Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Mészáros András
Matematikus MSc

Matroid metszetek pakolása

Szakdolgozat

Témavezető: Frank András egyetemi tanár

Budapest, 2015.

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Frank Andrásnak a téma ajánlását, a rendszeres konzultációkat és a dolgozat alapos átnézését.

Szeretném megköszönni Károlyi Gyulának, hogy felhívta a figyelmemet arra, hogy 6.6.1 tétel prímhatvány esetben is igaz.

1. Bevezetés

Ha adott két matroidunk ugyanazon az alaphalmazon, akkor ismert hatékony algoritmus, illetve min-max tétel a következő problémákra: maximális elemszámú közös független, maximális súlyú közös független, maximális súlyú közös bázis. Hasonló a helyzet, ha adott egy matroid, és egy k egész és azt kérdezzük mekkora a legnagyobb halmaz, ami előáll k független uniójaként, ebből persze azt is megkapjuk, hogy mikor fedhető az alaphalmaz k függetlennel, mikor létezik k diszjunkt bázis, stb.

Ha azonban most két matroidot tekintünk ugyanazon alaphalmazon, akkor a fenti kérdések sokkal nehezebbek, nem ismert általános algoritmus vagy min-max tétel arra a problémára, hogy mekkora a legnagyobb halmaz, ami előáll k közös független uniójaként, illetve hogy mikor létezik k diszjunkt közös bázis. Vegyük észre, hogy itt a feltehető kérdések köre is gazdagodik bizonyos értelemben. Míg egy matroid esetén a függetlenekkel való fedés feladat ekvivalens volt a bázisokkal fedéssel, hiszen minden független kiegészíthető volt bázissá, két matroid esetén már más a helyet, hiszen nem minden közös független egészíthető ki közös bázissá. Vagyis a közös bázisokkal való fedés egy új feladatot eredményez. Hasonlóan matroidoknál minden generátor rendszer tartalmaz egy bázist, azaz az a kérdés, hogy mikor partícionálható az alaphalmaz k generátorra ekvivalens azzal, hogy mikor létezik k diszjunkt bázis. Két matroid esetén azonban a közös generátorokra particionálás feladat megint csak egy új feladatot eredményez. Ezekre a problémákra mind nem ismert polinomiális algoritmus, de olyan problémáról se tudunk ezek között, ami NP-teljes volna.

Ennek a fejezetnek a további részében néhány általános észrevételt teszünk a fenti problémákkal kapcsolatban, megmutatjuk, hogy mind visszavezethető bizonyos értelemben az elsőre, majd a következő fejezetekben rátérünk azon speciális osztályok vizsgálatára, amikre a fenti kérdések jól kezelhetőek, ezek a fenyők, illetve a páros gráfok párosításai lesznek.

A 2. fejezetben a fenyőkkel, Edmonds fenyő tételével és ennek következményeivel foglalkozunk. A 3. fejezetben kissé eltávolodunk szorosan vett témánktól, és a fenyők egy általánosítását a (k, g)-lombokat vizsgáljuk. A (k, g)-lombok megadhatóak matroid metszetként, illetve ismeretes egy poliéderes leírásuk. Ha most egy adott súlyfüggvényre a minimális súlyú (k, g)-lombot keresünk, akkor ehhez a minimális súlyú közös bázisra vonatkozó min-max formula szerint létezik egy optimális súly kettévágás. Mutatunk egy algoritmust, ami ebből az optimális súly kettévágásból megkonstruálja a poliéderes leírás duálisának egy optimális megoldását. Eddig ezen optimális duális megoldás megtalálására nem volt ismeretes közvetlen algoritmus.

A 4. fejezetben a SBO matroidokkal foglalkozunk, ezen matroidok osztályára a fenti matroid metszetes kérdések igen jól kezelhetőek, speciális esetként pedig megkaphatóak a páros gráfok párosításaira vonatkozó jól ismert tételek.

Aharoni és Berger topológia módszerekkel elért eredményei számos kérdésben az eddig ismert legjobb eredményt adják. Ezeket mutatjuk be a 5. fejezetben. Sajnos, ezek a tételek algoritmikus szemszögből nem sok támpontot adnak.

Ezek után a Woodall-sejtéssel foglalkozunk a 6. fejezetben, megmutatjuk, hogyan fogalmazható meg, mint matroid metszet pakolási probléma, majd pedig belátjuk néhány speciális gráf osztályra a sejtést: irányított fák tranzitív lezártjára(Schrijver), forrás-nyelő összefüggő gráfokra(Schrijver), és új eredményként additív kombinatorikai módszereket is használva $(q-1,1)$-partíció összefüggő gráfokra, ahol q prímhatvány.

A 7 fejezetben az egzakt partíció problémával és kapcsolódó kérdésekkel foglalkozunk.

1.1. Néhány általános észrevétel

Amikor valamely matroidokkal kapcsolatos problémára keresünk hatékony, azaz polinomiális algoritmust, ezt többféleképpen is érthetjük attól függően, hogy milyen módon adottak a matroidok:

1. A matroidok a függetlenségi orákulumaikkal vannak adva, az orákulumokhoz intézett minden egyes kérdés egységnyi időt vesz igénybe.

2. A matroidok valamely $\mathbb{F}$ test felett reprezentálhatóak, a bemenet a szereplő matroidok egy konkrét reprezentációja.

A következőkben a bemenet mindig két M_1 és M_2 matroid lesz egy közös S alaphalmazon, és egy k pozitív egész. Az alábbi problémákra keresünk hatékony algoritmust:

1. probléma: Mi azon legnagyobb $X \subset S$ halmaz mérete, ami felbomlik k közös független uniójára.

2. probléma: Létezik-e k diszjunkt közös bázis.

3. probléma: Felpartícionálható-e az alaphalmaz k közös generátorra.

4. probléma: Fedhető-e az alaphalmaz k közös bázissal.

Itt a 2., illetve 4. problémánál feltesszük, hogy a két matroid rangja megegyezik.

A 2. probléma nyilván speciális esete az 1.-nek. Most megmutatjuk, hogy a 3. és 4. probléma is polinomiálisan visszavezethető az 1.-re.

1.1.1. Lemma (folklór). *Ha létezik az 1. (ill. 2.) értelemben hatékony algoritmus az 1. problémára, akkor létezik a 3. problémára is.*

Bizonyítás. Legyen N_i az a matroid, amit úgy kapunk az M_i^* duális matroidból, hogy az alaphalmaz minden elemét $k-1$ párhuzamos példányban vesszük. Ezek alaphalmazai a természetes módon azonosíthatóak egymással, legyen ez a közös alaphalmaz S', vagyis S minden elemének $k-1$ S'-beli elem felel meg.

Azt állítjuk, hogy S' pontosan akkor bomlik fel k közös függetlenre, ha S felpartícinálható k közös generátorra.

Először tegyük fel, hogy S felpartícionálható k közös generátorra. Egy halmaz pontosan akkor generátor egy matroidban, ha a komplementere független a duálisban. Vagyis tekintve mind a k generátornak a komplementerét, ezek közös függetlenjei lesznek M_1^*-nak és M_2^*-nak, mivel a generátorok egy partícióját alkották S-nek, ezért a komplementereik $k-1$ rétűen fedik S-et. De ebből már könnyen megkonstruálható S' egy partíciója közös függetlenekre.

Visszafelé, ha S' felpartícionálható k közös függetlenre, akkor az S egy $k-1$ rétű fedését adja M_1^* és M_2^* közös függetlenjeivel, azaz ezek komplementerei, S egy partícióját adják M_1 és M_2 közös generátoraira.

Vegyük észre, hogy M_i az orákulumával adott, akkor az N_i orákuluma is megkonstruálható. Illetve ha M_1 egy mátrixszal van reprezentálva, akkor az N_i-t reprezentáló mátrix is kiszámítható polinom időben. □

1.1.2. Lemma (folklór)**.** *Ha létezik az 1. (ill. 2.) értelemben hatékony algoritmus az 2. problémára, akkor létezik a 4. problémára is.*

Bizonyítás. Definiáljuk N_i-t, mint fent.

Azt állítjuk, hogy S'-n pontosan akkor létezik k diszjunkt közös bázis, ha S fedhető k közös bázissal.

Az állítás az előzőhöz hasonló módon bizonyítható. □

Még egy lehetséges redukciót mutat a következő lemma:

1.1.3. Lemma (Harvey, Király, Lau [13])**.** *Ha a 2. probléma megoldható az 1. (ill. 2.) értelemben abban a speciális esetben, amikor M_2 egy partíciós matroid, akkor mindig megoldható az 1. (ill. 2.) második értelemben.*

Bizonyítás. Vegyük azt az M_3 matroidot, amit úgy kapunk M_2^*-ból, hogy minden $s \in S$-et, kicseréljük s-nek $s_1, s_2, ..., s_k$ párhuzamos példányára. Legyen M_1' az M_1 és az M_3 matroidok direkt összege, ennek alaphalmazát jelölje S'. M_2' pedig az a partíciós matroid, ahol a partíciórészek az $\{s, s_1, s_2, ..., s_k\}$ alakú részhalmazai S'-nek valamely $s \in S$-re, és legyen minden partíció részen egy a felső korlát.

