Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Nagy Dániel
Matematikus MSc

Fejezetek az extremális halmazrendszerek elméletéből

Szakdolgozat

Témavezető: Katona Gyula egyetemi tanár
Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2014

Kivonat

A dolgozat célja, hogy bemutassa a szerző Katona Gyulával közösen írt két cikkét és az azokban felhasznált tételeket.

Az 1. fejezetben áttekintjük az extremális halmazrendszerek elméletének néhány alapvető tételét és módszerét, amire a későbbiekben szükségünk lesz. Először belátjuk a Bollobás-egyenlőtlenséget, majd bizonyítás nélkül közöljük Ahlswede és Khachatrian tételét $[n]$ (az n elemű alaphalmaz) k elemű részhalmazaiból álló legnagyobb l-metsző halmazrendszer méretéről. Ezután bemutatunk egy alapvető transzformációs technikát, a balra tolások módszerét. Jellemezzük a balra tömörített halmazrendszereket, majd ennek ennek segítségével bizonyítást adunk az Erdős-Ko-Rado-tételre, illetve meghatározzuk az $[n]$ részhalmazaiból álló legnagyobb l-metsző halmazrendszer méretét. Bizonyítás nélkül közlünk néhány tételt, amik felső becslést adnak olyan halmazrendszerek méretére, melyek nem tartalmaznak valamilyen tartalmazásokkal kifejezhető struktúrát. Végül bebizonyítunk egy egyszerű lemmát, amely szerint minden elég nagy k-uniform halmazrendszer tartalmaz r szirmú napraforgót, vagy más néven delta-rendszert.

A 2. fejezetben posetek (azaz részben rendezett halmazok) beágyazásait vizsgáljuk véges Boole-hálókba, azaz $[n]$ részhalmazai és a köztük lévő tartalmazási reláció által adott struktúrákba. A P véges poset beágyazása a B_n Boole-hálóba egy olyan $f : P \to B_n$ injektív leképezés, ami megőrzi a P elemei közti relációkat. Egy rögzített P posetet szeretnénk minél többször beágyazni B_n-be úgy, hogy a különböző példányok elemei összemérhetetlenek legyenek B_n-ben. A lehetséges példányok maximális számára aszimptotikusan jó korlátokat adunk minden P esetén. Bizonyos posetekre a pontos megoldást is megkapjuk.

A 3. fejezetben Körner János egy kérdése nyomán olyan halmazrendszereket vizsgálunk, amelyek elemeiből képzett uniókra teljesül valamilyen metszési feltétel. Először pontosan meghatározzunk az $[n]$ részhalmazaiból álló legnagyobb olyan $\mathcal{F}$ halmazrendszer méretét, ahol az $\mathcal{F}$ elemeinek páronkénti uniójából álló halmazrendszer l-metsző. Ezután olyan halmazrendszereket vizsgálunk, ahol bármely s elem uniója metszi bármely t elem unióját. $s + t \leq 4$ esetén pontosan, $s + t \geq 5$ esetén pedig aszimptotikusan határozzuk meg a legnagyobb ilyen halmazrendszer méretét. Végül pontosan meghatározzuk a legnagyobb k-uniform halmazrendszer méretét, ami rendelkezik az előbbi (s, t)-unió-metsző tulajdonsággal, ha n elég nagy.

Tartalomjegyzék

1. Előkészületek

Ebben a fejezetben áttekintjük az extremális halmazrendszerek elméletének néhány alapvető tételét. Ezeket az új eredményeket bemutató 2. és 3. fejezetben fogjuk használni. Mielőtt rátérnénk a tételekre, bevezetjük a következő egyszerű definíciókat és jelöléseket.

Jelölés Ha n pozitív egész, $[n]$ jelöli az $\{1,2,\dots n\}$ halmazt.

Jelölés $\binom{[n]}{k}$ jelöli az $[n]$ halmaz k elemű részhalmazainak halmazát.

Jelölés $\mathcal{F}^k$ jelöli a $\mathcal{F}$ halmazrendszer k elemű részhalmazainak halmazát.

Definíció Az $\mathcal{F}$ halmazrendszert metszőnek nevezzük, ha bármely két tagjának van közös eleme. $\mathcal{F}$ l-metsző, ha $|A \cap B| \geq l$ minden $A, B \in \mathcal{F}$ esetén.

1.1. Metsző halmazrendszerek

1.1.1. Tétel (Bollobás) [2] *Legyenek* (A_i, B_i) $(1 \leq i \leq m)$ *olyan halmazok, amikre teljesül, hogy*

$$A_i \cap B_j = \emptyset \Leftrightarrow i = j. \tag{1.1.1}$$

Ekkor

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}} \leq 1. \tag{1.1.2}$$

Bizonyítás Legyen $X = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \cup B_i$, és $|X| = n$. Definiáljuk az $m \times n!$-es M mátrixot a következőképpen. A sorai feleljenek meg az (A_i, B_i) pároknak, az oszlopai pedig X elemeinek a permutációinak. Oda írjunk 1-et, ahol az adott permutáció szerint A_i összes eleme megelőzi B_i összes elemét. A többi helyre írjunk 0-t. Ekkor az i. sorban $\frac{n!}{\binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}}$ darab 1-es lesz.

Belátjuk, hogy egy oszlopban legfeljebb egy 1-es lehet. Tegyük fel, hogy egy oszlop i. és a j. eleme is 1-es. Jelölje x_i illetve x_j azt, hányadik helyen áll az adott permutációban A_i illetve A_j utolsó eleme. y_i illetve y_j pedig jelölje azt, hányadik helyen áll B_i és B_j első eleme. Mivel 1-est írtunk mindkét helyre, $a_i < b_i$ és $a_j < b_j$. A tétel feltételei szerint $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ és $A_j \cap B_i \neq \emptyset$. Ezért $a_i \geq b_j$ és $a_j \geq b_i$. Ellentmondásra jutottunk, mivel $a_i + a_j - b_i - b_j$ értéke az első megfigyelés alapján negatív, míg a második alapján nemnegatív.

Tehát M elemeinek S összegére teljesül

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{n!}{\binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}} = S \leq n!\,. \tag{1.1.3}$$

Innen pedig azonnal következik a tétel állítása. □

1.1.2. Megjegyzés *Sperner tétele* [21] *azt állítja, hogy egy* $[n]$ *részhalmazaiból álló antilánc mérete legfeljebb* $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. *Ez a tétel következik a fentiből, ha* $A_1, A_2, \dots A_m$ *az antilánc elemei, és* B_i*-t* $[n] - A_i$*-nek választjuk minden* i *esetén.*

A következő tétel megadja a legnagyobb l-metsző halmazrendszer méretét, ami az $[n]$ k elemű részhalmazaiból áll. Azt sejthetjük, hogy a legnagyobb ilyen halmazrendszer az l rögzített elemet tartalmazó összes k elemű részhalmazból áll majd. Azonban ez csak akkor áll fenn, ha n elég nagy (k-hoz és l-hez képest). Kis n-ek esetén lehet ennél jobb példát is találni. Ha például $n = 8$, $k = 4$ és $l = 2$, akkor tekinthetjük a 8 elemű halmaz azon részhalmazait, amik 4 rögzített elemből legalább 3-at tartalmaznak. Ezek nyilván 2-metsző rendszer alkotnak, a számuk pedig 17, ami több, mint $\binom{6}{2} = 15$. A következő definíció ezt az ötletet általánosítja.

Definíció A következő halmazrendszerek (amik az $[n]$ k elemű részhalmazaiból állnak), nyilvánvalóan l-metszők:

$$\mathcal{F}_i = \left\{ F \in \binom{[n]}{k} \;\middle|\; |F \cap [l + 2i]| \geq l + i \right\} \qquad 0 \leq i \leq \frac{n-l}{2}. \tag{1.1.4}$$

Ha $1 \leq l \leq k \leq n$, akkor vezessük be az alábbi jelölést.

$$AK(n, k, l) = \max_{0 \leq i \leq \frac{n-l}{2}} |\mathcal{F}_i|. \tag{1.1.5}$$

Frankl azt sejtette, hogy $AK(n, k, l)$ megadja a legnagyobb k-uniform l-metsző halmazrendszer méretét [10]. (Lásd még [12].) Az alábbi tétel igazolta ezt a sejtést.

1.1.3. Tétel (Ahlswede-Khachatrian) [1] *Tegyük fel, hogy* $\mathcal{F}$ *egy* k*-uniform* l*-metsző halmazrendszer, ami* $[n]$ *részhalmazaiból áll.* ($1 \leq l \leq k \leq n$) *Ekkor*

$$|\mathcal{F}| \leq AK(n, k, l). \tag{1.1.6}$$

1.2. A balra tolások módszere

A balra tolás az extremális halmazrendszerek vizsgálatának egyik alapvető eszköze. Ebben az alfejezetben definiáljuk a balra tolásokat, jellemezzük a balra tömörített halmazrendszereket, majd ennek segítségével meghatározzuk az $[n]$ részhalmazaiból álló legnagyobb l-metsző halmazrendszer méretét.

Definíció Legyen $\mathcal{F}$ az $[n]$ részhalmazaiból álló halmazrendszer, $x, y \in [n]$ és $x \neq y$. Ekkor $\tau_{x,y}(\mathcal{F})$ jelöli azt a halmazrendszert, amit úgy kapunk $\mathcal{F}$-ból, hogy azon $F \in \mathcal{F}$ elemeket, amikre $x \in F$, $y \notin F$ és $F - x + y \notin \mathcal{F}$ teljesül, kicseréljük $F - x + y$-ra, a többit pedig nem változtatjuk.

1.2.1. Lemma *Ha* $\mathcal{F}$ l*-metsző halmazrendszer és* $x \neq y$*, akkor* $\tau_{x,y}(\mathcal{F})$ *is* l*-metsző.*

Bizonyítás Minden $F \in \mathcal{F}$ halmaz esetén jelölje F' a belőle kapott $\tau_{x,y}(\mathcal{F})$-beli halmazt. Legyen $F', G' \in$ $\in \tau_{x,y}(\mathcal{F})$ két tetszőleges különböző halmaz. Ha $F = F'$ és $G = G'$ vagy $F' = F - x + y$ és $G' = G - x + y$, akkor $|F' \cap G'| = |F \cap G| \geq l$. Tehát csak akkor lehet baj, ha pontosan az egyik változott meg az eltolás során. Feltehetjük, hogy ez G volt, tehát $F' = F$ és $G' = G - x + y$. $|F' \cap G'| < |F \cap G|$ csak úgy lehetséges, ha $x \in \mathcal{F}$ és $y \notin F$. Tudjuk azonban, hogy F nem mozdult az eltolás során, tehát $F'' = F - x + y \in \mathcal{F}$. Ekkor azonban $|F' \cap G'| = |F \cap (G - x + y)| = |(F - x + y) \cap G| = |F'' \cap G| \geq l$. □

Definíció Az $[n]$ részhalmazaiból álló $\mathcal{F}$ halmazrendszert balra tömörítettnek nevezzük, ha minden $1 \leq$ $\leq y < x \leq n$ esetén $\tau_{x,y}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. (Ezt úgy is mondhatjuk, hogy $1 \leq y < x \leq n$, $F \in \mathcal{F}$, $x \in \mathcal{F}$, $y \notin \mathcal{F}$ esetén teljesül $F - x + y \in \mathcal{F}$.)

