politóp $L_1, \ldots, L_k$ hiperlapjainak külső normálvektorai rendre az $u_1, \ldots, u_k$ vektorok. Feltehetjük, hogy $L_1, \ldots, L_m$ azok a hiperlapok, melyekre $u_i \cdot v > 0$. A Minkowski-összegben ezekre a lapokra állított – ferde – hasábok fognak megjelenni:

$$P + [\mathbf{0}; v] = P \cup \big(L_1 + [\mathbf{0}; v]\big) \cup \ldots \cup \big(L_m + [\mathbf{0}; v]\big).$$

Mivel itt a tagok metszetei legfeljebb $(n-1)$-dimenziósak, így a μ egyszerűségéből adódik, hogy $\mu\big(P+[\mathbf{0}; v]\big) = \mu(P)+\mu\big(L_1+[\mathbf{0}; v]\big)+\ldots+\mu\big(L_m+[\mathbf{0}; v]\big)$. Hasábokon a μ eltűnik, így $\mu\big(P+[\mathbf{0}; v]\big) = \mu(P)$. Ennek az állításnak az iterálásával megkapjuk, hogy bármely P politópra és Z zonotópra $\mu(P + Z) = \mu(P)$. P-t egyetlen pontnak választva kapjuk, hogy bármely Z zonotópra $\mu(Z) = 0$. Mivel μ folytonos, ezért ez öröklődik határértékekre is, vagyis bármely K kompakt, konvex halmazra és Y zonoidra $\mu(Y) = 0$ és $\mu(K + Y) = \mu(K)$.

Ezen a ponton magától értetődő, hogy használjuk a 4.1.1 lemmát. Legyen tehát $K \in \mathcal{K}_n^c$, melynek támaszfüggvénye sima. A lemma szerint találunk Y_1 és Y_2 zonoidokat, melyekkel $K + Y_1 = Y_2$. Ebből pedig megkapjuk, hogy

$$\mu(K) = \mu(K + Y_1) = \mu(Y_2) = 0.$$

Általában egy középpontosan szimmetrikus, de nem sima támaszfüggvényű konvex halmaz támaszfüggvényét a maximumnormában tudjuk sima függvényekkel közelíteni, ezért a μ folytonossága garantálja, hogy $\mu(K) = 0$ minden $K \in K_n^c$ halmazra.

Bebizonyítjuk, hogy tetszőleges T szimplexre $\mu(T) = 0$. Az eltolásinvariancia miatt feltehető ugyanis, hogy T egyik csúcsa az origó, míg a többi csúcsot jelölje $v_1, \ldots v_n$. Legyen P parallelotóp a $[\mathbf{0}, v_1] + \cdots + [\mathbf{0}, v_n]$ Minkowski-összeg. P ugyan nem tengelypárhuzamos, de középpontosan szimmetrikus a $\frac{v_1+\cdots+v_n}{2}$ pontra, tehát $\mu(P) = 0$. Legyen $u = v_1+\cdots+v_n$, és vágjuk szét P-t két affin hipersík segítségével. Legyen H_1 az a hipersík, mely illeszkedik a $v_1, \ldots, v_n$ vektorokra, míg H_2 illeszkedjen az $u-v_1, \ldots, u-v_n$ vektorokra. Ekkor H_1 origót tartalmazó zárt féltere P-ből éppen az eredeti T szimplexet metszi ki. Hasonlóan a H_2 origót *nem* tartalmazó zárt féltere P-ből a $t_u(-T)$ halmazt metszi ki. A két hipersík közötti zárt tartomány metszete P-vel legyen P'. P' is középpontosan szimmetrikus, hiszen P-ből T-t és a középpontra szimmetrikus képét vágtuk le. Tehát $\mu(P') = 0$, és mivel a P darabjainak metszetei kisebb dimenziósak, így $0 = \mu(P) = \mu(T)+\mu(P')+\mu\big(t_u(-T)\big) = \mu(T)+\mu(-T)$. Itt kihasználjuk a feltételünket, miszerint $\mu(T) = \mu(-T)$, és kapjuk, hogy $\mu(T) = 0$.

Bármely P politóp felbomlik szimplexek uniójára úgy, hogy a szimplexek metszetei kisebb dimenziósak. Ezt indukcióval könnyen igazolhatjuk: a politóp belsejében rögzítsünk egy tetszőleges pontot, a hiperlapjait pedig az indukciós feltevés szerint felbontjuk, és minden kapott – alacsonyabb dimenziós – szimplexekhez csúcsként hozzávesszük a rögzített pontot. Mivel μ minden szimplexen eltűnik, így az egyszerűség miatt ezek unióján is, tehát $\mu(P) = 0$ minden politópra. Végül tetszőleges konvex halmazt közelíthetünk politópokkal, így a folytonosságból $\mu(K) = 0$ minden $K \in \mathcal{K}_n$-re. A tétel állítását bizonyítottuk. $\square$

Ezzel a technikai munka javát elvégeztük, és innentől könnyen kapjuk a szemléletesebb eredményeket.

4.2.3. Tétel. *Legyen μ egyszerű, folytonos, eltolásinvariáns kiértékelés* $\mathrm{Polycon}(n)$-*en. Ekkor létezik $c \in \mathbb{R}$, hogy minden $K \in \mathrm{Polycon}(n)$-re $\mu(K) + \mu(-K) = c\mu_n(K)$.*

Bizonyítás. Vezessük be az η kiértékelést az alábbi képlettel:

$$\eta(K) = \mu(K) + \mu(-K) - 2\mu\big([0;1]^n\big)\mu_n(K).$$

Ez az η egyszerű, folytonos és eltolásinvariáns, hiszen ilyen kiértékelések lineáris kombinációja. A szimmetrizáció miatt $\eta(K) = \eta(-K)$, és mivel levontuk az egységkocka mértékét, ezért $\eta\big([0;1]^n\big) = 0$. Tehát η teljesíti a 4.2.2 tétel feltételeit, így azonosan nulla. Ebből pedig $\mu(K) + \mu(-K) = 2\mu\big([0;1]^n\big)\mu_n(K)$ következik. $\square$

Az imént a 4.2.2 tételből vezettük le a 4.2.3 tételt, azonban az ellenkező irányú implikáció magától értetődő. Valóban, ha egy μ kiértékelés teljesíti a 4.2.2 feltételeit, akkor a 4.2.3 szerint $2\mu(K) = \mu(K) + \mu(-K) = c\mu_n(K)$. Ezt pedig a $[0;1]^n$ kockán kiértékelve kapjuk, hogy $c = 0$.

4.2.4. Tétel. *Legyen μ egyszerű, folytonos, eltolás- és $SO(n)$-invariáns kiértékelés* $\mathrm{Polycon}(n)$-*en. Ekkor létezik $c \in \mathbb{R}$, hogy $\mu(K) = c\mu_n(K)$ minden* $\mathrm{Polycon}(n)$-*beli K halmazra.*

Bizonyítás. Persze az állítást elég $\mathcal{K}_n$-beli halmazokra bebizonyítani. A 4.2.3 tétel alkalmazásával máris adódik, hogy $\mu(K)+\mu(-K) = c\mu_n(K)$. A bővebb csoportra vonatkozó invarianciánk kihasználásával bebizonyítjuk, hogy $\mu(K) = \mu(-K)$ minden $\mathcal{K}_n$-beli K halmazra. Ezzel készen leszünk, mert az előbbi egyenlőségből $\mu(K) = c/2\mu_n(K)$ adódik.