Azt állítjuk, hogy M_1-ben és M_2-ben pontosan akkor van k diszjunkt közös bázis, ha M_1'-ben és M_2'-ben van k diszjunkt közös bázis.

Tegyük föl először, hogy létezik k diszjunkt közös bázis M_1'-ben és M_2'-ben. Azt fogjuk belátni, hogy M_1' és M_2' egy B közös bázisát elmetszve S-sel, M_1 és M_2 egy közös bázisát kapjuk, ami bizonyítja az állítást. És az igaz, hiszen $B \cap S$ éppen azon $s \in S$-eknek a halmaza, amire B az $\{s, s_1, s_2, ..., s_k\}$ partíció részből éppen az s elemet tartalmazza, de ekkor az $s \in S - (B \cap S)$ elemekre B az s-hez tartozó $\{s, s_1, s_2, ..., s_k\}$ partíciórész valamely s_i elemét tartalmazza. De ekkor M_1' konstrukciója miatt $B \cap S$ független M_1-ben, és $S - (B \cap S)$ független M_2^*-ban, de ez csak úgy lehet, ha $B \cap S$ közös bázisa M_1-nek és M_2-nek.

Visszafelé, tegyük fel, hogy M_1-ben és M_2-ben létezik k diszjunkt bázis. Sorba nézzük ezeket a B közös bázisokat definiáljuk hozzájuk M_1' és M_2' B' közös bázisait úgy, hogy ezek diszjunktak legyenek. Tehát, egy B közös bázisára M_1-nek és M_2-nek, B elemeit vegyük hozzá B'-höz is, továbbá minden $s \in S - B$-re vegyük hozzá B'-höz az $s_1, s_2, ..., s_k$ elemek közül egy olyat, amit még nem vettünk hozzá semmi korábbi B' bázishoz. Könnyű látni, hogy így megfelelő közös bázisokat kapunk. $\square$

2. Fenyők

Adott egy $D = (V, A)$ digráf egy kijelölt r_0 gyökérponttal. A továbbiakban feltesszük, hogy r_0-ba nem lépnek be élek. Ekkor az r_0 gyökerű feszítő fenyők előállnak, mint két matroid közös bázisai. Legyen az egyik matroid a D-nek megfelelő irányítatlan gráf körmatroidja, a másik matroid pedig az a partíciós matroid, ahol éleknek egy halmaza akkor és csak akkor független, ha az általuk alkotott részgráfban minden befok legfeljebb 1, azaz az éleket a fejpontjuk szerint partícionáljuk. Edmonds tételéből adódóan a fenyők pakolása egy olyan speciális esete a matroid metszet pakolási problémáknak, amit jól tudunk kezelni.

2.1. Edmonds fenyő tétele

2.1.1. Tétel (J. Edmonds [7])**.** *Legyen $D = (V, A)$ egy irányított gráf egy kijelölt r_0 gyökérponttal. Legyenek adottak továbbá $F_1, F_2, ..., F_k$ él diszjunkt (esetleg üres) r_0 gyökerű részfenyők. Ezek pontosan akkor egészíthetőek ki diszjunkt feszítő fenyőkké, ha*

$$\varrho'(X) \geq p(X)$$

teljesül minden $X \subset V - r_0$ nem üres halmazra, ahol $\varrho'(X)$ jelöli az X-be belépő F_i-k által nem használt élek számát, $p(X)$ pedig azon F_i fenyők számát jelöli, amik nem lépnek be X-be.

Bizonyítás. (Az itt közölt bizonyítás Lovásztól származik) A feltétel szükségessége nyilvánvaló. A másik irányhoz, tekintsük egy F_i-t, ami még nem feszítő fenyő, ha nincs ilyen készen vagyunk. Különben elegendő megmutatni, hogy F_i-hez hozzávehető egyetlen él úgy, hogy továbbra is fenyőt kapjunk, és fennmaradjon az állítás feltétele. Azaz egy olyan $V(F_i)$-ből kilépő még nem használt e élet kell találnunk, amire nincs olyan X halmaz, amibe e belép, $\varrho'(X) = p(X)$ és F_i már eredetileg is belépett X-be. Nevezzünk egy X halmazt veszélyesnek, ha metszi $V(F_i)$-t és $V - V(F_i)$-t is, továbbá $\varrho'(X) = p(X)$. Ha nincs veszélyes halmaz, akkor bármely $V(F_i)$-ből kilépő él jó lesz, ilyennek a létezése a tétel feltételét $V - V(F_i)$-re alkalmazva látszik. Tegyük föl tehát, hogy létezik veszélyes halmaz. Legyen X ezek közül egy tartalmazásra nézve minimális. Figyeljük meg, hogy $X \cap V(F_i)$-ből megy nem használt él $X - V(F_i)$-be, mert ha nem menne, akkor $\varrho'(X - V(F_i)) \leq \varrho'(X) = p(X) < p(X - V(F_i))$ lenne, ami ellentmondás. Legyen tehát e egy ilyen él, tegyük föl, hogy $e = uv$ nem vehető hozzá F_i-hez, vagyis létezik Y veszélyes halmaz, amibe e belép. Ekkor $Y \cap X$ nem üres, hiszen v eleme mindkettőnek, de ekkor mivel $p(X) + p(Y) = p(X \cap Y) + p(X \cup Y) - \hat{d}(X, Y)$, ahol $\hat{d}(X, Y)$ azon F_j fenyők száma, amik belépnek $X - Y$-ba és $Y - X$-be is, de nem lépnek be $X \cap Y$-ba, ϱ szubmoduláris, $\varrho'(X) \geq p(X)$ minden nem üres halmazra, ezért $\varrho'(X \cup Y) = p(X \cup Y)$ és

$\varrho'(X \cap Y) = p(X \cap Y)$, továbbá $\hat{d}(X, Y) = 0$. (Hiszen $\varrho'(X) + \varrho'(Y) = p(X) + p(Y) = = p(X \cap Y) + p(X \cup Y) - \hat{d}(X, Y) \leq \varrho'(X \cap Y) + \varrho'(X \cup Y)$.) $X \cap Y$ szigorúan szűkebb, mint X, hiszen u az egyikben benne van a másikban nincs. Továbbá a v csúcs mutatja, hogy $(X \cap Y) - V(F_i)$ nem üres. Mivel $\hat{d}(X, Y) = 0$ és X-be és Y-ba is belépett az F_i, ezért $X \cap Y$-ba is be kell lépnie, de ekkor $Y \cap X$ egy X-nél kisebb veszélyes halmaz, ami ellentmondás. □

Ebből kiovasható, hogy

2.1.2. Tétel. *Ha $D = (V, A)$ egy irányított gráf egy kijelölt r_0 gyökérponttal, akkor pontosan akkor létezik k éldiszjunkt r_0 gyökerű feszítőfenyő, ha $\varrho(X) \geq k$, minden $\emptyset \neq X \subset V$ halmazra.*

Ennek következménye:

2.1.3. Tétel (K. Vidyasankar [20])**.** *Legyen $D = (V, A)$ egy irányított gráf egy kijelölt r_0 gyökérponttal. (r_0-ba nem lépnek be élek.) D élei pontosan akkor fedhetőek k darab r_0 gyökerű fenyővel, ha*

$$\varrho(v) \leq k \text{ minden } v \in V - r_0\text{-ra és}$$

$$\varrho(Z) + \sum_{v \in B(Z)} (k - \varrho(v)) \geq k$$

minden nem üres $Z \subset V - r_0$-ra, ahol $B(Z)$ a Z bejáratát jelöli, azaz azon csúcsok halmazát, ahova megy él Z-n kívülről.

Bizonyítás. Az első feltétel szükségessége nyilvánvaló. A második feltétel szükségességéhez, legyenek $F_1, F_2, ..., F_k$ r_0 gyökerű feszítő fenyők, amik fedik D-t. Nevezzük F_i egy e élét elsőnek, ha F_i az első fenyő, ami lefedi e-t, különben hátsónak. Vegyünk egy nem üres $Z \subset V - r_0$-t, ekkor a fenyőknek legalább k olyan élük van összesen, ami belép Z-be. Az első élek közül $\varrho(Z)$ lép be Z-be. Ha egy hátsó él belép Z-be, akkor a feje $B(Z)$-ben kell, hogy legyen, egy $v \in B(Z)$ csúcsba legfeljebb $k - \varrho(v)$ hátsó él lép be, azaz összesen Z-be legfeljebb $\sum_{v \in B(Z)} (k - \varrho(v))$ hátsó él léphet be. Összerakva ezt a kettőt kapjuk a második feltétel szükségességét.