1.2.2. Megjegyzés *Ha az $[n]$ részhalmazaiból álló $\mathcal{F}$ halmazrendszerre mohón alkalmazzuk a $\tau_{x,y}(\mathcal{F})$ operátorokat minden $1 \leq y < x \leq n$, $F \in \mathcal{F}$-re, akkor véges sok lépésben balra tömörített halmazrendszerhez jutunk, mivel átalakításnál csökken a halmazrendszer tagjaiban vett elemösszegek összege.*

1.2.3. Lemma (Frankl) [11] *$\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ balra tömörített l-metsző halmazrendszer. Ekkor $\mathcal{F}$ már $T =$ $= \{1{,}2, \dots 2k - l\}$-re megszorítva is l-metsző, azaz $F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow |F \cap G \cap T| \geq l$.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy van vannak olyan halmazok $\mathcal{F}$-ben, amelyek metszetének a T-re vett megszorítása l-nél kisebb méretű. Legyen $F, G \in \mathcal{F}$ egy ilyen halmazpár, amire $|(F \cap G) - T| = r$ minimális. Mivel $|F \cap G| \geq l$ és $|F \cap G \cap T| < l$, $r > 0$. Vegyünk egy $x \in (F \cap G) - T$ elemet.

$$|T - (F \cup G)| = |T| - |F \cap T| - |F \cap G| + |F \cap G \cap T| > 2k - l - 2(k - r) + |F \cap G| - r = |F \cap G| - l + r \geq 1. \quad (1.2.1)$$

Vegyünk egy $y \in T - (F \cup G)$ elemet. Mivel $\mathcal{F}$ balra tömörített, $G' = G - x + y \in \mathcal{F}$. Ekkor teljesül $|F \cap G' \cap T| = |F \cap G \cap T| < l$, továbbá $|(F \cap G') - T| = |(F \cap G) - T| - 1$, ami ellentmond az (F, G) pár választásának. □

A balra tolásokról tett eddigi megfigyelések segítségével bebizonyíthatjuk az Erdős-Ko-Rado-tételt. (A tétel egy másik, ciklikus permutációkat használó bizonyítása a [15] cikkben olvasható.)

1.2.4. Tétel (Erdős-Ko-Rado) [8] *Legyenek k és n egészek, $k \leq \frac{n}{2}$. Ha $\mathcal{F} \in \binom{[n]}{k}$ metsző halmazrendszer, akkor*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}. \quad (1.2.2)$$

Bizonyítás **(Frankl) [11]** A tételt k szerinti indukcióval bizonyítjuk, $k = 0$ esetén triviális. Tegyük fel, hogy $k \geq 1$, és a kisebb értékekre már igazoltuk az állítást. Legyen $\mathcal{F} \in \binom{[n]}{k}$ metsző halmazrendszer. Alkalmazzuk a $\tau_{x,y}$ operátorokat $\mathcal{F}$-re minden $1 \leq y < x \leq n$ esetén. Az 1.2.2. Megjegyzés szerint véges sok lépésen belül egy balra tömörített halmazrendszerhez jutunk. Ez az 1.2.1. Lemma szerint ez metsző rendszer lesz. Tehát feltehető, hogy $\mathcal{F}$ balra tömörített. Az 1.2.1. Lemma miatt ekkor $\mathcal{F}$ már $T =$ $= \{1{,}2, \dots 2k - 1\}$-re megszorítva is metsző. Legyen $T' = \{1{,}2, \dots 2k\}$. Ekkor $F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cap G \cap T' \neq \emptyset$.

Minden $1 \leq i \leq k$ esetén legyen $a_i = |\{F \cap T' \mid F \in \mathcal{F},\ |F \cap T'| = i\}|$. Mivel $\mathcal{F}$ halmazainak T-vel vett metszetei közül az i eleműek metsző rendszert alkotnak, az indukció szerint $a_i \leq \binom{2k-1}{i-1}$ minden $1 \leq i \leq k - 1$-re. Mivel egy k elemű $G \subset T'$ halmaz és $T' - G$ diszjunktak, nem lehetnek egyszerre valamilyen $\mathcal{F}$-beli halmaz T'-vel vett metszetei. Tehát $a_k \le \frac{1}{2}\binom{2k}{k} = \binom{2k-1}{k-1}$. Összesen $\binom{n-2k}{k-i}$ olyan halmaz van $\mathcal{F} \in \binom{[n]}{k}$-ban, aminek a T'-vel vett metszete egy rögzített i elemű halmaz. Tehát

$$|\mathcal{F}| \le \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \binom{n-2k}{k-i} \le \sum_{i=1}^{k} \binom{2k-1}{i-1} \cdot \binom{n-2k}{k-i} = \binom{n-1}{k-1}. \tag{1.2.3}$$

□

Definíció Az $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ halmazrendszer s-árnyékának nevezzük a következő halmazrendszert:

$$\sigma_s(\mathcal{F}) = \{A \subset [n] \mid |A| = k - s,\ \exists F \in \mathcal{F},\ A \subset F\} \tag{1.2.4}$$

1.2.5. Lemma *$\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$, $1 \le y < x \le n$, $1 \le s \le k$. Ekkor $|\sigma_s(\tau_{x,y}(\mathcal{F}))| \le |\sigma_s(\mathcal{F})|$.*

Bizonyítás Megmutatjuk, hogy minden $A \in \sigma_s(\tau_{x,y}(\mathcal{F})) - \sigma_s(\mathcal{F})$ halmazra teljesül $x \notin A$ és $y \in A$, továbbá $A + x - y \in \sigma_s(\mathcal{F}) - \sigma_s(\tau_{x,y}(\mathcal{F}))$. Ebből következik, hogy $|\sigma_s(\tau_{x,y}(\mathcal{F})) - \sigma_s(\mathcal{F})| \le |\sigma_s(\mathcal{F}) - \sigma_s(\tau_{x,y}(\mathcal{F}))|$, tehát $|\sigma_s(\tau_{x,y}(\mathcal{F}))| \le |\sigma_s(\mathcal{F})|$.

Legyen $A \in \sigma_s(\tau_{x,y}(\mathcal{F})) - \sigma_s(\mathcal{F})$. Mivel $A \in \sigma_s(\tau_{x,y}(\mathcal{F}))$, létezik egy $G \in \tau_{x,y}(\mathcal{F})$ halmaz, amire $A \subset G$. Mivel $A \notin \sigma_s(\mathcal{F})$, $G \notin \mathcal{F}$, tehát $G = F - x + y$ valamilyen $F \in \mathcal{F}$ halmazra. Tehát $x \notin A$. Mivel $A \subset G$, de $A \not\subset F = G + x - y$, teljesül $y \in A$.

Be kell még látnunk, hogy $A + x - y \in \sigma_s(\mathcal{F}) - \sigma_s(\tau_{x,y}(\mathcal{F}))$. Már láttuk, hogy $A \subset G = F - x + y$ valamilyen $F \in \mathcal{F}$ halmazra. Ezért $A + x - y \subset F$, tehát $A + x - y \in \sigma_s(\mathcal{F})$.

Tegyük most fel, hogy $A + x - y \in \sigma_s(\tau_{x,y}(\mathcal{F}))$. Ekkor valamilyen H-ra teljesül $A + x - y \subset H \in \tau_{x,y}(\mathcal{F})$. Ekkor $x \in H$ miatt $H \in \mathcal{F}$ és H-t helyben hagyta a $\tau_{x,y}$ eltolás. Ezért vagy $y \in H$ vagy $y \notin H$ és $H - x + y \in \mathcal{F}$. Ha $y \in H$, akkor $A \subset H \in \mathcal{H}$. Ha $y \notin H$ és $H - x + y \in \mathcal{F}$, akkor $A \subset H - x + y \in \mathcal{F}$. Mindkét esetben $A \in \sigma_s(\mathcal{F})$, ami ellentmondás. □

1.2.6. Tétel (Katona) [14] *Legyen $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ egy l-metsző halmazrendszer és $0 < s \le l < k$. Ekkor*

$$|\sigma_s(\mathcal{F})| \ge |\mathcal{F}| \cdot \frac{\binom{2k-l}{k-s}}{\binom{2k-l}{k}}. \tag{1.2.5}$$

Bizonyítás <u>1. eset</u>: $n \le 2k - l$. Jelölje S azon (A, F) párok számát, ahol $|A| = k - s$ és $A \subset F \in \mathcal{F}$. Ekkor

$$|\mathcal{F}|\binom{k}{k-s} = S \le |\sigma_s(\mathcal{F})|\binom{n-k+s}{s}. \tag{1.2.6}$$

A tétel állításához a következőt kell belátnunk:

$$\frac{\binom{2k-l}{k-s}}{\binom{2k-l}{k}} \le \frac{\binom{k}{k-s}}{\binom{n-k-s}{s}}. \tag{1.2.7}$$

Ha faktoriálisokkal fejezzük ki a binomiális együtthatókat, majd egyszerűsítünk, az alábbi egyenlőtlenséghez jutunk:

$$\frac{(k-l)!}{(k-l+s)!} \leq \frac{(n-k)!}{(n-k+s)!}. \tag{1.2.8}$$

Beszorozva $s!$-ral majd reciprokot véve:

$$\binom{k-l+s}{s} \geq \binom{n-k+s}{s}. \tag{1.2.9}$$

Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha $k-l+s \geq n-k+s$, azaz $n \leq 2k-l$.

2. eset: $n > 2k-l$. A tétel állítását k szerinti indukcióval látjuk be. Ha $k=2$, akkor $s=l=1$. Tekintsük azt a G gráfot, amire $V(G)$-nek $[n]$, $E(G)$-nek pedig $\mathcal{F}$ felel meg. A feltétel szerint bármely két élnek van közös végpontja, ezért G egy csillagból vagy egy háromszögből és izolált csúcsok egy I halmazából áll. Mindkét esetben legalább annyi nem izolált csúcs van, mint él, tehát fennáll

$$|\sigma_s(\mathcal{F})| = |V(G)-I| \geq |E(G)| = |E(G)| \cdot \frac{\binom{3}{1}}{\binom{3}{2}} = |\mathcal{F}| \cdot \frac{\binom{2k-l}{k-s}}{\binom{2k-l}{k}}. \tag{1.2.10}$$

Tegyük fel, hogy $k \geq 3$, és a kisebb k értékekre már beláttuk a tétel állítását. Legyen $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ egy l-metsző halmazrendszer. Ekkor az 1.2.1. és 1.2.5. Lemmák miatt feltehető, hogy $\mathcal{F}$ balra tömörített. Az 1.2.3. Lemma szerint ekkor $\mathcal{F}$ már a $T = \{1,2,\dots 2k-l\}$ halmazra megszorítva is l-metsző, azaz $F,G \in \mathcal{F} \Rightarrow |F \cap G \cap T| \geq l$. Minden $A \subseteq [n]-T$ halmazra legyen

$$\mathcal{F}_A = \{F - A \mid F \in \mathcal{F},\ F - T = A\}. \tag{1.2.11}$$

Minden $A \subseteq [n]-T$ halmazra belátjuk, hogy

$$|\mathcal{F}_A| \cdot \frac{\binom{2k-l}{k-s}}{\binom{2k-l}{k}} \leq |\sigma_s(\mathcal{F_A})|. \tag{1.2.12}$$

Az 1. eset szerint ez teljesül $A = \emptyset$ esetén. Tegyük fel, hogy $A \neq \emptyset$. Ekkor $\mathcal{F}_A$ egy $(k-|A|)$-reguláris l-metsző rendszer. Az indukció szerint

$$|\mathcal{F}_A| \cdot \frac{\binom{2(k-|A|)-l}{k-|A|-s}}{\binom{2(k-|A|)-l}{k-|A|}} \leq |\sigma_s(\mathcal{F_A})|. \tag{1.2.13}$$

Azt kellene igazolnunk, hogy

$$\frac{\binom{2k-l}{k-s}}{\binom{2k-l}{k}} \leq \frac{\binom{2(k-|A|)-l}{k-|A|-s}}{\binom{2(k-|A|)-l}{k-|A|}}. \tag{1.2.14}$$

Valójában az is elég lenne, ha minden $x \in \{k-|A|+1,\ k-|A|+2,\ \dots k-1,\ k\}$ egészre belátnánk, hogy

$$\frac{\binom{2x-l}{x-s}}{\binom{2x-l}{x}} \leq \frac{\binom{2(x-1)-l}{x-1-s}}{\binom{2(x-1)-l}{x-1}}. \tag{1.2.15}$$

Kifejezve a binomiális együtthatókat faktoriálisok segítségével, majd egyszerűsítve, az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk.

$$x(x-l) \le (x-s)(x+s-l) \tag{1.2.16}$$

Itt felbontva a zárójeleket és egyszerűsítve azt kapjuk, hogy $s \le l$, ezt pedig feltettük. Ezzel beláttuk, hogy (1.2.12) teljesül minden $A \subseteq [n]-T$ halmazra. Ezt felhasználva

$$\frac{\binom{2k-l}{k-s}}{\binom{2k-l}{k}} \cdot |\mathcal{F}| = \frac{\binom{2k-l}{k-s}}{\binom{2k-l}{k}} \cdot \sum_{A \subseteq [n]-T} |\mathcal{F}_A| \le \sum_{A \subseteq [n]-T} |\sigma_s(\mathcal{F}_{\mathcal{A}})| \le |\sigma_s(\mathcal{F})|. \tag{1.2.17}$$