Amennyiben n páros, az origóra való középpontos tükrözés $SO(n)$-beli transzformáció, így nincs mit bizonyítani. A páratlan esetben kicsit bonyolultabb az érvelésünk.

Megmutatjuk, hogy bármely T szimplex felbontható politópok $P_1, \dots, P_k$ uniójára úgy, hogy a politópok metszetei kisebb dimenziósak, és minden politóp szimmetrikus egy hipersíkra nézve. Ezzel készen leszünk, hiszen tetszőleges halmaz *középpontos* tükörképe megkapható egy tetszőleges hipersíkra tükrözés, majd egy $SO(n)$-beli transzformáció kompozíciójaként. A vizsgált P_i politóp szimmetrikus egy tükrözés hipersíkjára, így az első transzformáció önmagára képezi, vagyis a $-P_i$ középpontosan szimmetrikus kép megkapható $SO(n)$-beli transzformációval, így $\mu(P_i) = \mu(-P_i)$. Ekkor a szimplexre $\mu(T) = \mu(P_1) + \dots + \mu(P_k) = \mu(-P_1) + \dots + \mu(-P_k) = \mu(-T)$. A 4.2.2 tétel bizonyításában látott módon minden politópot felbontunk szimplexek uniójára, amiből megkapjuk, hogy minden P politópra is $\mu(P) = \mu(-P)$. Végül tetszőleges konvex halmazt politópokkal közelítünk, és a kiértékelések folytonosságára hivatkozva kapjuk, hogy $\mu(K) = \mu(-K)$.

Fel kell tehát bontanunk egy tetszőleges T szimplexet hipersíkra szimmetrikus politópokra. Legyenek a szimplex hiperlapjai $L_1, \dots, L_{n+1}$, és beírt gömbjének középpontja x. Állítsunk x-ből merőlegest az L_i hiperlapra, legyen ennek talppontja x_i. Minden $1 \le i < j \le n+1$ párhoz definiáljuk a $P_{i,j} = \mathrm{conv}\{x, x_i, x_j, L_i \cap L_j\}$

politópot. Elemi geometria, hogy minden $P_{i,j}$ szimmetrikus az $\langle x, L_i \cap L_j\rangle$ hipersíkra, uniójuk az egész T, és bármely kettő metszete legfeljebb $(n-1)$-dimenziós. A felbontás létezését, és ezzel együtt a tételünket bebizonyítottuk. $\square$

Ez a tétel mutatja, hogy polikonvex halmazok körében az invarianciát az irányítástartó egybevágóságokra érdemes nézni. Mostantól – amennyiben nem pontosítunk – invariancia alatt ezt fogjuk érteni.

4.3. Belső térfogatok normalizálása

Mielőtt a 3.3.4 tétel mintájára továbbvinnénk az eredményünket, érdemes bebizonyítani, hogy a μ_k^n kiértékelések valójában nem függnek a befoglaló tér dimenziójától. Ezt $\mathrm{Par}(n)$-en már bizonyítottuk, $\mathrm{Polycon}(n)$ -en viszont még nem. A térfogat jellemzésével megszületett az eszköz, amellyel ez kényelmesen bizonyítható. A belső térfogatokat eddig nem definiáltuk az $n<k$ esetben. Legyen mostantól $n<k$ esetén μ_k^n azonosan nulla.

4.3.1. Tétel. *A polikonvex halmazokon értelmezett μ_k^n belső térfogatok függetlenek a befoglaló tér n dimenziójától.*

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy $l<n$ esetén μ_k^n megszorítása egy l-dimenziós altérre μ_k^l. A $k=0$ esetet már meggondoltuk korábban. Az n dimenzióra vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Tekintsük a következő indukciós feltevést: bármely $k \le l \le$ $\le (n-1)$-re μ_k^{n-1} megszorítása bármely l-dimenziós altérre éppen μ_k^l. Ez $n-1=0$ esetben triviálisan igaz. Indukciós lépésként szeretnénk ugyanezt bebizonyítani μ_k^n-re. Ehhez egy belső indukciót alkalmazunk l-re nézve, először is megvizsgáljuk az $l=k$ esetet.

Ha a μ_k^n kiértékelést megszorítjuk egy $l=k$ dimenziós *tengelypárhuzamos* affin altérre, akkor azon egy egyszerű, folytonos, invariáns kiértékelést kapunk. Ebből egyedül az egyszerűség nem triviális. Legyen K legfeljebb $(k-1)$-dimenziós kompakt, konvex halmaz. Megmutatjuk, hogy $\mu_k^n(K)=0$. $\mathrm{Graff}(n-k,K) \subseteq \mathrm{Graff}(n-k,\langle K\rangle)$, elég tehát megmutatni, hogy $\lambda_{n-k}^n\big(\mathrm{Graff}(n-k,\langle K\rangle)\big)=0$.

$$\lambda_{n-k}^n\big(\mathrm{Graff}(n-k,\langle K\rangle)\big) = \int_{\mathrm{Gr}(n-k,n)} \int_{U^\perp} \widehat{f_{\langle K\rangle}}(U,p)\; dp\; dU$$

Itt $f_{\langle K\rangle}$ a $\mathrm{Graff}\big(n-k,\langle K\rangle\big)$ halmaz karakterisztikus függvénye, vagyis pontosan azon affin altereken nem 0, melyek metszik $\langle K\rangle$-t. A belső integrálás mindig egy k-dimenziós euklideszi téren történik, de csak $\langle K\rangle$ merőleges vetületének pontjaiban kell nem nulla értéket integrálni. Viszont $\langle K\rangle$ vetülete is legfeljebb $(k-1)$-dimenziós, így az integrálandó függvény csak nullmértékű halmazon nem nulla. Tehát a belső integrál 0, függetlenül a külső integrál változójának választásától. A külső integrálban tehát az azonosan nulla függvényt integráljuk, vagyis nullát kapunk. Ezzel beláttuk μ_k^n megszorításának egyszerűségét.

Ott tartunk, hogy μ_k^n megszorítása teljesíti a 4.2.4 tétel feltételeit, tehát a k-dimenziós altér polikonvex halmazain $c\mu_k^k$-val egyenlő. A c konstans meghatározásához vegyünk egy tetszőleges k-dimenziós tengelypárhuzamos parallelotópot az alterünkben, ilyet az alterünk tengelypárhuzamossága miatt tudunk választani. Erre azonban tudjuk, hogy a két kiértékelésünk megegyezik, és nem nulla, amiből $c = 1$ következik.

Végül a tengelypárhuzamosságot elhagyhatjuk, hiszen mindkét kiértékelés invariáns. Ez alatt μ_k^k esetén azt értjük, hogy a k-dimenziós térfogat nem függ attól, hogy melyik altérben definiáljuk. Ezzel beláttuk n-re az $l = k$ esetet.