A másik irányhoz konstruáljunk a következőképpen egy D' gráfot D-ből, a csúcshalmazhoz adjuk hozzá a $\{v' | v \in V - r_0\}$ csúcsokat. Majd rakjuk be a $v'v$ típusú éleket $k - \varrho(v)$ példányban (ez értelmes, mert $\varrho(v) \leq k$), a vv' éleket k példányban, minden $v \in V - r_0$ csúcsra, majd a D gráf, minden uv élere rakjuk be az uv' élet k példányban a gráfba. Azt állítjuk, hogyha D'-ben van k éldiszjunkt $F'_1, F'_2, ..., F'_k$ r_0 gyökerű feszítő fenyő, akkor D fedhető k r_0 gyökerű feszítő fenyővel.

Az F_i fenyőket a következőképpen definiáljuk: Minden $v \in V - r_0$-ra a $\{v, v'\}$ halmazba legalább egy F'_i-beli él belép, ha ezen élek közül van olyan $e = uv$, ami v-be lép be (ilyenből csak egy lehet), akkor vegyük be az uv élet az F_i-be, ha nincs ilyen él, akkor v'-be belép egy uv' él(ilyenből csak egy lehet megint), tegyük be most uv-t F_i-be. Vegyük észre, hogy ebben az esetben muszáj, hogy $v'v$ éle legyen F_i'-nek. De ebből az is adódik, hogy ha F_i-be beteszünk egy uv élet vagy az első vagy a második eset miatt is, akkor F_i'-ben u-ból v-be megy egy irányított út. (1, illetve 2 hosszú az első, illetve második esetben.) Nyilvánvaló, hogy így F_i egy olyan részgráf lesz, ahol minden r_0-tól különböző csúcs befoka 1, és a fenti észrevétel szerint nem lehet benne kör, mert akkor F_i'-ben is lenne, vagyis F_i egy fenyő. Mivel D'-ben minden $v \in V - - r_0$ csúcs foka pontosan k, ezért az F_i' fenyők D'-nek az összes V által feszített élét használni fogják. F_i konstrukciójából adódóan az F_i-k is használni fogják D összes élét.

Nézzük meg teljesül-e a 2.1.2 tétel feltétele a D'-re. Vegyünk egy $X = Z \cup T'$ halmazt, ahol $Z \subset V - r_0$, $T' = \{v' | v \in T\}$ valamely $T \subset V - r_0$ halmazra. Ekkor $\varrho'(X) \geq k$ azonnal teljesül, ha $T - Z$ nem üres, azaz feltehető, hogy $T \subset Z$, hasonlóan készen vagyunk, ha T-ben van egy olyan t csúcs, amire t-be megy él Z-n kívülről, azaz $T \subset Z - B(Z)$, ha pedig volna olyan pont $Z - B(Z)$-ben, ami nincs T-ben, azt T-be betéve nem nőhetne X befoka, vagyis feltehető, hogy $T = Z - B(Z)$, de ekkor $\varrho'(X) = \varrho(Z) + \sum_{v \in B(z)} (k - \varrho(v))$. De ez a feltétel szerint mindig legalább k így készen vagyunk. □

2.2. Bifenyvesek

Most Edmonds tételének egy másik, bifenyvesekre vonatkozó következményét mutatjuk be, amit később még a 6.7.1 tétel bizonyításában használni fogunk.

2.2.1. Definíció. *Legyen $D = (V, A)$ egy irányított gráf, melynek csúcs halmaza egy R és egy S részre van partícionálva. Egy $B \subset A$ halmazt egy $R - S$ bifenyvesnek*[1] *nevezünk, ha minden $s \in S$ csúcs elérhető R valamely pontjából B-beli irányított úton, és minden $r \in R$ csúcsból elérhető S valamely csúcsa B-beli irányított úton.*

Edmonds tételéből (2.1.1) kiolvasható a következő:

2.2.2. Lemma. *Legyen $D = (V, A)$ egy gyökeresen 2 összefüggő az r gyökérpontra nézve. Legyen C a gyökérből kiinduló élek halmaza. Legyen $C = C_1 \cup C_2$ a C egy partíciója. Pontosan akkor létezik két diszjunkt r-gyökerű F_1, F_2 feszítő fenyő úgy, hogy $F_i \cap C = C_i$, ha $D - r$ minden K forrás komponensébe C_1 és C_2-beli él is belép.*

2.2.3. Tétel (A. Schrijver [18]). *Legyen $D = (V, A)$ egy irányított gráf, melynek csúcs halmaza egy R és egy S részre van partícionálva. Akkor és csak akkor létezik k diszjunkt $R - S$ bifenyves, ha $\varrho(X) \geq k$ minden olyan $X \subset V$ valódi részhalmazra, ahol $X \subset S$ vagy $S \subset X$.*

[1] Angolul bibranching, nincsen igazán meghonosodott magyar elnevezés.

Bizonyítás. (Mi most a [17] 941. oldalán található bizonyítást követjük.) A feltétel szükségessége könnyen látszik. Az elégségességhez: Húzzuk össze az R halmazt egyetlen r ponttá. Az így kapott D_R gráf a tétel feltételéből következően az r gyökérre nézve gyökeresen k élösszefüggő. Azaz léteznek benne $F_1, F_2, ..., F_k$ diszjunkt r gyökerű feszítő fenyők. Hasonlóan, ha S-t húzzuk össze egy s ponttá, akkor a kapott D_S gráfban léteznek $F'_1, F'_2, ..., F'_k$ diszjunkt s gyökerű feszítő befenyők. Ekkor az eredeti gráfban $B_1 = F_1 \cup F'_1, B_2 = F_2 \cup F'_2, ..., B_k = F_k \cup F'_k$ egy-egy bifenyves lesz, persze nem biztos, hogy diszjunktak lesznek. Válasszuk a fenti F_i és F'_i fenyőket úgy, hogy a

$$\sum_{i \neq j} |F_i \cap F'_j|$$

összeg a minimális legyen. Ha ez az összeg 0, akkor a B_i-k diszjunktak, azaz készen vagyunk. Tegyük fel, indirekte, hogy ez az összeg nem 0. Ekkor létezik $i \neq j$ úgy, hogy $|F_i \cap F'_j| > 0$. Tekintsük D_R-nek az $F = F_i \cup F_j$ alkotta D_F részgráfját. Hasonlóan, tekintsük D_S-nek az $F' = F'_i \cup F'_j$ alkotta D'_F részgráfját. Legyen C az $F_i \cup F_j \cup F'_i \cup F'_j$ azon éleinek halmaza, melyek R-ből S-be mennek. Definiáljuk C-n egy H gráfot a következőképpen: $D_F - r$ minden K forrás komponenséhez válasszunk ki egy $e_i \in F_i \cap C$ és egy $e_j \in F_j \cap C$ K-ba belépőélet, ilyenek a 2.2.2 lemma miatt léteznek, kössük össze e_i-t és e_j-t egy éllel. Az így kapott élek egy párosítást alkotnak, hiszen a forrás komponensek diszjunktak. Hasonlóan, $D'_F - s$ minden K' nyelő komponenséhez válasszunk ki egy $e'_i \in F'_i \cap C$ és egy $e'_j \in F'_j \cap C$ K'-be belépő élet. A most behúzott élek is egy párosítást alkotnak. Azaz H két párosítás uniója, amiből következik, hogy H egy páros gráf, legyen X és Y a két színosztálya. Legyen $C_i = X \cap (F \cap C)$ és $C_j = Y \cap (F \cap C)$. Ekkor D_F-ben létezik két diszjunkt $\bar{F}_i, \bar{F}_j$ fenyő, amire $C_i = \bar{F}_i \cap (F \cap C)$ és $C_j = \bar{F}_j \cap (F \cap C)$ a 2.2.2 lemma miatt.(A fent definiált $e_i e_j$ éleknek az egyik végpontja X-ben, így C_j-ben lesz, a másik végpontja Y-ban, így C_j-ben lesz.) Ugyanígy: Legyen $C'_i = X \cap (F' \cap$ $\cap C)$ és $C'_j = Y \cap (F' \cap C)$. Ekkor D'_F-ben létezik két diszjunkt $\bar{F}'_i, \bar{F}'_j$ fenyő, amire $C'_i = \bar{F}'_i \cap (F' \cap C)$ és $C'_j = \bar{F}'_j \cap (F' \cap C)$. Vegyük észre, hogy ekkor $\bar{F}_i \cap \bar{F}'_j$ és $\bar{F}_j \cap \bar{F}'_i$ üres. Továbbá $\bar{F}_i \cup \bar{F}_j = F_i \cup F_j$ és $\bar{F}'_i \cup \bar{F}'_j = F'_i \cup F'_j$. Ebből következik, hogy ha F_i, F_j, F'_i, F'_j-t kicseréljük rendre $\bar{F}_i, \bar{F}_j, \bar{F}'_i, \bar{F}'_j$-re, akkor egy jobb felbontást kapunk, ami ellentmondás. $\square$

3. Lombok

Ebben a fejezetben kicsit eltávolodunk szorosan vett témánktól a matroid metszetek pakolásától, és a fenyők egy általánosítását vizsgáljuk.