□

1.2.7. Tétel (Katona) [14] *Legyen $\mathcal{F}$ az $[n]$ részhalmazaiból álló l-metsző halmazrendszer. Ekkor*

$$|\mathcal{F}^i| + |\mathcal{F}^{n+l-1-i}| \le \binom{n}{n+l-1-i}. \qquad \left(0 \le i < \frac{n+l-1}{2}\right) \tag{1.2.18}$$

Bizonyítás Legyen $S = \{[n]-C \mid C \in \sigma_{l-1}(\mathcal{F}^i)\}$. Ekkor $S \in \binom{[n]}{n+l-1-i}$. Azonban $S \cap \mathcal{F}^{n+l-1-i} = \emptyset$, mivel ha $F \in S \cap \mathcal{F}^{n+l-1-i}$ lenne, akkor létezne egy $A \in \mathcal{F}^i$ és egy $l-1$ elemű B halmaz, amire $F = [n]-(A-B)$ teljesülne. Ekkor azonban $|F \cap A| = |B| = l-1$ lenne, ami ellentmond annak, hogy $\mathcal{F}$ l-metsző. Tehát

$$\binom{n}{n+l-1-i} \ge |\mathcal{F}^{n+l-1-i}| + |S| = |\mathcal{F}^{n+l-1-i}| + |\sigma_{l-1}(\mathcal{F}^i)|. \tag{1.2.19}$$

Az 1.2.6. Tétel szerint

$$|\sigma_{l-1}(\mathcal{F}^i)| \ge \frac{\binom{2i-l}{i-(l-1)}}{\binom{2i-l}{i}} \cdot |\mathcal{F}^i| = \frac{\binom{2i-l}{i-1}}{\binom{2i-l}{i}} \cdot |\mathcal{F}^i| \ge |\mathcal{F}^i|. \tag{1.2.20}$$

Ebből pedig azonnal következik a tétel állítása. □

1.2.8. Tétel (Katona) [14] *Legyen $\mathcal{F}$ az $[n]$ részhalmazaiból álló l-metsző halmazrendszer. Ekkor*

$$|\mathcal{F}| \le \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=\frac{n+l}{2}}^{n} \binom{n}{i} & \text{ha } n+l \text{ páros,} \\ \displaystyle\binom{n-1}{\frac{n+l-1}{2}} + \sum_{i=\frac{n+l+1}{2}}^{n} \binom{n}{i} & \text{ha } n+l \text{ páratlan.} \end{cases} \tag{1.2.21}$$

Bizonyítás Az 1.2.7. Tételből következik, hogy

$$|\mathcal{F} - \mathcal{F}^{\frac{n+l-1}{2}}| \le \sum_{i=\lceil \frac{n+l}{2} \rceil}^{n} \binom{n}{i}. \tag{1.2.22}$$

Ha $n+l$ páros, készen is vagyunk, hiszen ekkor nincs $\frac{n+l-1}{2}$ elemű halmaz. Ha $n+l$ páratlan, azt kell belátnunk, hogy

$$|\mathcal{F}^{\frac{n+l-1}{2}}| \leq \binom{n-1}{\frac{n+l-1}{2}}. \tag{1.2.23}$$

Használjuk fel a (1.2.19) és (1.2.20) becsléseket (ezek $i = \frac{n+l-1}{2}$-vel is igazak), de ne becsüljük alulról 1-gyel az együtthatót.

$$\binom{n}{\frac{n+l-1}{2}} \geq |\mathcal{F}^{\frac{n+l-1}{2}}| + |\sigma_{l-1}(\mathcal{F}^{\frac{n+l-1}{2}})| \geq |\mathcal{F}^{\frac{n+l-1}{2}}| \left(1 + \frac{\binom{n-1}{\frac{n+l-3}{2}}}{\binom{n-1}{\frac{n+l-1}{2}}}\right) = |\mathcal{F}^{\frac{n+l-1}{2}}| \frac{2n}{n-l+1}, \tag{1.2.24}$$

$$|\mathcal{F}^{\frac{n+l-1}{2}}| \leq \binom{n}{\frac{n+l-1}{2}} \frac{\frac{n-l+1}{2}}{n} = \binom{n-1}{\frac{n+l-1}{2}}. \tag{1.2.25}$$

□

1.2.9. Megjegyzés *A fenti tételben szereplő korlátok tovább nem javíthatóak. Ha vesszük ugyanis azokat a részhalmazokat, amelyeknek $\{1,2,\ldots,n-1\}$-nek legalább $\frac{n+l-1}{2}$ elemét tartalmazzák, akkor egy l-metsző halmazrendszert kapunk, aminek elemszáma megegyezik a tételben szereplő értékkel.*

1.3. Kizárt posetek

Ebben az alfejezetben olyan halmazrendszerek méretére adunk felső korlátokat, amelyekben nem jelenik meg valamilyen tartalmazásokkal kifejezhető struktúra. Mivel a szerző előző szakdolgozata erről a problémakörről szólt, most megelégszünk egy rövid bevezetéssel és néhány szükséges tétel bizonyítás nélküli közlésével. A problémát a következő definíció segítségével fogalmazhatjuk meg precízen.

Definíció Legyen P egy véges poset, $\mathcal{F}$ pedig $[n]$ részhalmazainak egy rendszere. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{F}$ tartalmazza P-t, ha létezik egy $f : P \to \mathcal{F}$ injektív leképezés, amire minden $a, b \in P$ esetén teljesül $a \prec b \Rightarrow f(a) \subset f(b)$. $\mathcal{F}$-et P-mentesnek nevezzük, ha nem tartalmazza P-t.

Jelölés Ha P véges poset, $\mathrm{La}(n, P)$ jelöli az $[n]$ részhalmazai közül kiválasztható maximális méretű P-mentes halmazrendszer elemszámát.

$\mathrm{La}(n, P)$ értéke nem ismert általános P esetén, még aszimptotikusan sem. Már a 4 elemű D poset (amit az a, b, c, d elemek és a köztük lévő $a \prec b, c \prec d$ relációk határoznak meg) esetén is ismeretlen $\mathrm{La}(n, D)$ értéke, csak annyit tudunk, hogy $(2 - o(1))\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ és $(2.25 + o(1))\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ közé esik [20].

A következő sejtés szerint az aszimptotikusan legjobb konstrukció az, ha kiválasztjuk a k darab $n/2$-höz legközelebbi méretet, és vesszük az összes ilyen méretű részhalmazt a legnagyobb olyan k-ra, amire így kapott halmazrendszer még nem tartalmazza P-t.

1.3.1. Sejtés [3] *Minden P véges posetre*

$$\mathrm{La}(n, P) = e(P)\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\left(1 + O(1/n)\right), \tag{1.3.1}$$

ahol $e(P)$ jelöli azt a legnagyobb m egészt, amire az $[n]$ alaphalmaz összes $k, k+1, \dots, k+m-1$ méretű részhalmazából álló halmazrendszer P-mentes minden n és k esetén.

Bukh belátta a sejtést minden olyan posetre, aminek a Hasse-diagramja fa. [3]

A következő tétel felső becslések egy sorozatát adja meg $\mathrm{La}(n, P)$-re.

1.3.2. Tétel (Chen-Li) [5] *Legyen P egy véges poset, m pozitív egész. Jelölje $h(P)$ a P-ben lévő leghosszabb út csúcsainak számát. Ekkor minden elég nagy n-re*

$$\mathrm{La}(n, P) \leq \frac{1}{m+1}\left(|P| + \frac{1}{2}(m^2+3m-2)(h(P)-1)-1\right)\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}. \tag{1.3.2}$$

1.3.3. Megjegyzés *Az $m = 1$ eset megoldása szerepel a szerző Burcsi Péterrel közös [4] cikkében, a fenti tétel bizonyítása ennek az ötletére épül.*

A következő három tételben konkrét poseteket tekintünk kizártnak.

Jelölés Jelölje V_r azt az $r+1$ elemű posetet, aminek van r eleme, amik közt nincsenek relációk, és egy eleme, ami kisebb az összes többinél. Jelölje Λ_r azt az $r+1$ elemű posetet, aminek van r eleme, amik közt nincsenek relációk, és egy eleme, ami nagyobb az összes többinél. Végül jelölje K_{xy} azt az $x+y$ elemű posetet, aminek elemei $a_1, a_2, \dots a_x, b_1, \dots b_y$, ahol $a_i \prec b_j$ minden (i, j)-re és más reláció nincs.

1.3.4. Tétel (De Bonis-Katona) [6]

$$\mathrm{La}(n, V_{r+1}) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\left(1 + \frac{2r}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \tag{1.3.3}$$

1.3.5. Tétel (De Bonis-Katona) [6]

$$\mathrm{La}(n, K_{x,y}) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\left(2 + \frac{2(x+y-3)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \tag{1.3.4}$$

Definíció Ha P és Q véges posetek, akkor $\mathrm{La}(n, P, Q)$ jelöli az $[n]$ részhalmazaiból álló, P és Q egyikét sem tartalmazó maximális elemszámú halmazrendszer méretét.

1.3.6. Tétel (Katona-Tarján) [18]

$$\mathrm{La}(n, V_2, \Lambda_2) = 2\binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \tag{1.3.5}$$

1.4. Delta-rendszerek

Definíció r szirmú napraforgónak (vagy más néven Δ-rendszernek) nevezünk egy $\{S_1, S_2, \dots S_r\}$ halmazrendszert, ha $S_i \cap S_j = M$ minden $1 \leq i < j \leq r$-re. M-et a napraforgó közepének hívjuk.

1.4.1. Lemma (Erdős-Rado) [9] *Tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \subset \binom{[n]}{k}$ és $|\mathcal{A}| > k!\,(r-1)^k$. Ekkor $\mathcal{A}$ tartalmaz egy r szirmú napraforgót.*

Bizonyítás Az állítást k szerinti indukcióval bizonyítjuk. $k = 0$ esetén az állítás triviális. Legyen $\mathcal{A} \subset \binom{[n]}{k}$ egy olyan halmazrendszer, ami nem tartalmaz r szirmú napraforgót. Legyen $\{A_1, A_2, \dots A_m\}$ páronként diszjunkt halmazok egy maximális rendszere $\mathcal{A}$-ban. Mivel a páronként diszjunkt halmazok napraforgót alkotnak, $m \leq r - 1$. Minden $x \in \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ elemre legyen $\mathcal{A}_x = \{S - \{x\} \mid S \in \mathcal{A},\ x \in S\}$. Ekkor mindegyik $\mathcal{A}_x$ egy $k-1$-uniform halmazrendszer, ami nem tartalmaz r szirmú napraforgót. Az indukció szerint $|\mathcal{A}_x| \leq (k-1)!\,(r-1)^{k-1}$. Ekkor

$$|\mathcal{A}| \leq (k-1)!\,(r-1)^{k-1} \left| \bigcup_{i=1}^{m} A_i \right| \leq (k-1)!\,(r-1)^{k-1} \cdot k(r-1) = k!\,(r-1)^k. \tag{1.4.1}$$

□

1.4.2. Megjegyzés *Az 1.4.1. Lemmában szereplő $k!\,(r-1)^k$ érték általában nem éles. Nem ismert, hogy mi a legjobb korlát, ami a lemmába írható. Erdős és Rado sejtése szerint a lemma akkor is igaz marad, ha $k!$-t kicseréljük c^k-ra, ahol c egy megfelelő pozitív konstans.* [9]

2. Összemérhetetlen posetek egy Boole-hálóban

2.1. Bevezetés

Ez a fejezet a szerző Katona Gyulával közös [16] cikkén alapszik. A cikk fő eredményét (2.1.1. Tétel) velünk egy időben, tőlünk függetlenül A. P. Dove és J. R. Griggs is bebizonyították. [7]

Definíció Jelölje B_n a Boole-hálót, azaz azt a posetet, amit $[n]$ részhalmazai alkotnak a tartalmazással, mint relációval, P pedig legyen egy véges poset a $\prec$ relációval. (Ha S egy n méretű halmaz, írhatunk B_S-et is.) Az $f:\ P \to B_n$ függvény *beágyazás* P-ből B_n-be, ha injektív, és minden $a \prec b$ esetén teljesül $f(a) \subset f(b)$. Az $f:\ P \to B_n$ függvény *erős beágyazás* P-ből B_n-be, ha injektív, és $f(a) \subset f(b)$ pontosan akkor teljesül, ha $a \prec b$. $f(P)$-t a P poset egy példányának nevezzük B_n-ben.