Tegyük fel, hogy valamilyen $k \leq l < n-1$-re beláttuk, hogy bármely l-dimenziós altérre megszorítva μ_k^n-et μ_k^l-et kapjuk. Vegyünk most egy $(l+1)$-dimenziós H affin alteret, és arra szorítsuk meg μ_k^n-et; jelölje ezt a kiértékelést ν. Szeretnénk belátni, hogy $\nu = \mu_k^{l+1}$. Vizsgáljuk meg, hogy mi ezeknek a megszorítása egy $L \subseteq H$ l-dimenziós affin altéren. Mivel ν-t μ_k^n-ből kaptuk, ezért az l-re vonatkozó indukciós feltevés szerint a megszorítása μ_k^l. Továbbá $l+1 \leq n-1$ miatt μ_k^{l+1} megszorítására a külső – n-re vonatkozó – indukciós feltevésből ugyancsak μ_k^l adódik. Vagyis a $\nu -$ $-\mu_k^{l+1}$ egyszerű, folytonos, invariáns kiértékelés a H-beli polikonvex halmazokon, így valamilyen c konstansra megegyezik a $c\mu_{l+1}^{l+1}$ kiértékeléssel. Az előző meggondoláshoz hasonlóan – H-t tengelypárhuzamosnak választva, majd invarianciára hivatkozva – a parallelotópokra már bizonyított állításból kapjuk, hogy $c = 0$. Ezzel beláttuk az l-re vonatkozó indukciós lépést, annak ismétlésével pedig az n-re vonatkozót.

Befejezésül tekintsük az $l < k$ esetet. Ekkor egy l-dimenziós altérre megszorítva μ_k^n-et azonosan nulla kiértékelést kapunk. Épp ezt láttuk be azzal, hogy egy k-dimenziós altérre vett megszorítás egyszerű. Mivel ekkor μ_k^l is azonosan nullának van definiálva, ezért a tételünk ekkor is igaz. $\square$

4.4. A Hadwiger-tétel

Ezek után teljes pompájában tudjuk kimondani a témakör legfontosabb tételét.

4.4.1. Tétel (Hadwiger)**.** *A $\mu_0, \ldots, \mu_n$ belső térfogatok bázisát alkotják* Polycon(n) *folytonos, invariáns kiértékeléseinek.*

Bizonyítás. A bizonyítás pontosan úgy fog történni, mint a 3.3.4 tétel bizonyítása.

Indukcióval bizonyítunk, az $n = 1$ esetet már kitárgyaltuk, ekkor igaz az állítás. Az indukciós lépésben vegyünk egy H hipersíkot, és szorítsuk meg erre a hipersíkra μ-t. A kapott kiértékelés H-n folytonos, és invariáns, tehát előáll $\sum_{i=0}^{n-1} c_i\mu_i$ alakban, ahol az invariancia miatt a c_i együtthatók nem függnek a H választásától. Az egész téren a $\mu - \sum_{i=0}^{n-1} c_i\mu_i$ kiértékelés tehát egyszerű, folytonos, és invariáns, így a 4.2.4 tétel szerint $c_n\mu_n$-nel egyenlő. $\square$

A belső térfogatok most is felismerhetőek a homogenitásukról, melyet pontosan úgy definiálunk, mint parallelotópokon értelmezett kiértékeléseknél. Ennek bizonyítása pontosan megegyezik a 3.3.5 tétel bizonyításával, és közvetlen következménye a Hadwiger-tételnek.

4.4.2. Tétel. *Legyen* $0 \leq k \leq n$, *és* μ *kiértékelés* Polycon(n)*-en, mely* k*-adfokú homogén, folytonos, és invariáns. Ekkor létezik* $c \in \mathbb{R}$, *melyre* $\mu = c\mu_k$. $\square$

A 3. fejezetben fáradságos munkával felépítettük a polikonvex halmazok belső térfogatainak fogalmát, és a 4. fejezetben bebizonyítottuk a Hadwiger-tételt, ami bizonyos szempontból az elmélet csúcsa, hiszen pont azt mondja ki, hogy a belső térfogatokon keresztül megértettük a polikonvex halmazok összes folytonos, invariáns kiértékelését.

A következő fejezetben visszatekintünk bizonyos korábbi tételekre és fogalmakra, melyeket a Hadwiger-tétel segítségével tovább finomítunk. Ez egyrészt jól fogja demonstrálni a tétel – és a kiépített elmélet – erejét, másrészt még tisztább képet ad a belső térfogatok fogalmáról.

5. Alkalmazások

Először elevenítsük fel a konvex halmazok paralleltartományainak térfogatát leíró Steiner–Minkowski-tételt.

5.1. A Steiner–Minkowski-tétel még egyszer

A 2.4.1 tétel azt mondta ki, hogy egy K kompakt, konvex halmaz zárt paralleltartományának területe n-edfokú polinomja a tartomány sugarának. A polinom együtthatói persze K-tól függő valós számok:

$$\mu_n\big(\overline{B}(K,r)\big) = \sum_{i=0}^{n} m_i(K) r^i.$$

Bebizonyítjuk, hogy az m_i függvények kiértékelések. Legyenek $K, L \in \mathcal{K}_n$ olyanok, hogy $K \cup L$ is konvex. A definíció triviális következménye, hogy $\overline{B}(K \cup L, r) = \overline{B}(K, r) \cup \overline{B}(L, r)$, és megmutatjuk, hogy a metszetre is $\overline{B}(K \cap L, r) = \overline{B}(K, r) \cap \overline{B}(L, r)$. A bal oldalon azok a pontok vannak, melyektől van legfeljebb r távolságra $K \cap L$-beli pont, míg a jobb oldalon azok, melyektől van legfejebb r távolságra L-beli és K-beli pont is. Ebből a $\subseteq$ tartalmazás máris látszik. Legyen $x \in \overline{B}(K,r) \cap \overline{B}(L,r)$, és $k \in K$, $l \in L$ olyan pontok, hogy $k, l \in \overline{B}(x,r)$. Ekkor a $[k;l]$ szakasz végig $\overline{B}(x,r)$-ben halad. A 3.5.1 lemma bizonyításában már megmutattuk, hogy ha két kompakt konvex halmaz uniója is konvex, és adott egy olyan szakasz, melynek egyik végpontja az egyik, a másik végpontja a másik konvex halmazban van, akkor a szakasznak van pontja a konvex halmazok metszetében. Ez a szakasz összefüggőségén és a konvex halmazok kompaktságán múlott. Most ugyanezt felhasználva $[k;l] \cap (L \cap K) \neq \emptyset$, így $\overline{B}(x,r) \cap (L \cap K) \neq \emptyset$, tehát $x \in \overline{B}(K \cap L, r)$, amivel a $\supseteq$ tartalmazást is beláttuk. Ezt összevetve azzal, hogy μ_n kiértékelés:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} m_i(K \cup L) r^i &= \mu_n\big(\overline{B}(K \cup L, r)\big) = \mu_n\big(\overline{B}(K,r) \cup \overline{B}(K,r)\big) = \\ &= \mu_n\big(\overline{B}(K,r)\big) + \mu_n\big(\overline{B}(L,r)\big) - \mu_n\big(\underbrace{\overline{B}(K,r) \cap \overline{B}(L,r)}_{=\overline{B}(K \cap L, r)}\big) = \\ &= \sum_{i=0}^{n} \big(m_i(K) + m_i(L) - m_i(K \cap L)\big) r^i.\end{aligned}$$