3.1. Bevezetés

3.1.1. Előkészületek

Ha $D = (V, A)$ egy digráf, akkor egy V-on értelmezett párhalmazon egy $Z = (Z_I, Z_O)$ párt értünk, ahol $Z_I \subset Z_O \subset V$. Ezek halmazát $\mathcal{P}_2(V)$-vel jelöljük. A Z párhalmaz nem üres, ha Z_I nem üres. Z_I-t, illetve Z_O-t a Z párhalmaz belső, illetve külső tagjának nevezzük. Ha $X = (X_I, X_O)$ és $Y = (Y_I, Y_O)$ két párhalmaz, akkor $X \cap Y$-on, illetve $X \cup Y$-on az $(X_I \cap Y_I, X_O \cap Y_O)$, illetve $(X_I \cup Y_I, X_O \cup Y_O)$ párhalmazokat értjük. X és Y metsző, ha $X \cap Y$ nem üres, azaz belsejük nem diszjunkt. A párhalmazokon értelmezett b függvény szubmoduláris, ha minden X, Y párhalmazra $b(X) + b(Y) \geq b(X \cap Y) + b(X \cup Y)$ teljesül. Ha a fordított egyenlőtlenség teljesül, akkor szupermoduláris párhalmaz függvényről beszélünk. Ha az egyenlőtlenséget csak metsző párokra követeljük meg, akkor metsző szub-, illetve szupermoduláris függvényről beszélünk. Egy $e = uv$ él belép a $Z = (Z_I, Z_O)$ párhalmazba, ha mindkét tagjába belép, azaz $v \in Z_I$ és $u \notin Z_O$, $\varrho(Z)$ jelöli a Z-be belépő élek számát, ez egy szubmoduláris párhalmazfüggvény. A Z párhalmaz feszti az $e = uv$ élet, ha $u \in Z_O$ és $v \in Z_I$. A Z által feszített élek halmazát $I(Z)$, számát pedig $i(Z)$ jelöli, ami egy szupermoduláris párhalmazfüggvény.

Szükségünk lesz a Menger-tétel alábbi következményére:

3.1.1. Lemma ([9]). *Legyen $D = (V, A)$ egy digráf, s, t két különböző csúcsa, k egy pozitív egész, g egy $V - \{s, t\} \to \{1,2, \ldots, k\}$ függvény. Pontosan akkor létezik k darab éldiszjunkt st út, amely minden $v \in V - \{s, t\}$ csúcsot legfeljebb $g(v)$-szer használ, ha minden olyan Z párhalmazra, amire $t \in Z_I$ és $s \notin Z_O$, teljesül, hogy $\varrho(Z) \geq k - \mu_g(Z)$, ahol $\mu_g(Z) = \sum_{v \in X_O - X_I} g(v)$.*

Bizonyítás. A szükségesség könnyen látszik, hiszen minden st út használ legalább egy $Z_O - Z_I$-beli csúcsot vagy egy Z-be belépő élet.

Könnyű látni, hogy feltehető, hogy s-be nem lép be él, és t-ből nem lép ki él. A szokásos pontszéthúzó technikát alkalmazzuk. Konstruáljunk egy D' gráfot a következőképpen, csúcsai legyen s és t, illetve minden $v \in V - \{s, t\}$ csúcsához az eredeti gráfnak tartozzon D'-nek egy v' illetve v'' csúcsa D'-nek. v'-ből v''-be menjen $g(v)$ párhuzamos él. Minden $sv \in A$ élre legyen sv' éle D'-nek, minden $vt \in A$ élre legyen $v''t$ éle D'-nek, illetve minden más $uv \in A$-ra, (ahol tehát $u, v \in V - \{s, t\}$), legyen $u''v'$ éle D'-nek. Könnyű látni, hogy D'-ben pontosan akkor lesz k éldiszjunkt st út, ha a D-ben van k éldiszjunkt csúcs, ami minden $v \in V - \{s, t\}$ csúcsot legfeljebb $g(v)$-szer használ. Tegyük föl, hogy nincs k éldiszjunkt út D'-ben, ekkor létezik egy olyan X részhalmaza D' csúcsainak, amelyre $s \notin X$ és $t \in X$, és X-be kevesebb, mint k él lép be. Ekkor feltehető, hogy $v' \in X$ estén $v'' \in X$ is teljesül, hiszen v''-t hozzávéve X-hez, nem nőne az oda belépő élek száma. Legyen $Z_I = \{v \in V - \{s, t\} | v' \in X\} + t$ és $Z_O = \{v \in V - \{s, t\} | v'' \in X\} + t$, ekkor a fenti észrevételből $Z_I \subset Z_O$. És a $Z = (Z_I, Z_O)$ párhalmazt tekintve a D'-ben X-be belépő élek száma, éppen $\mu_g(Z) + \varrho(Z)$, ami a feltétel szerint legalább k, ellentmondás. □

3.1.2. A (k, g)-lombok definíciója és kétféle leírásuk

Legyen $D = (V, A)$ egy irányított gráf egy kijelölt r_0 gyökérponttal. A következőkben mindig feltesszük, hogy D-ben nincsen r_0-ba belépő él. Legyen $V^* = V - r_0$, és jelölje A^* a V^* általfeszített éleket. Legyen $k \in \mathbb{Z}_+$ és g egy $V^* \to \{1,2, ..., k\}$ függvény, D-nek egy $D' = (V, A')$ feszítő részgráfját gyökeresen (k, g)-összefüggőnek nevezzük, ha minden $t \in V^*$-re létezik k éldiszjunkt r_0t út D'-ben úgy, hogy ezek az utak minden $v \in V - \{r_0, t\}$ csúcsot legfeljebb $g(v)$-szer használnak. Egy részgráfot (k, g)-lombnak nevezünk, ha gyökeresen (k, g)-összefüggő,de bármely élét törölve már nem lesz az.

3.1.2. Lemma ([9]). *Egy D' részgráf (k, g)-lomb akkor és csak akkor, ha gyökeresen (k, g)-összefüggő, és minden r_0-tól különböző csúcs befoka k.*

Bizonyítás. A 3.1.1 lemmából következik, hogy egy D' részgráf pontosan akkor gyökeresen (k, g)-összefüggő, ha V^* minden nem üres Z párhalmazára $\varrho_{D'}(Z) \geq k - \mu(Z)(*)$. Egy gyökeresen (k, g)-összefüggő gráfban minden r_0-tól különböző csúcs befoka legalább k. Ha minden r_0-tól különböző csúcs befoka k, akkor nyilván élelhagyásra minimális. Így már csak azt kell belátni, hogy ha van olyan r_0-tól különböző t csúcs, aminek befoka nagyobb, mint k, akkor elhagyható egy él. Ekkor létezik k éldiszjunkt r_0t út, ami minden $v \in V - \{r_0, t\}$ csúcsot legfeljebb $g(v)$-szer használ. De ezen utak mindegyike legfeljebb egy t-be lépő élt használ, azaz lesz egy t-be belépő $e = zt$ él, amit egyik sem használ. Megmutatjuk, hogy e-t elhagyva továbbra is megmarad a (k, g)-összefüggőség. Tegyük föl, hogy megsérül a fenti (*) feltétel az új gráfban, ez azt jelenti, hogy volt az eredeti D'-ben egy párhalmaz, amire $\varrho_{D'}(Z) = k - \mu(Z)$, és az e él belépett Z-be. De ekkor $t \in Z_I$, vagyis a fenti r_0t utak mindegyike vagy használ egy Z-be belépő élet, vagy egy $Z_O - Z_I$-beli csúcsot, illetve van még az e él, ami belép Z-be és egyik út sem használja, de ekkor $\varrho(Z) + \mu_g(Z) > k$, ami ellentmondás. □

Legyen $c : A \to \mathbb{R}$ egy költségfüggvény. A célunk megtalálni egy minimális költségű (k, g)-lombot.

Két lehetséges megközelítést is mutatunk erre a problémára.