Definíció Legyenek X és Y az $[n]$ részhalmazaiból álló halmazrendszerek. Azt mondjuk, hogy X és Y *összemérhetetlen*, ha nincsenek olyan $x \in X$ és $y \in Y$ halmazok, amikre $x \subseteq y$ vagy $y \subseteq x$. Az $[n]$ részhalmazaiból álló halmazrendszerek $\mathcal{S}$ egy családja *összemérhetetlen*, ha az elemei páronként összemérhetetlenek, azaz $x \not\subseteq y$, ha $x \in X$, $y \in Y$, $X \neq Y$ és $X, Y \in \mathcal{S}$.

Ebben a fejezetben a következő kérdésre keressük a választ. Hányszor lehet beágyazni egy P posetet B_n-be, ha azt szeretnénk, hogy a kapott példányok összemérhetetlen családot alkossanak? A kérdésre aszimptotikusan pontos választ adunk mind beágyazások, mind erős beágyazások esetén. Mielőtt kimondhatnánk a választ megadó tételt, be kell vezetnünk néhány jelölést.

Jelölés Legyen $\mathcal{F} \subseteq B_n$. $\mathcal{F}$ *konvex burka* az alábbi halmazrendszer.

$$conv(\mathcal{F}) = \{b \in B_n \bigm| \exists a, c \in \mathcal{F}\ \ a \subseteq b \subseteq c\}. \tag{2.1.1}$$

A következő jelöléseket használjuk a konvex burok minimális lehetséges méretére. Ha P véges poset, legyen

$$t_1(P) = \min_{f,n}\{|conv(f(P))| \bigm| f:\ P \to B_n \text{ beágyazás}\} \tag{2.1.2}$$

$$t_2(P) = \min_{f,n}\{|conv(f(P))| \bigm| f:\ P \to B_n \text{ erős beágyazás}\} \tag{2.1.3}$$

2.1.1. Tétel *Legyen P be egy véges poset. Jelölje $M_1(P,n)$ (és $M_2(P,n)$) a legnagyobb olyan M számot, amire léteznek olyan $f_1, f_2, \dots f_M\ :\ P \to B_n$ beágyazások (erős beágyazások), amikre a $\{f_i(P),\ i = 1,2,\dots M\}$ halmazrendszer összemérhetetlen. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_1(P,n)}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} = \frac{1}{t_1(P)} \tag{2.1.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_2(P,n)}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} = \frac{1}{t_2(P)}. \tag{2.1.5}$$

A következő két alfejezetben felső illetve alsó korlátokat bizonyítunk $M_j(P,n)$-re.(2.2.2. Tétel és 2.3.3. Tétel). A két tétel összevetéséből azonnal következik a fenti tétel állítása. Mivel a bizonyítások lényegében megegyeznek $j=1$ és $j=2$ esetén, ezért egyszerre kezeljük a két esetet.

2.2. A felső korlát

Ebben az alfejezetben egy felső korlátot fogunk bizonyítani $M_j(P,n)$-re. Ehhez szükségünk lesz egy láncokkal kapcsolatos lemmára. Legyen S egy n méretű halmaz. Egy S-beli láncnak nevezzük a $\emptyset = C_0 \subset \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_n = S$ halmazok rendszerét, ahol $|C_m| = m$ minden m-re.

2.2.1. Lemma *Legyen $\mathcal{F}$ az S részhalmazaiból álló halmazrendszer, ahol $|S| = n$ és $|\mathcal{F}| = t$. Azon láncok száma, amik $\mathcal{F}$ legalább egy tagján átmennek, legalább*

$$\left(t - \frac{t(t-1)}{n}\right) \lfloor n/2 \rfloor! \, \lceil n/2 \rceil! \,. \tag{2.2.1}$$

Bizonyítás A lemmát t szerinti indukcióval bizonyítjuk. Az állítás igaz $t = 1$ esetén , mivel az F halmazon átmenő láncok száma $|F|! \, (n - |F|)! \geq \lfloor n/2 \rfloor! \, \lceil n/2 \rceil!$. Most tegyük fel, hogy $t \geq 2$, és $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots F_t\}$. Mivel a részhalmazokat a komplementerükre cserélve nem változik a $\mathcal{F}$-en átmenő láncok száma, feltehetjük, hogy $\mathcal{F}$-ben van olyan részhalmaz, aminek a mérete legfeljebb $\lfloor n/2 \rfloor$. Feltesszük továbbá, hogy F_t egyike a legkisebb részhalmazoknak $\mathcal{F}$-ben.

Indukció szerint az $\mathcal{F} \backslash \{F_t\}$-en átmenő láncok száma legalább

$$\left(t - 1 - \frac{(t-1)(t-2)}{n}\right) \lfloor n/2 \rfloor! \, \lceil n/2 \rceil! \,. \tag{2.2.2}$$

Az F_t-n átmenő láncok száma $|F_t|! \, (n - |F_t|)!$. Ha $F_t \subset F_i$ valamilyen $i \in [1, \; t-1]$-re, akkor az F_t-n és F_i-n is átmenő láncok száma $|F_t|! \, (|F_i| - |F_t|)! \, (n - |F_i|)! \leq |F_t|! \, (n - |F_t| - 1)!$. Tehát legalább

$$|F_t|! \, (n - |F_t|)! \left(1 - \frac{t-1}{n - |F_t|}\right) \geq \lfloor n/2 \rfloor! \, \lceil n/2 \rceil! \left(1 - \frac{2(t-1)}{n}\right) \tag{2.2.3}$$

olyan lánc van, ami csak F_t-ben metszi $\mathcal{F}$-et. A lemma állítása az alábbi összegzés után következik:

$$\left(t - 1 - \frac{(t-1)(t-2)}{n}\right) + \left(1 - \frac{2(t-1)}{n}\right) = t - \frac{t(t-1)}{n}. \tag{2.2.4}$$

□

2.2.2. Tétel *Minden P véges posetre teljesül*

$$M_j(P,n) \leq \frac{1}{t_j(P)} \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} (1 + O(n^{-1})) \qquad (j = 1{,}2). \tag{2.2.5}$$

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $f_1, f_2, \ldots f_k \, : \, P \to B_n$ beágyazások (erősek, ha $j = 2$) és $\{f_i(P), \; i = = 1{,}2, \ldots k\}$ összemérhetetlen. Azt állítjuk, hogy ekkor $\{conv(f_i(P)), \; i = 1{,}2, \ldots k\}$ is összemérhetetlen.

Tegyük fel, hogy van olyan a és b, amire teljesül $a \subseteq b$, $a \in conv(f_i(P))$, $b \in conv(f_j(P))$ és $i \neq j$. Ekkor a konvex burok definíciója szerint léteznek $a' \in f_i(P)$ és $b' \in f_j(P)$ halmazok, amikre $a' \subseteq a \subseteq b \subseteq b'$. Azonban $a' \nsubseteq b'$, mivel $\{f_i(P),\ i = 1{,}2, \dots k\}$-ről feltettük, hogy összemérhetetlen.

Mivel $\{conv(f_i(P)),\ i = 1{,}2, \dots k\}$ összemérhetetlen, minden lánc legfeljebb egy halmazrendszert metsz belőle. A 2.2.1. Lemma szerint minden $conv(f_i(P))$-beli halmazrendszeren legalább

$$t_j(P)\lfloor n/2\rfloor!\,\lceil n/2\rceil!\,(1 - O(n^{-1})) \tag{2.2.6}$$

lánc megy át. Mivel összesen $n!$ lánc van,

$$k \leq \frac{n!}{t_j(P)\lfloor n/2\rfloor!\,\lceil n/2\rceil!\,(1 - O(n^{-1}))} = \frac{1}{t_j(P)}\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}(1 + O(n^{-1})). \tag{2.2.7}$$

□

2.3. Az alsó korlát

Ebben az alfejezetben egy alsó korlátot fogunk bizonyítani $M_j(P,n)$-re úgy, hogy P-nek több példányát ágyazzuk be B_n-be. A konstrukcióhoz szükségünk lesz a következő lemmákra.

2.3.1. Lemma *Legyen P egy véges poset, és legyen $f : P \to B_m$ beágyazás. Ekkor B_m elemei elláthatóak az $1, 2, \dots 2^m$ címkékkel úgy, hogy minden halmaz nagyobb címkét kap az összes részhalmazánál, és $conv(f(P))$ elemeinek címkéi egy intervallumot alkotnak $[1, 2^m]$-ben.*

Bizonyítás Osszuk B_m elemeit három osztályra az alábbiak szerint:

Legyen $\mathcal{F}_1 = \{b \in B_m \mid \exists c \in f(P)\ \ b \subseteq c,\ \ \nexists a \in f(P)\ \ a \subseteq b\}$,

$\mathcal{F}_2 = conv(f(P)) = \{b \in B_m \mid \exists a, c \in f(P)\ \ a \subseteq b \subseteq c\}$

és $\mathcal{F}_3 = B_m \backslash (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \{b \in B_m \mid \nexists c \in f(P)\ \ b \subseteq c\}$.

$\mathcal{F}_1$ elemeihez használjuk az $[1,\ |\mathcal{F}_1|]$ számokat, $\mathcal{F}_2$ elemeihez az $[|\mathcal{F}_1| + 1,\ |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2|]$ számokat, $\mathcal{F}_3$ elemeihez pedig az $[|\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| + 1,\ 2^m]$ számokat. Egy osztályon belül osszuk ki úgy a címkéket, hogy a nagyobb részhalmaznak megfelelő elemek kapják a nagyobb címkéket.

Ellenőriznünk kell, hogy ha $x, y \in B_m$ és y nagyobb címkét kapott, mint x, akkor $y \not\subset x$.
Ha x és y ugyanabban az osztályban van, akkor $|x| \leq |y|$, tehát $y \not\subset x$.
Ha $x \in \mathcal{F}_1$ és $y \in \mathcal{F}_2$, akkor $y \not\subset x$, mivel y tartalmazza $f(P)$ valamely elemét, azonban x nem.
Ha $x \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ és $y \in \mathcal{F}_3$, akkor $y \not\subset x$, mivel x részhalmaza $f(P)$ valamely elemének, azonban y nem. □

2.3.2. Lemma *Legyen P egy véges poset és legyen $\varepsilon' > 0$ rögzített valós szám. Legyen $j \in \{1{,}2\}$. Ekkor léteznek N, K pozitív egészek és $f_1, f_2, \dots f_K : P \to B_N$ függvények, amikre teljesülnek az alábbiak.*

(i) Minden $i \in [1, K]$ esetén f_i beágyazás, ha $j = 1$, és erős beágyazás, ha $j = 2$.

(ii) $K \geq \frac{2^N(1-\varepsilon')}{t_j(P)}$.

(iii) Ha $i_1 < i_2$, $A \in f_{i_1}(P)$ és $B \in f_{i_2}(P)$, akkor $B \nsubseteq A$.

Bizonyítás Legyen P egy rögzített véges poset. Valamilyen m-re létezik $f : P \to B_m$ beágyazás (erős, ha $j = 2$), amire $|conv(f(P))| = t_j(P)$. Rögzítsünk egy ilyen m-et és f-et. Válasszuk k-t olyan pozitív egésznek, hogy $\left(1 - \frac{t_j(P)}{2^m}\right)^k \le \varepsilon'$ teljesüljön, és legyen $N = km$. Legyenek $S_1, S_2, \dots S_k$ páronként diszjunkt m méretű halmazok és legyen $S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$. Tekintsük S részhalmazait B_N elemeinek.

Legyenek $g_i : P \to B_{S_i}$ $(i = 1, 2, \dots k)$ olyan beágyazások, amik úgy képzik le P elemeit az m elemű S_i halmazok részhalmazaira, ahogy f teszi azt. Lássuk el az $1, 2, \dots 2^m$ címkékkel S_i részhalmazait a 2.3.1. Lemma szerint. A $conv(g_i(P))$-hez tartozó címkék az $I = [p,\ p + t_j(P) - 1]$ intervallum elemei lesznek minden i-re.