Ezt minden $r \geq 0$-ra elmondhatjuk, így a két polinom együtthatói megegyeznek, tehát minden i-re $m_i(K \cup L) = m_i(K) + m_i(L) - m_i(K \cap L)$. Következésképpen m_i kiértékelés a konvex halmazokon. Megmutatjuk, hogy folytonos is. Legyenek $K_k \in \mathcal{K}_n$ konvex halmazok, melyek a Hausdorff-metrikában konvergálnak a $K \in \mathcal{K}_n$ halmazhoz. Ekkor a $\overline{B}(.,r)$ operátor távolságtartása miatt $\overline{B}(K_k, r) \to \overline{B}(K,r)$, és a μ_n folytonossága miatt $\mu\big(\overline{B}(K_k,r)\big) \to \mu_n\big(\overline{B}(K,r)\big)$. Vegyünk fel $r_0, r_1, \ldots, r_n$ különböző pozitív valós számokat, és képezzünk belőlük Vandermond típusú mátrixot, és jelölje $\vec{m}(K)$ az $m_i(K)$ együtthatókból képzett oszlopvektort, azaz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & r_0 & \dots & r_0^n \\ 1 & r_1 & \dots & r_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & r_n & \dots & r_n^n \end{pmatrix}, \quad \vec{m}(K) = \begin{pmatrix} m_0(K) \\ m_1(K) \\ \vdots \\ m_n(K) \end{pmatrix}.$$

Ekkor a térfogatok konvergenciáját felírva az $r_0, \dots, r_n$ sugarakkal azt kapjuk, hogy $A\vec{m}(K_k) \to A\vec{m}(K)$. Az A mátrix invertálható, ezért $\vec{m}(K_k) \to \vec{m}(K)$, vagyis a m_i kiértékelések folytonosak. Ekkor pedig kiterjeszthetők Polycon(n)-re. Az invarianciájuk teljesen egyértelmű μ_n invarianciájából.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen homogenitást kapunk m_i-re. Vegyünk egy α arányú φ középpontos nagyítást.

$$\mu_n\big(\overline{B}(\varphi(K), r)\big) = \mu_n\Big(\varphi\big(\overline{B}(K, r/\alpha)\big)\Big) = \alpha^n \left(\sum_{i=0}^n m_i(K)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^i\right) = \sum_{i=0}^n m_i(K)\alpha^{n-i}r^i$$

A 4.4.2 tételből következik, hogy $m_i(K) = c_i\mu_{n-i}(K)$. Vagyis azt látjuk, hogy a Steiner–Minkowski-tételben réges-rég bevezetett együtthatók konstans erejéig megegyeznek a belső térfogatokkal, melyeket a K-t metsző alterek mértékeként definiáltunk. Ezt az igazán figyelemre méltó kapcsolatot a Hadwiger-tétel segítségével könnyen igazoltuk. A feltételek ellenőrzéséhez nem volt szükség haladó eszközökre, gyorsan, kényelmesen be tudtuk őket bizonyítani.

Határozzuk meg a c_i konstansokat. Érdemes felidézni a 2. fejezetből, hogy a $m_n(K)$ főegyüttható ω_n, míg $\mu_0(K) = 1$, tehát $c_n = \omega_n$. Mint ki fog derülni, ez nem elszigetelt jelenség. Vegyük ugyanis a $C = [0;1]^n$ egységkockát. Erre a parallelotópoknál tárgyaltak miatt tudjuk, hogy $\mu_{n-i}(C) = \sigma_{n-i}(1, \dots, 1) = \binom{n}{n-i}$. Az $m_i(C)$ együttható meghatározása már nem ennyire könnyű, de továbbra is kombinatorikus gondolatmenetet igényel. A paralleltartomány normálfelbontásából látszik, hogy az $(n-i)$-dimenziós lapoknál lesz a térfogat r-nek i-edik hatványa. Ezeket csoportosítsuk úgy, hogy az egymásba tolható $(n-i)$-dimenziós lapok kerüljenek egy csoportba. A csoportok száma megegyezik az $(n-i)$-dimenziós „koordináta-alterek” számával, ami $\binom{n}{n-i}$. Továbbá az egy csoportba tartozó normáltartományokat összetolva éppen egy $[0;1]^{n-i} \times \overline{B_i}(\mathbf{0}, r)$ alakú halmazt kapunk, ahol $\overline{B_i}(\mathbf{0}, r)$ egy i-dimenziós, origó középpontú, r sugarú gömb a csoportosított $(n-i)$-dimenziós alterek merőleges kiegészítőjében. Ennek a szorzathalmaznak a térfogata $\omega_i r^i$, tehát összevonás után az r^i tag együtthatója $\binom{n}{n-i}\omega_i$. Vagyis a $m_i(C) = c_i\mu_{n-i}(C)$ egyenletből $c_i = \omega_i$ adódik.

5.1.1. Tétel. *A Steiner–Minkowski-tételben szereplő polinom $m_i(K)$ együtthatóira $m_i(K) = \omega_i\mu_{n-i}(K)$. Fordítva megfogalmazva: egy $K \in \mathcal{K}_n$ konvex test paralleltartományának térfogatára*

$$\mu_n\big(\overline{B}(K, r)\big) = \sum_{i=0}^n \omega_i\mu_{n-i}(K)r^i. \ \square$$

5.2. Belső térfogatok még egyszer

Az előbbi kapcsolat segítségével kényelmesen meg tudjuk határozni az egységgömb belső térfogatait. A paralleltartomány térfogata $\omega_n(1+r)^n$, amiből a megfelelő együttható leolvasásával

$$\mu_{n-i}(\mathbf{B}^n) = \frac{\omega_n}{\omega_i}\binom{n}{i} = \omega_{n-i}\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}.$$

Az $\left[{n \atop k}\right]$ jelölést még a 3.4 szakaszban vezettük be az $\frac{\omega_n}{\omega_k\omega_{n-k}}\binom{n}{k}$ kifejezés rövidítésére, ami éppen a $\mathrm{Gr}(k,n)$ tér mértéke volt a ν_k^n mérték szerint.

A belső térfogatok konvex halmazokra történő kiterjesztésénél a definícióban szerepelt a C_k^n konstans:

$$\mu_{n-k}^n(K) = C_k^n \lambda_k^n\big(\mathrm{Graff}(k,K)\big).$$

A C_k^n konstans kiszámításához válasszuk K-t a $\mathbf{D}^n = \overline{\mathbf{B}^n}$ tömör, zárt egységgömbnek. Ekkor $\mu_{n-k}^n(\mathbf{D}^n) = \omega_{n-k}\left[{n \atop k}\right]$. Írjuk fel a $\lambda_k^n\big(\mathrm{Graff}(k,\mathbf{D}^n)\big)$ mértéket integrálként:

$$\lambda_k^n\big(\mathrm{Graff}(k,\mathbf{D}^n)\big) = \int_{\mathrm{Gr}(k,n)} \int_{U^\perp} \mu_0\big(\mathbf{D}^n \cap t_p(U)\big)\; dp\; d\nu_k^n(U).$$

Ahogyan már sokszor láttuk, a belső integrál ω_{n-k}, hiszen az integrálandó függvény pontosan akkor 1, ha p a gömb merőleges vetületébe esik, és ennek a vetületnek a térfogata ω_{n-k}. Ekkor viszont a külső integrálban konstans függvényt integrálunk, és így

$$\lambda_k^n\big(\mathrm{Graff}(k,\mathbf{D}^n)\big) = \nu_k^n\big(\mathrm{Gr}(k,n)\big)\omega_{n-k} = \omega_{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Ebből pedig $C_k^n = 1$ adódik, ami ismét figyelemre méltó. Grassmann-sokaságokon a mérték bevezetésénél kezdetben $\mathrm{Gr}(k,n)$-en olyan mértékből indultunk, melyre a Cauchy-formula egyszerű alakot öltött, majd a megkonstruált ν_k^n mértékünket intuitívan normáltuk. Azt látjuk, hogy ez olyan jól sikerült, hogy a belső térfogatok pontosan megegyeznek a konvex halmazt metsző megfelelő dimenziós affin alterek halmazának mértékével.