Első megközelítés: A (k, g)-lombok élhalmazainak karakterisztikus vektorainak konvex burka megadható a következő poliéderként:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^A : 0 \leq x \leq 1$$
$$\text{és } \varrho_x(Z) \geq k - \mu_g(Z) \text{ minden Z párhalmazra, amire } \emptyset \subset Z_I \subseteq Z_O \subseteq V^*, |Z_O| > 1$$
$$\text{és } \varrho_x(Z) = k - \mu_g(Z) \text{ minden } Z = (\{v\}, \{v\}), v \in V^* \text{ alakú párhalmazra}\},$$

(Emlékezzünk, hogy $\mu_g(X) = \sum_{v \in X_O - X_I} g(v)$).

Vagyis $\sum_e c(e)x(e)$ célfüggvényt kell minimalizálnunk a P poliéderen.

Ennek a feladatnak a duálisa a következő: a $\sum_Z y(Z)(k - \mu_g(Z)) - \sum_e \pi(e)$ célfüggvényt maximalizáljuk a következő P^* duális poliéderen:

$$P^* = \{(y, \pi) \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}_2(V^*)} \times \mathbb{R}^A :$$
$$\pi(e) \geq 0 \text{ minden élre és}$$
$$y(Z) \geq 0 \text{ minden nem üres } Z \text{ párhalmazra, ami nem } (\{v\}, \{v\}) \text{ alakú}$$
$$\sum_{e \text{ belép } Z\text{-be}} y(Z) - \pi(e) \leq c(e) \text{ minden élre}\}.$$

Második megközelítés: Létezik két matroid M_1 és M_2 az A alaphalmazon, azaz a D gráf élein, amiknek közös bázisai éppen a (k, g)-lombok. Vagyis egy minimális súlyú közös bázist kell találnunk, amire ismert hatékony algoritmus. Továbbá ez a minimum egyenlő $\max\{r_1^{min}(c^1)+r_2^{min}(c^2)|c^1+c^2 = c\}$-gyel, ahol $r_i^{min}(c_i)$ a minimális súlyú bázis súlyát jelöli az M_i matroidban a c_i súlyfüggvényre nézve, illetve még azt is tudjuk, hogyha c egész, akkor c_1 és c_2 is választható egésznek.

A továbbiakban pontosan definiáljuk a fenti M_1, illetve M_2 matroidokat, majd pedig mutatunk egy algoritmust, ami a $c = c_1 + c_2$ optimális súly kettévágásból meghatározza a fenti duális feladat egy optimális megoldását, továbbá ez az algoritmus olyan lesz, hogy egész c_1, c_2 esetén a kapott duális megoldás is egész. De ez azt jelenti, hogy a P poliéderre igaz, hogy egész célfüggvény esetén a duálisnak van egész megoldása, vagyis P-t egy TDI rendszerrel írtuk le, azaz P egy egész poliéder. Mivel könnyen látható a 3.1.1 és 3.1.2 lemmákból, hogy a P poliéder egész pontja éppen a (k, g)-lomboknak felelnek meg, ebből kapunk egy [9]-tól eltérő alternatív bizonyítást, hogy P valóban a (k, g) lombok konvex burkát írja le.

A következő alfejezetekben sok helyütt Frank [9] cikkét követjük, azonban néhányszor kicsit módosítunk az ottani felépítésen úgy, hogy jobban megfeleljen a mostani fő célunknak, azaz, hogy egy algoritmust találjunk a fenti duális optimális megoldásának megtalálására.

3.2. (k,g)-lombok, mint matroid metszetek

3.2.1. AZ $M^{\#}$ mester matroid

Tekintsük a következő metsző szubmoduláris függvényt a V^* párhalmazain $b(X) = k(|X_I|-1)+\mu_g(X)$.

Az A^* egy F részhalmazát függetlennek nevezzük, ha $i_F(X) \leq b(X)$ minden nem üres X párhalmazra. Megmutatjuk, hogy az így definiált független halmazok egy matroidot alkotnak az A^* alaphalmazon, azaz a tartalmazásra nézve maximális független részhalmazai egy $J \subset A^*$ halmaznak mind azonos méretűek. Ezt az $M^{\#}$ matroidot fogjuk **mester matroidnak** nevezni.

Nem üres párhalmazok egy $\mathcal{Z}$ családjára és egy $J \subset A^*$ részhalmára az éleknek, legyen $val(J,\mathcal{Z}) = \sum_{X\in\mathcal{Z}} b(X) + |J - \cup_{X\in\mathcal{Z}} I(X)|$.

3.2.1. Lemma. *A J bármely F független részhalmazára $|F| \leq val(J,\mathcal{Z})$.*

Bizonyítás. Egy nem üres X párhalmaz legfeljebb $b(X)$ élét feszítheti F-nek. Vagyis $val(J,\mathcal{Z})$ definíciójában az első szumma felső korlát $|F \cap (\cup_{X\in\mathcal{Z}} I(X))|$-re. A második tag pedig nyilván felső korlát $|F - \cup_{X\in\mathcal{Z}} I(X)|$-re. □

Nem üres párhalmazok egy $\mathcal{Z}$ családját párhalmaz-partíciónak nevezzük, ha a $\mathcal{Z}$-beli párhalmazok belső tagjai V^* egy partícióját adják.

3.2.2. Lemma. *Minden $J \subset A^*$-ra*

$$\max\{|F| | F \subset J \textit{ független}\} = \min\{val(J,\mathcal{Z}) | \mathcal{Z} \textit{ egy párhalmaz partíció}\}$$

.

Bizonyítás. Előbb láttuk, hogy max $\leq$ min. Tekintsük J bármely tartalmazásra nézve maximális F független halmazát. Egy X nem üres párhalmazt F-szorosnak (vagy röviden szorosnak) nevezünk, ha $i_F(X) = b(X)$. Ha X és Y metsző szoros párhalmazok, akkor $X \cap Y$ és $X \cup Y$ is szoros, hiszen $b(X) - i_F(X)$ metsző szubmoduláris. Vegyük észre, hogy a $(\{v\},\{v\})$ alakú párhalmazok mindig szorosak. Ebből következik, hogy a tartalmazásra nézve maximális szoros párhalmazok egy $\mathcal{Z}(F)$ párhalmaz-partíciót adnak. Azt állítjuk, hogy $|F| = val(J,\mathcal{Z}(F))$. Valóban, mivel $\mathcal{Z}(F)$ egy párhalmaz partíció, minden él legfeljebb egy $\mathcal{Z}(F)$-beli párhalmaz által van feszítve, vagyis $\left|F \cap \left(\cup_{X\in\mathcal{Z}(F)} I(X)\right)\right| = \sum_{X\in\mathcal{Z}(F)} b(X)$. Így már csak azt kell megmutatnunk, hogy $|F - \cup_{X\in\mathcal{Z}} I(X)| = |J - \cup_{X\in\mathcal{Z}} I(X)|$, azaz J minden éle, ami nincs feszítve egy $\mathcal{Z}(F)$-beli párhalmaz által, F-ben van. Tegyük föl, hogy volna egy $e \in J - F$ ami nincs feszítve egy maximális szoros halmaz által sem, ekkor e nyilván semmilyen szoros halmaz által nincs feszítve, de ekkor könnyen látszik, hogy $F + e$ is egy független halmaz volna, ami ellentmondás.

Vagyis $|F| = \min\{val(J, \mathcal{Z}) \quad | \quad \mathcal{Z}$ egy párhalmaz-partíció$\}$, ahol F-et választhatjuk tetszőleges tartalmazásra nézve maximális függetlennek, vagyis a független halmazok valóban egy matroidot alkotnak. $\square$

Vegyük észre, hogy a $\mathcal{Z}(F)$ párhalmaz-partíció nem függ a tartalmazásra nézve maximális F független választásától, hiszen tetszőleges másik maximális F'-re, a $\mathcal{Z}(F)$-beli halmazoknak muszáj F'-szorosnak lenniük, hogy a 3.2.1 lemmában egyenlőség teljesüljön, és fordítva minden $\mathcal{Z}(F')$-beli halmaz F-szoros.

Ezt az F választásától független párhalmaz partíciót a J kanonikus párhalmaz-partíciójának nevezzük és $\mathcal{Z}(J)$-vel jelöljük.

3.2.2. Néhány szubrutin $M^{\#}$-re

A későbbiekben szükségünk lesz a következő szubrutinra: Egyesével fogunk éleket adni J-hez, miközben mindig fenntartunk egy F maximális független részhalmazát J-nek és a $\mathcal{Z}(J)$ kanonikus párhalmaz-partíciót.

Vagyis adott éleknek egy J részhalmaza, ebben egy F maximális független, illetve $\mathcal{Z}(J)$, és jön egy új $e = sz$ él.