Azt mondjuk, hogy egy $g : P \to B_S$ leképezés *jó*, ha létezik hozzá egy $i \in [1,\ k]$ index és $k - 1$ halmaz $A_1 \subseteq S_1,\ A_2 \subseteq S_2, \dots A_{i-1} \subseteq S_{i-1},\ A_{i+1} \subseteq S_{i+1}, \dots A_k \subseteq S_k$ úgy, hogy az $A_1, A_2, \dots A_{i-1}$ halmazokhoz rendelt címkék egyike sincs I-ben, továbbá bármely $x \in P$ esetén $g(x) \cap S_i = g_i(x)$, és $g(x) \cap (S \backslash S_i) = \bigcup_{r \in [n] \backslash \{i\}} A_r$.

A jó leképezések száma

$$K = \sum_{i=1}^{k} (2^m - t_j(P))^{i-1} \cdot (2^m)^{k-i} = 2^{N-m} \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{t_j(P)}{2^m}\right)^{i-1} = \tag{2.3.1}$$

$$2^{N-m} \frac{1 - \left(1 - \frac{t_j(P)}{2^m}\right)^k}{\frac{t_j(P)}{2^m}} = \frac{2^N}{t_j(P)} \left(1 - \left(1 - \frac{t_j(P)}{2^m}\right)^k\right) \ge \frac{2^N(1 - \varepsilon')}{t_j(P)}.$$

$f_1, f_2, \dots f_K$ a jó leképezések lesznek valamilyen sorrendben. Ezek mind beágyazások (erősek, ha $j = 2$), és elég sokan vannak. Tehát (i) és (ii) teljesül. Most megadunk egy rendezést, ami teljesíti a (iii) feltételt.

Legyen g az a jó leképezés, amihez az i index és az $A_1, A_2, \dots A_{i-1}, A_{i+1}, \dots A_k$ halmazok tartoznak. Definiáljuk g kódját, mint egy k hosszú vektort a következő koordinátákkal. Az első $i - 1$ koordináta értéke egyenlő az $A_1, A_2, \dots A_{i-1}$ halmazokhoz tartozó címkékkel. Az i-edik koordináta legyen p, az I intervallum legkisebb eleme. Az utolsó $k-i$ koordináta egyenlő az $A_{i+1}, A_{i+2}, \dots A_k$ halmazokhoz tartozó címkékkel. Vegyük a jó leképezések kódjainak a lexikografikus rendezését, és nevezzük el őket ez alapján $f_1, f_2, \dots$-nek. (f_1 legyen az a jó leképezés, aminek a kódja első a lexikografikus rendezésben, f_2 az, aminek a kódja második, és így tovább.)

Ellenőrizzük, hogy ekkor valóban teljesül (iii). Tegyük fel, hogy létezik olyan $A \in f_{i_1}(P)$ és $B \in f_{i_2}(P)$ amire $i_1 < i_2$ és $B \subseteq A$ teljesül. Legyen az első koordináta, ahol f_{i_1} and f_{i_2} kódja eltér, az l-edik. Mivel $i_1 < i_2$, f_{i_2} l-edik koordinátája szigorúan nagyobb, f_{i_1}-é, és az első $l - 1$ koordináta nem I-beli. Ebből következik, hogy $B \cap S_l$ címkéje szigorúan nagyobb, mint $A \cap S_l$ címkéje. (Itt használtuk ki, hogy $conv(g_l(P))$ elemeinek címkéi intervallumot alkotnak.) Ekkor $B \cap S_l \nsubseteq A \cap S_l$, mivel a S_l részhalmazainak címkézése a 2.3.1. Lemma szerint történt. Ez viszont ellentmond $B \subseteq A$-nek. □

2.3.3. Tétel *Legyen P véges poset, $\varepsilon > 0$ és $j \in \{1,2\}$. Ekkor minden elég nagy n esetén*

$$M_j(P,n) \geq \frac{1}{t_j(P)}\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}(1-\varepsilon). \tag{2.3.2}$$

Bizonyítás Válasszuk N-et, K-t és az $f_1, f_2, \dots f_K : P \to B_N$ beágyazásokat a 2.3.2. Lemma szerint. (Legyen $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$.) Tekintsük B_N elemeit egy N méretű S halmaz részhalmazainak. Legyen R egy olyan halmaz, amire $S \subset R$, $|R| = n$ és legyen $Q = R \backslash S$. Vezessük be az alábbi jelölést.

$$\mathcal{Q} = \left\{ T \subset Q \;\middle|\; \left\lfloor \frac{n-N}{2} \right\rfloor - K \leq |T| \leq \left\lfloor \frac{n-N}{2} \right\rfloor - 1 \right\} \tag{2.3.3}$$

Ha n elég nagy, akkor teljesül az alábbi egyenlőtlenség.

$$\sum_{i=1}^{K} \binom{n-N}{\lfloor \frac{n-N}{2} \rfloor - i} \geq K \cdot \binom{n}{\lfloor \frac{n-N}{2} \rfloor} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{2.3.4}$$

Ekkor

$$|\mathcal{Q}| \geq K \cdot \binom{n-N}{\lfloor \frac{n-N}{2} \rfloor} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \geq \frac{2^N(1-\frac{\varepsilon}{2})}{t_j(P)} \cdot 2^{-N} \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \geq \frac{1}{t_j(P)}\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}(1-\varepsilon). \tag{2.3.5}$$

Itt felhasználtuk, hogy $2^N\binom{n-N}{\lfloor \frac{n-N}{2} \rfloor} \geq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Ez N szerinti indukcióval könnyen igazolható.

Minden $T \in \mathcal{Q}$ halmazhoz megadunk egy $f_T : P \to B_R$ beágyazást (erőset, ha $j = 2$) úgy, hogy $\{f_T(P) \mid T \in \mathcal{Q}\}$ összemérhetetlen legyen. Minden $x \in P$ esetén legyen $f_T(x) \cap Q = T$ és $f_T(x) \cap S = f_{\lfloor \frac{n-N}{2} \rfloor - |T|}(x)$. Ekkor f_T beágyazás lesz (erős, ha $j = 2$).

Most belátjuk, hogy $\{f_T(P) \mid T \in \mathcal{Q}\}$ összemérhetetlen. Legyenek $T_1, T_2 \in \mathcal{Q}$ különböző részhalmazok. Tegyük fel, hogy $A_1 \in f_{T_1}(P)$, $A_2 \in f_{T_2}(P)$ és $A_1 \subseteq A_2$. Ekkor $T_1 = A_1 \cap Q \subseteq A_2 \cap Q = T_2$. Mivel $T_1 \neq T_2$, $|T_1| < |T_2|$ teljesül. Mivel $A_1 \cap S \in f_{\lfloor \frac{n-N}{2} \rfloor - |T_1|}(P)$ és $A_2 \cap S \in f_{\lfloor \frac{n-N}{2} \rfloor - |T_2|}(P)$, a 2.3.2. Lemma (iii) pontja alapján $A_1 \cap S \not\subseteq A_2 \cap S$. Ez viszont ellentmond annak, hogy $A_1 \subseteq A_2$, tehát a vizsgált család valóban összemérhetetlen.

Találtunk tehát $\frac{1}{t_j(P)}\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}(1-\varepsilon)$ különböző beágyazását (erőset, ha $j = 2$) P-nek to B_R-be, ahol $|R| = n$, amelyek által meghatározott példányok összemérhetetlen családot alkotnak. Ezzel a tételt beláttuk. □

2.4. Megjegyzések

A most megoldott probléma közeli kapcsolatban áll a kizárt posetek problémájával (lásd 1.3. alfejezet). Vegyük a következő két példát. Ha az 1.3.6. Tételhez hasonlóan a V_2 és Λ_2 poseteket zárjuk ki, akkor a halmazrendszerünk az egypontú P^1 és a kétpontú P^2 posetek összemérhetetlen példányaiból fog állni. Ha csak a V_2 posetet zárjuk ki, akkor pedig a $\{P^1, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 \dots\}$ posetek összemérhetetlen családja alkotja majd a halmazrendszerünket. Tehát mindkét esetben adott posetek egy halmaza, ezeknek kell néhány példányát beágyazni B_n-be úgy, hogy a példányok összelemszáma maximális legyen. Tehát ezek a kizárt posetes problémák visszavezethetők a most vizsgált probléma egy általánosabb verziójára, ahol többféle posetet ágyazhatunk be egyszerre.

Jelölés Legyen $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots P_k\}$ véges posetek egy halmaza, n egy pozitív egész és $j = \{1{,}2\}$. Ekkor $M_j(\mathcal{P}, n)$ jelöli a legnagyobb olyan $\mathcal{F} \subset B_n$ halmazrendszernek az elemszámát, ami felbomlik $\mathcal{P}$-beli posetek B_n-be vett beágyazásainak ($j = 2$ esetén erős beágyazásainak) az összemérhetetlen példányaira. (Tehát ha $k = 1$, akkor $\mathcal{P} = \{P_1\}$ és $M_j(\mathcal{P}, n) = |P| \cdot M_j(P, n)$.)

Az $M_j(\mathcal{P}, n)$ értékek könnyen meghatározhatóak az eddigiek alapján.

2.4.1. Következmény *Legyen $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots P_k\}$ véges posetek egy halmaza és $j = \{1{,}2\}$. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_j(\mathcal{P}, n)}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} = \max_{1\le i\le k} \frac{|P_i|}{t_j(P_i)}. \tag{2.4.1}$$

Bizonyítás Legyen $\mathcal{P}$, n és j fix, és legyen $c = \max\limits_{1\le i\le k} \dfrac{|P_i|}{t_j(P_i)}$. Az alsó becslés nyilvánvalóan adódik, ha vesszük azt a posetet, amire a felvétetik a maximum, és azt ágyazzuk be sok példányban a 2.3.3. Tétel szerint. A felső becslés bizonyítása nagyon hasonló a 2.2.2. Tételhez. Eszerint a P_i poset egy példányának konvex burkán átmenő láncok száma legalább

$$\left(t_j(P) - \frac{t_j(P)(t_j(P)-1)}{n}\right) \lfloor n/2 \rfloor!\, \lceil n/2 \rceil! \ge \frac{|P_i|}{c}(1 - O(n^{-1}))\lfloor n/2 \rfloor!\, \lceil n/2 \rceil!\,. \tag{2.4.2}$$

Tehát minden konvex burkon legalább $\frac{1}{c}(1 - O(n^{-1}))\lfloor n/2 \rfloor!\, \lceil n/2 \rceil!$-szer annyi lánc megy át, mint ahány pontú az őt feszítő poset. Mivel összesen $n!$ lánc van, és mindegyik legfeljebb egy konvex burkot metsz, a példányok összelemszáma legfeljebb

$$\frac{n!}{\frac{1}{c}(1 - O(n^{-1}))\lfloor n/2 \rfloor!\, \lceil n/2 \rceil!} = c\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}(1 + O(n^{-1})). \tag{2.4.3}$$

□

A továbbiakban pontosan meghatározzuk az összemérhetetlen módon elhelyezhető példányok maximális számát bizonyos posetek esetén. A problémát már megoldották az út posetekre.

2.4.2. Tétel (Griggs, Stahl, Trotter) [13] *Jelölje P^{h+1} a $h+1$ pontú út posetet. Ekkor minden $n \ge h$ esetén*

$$M_1(P^{h+1}, n) = \binom{n-h}{\lfloor \frac{n-h}{2} \rfloor}. \tag{2.4.4}$$

Bizonyítás Tekintsük P^{h+1}-nek m különböző beágyazását B_n-be úgy, hogy a kapott példányok összemérhetetlen családot alkossanak. Jelölje az i-edik beágyazásnál a maximális illetve minimális elem képét C_i, illetve D_i. $C_i \supset D_i$ miatt $\overline{C}_i \cap D_i = \emptyset$. Másrészt, ha $i \neq j$, az összemérhetetlenségi feltételből $\overline{C}_i \cap D_j \neq \emptyset$ következik. Alkalmazzuk Bollobás tételét (1.1.1. Tétel) a $\overline{C}_i, D_i$, $(i = 1,2,\dots m)$ halmazokra.