A 3.5 szakaszban két formulánkban is használtuk a C_k^n konstansokat, ezeket a formulákat érdemes most újra elővenni. Az első formula azt fogalmazta meg, hogy a belső térfogat megkapható a $\mu_0(K \cap V)$ függvény integrálásával, ahol a V altér befut valami affin Grassmann-sokaságot. Mint már akkor is kiemeltük, ez a Crofton-formulára emlékeztet abban, hogy az alterekkel vett metszeteket vizsgálja. Ez a formula minden *polikonvex* halmazra érvényes, és a $C_k^n = 1$ konstans elhagyásával az alábbi módon írható fel:

$$\mu_{n-k}(L) = \int_{\mathrm{Graff}(k,n)} \mu_0(L \cap V)\; d\lambda_k^n(V). \tag{5.2.1}$$

A másik formulánk azt fogalmazta meg, hogy *konvex* K-ra a k-dimenziós alterekre vett vetületek k-dimenziós térfogatainak átalaga μ_k. Ez a Cauchy-formulát általánosító 3.5.3 állítás is egyszerűbb alakot ölt:

$$\mu_k(K) = \int_{\mathrm{Gr}(k,n)} \mu_k\big(p_U(K)\big)\, d\nu_k^n(U). \tag{5.2.2}$$

Már a konstansok eltűnése is előrelépés, de a Hadwiger-tétel segítségével mindkét formulánkat tovább általánosíthatjuk.

5.2.1. Tétel. *Tetszőleges* $0 \le i, j \le n$ *esetén minden* $K \in \mathrm{Polycon}(n)$*-re*

$$\int_{\mathrm{Graff}(n-i,n)} \mu_j(K \cap V)\, d\lambda_{n-i}^n(V) = \begin{bmatrix} i+j \\ j \end{bmatrix} \mu_{i+j}(K).$$

Ez $j = 0$, $i = n - k$ választással visszaadja az 5.2.1 egyenlőséget.

Bizonyítás. Ha $i + j > n$, akkor mindkét oldal nulla, tehát igaz az állítás. Tegyük fel tehát, hogy $i + j \le n$. Vezessük be a bal oldali integrálra az $\eta(K)$ jelölést. Az integrálon belül írjuk fel $\mu_j(K \cap V)$-re az 5.2.1 formulát:

$$\begin{aligned}
\eta(K) = \int_{\mathrm{Graff}(n-i,n)} \mu_j(K \cap V)\, d\lambda_{n-i}^n(V) = \\
\int_{\mathrm{Graff}(n-i,n)} \left(\int_{\mathrm{Graff}(n-i-j,V)} \mu_0\big((K \cap V) \cap U\big)\, d\lambda_{n-i-j}^{n-i}(U) \right) d\lambda_{n-i}^n(V) = \\
\int_{\mathrm{Graff}(n-i,n)} \left(\int_{\mathrm{Graff}(n-i-j,V)} \mu_0(K \cap U)\, d\lambda_{n-j}^{n-i}(U) \right) d\lambda_{n-i}^n(V) = \\
\int_{\mathrm{Gr}(n-i,n)} \int_{V_0^\perp} \int_{\mathrm{Gr}(n-i-j,V_0)} \int_{U_0^\perp \cap V_0} \mu_0(K \cap U_0 + u + v)\, du\, d\nu_{n-i-j}^{n-i}(U_0)\, dv\, d\nu_{n-i}^n(V_0) = \\
\int_{\mathrm{Gr}(n-i,n)} \int_{\mathrm{Gr}(n-i-j,V_0)} \int_{V_0^\perp} \int_{U_0^\perp \cap V_0} \mu_0(K \cap U_0 + u + v)\, du\, dv\, d\nu_{n-i-j}^{n-i}(U_0)\, d\nu_{n-i}^n(V_0) = \\
\int_{\mathrm{Gr}(n-i,n)} \int_{\mathrm{Gr}(n-i-j,V_0)} \int_{\underbrace{V_0^\perp \oplus (U_0^\perp \cap V_0)}_{=U_0^\perp}} \mu_0(K \cap U_0 + w)\, dw\, d\nu_{n-i-j}^{n-i}(U_0)\, d\nu_{n-i}^n(V_0) = \\
\int_{\mathrm{Gr}(n-i,n)} \int_{\mathrm{Gr}(n-i-j,V_0)} \int_{U_0^\perp} I_{K|U_0^\perp}(w)\, dw\, d\nu_{n-i-j}^{n-i}(U_0)\, d\nu_{n-i}^n(V_0) = \\
\int_{\mathrm{Gr}(n-i,n)} \int_{\mathrm{Gr}(n-i-j,V_0)} \mu_{i+j}(K|U_0^\perp)\, d\nu_{n-i-j}^{n-i}(U_0)\, d\nu_{n-i}^n(V_0).
\end{aligned}$$

Itt $K|U_0^\perp$ jelöli a K merőleges vetületét az $U_0^\perp$ altérre. A μ_{i+j} kiértékelés folytonos, $(i + j)$-edfokú homogén, és ezek a tulajdonságok az integráláson keresztül öröklődnek η-ra. A mértékek invarianciája miatt η invariáns is, ezért a 4.4.2 tétel szerint $\eta(K) = c\mu_{i+j}(K)$.