1. eset: Az e élet feszíti valamelyik $\mathcal{Z}(J)$-beli párhalmaz. Ekkor $F + e$ nem független, vagyis F továbbra is egy maximális független halmaz $J + e$, így $\mathcal{Z}(J + e) = \mathcal{Z}(F) = \mathcal{Z}(J)$. Vagyis készen vagyunk.

2. eset: Az e élet nem feszíti egy $\mathcal{Z}(J)$-beli párhalmaz sem. Ekkor $F + e$ egy maximális független halmaz lesz $J + e$-ben, és ki kell számolnunk $\mathcal{Z}(J + e) = \mathcal{Z}(F + e)$-t. Vegyük észre, hogy egy olyan párhalmaz, ami nem feszíti e-t pontosan akkor lesz F-szoros, ha $F + e$-szoros. Vagyis ha e hozzávételével keletkezik egy új szoros párhalmaz, az feszíti e-t, vagyis a belső tagja tartalmazza z-t. Vagyis elegendő megtalálni a tartalmazásra nézve maximális $F + e$-szoros Z párhalmazt, aminek belső tagja tartalmazza z-t, és ekkor $\mathcal{Z}(J + e)$ a Z-ből és azon $\mathcal{Z}(J)$-beli párhalmazokból fog állni, amiknek belső tagja diszjunkt Z_I-től.

Vagyis most már az egyetlen feladatunk megtalálni ezt a Z párhalmazt.

Szükségünk van a következő ismert lemmára:

3.2.3. Lemma. *Legyen $H = (V, F)$ egy irányítatlan gráf, $u : V \to \mathbb{Z}_+$ egy felső korlát függvény a csúcsokon. Akkor és csak akkor létezik H-nak egy olyan irányítása, aminek ϱ befok függvénye teljesíti, hogy $\varrho(v) \leq u(v)$ minden v csúcsra, ha $g(X) \geq i_H(X)$ igaz a csúcsok minden X részhalmazára.*

Bizonyítás. Szükségesség. Ha létezik megfelelő irányítás, akkor $u(X) \geq \sum_{v \in X} \varrho(v) = i_H(X) + \varrho(X) \geq i_H(X)$.

Elegendőség. Induljunk ki H egy tetszőleges irányításából, lépésenként csökkenteni fogjuk a $\sum_{v\in V}(\varrho(v)-u(v))^+$ kifejezéssel definiált hibát úgy, hogy egy lépésben mindig egy irányított út mentén megfordítjuk az irányítást. Legyen Z_0 azon v csúcsok halmaza, amire $\varrho(v) > u(v)$. Ha Z_0 üres készen vagyunk. Ha Z_0 nem üres, legyen Z azon csúcsok halmaza, amiből elérhető egy Z_0 beli csúcs az adott irányítás mellett. Ekkor $Z_0 \subset Z$ és Z-be nem lép be él. Ha létezik egy $v \in Z$ csúcs, amire $\varrho(v) < u(v)$ akkor tetszőleges v-ből Z_0 egy pontjába menő irányított út irányítását megfordítva csökken a fent definiált hiba. Ha nincs ilyen csúcs akkor $i_H(Z) > u(Z)$, ami ellentmondás. $\square$

3.2.4. Lemma. *Legyen $H = (V,F)$ egy irányítatlan gráf, $u : V \to \mathbb{Z}_+$ egy felső korlát függvény. Ha létezik H-nak egy olyan irányítása, aminek ϱ befok függvényére igaz, hogy $\varrho(v) \le u(v)$ minden v csúcsra, akkor ezen irányítás segítségével megtalálható az egyértelmű tartalmazásra nézve maximális X részhalmaza a csúcsoknak, amire $i_H(X) = u(X)$, $O(n+m)$ időben. (Ha van ilyen.)*

Bizonyítás. Az előző lemma bizonyításának szükségesség részéből, $i_H(X) = u(X)$, akkor és csak akkor, ha $u(v) = \varrho(v)$ minden $v \in X$-re és $\varrho(X) = 0$. Legyen $P = \{v \in V | \varrho(v) = u(v)\}$. Könnyen látható, hogy $V - P$-ből nem elérhető csúcsok halmaza, ha nem üres, akkor a keresett egyértelmű maximális X-et adja, amire $i_H(X) = u(X)$. $\square$

Most konstruálunk egy $H = (V', V''; E)$ páros gráfot a következő módon. Minden $v \in V^*$-nek feleltessünk meg egy $v' \in V'$ és egy $v'' \in V''$ csúcsot, amiket kössünk össze $g(v)$ párhuzamos éllel. Továbbá, minden $f = uv \in F + e$ irányított élhez rendeljük H-nak egy $u'v''$ élét. Ha $X \subset V^*$, akkor az X-nek megfelelő halmazokat V'-ben illetve V''-ben rendre X', illetve X'' jelöli.

Definiáljuk az $u : V' \cup V'' \to \mathbb{Z}_+$ függvényt a következő módon. Minden $v \in V^*$, legyen $u(v') = g(v)$, és legyen $u(z'') = 0$ (emlékezzünk, hogy $e = sz$ az új él), és minden $v \in V^* - z$-re, legyen $u(v'') = k$.

Tekintsük V^*-nak egy Z párhalmazát. Ekkor $b(Z) = u(Z'_O \cup Z_I'') - g(Z_I)$, ha $z \in Z_I$, és $b(Z) = u(Z'_O \cup Z_I'') - g(Z_I) - k$ különben. Továbbá $i_{F+e}(Z) = i_H(Z'_O \cup Z_I'') - g(Z_I)$. Vagyis $b(Z) - i_{F+e}(Z) = u(Z'_O \cup Z_I'') - i_H(Z'_O \cup Z_I'')$, ha $z \in Z_I$, és $b(Z) - i_{F+e}(Z) = u(Z'_O \cup Z_I'') - i_H(Z'_O \cup Z_I'') - k$ különben. Mivel $F + e$ független, ezért $b(Z) - i_{F+e}(Z) \ge 0$.

Vagyis ha $Y \subset X \subset V^*$ akkor $u(X' \cup Y'') \ge i_H(X' \cup Y'')$, és $u(X' \cup Y'') = i_H(X' \cup Y'')$ akkor és csak akkor, ha a $Z = (Y, X)$ párhalmaz $F + e$-szoros és $z \in Z_I = Y$.

Most tekintsünk tetszőleges $X, Y \subset V^*$-ot, ekkor $u(X' \cup Y'') - i_H(X' \cup Y'') = (u(X' \cup Y'') + g(Y - X)) - (i_H(X' \cup Y'') + g(Y - X)) \ge u((X \cup Y)' \cup Y'') - i_H((X \cup Y)' \cup Y'') \ge 0$.

Vagyis az 3.2.3 lemmából, létezik H-nak egy irányítása, amire $\varrho(v) \leq u(v)$ minden $v \in V^*$-ra.

Tekintsük az egyértelmű maximális $X = X' \cup Y''$ halmazt, amire $i_H(Z) = u(Z)$. A fenti észrevételekből adódóan $Y \subset X$, és a $Z = (Y, X)$ párhalmaz $F + e$-szoros és $z \in Z_I$. Vagyis Z lesz a tartalmazásra nézve maximális $F + e$-szoros halmaz, aminek belső tagja tartalmazza z-t.

Vegyük észre, hogy a 3.2.3 lemma bizonyításánál tetszőleges irányításból indulhatunk, vagyis ha jön egy új él, akkor indulhatunk az előző körben megtalált irányításból ($s'z''$ élet tetszőlegesen irányítva), ekkor a hiba legfeljebb $k + 1$, vagyis legfeljebb $k + 1$ utat kell megfordítanunk, vagyis a jó irányítás, illetve Z megtalálása $O(km)$ időben megy (felhasználva az előző körben megtalált irányítást).

3.2.3. (k, g)-lombok, mint matroid metszetek

Most már jellemezhetjük a (k, g)-lombokat, mint matroid metszeteket.

Legyen $A_0 = A - A^*$. Tekintsük az A_0 alaphalmazon definiált szabad matroid és az $M^\#$ mester matroid direkt összegét. Legyen M_1 ennek a csonkoltja $k(n-1)$-nél. Vagyis M_1 rangfüggvénye:

$$r_1(J) = \min(r^\#(J \cap A^*) + |J - A^*|; k(n-1)) =$$
$$= \min\Big(\sum_{X \in \mathcal{Z}(J \cap A^*)} b(X) + \big|J - \cup_{X \in \mathcal{Z}(J \cap A^*)} I(X)\big|; k(n-1)\Big).$$

Egy e élet J-feszítettnek hívunk, ha $e \in J$ és e feszítve van valamely $\mathcal{Z}(J \cap \cap A^*)$-beli halmaz által, továbbá e-t J-kereszt élnek nevezzük, ha $e \in J$, de e nem J-feszített.