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{|\overline{C}_i|+|B_i|}{|\overline{C}_i|}} \leq 1. \tag{2.4.5}$$

$|C_i - D_i| \geq h$ miatt $|\overline{C_i}| + |D_i| \leq n - h$. Tehát (2.4.5) bal oldala csökkenthető a következőképpen.

$$\frac{m}{\binom{n-h}{\lfloor \frac{n-h}{2} \rfloor}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n-h}{\lfloor \frac{n-h}{2} \rfloor}} \leq \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{|\overline{C}_i|+|B_i|}{|\overline{C}_i|}} \leq 1 \tag{2.4.6}$$

Ezzel a tételhez szükséges felső becslést igazoltuk.

Az alsó becslés a következő konstrukcióból adódik. Legyen $G \subset \{h+1, h+2, \dots n\}$ egy $\lfloor \frac{n-h}{2} \rfloor$ méretű részhalmaz. Ekkor P^{h+1} elemeit leképezve a G, $\{1\} \cup G$, $\{1,2\} \cup G, \dots$ $\{1,2\dots h\} \cup G$ halmazokra, beágyazást kapunk. Összesen $\binom{n-h}{\lfloor \frac{n-h}{2} \rfloor}$ ilyen beágyazás van, és a kapott példányok összemérhetetlenek. Ezzel az alsó becslést igazoltuk. □

Definíció Jelölje $h(P)$ a P poset *magasságát*, ami definíció szerint 1-gyel kisebb, mint a benne lévő leghosszabb út csúcsainak száma. Azt mondjuk, hogy P *keskeny*, ha beágyazható $B_{h(P)}$-be. P-t *vékonynak* nevezzük, ha erős beágyazása is van $B_{h(P)}$-be.

2.4.3. Tétel *Ha P keskeny poset, akkor*

$$M_1(P, n) = \binom{n-h}{\lfloor \frac{n-h}{2} \rfloor}. \tag{2.4.7}$$

Ha P vékony, akkor

$$M_1(P, n) = M_2(P, n) = \binom{n-h}{\lfloor \frac{n-h}{2} \rfloor}. \tag{2.4.8}$$

Bizonyítás Mivel P^{h+1} részposete P-nek,

$$M_2(P, n) \leq M_1(P, n) \leq M_1(P^{h+1}, n). \tag{2.4.9}$$

Tekintsük most $M_1(P^{h+1}, n)$ darab összemérhetetlen példányát P^{h+1}-nek B_n-ben, ahogyan azt a 2.4.2. Tételben megadtuk. A konvex burkuk izomorf B_h-val, tehát P beágyazható beléjük (erős módon, ha P vékony). Innen $M_1(P, n) \geq M_1(P^{h+1}, n)$ adódik keskeny posetekre, és $M_2(P, n) \geq M_1(P^{h+1}, n)$ vékony posetekre.

$M_1(P^{h+1}, n)$ értékét már meghatároztuk a 2.4.2. Tételben, ezzel a bizonyítás kész. □

Természetesen a 2.4.3. Tétel nem mond ellent a 2.1.1. Tételnek, mivel $t_1(P) = 2^h$, és rögzített h esetén

$$\frac{1}{2^h} \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sim \binom{n-h}{\lfloor \frac{n-h}{2} \rfloor}. \tag{2.4.10}$$

A legkisebb nem keskeny poset a 3 elemű V_2 poset. Most megadjuk V_2 sok összemérhetetlen beágyazását B_n-be tetszőleges n esetén. Rögzítsük az i paramétert $(1 \leq i \leq \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor)$. Válasszunk egy

$$F \in \binom{[n-2i]}{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2i + 1} \tag{2.4.11}$$

elemet. Ekkor az

$$\begin{aligned} &F \cup \{n-2i+3,\ n-2i+4, \dots, n\}, \\ &F \cup \{n-2i+3,\ n-2i+4, \dots, n\} \cup \{n-2i+1\}, \\ &F \cup \{n-2i+3,\ n-2i+4, \dots, n\} \cup \{n-2i+2\} \end{aligned}$$

halmazok a V_2 poset egy példányát adják. Jelölje $\mathcal{P}_i$ ezen példányok halmazát. Triviális, hogy két példány $\mathcal{P}_i$-ből összemérhetetlen. Azt sem nehéz ellenőrizni, hogy a $\mathcal{P}_i$-ből és $\mathcal{P}_j$-ből vett példányok is összemérhetetlenek. $(1 \leq i < j \leq \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor)$. Tehát

$$\bigcup_{i=1}^{\lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor} \mathcal{P}_i \tag{2.4.12}$$

a V_2 poset beágyazásainak páronként összemérhetetlen példányaiból áll. Azt sejtjük, hogy ez a legnagyobb ilyen.

2.4.4. Sejtés

$$M_1(V_2, n) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor} \binom{n-2i}{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2i + 1}. \tag{2.4.13}$$

3. Unió-metsző halmazrendszerek

3.1. Bevezetés

Ez a fejezet a szerző Katona Gyulával közös [17] cikkén alapszik. Három metsző halmazrendszerekkel kapcsolatos tételt fogunk bizonyítani, melyeket a következő kérdés inspirált:

Kérdés (Körner János, [19]) Legyen $\mathcal{F}$ egy halmazrendszer, aminek az elemei $[n]$ részhalmazai. Tegyük fel, hogy nincs négy különböző $F_1, F_2, G_1, G_2 \in \mathcal{F}$ halmaz, amire teljesül $(F_1 \cup F_2) \cap (G_1 \cup G_2) = \emptyset$. Legfeljebb mekkora lehet $|\mathcal{F}|$?

A kérdésre választ ad a 3.2.1. Tétel egyik speciális esete. (Lásd a 3.2.2. Megjegyzést.)

A fejezet felépítése a következő. A 3.2 alfejezetben pontosan meghatározzunk az $[n]$ részhalmazaiból álló legnagyobb olyan $\mathcal{F}$ halmazrendszer méretét, ahol az $\mathcal{F}$ elemeinek páronkénti uniójából álló halmazrendszer l-metsző. A 3.3 alfejezetben olyan halmazrendszerek vizsgálunk, ahol bármely s elem uniója metszi bármely t elem unióját. $s + t \leq 4$ esetén pontosan, $s + t \geq 5$ esetén pedig aszimptotikusan határozzuk meg a legnagyobb ilyen halmazrendszer méretét. A 3.4 alfejezetben pontosan meghatározzuk a legnagyobb k-uniform halmazrendszer méretét, ami rendelkezik az előbbi (s, t)-unió-metsző tulajdonsággal, ha n elég nagy.

3.2. Unió-l-metsző halmazrendszerek

Definíció Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszert unió-l-metszőnek nevezünk, ha $F_1, F_2, G_1, G_2 \in \mathcal{F}$, $F_1 \neq F_2$, $G_1 \neq G_2$ esetén teljesül $|(F_1 \cup F_2) \cap (G_1 \cup G_2)| \geq l$.

3.2.1. Tétel *Legyen $\mathcal{F}$ egy unió-l-metsző halmazrendszer, ami $[n]$ részhalmazaiból áll. ($n \geq 3$) Ekkor az alábbi felső korlátok érvényesek $|\mathcal{F}|$-re.*

a) Ha $n + l$ páros, akkor

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=\frac{n+l}{2}-1}^{n} \binom{n}{i}. \tag{3.2.1}$$

b) Ha $n + l$ páratlan, akkor

$$|\mathcal{F}| \leq AK\left(n, \frac{n+l-3}{2}, l\right) + \sum_{i=\frac{n+l-1}{2}}^{n} \binom{n}{i}. \tag{3.2.2}$$

Ezek a korlátok tovább nem javíthatóak. (Az AK függvény definícióját lásd az 1.1. alfejezetben.)

Bizonyítás Feltehetjük, hogy $\mathcal{F}$ felszálló halmazrendszer, azaz $A \in \mathcal{F}$, $A \subset B$ esetén $B \in \mathcal{F}$. (Ha lenne olyan $A \subset B$, hogy $A \in \mathcal{F}$, $B \notin \mathcal{F}$, akkor lecserélhetnénk $\mathcal{F}$-et $\mathcal{F} - A + B$-re. Véges sok ilyen lépés után egy olyan felszálló halmazrendszerhez jutunk, aminek az elemszáma megegyezik az eredetiével és szintén unió-l-metsző.)

Tegyük fel, hogy $l \in \{1{,}2\}$. Vegyük észre, hogy ha $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$, és $|A \cup B| = n + l - 3 < n$, akkor A és B nem lehet egyszerre $\mathcal{F}$-ben. Abból, hogy $A, B \in \mathcal{F}$ és $\mathcal{F}$ felszálló, az következne, hogy létezik két $C, D \in \mathcal{F}$ halmaz, amire teljesül $A \subset C$, $B \subset D$ és $|(A \cup C) \cap (B \cup D)| = |C \cap D| = l - 1$, ami ellentmondás lenne.

Minden $0 \leq i < \frac{n+l-3}{2}$ egészre definiáljuk a $G_i(S_i, T_i, E_i)$ páros gráfot a következőképpen. Feleljenek meg S_i csúcsai az $[n]$ alaphalmaz i elemű részhalmazainak, T_i csúcsai pedig a $n + l - 3 - i$ eleműeknek. Az $A \in S_i$ és $B \in T_i$ csúcsok közt akkor menjen él, ha a nekik megfelelő részhalmazok diszjunktak. Ekkor mindkét csúcsosztály egyenlő fokú pontokat tartalmaz. Abból, hogy $|S_i| \leq |T_i|$, következik, hogy minden $X \subseteq S_i$ csúcshalmazra teljesül $|\Gamma(X)| \geq |X|$. Hall tétele szerint ekkor létezik S_i-t fedő párosítás. Mivel egy párnak legfeljebb egy tagja lehet benne $\mathcal{F}$-ben,

$$|\mathcal{F}^i| + |\mathcal{F}^{n+l-3-i}| \leq \binom{n}{n+l-3-i} \qquad \left(0 \leq i < \frac{n+l-3}{2}\right). \tag{3.2.3}$$

Most legyen $l \geq 3$. Belátjuk, hogy (3.2.3) ekkor is teljesül minden n-re. Tegyük fel, hogy valamely $A, B \in \mathcal{F}$, $A, B \neq [n]$ halmazokra teljesült $|A \cap B| \leq l - 3$. Legyenek $x \in [n] - A$ és $y \in [n] - B$. Ekkor $A \cup \{x\},\ B \cup \{y\} \in \mathcal{F}$, mivel $\mathcal{F}$ felszálló halmazrendszer és

$$|(A \cup (A \cup \{x\})) \cap (B \cup (B \cup \{y\}))| = |(A \cup \{x\}) \cap (B \cup \{y\})| \leq |(A \cap B) \cup \{x, y\}| = l - 3 + 2 < l.$$

Tehát $\mathcal{F} - \{[n]\}$ egy $(l-2)$-metsző rendszer, tehát $\mathcal{F}$ is az. Használjuk az 1.2.7. Tételt l helyett $l-2$-vel. ($l - 2$ pozitív, mivel $l \geq 3$.) Azt kapjuk, hogy (3.2.3) teljesül minden n és l esetén.