A konstans meghatározásához írjuk fel az egyenlőséget a $\mathbf{D}^n$ egységgömbre. $\mu_{i+j}(\mathbf{D}^n) = \omega_{i+j}\left[{n \atop i+j}\right]$, és a $\mathbf{D}^n$ vetületének térfogata bármely $(i+j)$-dimenziós altér esetén $\omega_{i+j} = \mu_{i+j}(\mathbf{D}^n|U_0^\perp)$. Vagyis a konstans ω_{i+j} függvényt integráljuk kétszer, így

$$\eta(\mathbf{D}^n) = \omega_{i+j}\nu_{n-i-j}^{n-i}\big(\mathrm{Gr}(n-i-j, V_0)\big)\nu_{n-i}^{n}\big(\mathrm{Gr}(n-i,n)\big) = \omega_{i+j}\begin{bmatrix} n \\ n-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n-i \\ n-i-j \end{bmatrix}.$$

Mindezeket összevetve megkapjuk c értékét:

$$\begin{aligned} c &= \begin{bmatrix} n \\ i+j \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} n \\ n-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n-i \\ n-i-j \end{bmatrix} = \\ &= \left(\frac{\omega_n}{\omega_{i+j}\omega_{n-i-j}}\binom{n}{i+j}\right)^{-1}\left(\frac{\omega_n}{\omega_i\omega_{n-i}}\binom{n}{i}\right)\left(\frac{\omega_{n-i}}{\omega_j\omega_{n-i-j}}\binom{n-i}{n-i-j}\right) = \\ &= \frac{\omega_{i+j}}{\omega_i\omega_j}\binom{i+j}{j} = \begin{bmatrix} i+j \\ j \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

5.2.2. Tétel. *Legyenek k és l egész számok, melyekre $0 \leq k \leq l \leq n$, és legyen $K \in \mathcal{K}_n$. Ekkor*

$$\int_{\mathrm{Gr}(l,n)} \mu_k(K|V)\ d\nu_l^n(V) = \begin{bmatrix} n-k \\ l-k \end{bmatrix}\mu_k(K).$$

Az $l = k$ választással visszakapjuk az 5.2.2 egyenlőséget.

Bizonyítás. Legyen most is $\eta(K) = \int_{\mathrm{Gr}(l,n)} \mu_k(K|V)\ d\nu_l^n(V)$, ez folytonos, invariáns és k-adfokú homogén, tehát $\eta(K) = c\mu_k(K)$. A konstans meghatározásához ismét legyen $K = \mathbf{D}^n$. Az egyenlőséget felírva c kiszámítható:

$$c\ \omega_k\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \omega_k\begin{bmatrix} l \\ k \end{bmatrix}\nu_l^n\big(\mathrm{Gr}(l,n)\big)$$

$$c = \begin{bmatrix} l \\ k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{-1} = \ldots = \begin{bmatrix} n-k \\ l-k \end{bmatrix}.$$

□

5.3. A μ_0 kiértékelésről

Még a 3.5 szakaszban megjegyeztük, hogy μ_0 az az egyértelmű konvex-folytonos kiértékelés, mely minden $\mathcal{K}_n$-beli halmazon 1. A μ_0 kiszámítására mutatunk most egy új módszert. Tekintsük $\mathbb{R}^n$-ben az első koordinátához tartozó $t = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \in \mathbb{R}^n | x_2 = \ldots = x_n = 0\}$ tengelyt, és jelölje az erre merőleges hipersíkokat H_x, ahol $H_x = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 = x\}$. Legyen adott a $K \in \mathrm{Polycon}(n)$ halmaz, erre legyen $f_K(x) = \mu_0(H_x \cap K)$, vagyis μ_0 értéke a K halmaz x-nél vett szeletén.

Legyen továbbá $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges, a Polycon(1) hálóra egyszerű függvény, ekkor definiáljuk rá az $L(f) = \sum_{x\in R}(f(x) - f(x+0))$ funkcionált. $f(x+0)$ alatt az f függvény x-beli jobboldali határértékét értjük. Ez értelmes, mert a szummában f egyszerűsége miatt csak véges sok nem nulla tag van. Azt állítjuk, hogy az $L(f_K)$ leképezés kiértékelés a K változóban. Először írjuk fel az $f_{K_1\cap K_2}$ függvényt:

$$\begin{aligned} f_{K_1\cup K_2}(x) = \mu_0\big(H_x \cap (K_1 \cap K_2)\big) &= \mu_0(H_x \cap K_1) + \mu_0(H_x \cap K_2) - \\ &- \mu_0\big(H_x \cap (K_1 \cap K_2)\big) = f_{K_1}(x) + f_{K_2}(x) - f_{K_1\cap K_2}(x). \end{aligned}$$

Mivel az L leképezés lineáris, $L(f_K)$ kiértékelés a K változóban. Az eltolásinvariancia triviális, és az is látszik μ folytonosságából, hogy $K_k \to K$ esetén $f_{K_k} \to f_K$ x-ben egyenletesen, ebből pedig már következik, hogy $L(f_{K_k}) \to L(f_K)$, vagyis a kiértékelésünk folytonos. A μ_0 nulladfokú homogenitása miatt hasonlóságnál f_K csak lineárisan átparamétereződik, ami $L(f_K)$-t nem befolyásolja, a kapott kiértékelés tehát szintén nulladfokú homogén, így $L(f_K) = c\mu_0(K)$. A konstans meghatározásához tetszőleges $\mathcal{K}_n$-beli K halmazt vehetünk, amihez tartozó f_H függvény egy intervallum karakterisztikus függvénye. Ez csak a jobboldali végpontban ad nemnulla tagot az $L(f_K)$ összegbe, ott pontosan 1-et. Tehát $L(f_K) = 1$, és így $c = 1$.

5.3.1. Állítás. *Legyen* $K \in \mathrm{Polycon}(n)$*, ekkor az előbb definiált jelölésekkel* $\mu_0(K) = L(f_K)$. $\square$

Ezt fogjuk használni a következő tételünk bizonyításához. Egy P politóp határa ugyan nem konvex halmaz, de polikonvex, hiszen a hiperlapok $\mathcal{K}_n$-beli halmazok. Szeretnénk meghatározni μ_0-t egy – konvex – politóp határán.

5.3.2. Állítás. *Legyen P egy n-dimenziós konvex politóp, vagyis $P \in \mathcal{P}_n^+$. Ekkor a határára*

$$\mu_0(\partial P) = 1 - (-1)^n.$$

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk, és az előbbi állítást használjuk. Az $n = 1$ esetben a politópunk egy zárt szakasz, melynek határa két pont, ezek unióján μ_0 a 2 értéket veszi fel, összhangban a tétel állításával. Az általános esetben tekintsük a $H_x \cap \partial P$ halmazt, vagyis a határ metszetét egy hipersíkkal. Ez majdnem mindig megegyezik a $\partial(H_x \cap P)$ halmazzal, vagyis a hipersíkkal vett metszet határával. Ez csak akkor nem igaz, ha H_x illeszkedik P egy lapjára, ekkor $H_x \cap \partial P$ maga a hiperlap. A politóp vetülete a t koordináta-tengelyre egy zárt intervallum, jelölje végpontjait a és b. Az $x \in (a;b)$ belső pontokhoz tartozó H_x nem illeszkedhet hiperlapra, így ott az indukciós feltevés szerint

$$\mu_0(H_x \cap \partial P) = \mu_0\big(\partial(H_x \cap P)\big) = 1 - (-1)^{n-1}.$$

Az a és b pontokban a hipersík és ∂P metszete konvex politóp (előfordulhat, hogy egyetlen pont), tehát itt $f_{\partial P}(X) = \mu_0(H_x \cap \partial P) = 1$. Az $[a;b]$ intervallumon kívül pedig $f_{\partial P}$ nulla. Azt látjuk, hogy az $f_{\partial P}$ az a és b pontokon kívül mindenhol jobbról folytonos, tehát az $L(f_{\partial P})$ kiszámításánál csak ezek a pontok számítanak.