Legyen M_2 az a partíciós matroid az A alaphalmazon, amire egy $J \subset A$ részhalmaza az éleknek akkor független, ha $\varrho_J(v) \leq k$ minden $v \in V^*$-ra.

3.2.5. Tétel. *A (k, g)-lombok éppen M_1 és M_2 közös bázisai.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a B közös bázisok (k, g) lombok, mivel minden r_0-tól különböző csúcs befoka k a közös bázisokban az M_2 matroidból adódóan, ezért 3.1.2 lemma miatt csak a gyökersen (k, g) összefüggőséget kell ellenőrizni, ez a 3.1.1 lemmából azzal ekvivalens, hogy $\varrho_B(Z) \geq k - \mu_g(Z)$ minden nem üres párhalmazára V^*-nak, de mivel minden V^*-beli csúcs foka k a B részgráfban, ezért $\varrho_B(Z) = k|Z_I| - i_B(Z)$, amiből a fenti feltétel $i_B(Z) \leq k(|Z_I| - 1) + \mu_g(Z)$ alakba írható, de ezt meg az M_1 matroid biztosítja.

A másik irány hasonlóan megy. $\square$

3.3. Az algoritmus

Tegyük föl, hogy a D élei: $e_1, e_2, ..., e_m$ a c^1 súlyuk szerint növekvő sorrendbe vannak rendezve, azaz, $c^1(e_1) \leq c^1(e) \leq \ldots \leq c^1(e_m)$. Feltehető az is, hogy $c^1(e_1) = 0$. (Mert ha nem, tekintsük a következő súly kettévágást $c = (c^1 - c^1(e_1)) + (c^2 - c^1(e_1))$.) Továbbá minden $v \in V^*$ csúcsra a v-be belépő $e_{v,1}, e_{v,2}, ...$ élek növekvő sorrendbe vannak rendezve a c^2 súlyuk szerint, azaz, $c^2(e_{v,1}) \leq c^2(e_{v,2}) \leq \ldots$.

Legyen $S_i = \{e_1, e_2, ..., e_i\}$. Az algoritmusunk az 1 abrán látható.

Algorithm 1 Az algoritmus

$y = 0; \pi = 0;$
for $i = 1...m$ **do**
  Frissítsük $\mathcal{Z}(S_i \cap A^*)$-t;
  if $r_1(S_i) = k(n-1)$ **then** Break;
  for $X \in \mathcal{Z}(S_i \cap A^*)$ **do** $y(X) += c^1(e_{i+1}) - c^1(e_i)$;
  for minden e S_i-kereszt élre **do** $\pi(e) += c^1(e_{i+1}) - c^1(e_i)$;
for $v \in V*$ **do**
  $y((\{v\}, \{v\})) += c^2(e_{v,k})$;
  for $j = 1...k-1$ **do** $\pi(e_{v,j}) += c^2(e_{v,k}) - c^2(e_{v,j})$

Jelölje T a legnagyobb i-t, amire $r_1(S_i) < k(n-1)$. (Azaz az első For ciklusból az $i = T + 1$ iterációnál lépünk ki.)

Most nézzük meg mennyivel nő az $\sum_Z (k - \mu_g(Z))y(Z) - \sum_e \pi(e)$ összeg az i. iterációnál ($i = 1,2, \ldots, T$). Az i. iterációnál a növekedés

$$\big(c^1(e_{i+1}) - c^1(e_i)\big) \cdot \left(\sum_{X \in \mathcal{Z}(S_i \cap A^*)} (k - \mu_g(X)) - \big|J - \cup_{X \in \mathcal{Z}(J \cap A^*)} I(X)\big| \right)$$

$$= \big(c^1(e_{i+1}) - c^1(e_i)\big) \cdot \left(\sum_{X \in \mathcal{Z}(S_i \cap A^*)} (k|X_I| - b(X)) - \big|J - \cup_{X \in \mathcal{Z}(J \cap A^*)} I(X)\big| \right)$$

$$= \big(c^1(e_{i+1}) - c^1(e_i)\big) \cdot (k(n-1) - r_1(S_i)) = \big(c^1(e_{i+1}) - c^1(e_i)\big) \cdot (r_1(S_m) - r_1(S_i)) .$$

(Itt haszáltuk, hogy a $\mathcal{Z}(S_i \cap A^*)$-beli párhalmazok belső tagjai V^* egy partícióját adják és $i \leq T$.)

De az M_1-beli minimális súlyú bázisok súlyáról tudjuk, hogy (Emlékezzünk, hogy feltettük, hogy $c^1(e_1) = 0$.)

$$r_1^{min}(c^1) = \sum_{i=1}^{m} c^1(e_i)(r_1(S_i) - r_1(S_{i-1})) =$$

$$= c^1(e_1)(r_1(S_m) - r_1(S_0)) + \sum_{i=1}^{m-1} \left(c^1(e_{i+1}) - c^1(e_i)\right)(r_1(S_m) - r_1(S_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{T} \left(c^1(e_{i+1}) - c^1(e_i)\right)(r_1(S_m) - r_1(S_i))$$

.

Ami éppen a teljes növekedése $\sum_Z (k - \mu_g(Z))y(Z) - \sum_e \pi(e)$-nek az első For ciklusban. Könnyen látható, hogy a második For ciklusban a növekedés $r_2^{min}(c^2)$. Vagyis a végén $\sum_Z (k - \mu_g(Z))y(Z) - \sum_e \pi(e) = r_1^{min}(c^1) + r_2^{min}(c^2)$. Azaz, ha (y, π) megengedett megoldása a duálisnak, akkor optimális is.

Tekintsünk egy e_j élet. Legyen $C(e_j) = \{i \leq T | e_j \text{ egy } S_i\text{-kereszt él}\}$ és $E(e_j) = \{i \leq T | e_j \text{ belép egy } \mathcal{Z}(S_i \cap A^*)\text{-beli párhalmazba}\}$. (Vegyük észre, hogyha e_j belép egy $\mathcal{Z}(S_i \cap A^*)$-beli párhalmazba, akkor pontosan egy $\mathcal{Z}(S_i \cap A^*)$-beli párhalmazba lép be.) Könnyű látni, hogy $C(e_j)$ és $E(e_j)$ is intervallum, $E(e_j)$ üres vagy 1-gyel kezdődik, ha $C(e_j)$ nem üres, akkor j-vel kezdődik és $\max C(e_j) = \max E(e_j)$. Vagyis $C(e_j) \subset E(e_j)$ és $E(e_j) - C(e_j) \subset \{1,2, ..., j-1\}$.

Vagyis az első For ciklusban $\sum_{e_j \text{ belép } Z\text{-be}} y(Z) - \pi(e_j)$ értéke

$$\sum_{i \in E(e_j)} (c^1(e_{i+1}) - c^1(e_i)) - \sum_{i \in C(e_j)} (c^1(e_{i+1}) - c^1(e_i))$$

$$= \sum_{i \in E(e_j) - C(e_j)} (c^1(e_{i+1}) - c^1(e_i)) \leq \sum_{i=1}^{j-1} (c^1(e_{i+1}) - c^1(e_i)) = c^1(e_j)$$

-re nő. Legyen v az e_j él feje és $e_j = e_{v,h}$. A második For ciklusban $\sum_{e_j \text{ belép } Z\text{-be}} y(Z) - \pi(e_j)$ növekedése $c^2(e_{v,k}) - (c^2(e_{v,k}) - c^2(e_{v,h})) = c^2(e_{v,h}) = c^2(e_j)$, ha $h < k$, és $c^2(e_{v,k}) \leq c^2(e_{v_h}) = c^2(e_j)$ különben. Így a végén $\sum_{e_j \text{ belép } Z\text{-be}} y(Z) - \pi(e_j) \leq c^1(e_j) + c^2(e_j) = c(e_j)$. Továbbá y és π nemnegativitása könnyen látszik, amikor megköveteljük. Vagyis (y, π) valóban egy megengedett megoldása a duálisnak.

3.4. A megvalósítás részletei, futási idő

Az élek megfelelő sorrendbe rendezése $O(m \log m)$ időt vesz igénybe.