Tegyük most fel, hogy l pozitív egész és $n + l$ páratlan. Ekkor $\mathcal{F}^{\frac{n+l-3}{2}}$ l-metsző rendszer lesz. Ha $A, B \in \mathcal{F}^{\frac{n+l-3}{2}}$ olyan halmazok lennének, amikre $|A \cap B| \leq l - 1$, akkor a felszálló tulajdonság miatt létezne kéz $C, D \in \mathcal{F}$ halmaz, amire teljesülne $A \subset C$, $B \subset D$ és $|(A \cup C) \cap (B \cup D)| = |C \cap D| = l - 1$. Az 1.1.3. Tétel a következő felső korlátot adja:

$$|\mathcal{F}^{\frac{n+l-3}{2}}| \leq AK\left(n, \frac{n+l-3}{2}, l\right). \tag{3.2.4}$$

A tétel állításai rövid számolás után adódnak. Ha $l \leq 2$, akkor a (3.2.3) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$|\mathcal{F}| = \sum_{i=0}^{n} |\mathcal{F}^i| = |\mathcal{F}^{\frac{n+l-3}{2}}| + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+l}{2} - 2 \rfloor} (|\mathcal{F}^i| + |\mathcal{F}^{n+l-3-i}|) + \sum_{i=n+l-2}^{n} |\mathcal{F}^i| \leq |\mathcal{F}^{\frac{n+l-3}{2}}| + \sum_{i=\lceil \frac{n+l}{2} - 1 \rceil}^{n} \binom{n}{i}. \tag{3.2.5}$$

Legyen most $l \geq 3$. Mivel $\mathcal{F}$ $(l-2)$-metsző, $|\mathcal{F}^i| = 0$ minden $i < l - 2$ esetén. Felhasználva (3.2.3)-et, azt kapjuk, hogy

$$|\mathcal{F}| = \sum_{i=l-3}^{n} |\mathcal{F}^i| = |\mathcal{F}^{\frac{n+l-3}{2}}| + \sum_{i=l-3}^{\lfloor \frac{n+l}{2}-2 \rfloor} (|\mathcal{F}^i| + |\mathcal{F}^{n+l-3-i}|) \leq |\mathcal{F}^{\frac{n+l-3}{2}}| + \sum_{i=\lceil \frac{n+l}{2}-1 \rceil}^{n} \binom{n}{i}. \qquad (3.2.6)$$

Ugyanazt a felső becslést kaptuk mindkét esetben. A tétel állításai ebből azonnal következnek, mivel $\mathcal{F}^{\frac{n+l-3}{2}} = \emptyset$, ha $n+l$ páros, és $|\mathcal{F}^{\frac{n+l-3}{2}}| \leq AK\left(n, \frac{n+l-3}{2}, l\right)$, ha $n+l$ páratlan (lásd (3.2.4)).

Annak belátásához, hogy a kapott korlátok tovább nem javíthatóak, tekintsük a következő unió-l-metsző halmazrendszereket. Ha $n+l$ páros, vegyük az összes legalább $\frac{n+l}{2}-1$ elemű részhalmazt. Ha $n+l$ páratlan, vegyük az összes legalább $\frac{n+l-1}{2}$ elemű részhalmazt és egy $AK\left(n, \frac{n+l-3}{2}, l\right)$ méretű $\frac{n+l-3}{2}$-uniform l-metsző halmazrendszert. □

3.2.2. Megjegyzés *Tekintsük az $l = 1$ esetet, amire Körner eredeti kérdése vonatkozott. Az Erdős-Ko-Rado-tétel (1.2.4. Tétel) szerint az $[n]$ részhalmazaiból álló legnagyobb k-uniform metsző rendszer mérete $\binom{n-1}{k-1}$, ha $n \geq 2k$. Ez azt jelenti, hogy $AK(n, \frac{n}{2}-1,1) = \binom{n-1}{\frac{n}{2}-2}$, tehát a legjobb felső korlát $|\mathcal{F}|$-re $l = 1$ esetén*

$$|\mathcal{F}| \leq \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=(n-1)/2}^{n} \binom{n}{i} & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ \displaystyle\binom{n-1}{\frac{n}{2}-2} + \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} \binom{n}{i} & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases} \qquad (3.2.7)$$

3.3. (s,t)-unió-metsző halmazrendszerek

Ebben a feladatban a probléma egy olyan változatával foglalkozunk, ahol $\mathcal{F}$-nek s illetve t részhalmazát vesszük 2 illetve 2 helyett.

Definíció Az $\mathcal{F}$ halmazrendszert (s,t)-unió-metszőnek nevezzük, ha bármely $s+t$ páronként különböző $F_1, F_2, \dots F_s, G_1, \dots G_t \in \mathcal{F}$ halmazra teljesül

$$\left(\bigcup_{i=1}^{s} F_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{t} G_j\right) \neq \emptyset. \qquad (3.3.1)$$

Az $[n]$ részhalmazaiból álló legnagyobb (s,t)-unió-metsző halmazrendszer méretét jelölje $f(n,s,t)$.

Ebben az alfejezetben $s+t \leq 4$ esetén pontosan, egyébként aszimptotikusan fogjuk meghatározni $f(n,s,t)$ értékét. Mivel $f(n,s,t) = f(n,t,s)$, feltehetjük, hogy $s \leq t$.

3.3.1. Tétel *Legyen $n \geq 3$.*

a)

$$f(n,1,1) = 2^{n-1}. \qquad (3.3.2)$$

b)

$$f(n{,}1{,}2)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=n/2}^{n}\binom{n}{i} & \textit{ha } n \textit{ páros,}\\ \displaystyle\binom{n-1}{\frac{n-3}{2}}+\sum_{i=(n+1)/2}^{n}\binom{n}{i} & \textit{ha } n \textit{ páratlan.}\end{cases} \tag{3.3.3}$$

c)

$$f(n{,}2{,}2)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=(n-1)/2}^{n}\binom{n}{i} & \textit{ha } n \textit{ páratlan,}\\ \displaystyle\binom{n-1}{\frac{n}{2}-2}+\sum_{i=n/2}^{n}\binom{n}{i} & \textit{ha } n \textit{ páros.}\end{cases} \tag{3.3.4}$$

d)

$$f(n{,}1{,}3)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=n/2}^{n}\binom{n}{i} & \textit{ha } n \textit{ páros,}\\ \displaystyle\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}}+\sum_{i=(n+1)/2}^{n}\binom{n}{i} & \textit{ha } n \textit{ páratlan.}\end{cases} \tag{3.3.5}$$

e) Ha $t \geq 4$, akkor

$$2^{n-1}+\frac{1}{2}\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} \leq f(n{,}1{,}t) \leq 2^{n-1}+\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\left(\frac{1}{2}+\frac{t-2}{n}+O(n^{-2})\right). \tag{3.3.6}$$

f) Ha $s \geq 2$ és $t \geq 3$, akkor

$$2^{n-1}+\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\frac{n}{n+2} \leq f(n,s,t) \leq 2^{n-1}+\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\left(1+\frac{t+s-3}{n}+O(n^{-2})\right). \tag{3.3.7}$$

Bizonyítás a) (Lásd [8].) $f(n{,}1{,}1)$ az $[n]$ részhalmazaiból álló legnagyobb metsző rendszer méretét jelöli. Ez legfeljebb 2^{n-1}, mivel egy részhalmaz és a komplementere nem lehet benne egy metsző renszerben egyszerre. Az összes, egy adott elemet tartalmazó részhalmazt választva egy 2^{n-1} elemű metsző rendszert kapunk.

b) Legyen $\mathcal{F}$ egy $[n]$ részhalmazaiból álló (1,2)-unió-metsző halmazrendszer. Feltehetjük, hogy $\mathcal{F}$ felszálló rendszer. Vegyük észre, hogy ha $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$, és $|A \cup B| = n-1$, akkor A és B nem lehet egyszerre $\mathcal{F}$-ben egyszerre. Valóban, ha A és B ilyenek lennének, akkor az $\{x\} = [n] - (A \cup B)$ jelölést használva $A \cap (B \cup (B \cup \{x\})) = A \cap (B \cup \{x\}) = \emptyset$ adódik, ami ellentmondás.

Minden $0 \leq i < \frac{n-1}{2}$ egészre definiáljuk a $G_i(S_i, T_i, E_i)$ páros gráfot a következőképpen. Feleljenek meg S_i csúcsai az $[n]$ alaphalmaz i elemű részhalmazainak, T_i csúcsai pedig a $n-1-i$ eleműeknek. Az $A \in S_i$ és $B \in T_i$ csúcsok közt akkor menjen él, ha a nekik megfelelő részhalmazok diszjunktak. Ekkor mindkét csúcsosztály egyenlő fokú pontokat tartalmaz. Abból, hogy $|S_i| \leq |T_i|$, következik, hogy minden $X \subseteq S_i$ csúcshalmazra teljesül $|\Gamma(X)| \geq |X|$. Hall tétele szerint ekkor létezik S_i-t fedő párosítás. Mivel egy párnak legfeljebb egy tagja lehet benne $\mathcal{F}$-ben,

$$|\mathcal{F}^i| + |\mathcal{F}^{n-1-i}| \le \binom{n}{n-1-i} \qquad \left(0 \le i < \frac{n-1}{2}\right). \tag{3.3.8}$$

Ha n páros, ezekből az egyenlőtlenségekből következik

$$|\mathcal{F}| \le \sum_{i=n/2}^{n} \binom{n}{i}. \tag{3.3.9}$$

Tegyük fel, hogy n páratlan. Ekkor $\mathcal{F}^{\frac{n-1}{2}}$ metsző halmazrendszer. Valóban, ha $A, B \in \mathcal{F}^{\frac{n-1}{2}}$ diszjunktak lennének, akkor a felszálló tulajdonság miatt létezne egy olyan $C \in \mathcal{F}$ részhalmaz, amire teljesül $B \subset C$ és $|A \cap (B \cup C)| = |A \cap C| = \emptyset$. Az Erdős-Ko-Rado-tételt (1.2.4. Tétel) használva a következő felső korlát adható:

$$|\mathcal{F}^{\frac{n-1}{2}}| \le \binom{n-1}{\frac{n-3}{2}}. \tag{3.3.10}$$

Felhasználva ezt, és a (3.3.8) egyenlőtlenségeket, a bizonyítandó felső korlátot kapjuk:

$$|\mathcal{F}| \le \binom{n-1}{\frac{n-3}{2}} + \sum_{i=(n+1)/2}^{n} \binom{n}{i}. \tag{3.3.11}$$

Annak belátásához, hogy a kapott korlátok tovább nem javíthatóak, tekintsük a következő (1,2)-unió-metsző halmazrendszereket. Ha $n + l$ páros, vegyük az összes legalább $\frac{n}{2}$ elemű részhalmazt. Ha n páratlan, vegyük az összes legalább $\frac{n+1}{2}$ elemű részhalmazt és azokat az $\frac{n-1}{2}$ eleműeket, amik tartalmaznak egy rögzített elemet.

c) Ezt a problémát már megoldottuk, mint a 3.2.1. Tétel $l = 1$ esetét. (Lásd a 3.2.2. Megjegyzést.)

d) Legyen $\mathcal{F}$ egy $[n]$ részhalmazaiból álló (1,3)-unió-metsző halmazrendszer. Jelölje $\mathcal{F}'$ az $\mathcal{F}$ elemeinek komplementereiből álló halmazrendszert, és legyen $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$. Belátjuk, hogy a $\mathcal{G}$ halmazrendszer V_2-mentes és Λ_2-mentes. (A szükséges definíciókat lásd az 1.3. alfejezetben.) Mivel $\mathcal{G}$ invariáns a komplementer vételre, elég azt megmutatni, hogy $\mathcal{G}$ V_2-mentes. Tegyük fel, hogy $A, B, C \in \mathcal{G}$ páronként különböző részhalmazok, amikre teljesül $A \subset B$ és $A \subset C$. Ekkor az $A, [n] - A, [n] - B, [n] - C \in \mathcal{F}$ részhalmazokra teljesül

$$A \cap (([n] - A) \cup ([n] - B) \cup ([n] - C)) = A \cap ([n] - A) = \emptyset. \tag{3.3.12}$$

Az 1.3.6. Tétel a következő felső becslést adja egy V_2-mentes és Λ_2-mentes halmazrendszer elemszámára:

$$|\mathcal{G}| \le 2\binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}. \tag{3.3.13}$$

Mivel $2|\mathcal{F}| \leq 2^n + |\mathcal{G}|$,

$$|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1} + \binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=n/2}^{n} \binom{n}{i} & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} + \displaystyle\sum_{i=(n+1)/2}^{n} \binom{n}{i} & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases} \tag{3.3.14}$$

Annak belátásához, hogy a kapott korlátok tovább nem javíthatóak, tekintsük a következő (1,3)-unió-metsző halmazrendszereket. Ha $n+l$ páros, vegyük az összes legalább $\frac{n}{2}$ elemű részhalmazt. Ha n páratlan, vegyük az összes legalább $\frac{n+1}{2}$ elemű részhalmazt és azokat az $\frac{n-1}{2}$ eleműeket, amik *nem* tartalmaznak egy rögzített elemet.

e) Legyen $\mathcal{F}$ egy $[n]$ részhalmazaiból álló $(1,t)$-unió-metsző halmazrendszer. Definiáljuk $\mathcal{G}$-t, mint az előbb, és figyeljük meg, hogy $\mathcal{G}$ V_{t-1}-mentes. Az 1.3.4. Tétel szerint ekkor

$$|\mathcal{G}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \left(1 + \frac{2(t-2)}{n} + O(n^{-2})\right). \tag{3.3.15}$$

Mivel $2|\mathcal{F}| \leq 2^n + |\mathcal{G}|$,

$$|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{1}{2} + \frac{t-2}{n} + O(n^{-2})\right). \tag{3.3.16}$$

Az alsó korlát nyilvánvalóan adódik abból, hogy

$$f(n,1,t) \geq f(n,1,3) = 2^{n-1} + \binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \geq 2^{n-1} + \frac{1}{2}\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}. \tag{3.3.17}$$

f) Legyen $\mathcal{F}$ egy $[n]$ részhalmazaiból álló (s,t)-unió-metsző halmazrendszer. Definiáljuk $\mathcal{G}$-t, mint az előbb. Belátjuk, hogy a $\mathcal{G}$ halmazrendszer $K_{s,t}$-mentes. Tegyük fel, hogy $A_1, A_2, \ldots A_s, B_1, \ldots B_t \in \mathcal{G}$ páronként különböző részhalmazok és $A_i \subset B_j$ minden (i,j)-re. Ekkor

$$\left(\bigcup_{i=1}^{s} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{t} ([n] - B_j)\right) = \emptyset. \tag{3.3.18}$$

Ez viszont ellentmondás, mivel $[n] - B_j \in \mathcal{F}$ minden j-re.