Az $f_{\partial P}(a) = 1,\ f_{\partial P}(a+0) = 1-(-1)^{n-1},\ f_{\partial P}(b) = 1,\ f_{\partial P}(b+0) = 0$ értékeket kiszámítva

$$\mu_0(\partial P) = L(f_{\partial P}) = 1 - \bigl(1-(-1)^{n-1}\bigr) + 1 - 0 = 1-(-1)^n.$$

□

A 3.1 szakasz legvégén, a 3.1.1 tétel következményeként beláttuk, hogy egy véges metszet- és uniózárt L halmazrendszerről egy kiértékelés kiterjed arra a $B(L)$ legszűkebb halmazrendszerre is, mely L-et tartalmazza, de zárt a halmazok különbségének képzésére is. Mindeddig erre nem volt szükségünk, most azonban kényelmesebb lesz, ha hivatkozunk erre. Mivel egy $P \in \mathcal{P}_n^+$ politóp határa polikonvex halmaz, a belseje megkapható polikonvex halmazok különbségének képzésével. A μ_0 kiértékelés kiterjed $B\bigl(\mathrm{Polycon}(n)\bigr)$-re, ezért felírhatjuk $\mu_0(P)$-t összegként:

$$\mu_0(P) = \mu_0(\partial P) + \mu_0\bigl(\mathrm{int}(P)\bigr),$$

$$\mu_0(\mathrm{int}(P)) = (-1)^n.$$

Ez csak n-dimenziós politópokra igaz, azonban bármely politópot tekinthetünk az általa generált affin altérben. Jelölje $\dim(P)$ ennek az affin altérnek a dimenzióját, így adódik a következő állítás.

5.3.3. Állítás. *Legyen $P \in \mathcal{P}_n$ konvex politóp, ekkor*

$$\mu_0(\mathrm{relint}(P)) = (-1)^{\dim(P)}.$$

*Poliéder*en politópok véges unióját értjük. Poliéderekre is igaz, hogy a határuk polikonvex, tehát vizsgálhatjuk μ_0-t poliéderek határán is. Egy politóp lapjairól tudunk beszélni, hiszen az elemi konvex geometriában tetszőleges konvex halmaz lapjait lehet definiálni, mint a támaszhipersíkok metszeteit a halmazzal. Poliéderekre a fogalmat nem igazán szeretnénk bevezetni, ezért azt fogjuk mondani, hogy az $\{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ halmazrendszer a P poliédernek *laprendszere*, ha a következő intuitív feltételeknek eleget tesz:

(1) minden L_i konvex politóp,

(2) $\bigcup_{i=1}^k \mathrm{relint}(L_i) = P$,

(3) ha $i \neq j$, akkor $\mathrm{relint}(L_i) \cap \mathrm{relint}(L_j) = \emptyset$.

5.3.4. Tétel. *Legyen a P poliédernek $\{L_1, \dots, L_k\}$ laprendszere, és legyen f_k az L_i-k közül a k-dimenziósak száma. Ekkor $\mu_0(P)$ felírható a következő formulával:*

$$\mu_0(P) = f_0 + f_1 - f_2 + \dots$$

Bizonyítás. A formula azonnal adódik abból, hogy a μ_0 kiértékelést felírjuk a $P = \bigcup_{i=1}^k \mathrm{relint}(L_i)$ diszjunkt felbontásra, ahol μ_0 minden tagon értelmes, hiszen kiterjesztettük $B\bigl(\mathrm{Polycon}(n)\bigr)$-re. Az unió tagjain μ_0 persze az 5.3.3 állítás miatt ± 1 a dimenzió paritásától függően, így az azonos dimenziós tagokat összevonva kapjuk az állítást. □

Ez a tétel mutatja, hogy a μ_0 kiértékelés nem más, mint az Euler-karakterisztika. Általában az Euler-karakterisztikát az $f_0 - f_1 + \ldots$ összeg segítségével definiálják. Az általunk felépített elméletből könnyen megkapjuk az Euler-karakterisztika néhány nevezetes tulajdonságát. Mivel megegyezik a μ_0 belső térfogattal, ezért azonnal látszik, hogy független a laprendszer választásától, az 5.3.2 tétel pedig pont azt a híres tényt fogalmazza meg, hogy konvex politópok felületére a dimenzió paritásától függően 0 vagy 2.

5.4. Rácspontok konvex halmazokban

Zárásként ismét egy geometriai valószínűségszámítási problémát mutatunk be. Vegyünk $\mathbb{R}^n$-ben egy tetszőleges $v_1, \ldots, v_n$ bázist, és jelölje $\mathcal{L}$ a bázishoz tartozó rácspontokat, azaz legyen $\mathcal{L} = \{z_1 v_1 + \ldots + z_n v_n | z_i \in \mathbb{Z}\}$. Legyen K egy konvex, kompakt halmaz. Szeretnénk megmondani, hogy K egy „véletlenszerűen" elhelyezett példánya várhatóan hány rácspontot tartalmaz. Ezt a μ_0 segítségével könnyen tudjuk mérni, $\mu_0(K \cap \mathcal{L})$ éppen a K-beli rácspontok száma. A véletlenszerű elhelyezést kell alaposabban magyarázni.

Kezdetnek foglalkozzunk csupán K eltolt példányaival. A gond az, hogy a várható értéket nem tudjuk az $\int_{\mathbb{R}^n} \mu_0(t_x(K) \cap \mathcal{L})\, dx$ integrállal értelmezni, hiszen az divergál.

Legyen $C = \{x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n | x_i \in [0;1)\}$ a rács egy cellája. Maga az $\mathcal{L}$ rács szimmetrikus az $\mathcal{L}$-beli vektorokkal való eltolásra, ezért $x - y \in \mathcal{L}$ esetén $\mu_0(t_x(K) \cap \cap \mathcal{L}) = \mu_0(t_y(K) \cap \mathcal{L})$. Minden $x \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz egyértelműen találunk egy $x' \in \in C$ vektort, melyre $x - x' \in \mathcal{L}$, ami azt jelenti, hogy a várható érték definiálásánál szorítkozhatunk egyszerűen a C-beli vektorokkal való eltolásokra. Ekkor az integrálás már korlátos halmazon történik, így az integrál nem fog divergálni. Ha C helyett a zárt $\overline{C}$ halmazból választjuk véletlenszerűen az x vektort, akkor csak nullmértékű halmazt – a határra eső vektorokat – dupláztuk meg, ezért a várható érték nem változik. Éppen ezért mostantól C alatt értsük a zárt cellát.