Az 1.3.5. Tétel szerint

$$|\mathcal{G}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \left(2 + \frac{2(t+s-3)}{n} + O(n^{-2})\right). \tag{3.3.19}$$

Mivel $2|\mathcal{F}| \leq 2^n + |\mathcal{G}|$,

$$|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \left(1 + \frac{t+s-3}{n} + O(n^{-2})\right). \tag{3.3.20}$$

Az alsó korlát abból következik, hogy

$$f(n,s,t) \geq f(n,2,2) \geq 2^{n-1} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\frac{n}{n+2}. \tag{3.3.21}$$

(A második egyenlőtlenség elemi számolással igazolható, mivel $f(n,2,2)$ pontos értékét már meghatároztuk. Itt akkor áll egyenlőség, ha n páros.)

$\square$

3.4. A k-uniform eset

Ebben az alfejezetben meghatározzuk az $[n]$ k elemű részhalmazaiból álló legnagyobb (s,t)-unió-metsző halmazrendszer méretét, ha n elég nagy.

3.4.1. Tétel *Tegyük fel, hogy $1 \leq s \leq t$ és $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ egy (s,t)-unió-metsző halmazrendszer. Ekkor*

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1} + s - 1 \tag{3.4.1}$$

teljesül, ha $n > n(k,t)$.

3.4.2. Megjegyzés *Létezik $\binom{n-1}{k-1} + s - 1$ méretű k-uniform (s,t)-unió-metsző halmazrendszer. Vegyük az összes k-elemű halmazt, ami tartalmaz egy rögzített elemet és vegyünk $s-1$ darab tetszőleges további k elemű részhalmazt. (Ehhez persze kell, hogy $\binom{n-1}{k} \geq s-1$, ami igaz, ha n elég nagy.)*

A 3.4.1. Tétel bizonyításához szükségünk lesz az alábbi lemmákra.

3.4.3. Lemma *Legyen c egy rögzített pozitív egész. Ha $\mathcal{A} \subset \binom{[n]}{k}$, $K \subset [n]$, $|K| \leq c$ és $|A \cap K| \geq 2$ teljesül minden $A \in \mathcal{A}$-ra, akkor $|\mathcal{A}| \leq O(n^{k-2})$.*

Bizonyítás Vegyünk egy $K \subset K'$ halmazt, amire $|K'| = c$. A lemma feltételei K'-re is teljesülnek. Igaz a következő nyilvánvaló becslés:

$$|\mathcal{A}| \leq \sum_{i=2}^{c} \binom{c}{i}\binom{n-c}{k-i}. \tag{3.4.2}$$

A jobb oldal n-nek $k-2$ fokú polinomja, tehát $|\mathcal{A}| \leq O(n^{k-2})$. $\square$

3.4.4. Lemma *Legyenek s,t rögzített pozitív egészek. Legyenek $\mathcal{A},\mathcal{B} \subset \binom{[n]}{k}$. Tegyük fel, hogy $|\mathcal{B}| \geq s$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ egy (s,t)-unió-metsző halmazrendszer, és létezik egy a elem, amire $a \in A$ teljesül minden $A \in \mathcal{A}$-re, de $a \notin \mathcal{B}$ minden $B \in \mathcal{B}$ esetén. Ekkor $|\mathcal{A}| \leq O(n^{k-2})$.*

Bizonyítás Legyenek $B_1, B_2, \dots B_s \in \mathcal{B}$ különböző halmazok. Legyen $\mathcal{A}' = \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap \bigcup_{i=1}^{s} B_i \neq \emptyset\}$. Mivel $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ egy (s,t)-unió-metsző halmazrendszer, $|\mathcal{A} - \mathcal{A}'| \leq t-1$.

$$\left| A \cap \left(\{a\} \cup \bigcup_{i=1}^{s} B_i \right) \right| \geq 2 \tag{3.4.3}$$

teljesül minden $A \in \mathcal{A}'$-ra. Használjuk a 3.4.3. Lemmát $K = \{a\} \cup \bigcup_{i=1}^{s} B_i$ és $c = sk + 1$ helyettesítéssel. Azt kapjuk, hogy $|\mathcal{A}'| \leq O(n^{k-2})$. Ekkor $|\mathcal{A}| \leq O(n^{k-2}) + (t-1) = O(n^{k-2})$. $\square$

Bizonyítás (3.4.1. Tétel) Használjuk az 1.4.1. Lemmát $r = ks + t$-vel. Ha $|\mathcal{F}| > k!\,(ks+t)^k$, akkor $\mathcal{F}$ tartalmaz egy $\{S_1, S_2, \ldots S_{ks+t}\}$ napraforgót. (Vegyük észre, hogy $\binom{n-1}{k-1} > k!\,(ks+t)^k$ teljesül, ha n elég nagy.) Jelölje M a napraforgó közepét. Vezessük be a következő jelöléseket: $|M| = \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ és $C_i = S_i - M \quad (1 \leq i \leq ks+t)$. Legyen $\mathcal{F}_0 = \{F \in \mathcal{F} \mid F \cap M = \emptyset\}$, és $\mathcal{F}_i = \{F \in \mathcal{F} \mid a_i \in F\}$, ahol $1 \leq i \leq m$.

Tegyük fel, hogy $|\mathcal{F}_0| \geq s$. Legyenek $B_1, B_2, \ldots B_s \in \mathcal{F}_0$ különböző halmazok. Mivel $\left|\bigcup_{i=1}^{s} B_i\right| \leq ks$, és a $\{C_1, C_2, \ldots C_{ks+t}\}$ halmazok páronként diszjunktak, valamilyen $i_1, i_2, \ldots i_t$ indexekre teljesül

$$\emptyset = \left(\bigcup_{i=1}^{s} B_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{t} C_{i_j}\right) = \left(\bigcup_{i=1}^{s} B_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{t} S_{i_j}\right). \tag{3.4.4}$$

Ez ellentmond annak a feltevésnek, hogy $\mathcal{F}$ is (s,t)-unió-metsző, tehát $|\mathcal{F}_0| \leq s-1$.

Vegyük észre, hogy $|\mathcal{F}_i| \leq \binom{n-1}{k-1}$ nyilvánvalóan teljesül minden $1 \leq i \leq m$-re, ezért a tétel állítása igaz, ha $|\mathcal{F} - \mathcal{F}_i| \leq s-1$ teljesül bármelyik i-re.

Végül tegyük fel, hogy $|\mathcal{F} - \mathcal{F}_i| \geq s$ teljesül minden $1 \leq i \leq m$ esetén. Felhasználva a 3.4.4. Lemmát $\mathcal{A} = \mathcal{F}_i$ és $\mathcal{B} = \mathcal{F} - \mathcal{F}_i$ helyettesítéssel, azt kapjuk, hogy$|\mathcal{F}_i| = O(n^{k-2})$. Ekkor

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{i=0}^{m} |\mathcal{F}_i| \leq (s-1) + m \cdot O(n^{k-2}) = O(n^{k-2}). \tag{3.4.5}$$

Mivel $\binom{n-1}{k-1} + s - 1$ az n-nek $k-2$ fokú polinomja, $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1} + s - 1$ teljesül elég nagy n-re. $\square$

3.4.5. Megjegyzés *A 3.4.1. Tétel általánosítja az Erdős-Ko-Rado tételt (1.2.4. Tétel), ha n elég nagy, mivel $s = 1$, $t \geq 2$ esetén ugyanazt a felső korlátot kapjuk $|\mathcal{F}|$-re miközben gyengébb feltételeket kötünk ki $\mathcal{F}$-re.*

Hivatkozások

[1] R. Ahlswede and L. H. Khachatrian, The Complete Intersection Theorem for Systems of Finite Sets, *Europ. J. Combinatorics* **18** (1997) 125-136.

[2] B. Bollobás, On generalized graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **16** (1965) 447-452.

[3] B. Bukh, Set families with a forbidden subposet, *Electronic J. of Combinatorics* **16** (2009) R142, 11p.

[4] P. Burcsi and D. T. Nagy, The method of double chains for largest families with excluded subposets, *Electronic Journal of Graph Theory and Applications* **1** (2013) 40-49.

[5] H.-B. Chen and W.-T. Li, A Note on the Largest Size of Families of Sets with a Forbidden Poset, to appear in *Order* (2013)

[6] A. De Bonis and G. O. H. Katona, Largest families without an r-fork, *Order* **24** (2007) 181-191.

[7] A. P. Dove, J. R. Griggs, Packing Posets in the Boolean Lattice, *preprint*, arXiv:1309.6686 (2013)

[8] P. Erdős, C. Ko and R. Rado, Intersection theorems for systems of finite sets, *The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford. Second Series*, **12.** (1961) 313-320.

[9] P. Erdős and R. Rado, Intersection theorems for systems of sets, *J. London Math. Soc.* **35** (1960) 85-90.

[10] P. Frankl, The Erdős-Ko-Rado theorem is true for n=ckt, *Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976)*, Vol. I, 365-375. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **18**, North-Holland, Amsterdam-New York, (1978)

[11] P. Frankl, Extremal Set Systems, *Handbook of Combinatorics* (R. Graham, M. Grötschel and L. Lovász, Eds.), North Holland, (1995) 1295-1329.

[12] P. Frankl, Z. Füredi, Beyond the Erdős-Ko-Rado theorem, *J. Combinatorial Theory (Ser A)* **56**, no. 2, 182-194. (1991)

[13] J. R. Griggs, J. Stahl, W. T. Trotter Jr., A Sperner Theorem on Unrelated Chains of Subsets, *J. Combinatorial Theory (Ser. A)* **36** (1984) 124-127.

[14] G. Katona, Intersection theorems for systems of finite sets, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **15** (1964) 329-337.

[15] G. O. H. Katona, A simple proof of the Erdős-Chao Ko-Rado theorem, *J. of Combinatorial Theory (Ser. B)* **13** (1972) 183–184.

[16] G. O. H. Katona and D. T. Nagy, Incomparable copies of a poset in the Boolean lattice, *preprint*, arXiv:1309.7379 (2013)

[17] G. O. H. Katona and D. T. Nagy, Union-intersecting set systems, *preprint*, arXiv:1403.0088 (2014)

[18] G. O. H. Katona and T. G. Tarján, Extremal problems with excluded subgraphs in the n-cube, *Lecture Notes in Math.* **1018** (1981) 84-93.

[19] J. Körner, personal communication

[20] L. Kramer, R. R. Martin and M. Young, On diamond-free subposets of the Boolean lattice, *J. of Combinatorial Theory, (Ser. A)* **120**(3) (2012), 545-560.

[21] E. Sperner, Ein Satz über Untermegen einer endlichen Menge, *Math. Z.* **27** (1928) 544-548.