5.4.1. Tétel. *Jelölje X_K a $t_x(K)$ halmazba eső $\mathcal{L}$-beli rácspontok számát, ahol $x \in \in \mathbb{R}^n$ véletlen vektor. Ekkor X_K várható értékére*

$$\mathbf{E}(X_K) = \frac{\mu_n(K)}{\mu_n(C)}.$$

Bizonyítás. Mint az előbb kifejtettük, a várható értéket egy C-n vett integrál adja:

$$\mathbf{E}(X_K) = \frac{1}{\mu_n(C)} \int_C \mu_0(t_x(K) \cap \mathcal{L})\, dx.$$

Ebből kiolvashatjuk, hogy $\mathbf{E}(X_K)$ eltolásinvariáns kiértékelés K-ban. Az egyszerűsége is magától értetődő, hiszen egy kisebb dimenziós konvex halmaz 0 valószínűséggel fogja metszeni a rácsot. Az is világos, hogy ez a kiértékelés monoton növő, vagyis bővebb halmazon nagyobb értéket vesz fel. Ugyan a térfogatot a monotonitás segítségével csak parallelotópokra karakterizáltuk, de hasonló tétel – azonos bizonyítással – igaz polikonvex környezetben is. Nevezetesen Polycon(n)-en bármely eltolásinvariáns, monoton, egyszerű kiértékelése konstans erejéig megegyezik a térfogattal. Ezt parallelotópokra beláttuk, és kihasználjuk, hogy a $\mathcal{K}_n$-beli halmazok Jordan-mérhetőek, és a Jordan-mértéket parallelotópok segítségével értelmezzük. A monotonitásból azonnal adódik, hogy a kiértékelésünk a konvex halmazokon is lényegében egybeesik a térfogattal. Valójában polikonvex környezetben monotonitással sokkal könnyebb karakterizálni a térfogatot. Azért nem így jártunk el, mert a monotonitás nem öröklődik lineáris kombinációkra, így a Hadwiger-tételhez nem tudtuk volna feltételként használni.

Tehát $\mathbf{E}(X_K) = c\mu_n(K)$. A konstans meghatározásához legyen $K = \varphi(C)$, ahol φ az origó középpontú, $k \in \mathbb{N}$ arányú nagyítás. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$-re

$$k^n \leq \mu_0\big(t_x\big(\varphi(C)\big) \cap \mathcal{L}\big) \leq (k+1)^n.$$

Az x vektor felbomlik $x = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$ alakban. Ekkor egy $z_1v_1 + \ldots + z_nv_n \in \mathcal{L}$ rácspont pontosan akkor esik $t_x\big(\varphi(C)\big)$-be, ha minden i-re $x_i \leq z_i \leq k + x_i$. A z_i választására így minden i esetén k vagy $k+1$ lehetőség van, tehát az összes $t_x\big(\varphi(C)\big)$-be eső rácspontok száma biztosan k^n és $(k+1)^n$ közé esik.

Ezek viszont becslést adnak a várható értékre is, tehát

$$k^n \leq \mathbf{E}(X_{\varphi(C)}) = c\ \mu_n\big(\varphi(C)\big) = ck^n\mu_n(C) \leq (k+1)^n.$$

Mivel ezt a becslést minden $k \in \mathbb{N}$-re tudjuk, megkapjuk, hogy $c = 1/\mu_n(C)$, és ezzel az állítást bebizonyítottuk. □

Amennyiben K-nak nemcsak az eltoltjait, hanem az elforgatottjait is megengedjük, akkor persze az integrálást nemcsak az eltolás vektorára, hanem a forgatásokra nézve is integrálni kell. Jelölje ismét X_K a metszéspontok számát, a várható értéke

$$\mathbf{E}(X_K) = \int_{O(n)} \int_C \mu_0\big(t_x\big(\phi(K)\big) \cap \mathcal{L}\big)\ dx\ d\phi.$$

A külső integrálás történjen tetszőleges $O(n)$-en adott valószínűségi mérték szerint. A belső integrált már meghatároztuk:

$$\int_C \mu_0\big(t_x\big(\phi(K)\big) \cap \mathcal{L}\big)\ dx = \frac{\mu_n\big(\phi(K)\big)}{\mu_n(C)} = \frac{\mu_n(K)}{\mu_n(C)}.$$

A külső integrálban tehát konstans függvényt integrálunk valószínűségi mérték szerint, így a várható érték

$$\mathbf{E}(X_K) = \frac{\mu_n(K)}{\mu_n(C)}.$$

Mint láttuk, ez igaz attól függetlenül, hogy a K konvex halmaz „állását” milyen valószínűségi eloszlás szerint választjuk. Érdemes azonban ezt is egyenletesnek venni, azaz $O(n)$-en az egyértelműen létező invariáns valószínűségi mérték szerint integrálni. Ezzel a következő tételt kaptuk:

5.4.2. Tétel. *Legyen $K \in \mathcal{K}_n$, és jelölje X_K az $\mathcal{L}$ rács $g(K)$-ba eső pontjainak számát, ahol g véletlen egybevágóság. Ekkor X_K várható értéke $\frac{\mu_n(K)}{\mu_n(C)}$.* $\square$

5.5. Összegzés

Zárásként összefoglaljuk, hogy mit is tudunk a kiértékelésekről. Egy $\mathcal{K}_n$-en adott konvex-folytonos kiértékelés egyértelműen kiterjed a $\mathcal{K}_n$-beli halmazok véges unióiból álló Polycon(n) halmazrendszer kiértékelésévé. Hasonlóan egy parallelotópokon adott kiértékelés – folytonossági feltétel nélkül is – egyértelműen kiterjed Par(n) kiértékelésévé.

Polycon(n)-en bevezettük a μ_k belső térfogatokat, melyekről beláttuk, hogy monoton, folytonos, egybevágóság-invariáns kiértékelések. A μ_k belső térfogat k-adfokú homogén, és értéke egy polikonvex halmazon nem függ attól, hogy a halmazt hány dimenziós térben tekintjük.

A μ_0 belső térfogat az Euler-karakterisztika, mely 1 minden $K \in \mathcal{K}_n$-re. Nevezetes még a μ_n térfogat, és a μ_{n-1}, ami a felszín fele. Tetszőleges K kompakt, konvex halmazra

$$\begin{aligned}
\mu_k(K) &= \lambda_k^n\big(\mathrm{Graff}(k,K)\big),\\
&= \frac{m_{n-k}(K)}{\omega_{n-k}},\\
&= \int_{\mathrm{Graff}(n-k,n)} \mu_0(L\cap V)\, d\lambda_{n-k}^n(V), \text{ és ez igaz polikonvex } K\text{-ra is},\\
&= \int_{\mathrm{Gr}(k,n)} \mu_k\big(p_U(K)\big)\, d\nu_k^n(U),\\
&= \sigma_k(x_1,\dots,x_n), \text{ ha } K \text{ parallelotóp és oldalhosszai } x_1,\dots,x_n.
\end{aligned}$$

A Hadwiger-tétel szerint a $\mu_0,\dots,\mu_n$ belső térfogatok bázisát adják Polycon(n) folytonos, $SO(n)$-invariáns kiértékeléseinek. Ha az η kiértékelés az előbbiek mellett egyszerű is, akkor $\eta = c\mu_n$. Végül pedig ha k-adfokú homogén, akkor $\eta = c\mu_k$.

Hivatkozások

[1] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[2] B. Csikós, *Differential Geometry*, Typotex Kiadó, 2013.

[3] Moussong Gábor, *Konvex testek euklideszi térben*, egyetemi jegyzet, ELTE, 2009.

[4] Andrejs Treibergs, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Undergraduate Colloquium, University of Utah, 2008.

[5] D. A. Klein and G.-C. Rota, *Introduction to Geometric Probability*, Cambridge University Press, 1997.

[6] D. A. Klein, *A short proof of Hadwiger's characterization theorem*, Mathematika, **42** (1995), p. 329-339.

[7] R. T. Seeley, *Spherical harmonics*, The American Mathematical Monthly, **73** (1966), p. 115-121.

[8] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge University Press, 1993, p. 182-186.