Minden előforduló Z párhalmazhoz hozzárendelünk egy A_Z tömböt, amit V^*-gal indexelünk. A tömb egy $A_Z[v]$ eleme rendre 'i', 'o' vagy 'n' attól függően, hogy $v \in Z_I$, $v \in Z_O - Z_I$, vagy $v \in V^* - Z_O - Z_I$. Az algoritmus során előforduló összes párhalmazt egy listában tároljuk. Az éppen aktuális $\mathcal{Z}$ párhalmaz-partíció elemeit a következőképpen tároljuk, felveszünk egy B tömböt, amit V^*-gal indexelünk és $B[v]$ egy mutatót tartalmaz arra a $\mathcal{Z}$-beli párhalmazra, ami tartalmazza v-t. Ez lehetővé teszi, hogy $O(1)$ időben ellenőrizzük, hogy egy adott él feszítve van-e valamely $\mathcal{Z}$-beli párhalmaz által. Vagyis amikor frissíteni kell az aktuális párhalmaz partíciót egy új e él érkezésekor, akkor $O(1)$ időben készen vagyunk, ha $e \notin A^*$, ha $e \in A^*$, először ellenőrizzük e, hogy e-t feszíti-e egy $\mathcal{Z}$-beli párhalmaz, ha igen, $O(1)$ időben készen vagyunk, ha nem, kell találnunk egy maximális szoros halmazt H-ban (l. 3.2.2 fejezet). De használva H előző irányítását ez $O(km')$ időben megy, ahol m' a H éleinek száma, de ez mindig $O(nk)$. Ha már megtaláltuk a maximális Z-t, a B tömb frissítése megy $O(n)$ időben. Vagyis a frissítés $O(k^2n)$ időben megy ebben az esetben. De ez az eset csak $O(kn)$ alkalommal fordulhat elő. Vagyis a teljes idő, amit az aktuális párhalmaz-partíció frissítésével töltünk $O(m + k^3n^2)$.

Egy másik észrevétel az, hogy az első For ciklusban valójában nem kell minden alkalommal megváltoztatni y-t és π-t. Elegendő megjegyezni, hogy mikor vált egy párhalmaz az aktuális párhalmaz partíció elemévé, és amikor később kikerül onnét, akkor $O(1)$ időben meghatározható az y értéke rajta . Hasonlóan az élekre. Az ehhez szükséges időt dominálják az előző korlátok.

Nyilván a második For ciklus gyorsan végre hajtható.

Összességében, tehát a futási idő $O(m \log m + k^3n^2)$.

4. SBO matroidok

4.0.1. Definíció. *Egy matroidot strongly base orderable-nek*[2]*, a továbbiakban röviden SBO-nek nevezünk, ha bármely két B_1 és B_2 bázisára létezik egy $f : B_1 - B_2 \to B_2 - B_1$ bijekció úgy, hogy minden $X \subset B_1 - B_2$-re $B_1 - X + f(X)$ is bázis.*

4.0.2. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy ekkor minden $Z \subset B_1 - B_2$-re $B_2 - f(Z) + Z$ is bázis, hiszen $X = B_1 - B_2 - Z$-vel: $B_2 - f(Z) + Z = B_1 - X + f(X)$. Ebből az is látszik, hogy a B_2, B_1 párra az f^{-1} egy megfelelő bijekciót ad.*

4.0.3. Lemma. *Ha M egy SBO matroid, akkor a duálisa M^* is az.*

Bizonyítás. Legyen $B_1^* = S - B_1$ és $B_2^* = S - B_2$ az M^* két bázisa. (Azaz B_1 és B_2 az M bázisai.) Ekkor mivel M SBO létezik egy $f : B_2 - B_1 \to B_1 - B_2$ bijekció, amire $B_1 - f(X) + X$ bázis minden $X \subset B_2 - B_1$-re a 4.0.2 megjegyzés szerint. Mivel $B_2 - B_1 = B_1^* - B_2^*$ és $B_1 - B_2 = B_2^* - B_1^*$, ezért f egy $B_1^* - B_2^* \to B_1^* - B_2^*$ bijekció, amire $X \subset B_1^* - B_2^*$ esetén $B_1^* - X + f(X) = S - B_1 - X + f(X) = S - (B_1 + X - f(X))$, ami M^*-nak egy bázisa. □

4.0.4. Lemma. *Egy SBO matroid minorja is az.*

Bizonyítás. Mivel tudjuk, hogy SBO matroid duálisa is az, és az összehúzás és az elhagyás egymás duális műveletei, ezért elegendő belátni, hogy egy M SBO matroidra egy x elem összehúzásával keletkező M/x matroid is SBO. Ha x hurok, akkor M/x bázisai pontosan ugyanazok, mint M bázisai, vagyis készen vagyunk. Ha x nem hurok, legyen B_1' és B_2' az M/x két bázisa, akkor $B_1 = B_1' + x$ és $B_1 = B_1' + x$ két bázisa M-nek, vagyis létezik hozzájuk megfelelő f könnyű látni, hogy ez B_1' és B_2'-höz is jó lesz. □

4.0.5. Lemma (R. A. Brualdi [4])**.** *Egy SBO matroid csonkoltja is az.*

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy ha M egy r rangú SBO matroid, akkor az M' matroid, ami M-nek az $r-1$ elemű függetlenjeiből áll, is az. Legyen B_1' és B_2' az M' két különböző bázisa. Ekkor a $B_1' \cup B_2'$ halmaz rangja M-ben kétféle lehet $r-1$ vagy r. Ha $r-1$, akkor létezik x úgy, hogy $B_1' \cup B_2' + x$ rangja r, de ekkor $B_1' + x$ és $B_2' + x$ is bázisa M-nek, vagyis létezik hozzájuk megfelelő f, de ez B_1' és B_2'-höz is jó lesz. Ha r, akkor létezik, $x_1 \in B_2' - B_1'$ és $x_2 \in B_1' - B_2'$ úgy, hogy $B_i = B_i' + x_i$ bázisa M-nek, vagyis létezik egy megfelelő $f : B_1 - B_2 \to B_2 - B_1$, azaz $B_1' - B_2' - x_2 \to B_2' - B_1' - x_1$ függvény. Definiáljuk, az $f' : B_1' - B_2' \to B_2' - B_1'$ függvényt úgy, hogy $x \in B_1' - B_2' - x_2$ esetén $f'(x) = f(x)$ és $f'(x_2) = x_1$. Ekkor $X \subset B_1' - B_2' - x_2$ esetén $B_1' - X + f'(X) = B_1 - X + f(X) - x_1$, ami tehát az M matroid

[2] Nincsen általánosan elfogadott magyar elnevezés.

$B_1 - X + f(X)$ bázisának egy $r-1$ elemű részhalmaza, azaz M' egy bázisa, továbbá $x_2 \in X \subset B_1' - B_2'$ esetén $B_1' - X + f'(X) = B_1' - x_2 - (X - x_2) + f(X - x_2) + x_1 = B_1 - (X - x_2) + f(X - x_2) - x_2$, azaz az M matroid $B_1 - (X - x_2) + f(X - x_2)$ bázisának egy $r-1$ elemű részhalmaza, azaz M' egy bázisa. $\square$

Hasonlóan kapható:

4.0.6. Lemma. *Egy SBO matroidból párhuzamos többszörözéssel kapott matroid is SBO.*

4.0.7. Lemma (J. Davies és C. McDiarmid [6])**.** *Legyen M_1 és M_2 két SBO matroid ugyanazon az S alaphalmazon. Tegyük fel, hogy M_1 és M_2 is külön-külön felbomlik k független halmaz uniójára. Ekkor S felbomlik k közös független uniójára.*

Bizonyítás. Legyen $S = F_1^1 \cup F_2^1 \cup \ldots \cup F_k^1$ S-nek egy partíciója M_1-beli függetlenekre, illetve $S = F_1^2 \cup F_2^2 \cup \ldots \cup F_k^2$ S-nek egy partíciója M_2-beli függetlenekre úgy, azon elemek N száma amik ugyanazon indexű partíció részbe esnek a kétféle partíciónál a lehető legnagyobb. Ha ez éppen $|S|$, akkor $F_i^1 = F_i^2$, azaz S-et k közös függetlenre partícionáltuk. Tegyük föl, tehát, hogy nem $|S|$, ekkor létezik $t \in S$, amire $t \in F_i^1, t \in F_j^2$ és $j \neq i$. Legyen B_i^1, B_j^1 az M_1-nek egy-egy olyan bázisa, ami tartalmazza F_i^1-t, illetve F_j^1. Hasonlóan B_i^2, B_j^2 az M_2 olyan bázisai, amik tartalmazzák F_i^2-t illetve F_j^2. Legyen $f^1 : B_i^1 - B_j^1 \to B_j^1 - B_i^1$, illetve $f^2 : B_i^2 - B_j^2 \to B_j^2 - B_i^2$ függvények a 4.0.1 definíció által megkövetelt tulajdonsággal. Tekintsük a $G = (V, E)$ gráfot, ahol $V = B_i^1 \cup B_j^1 \cup B_i^2 \cup B_j^2$ és $E = \{xf^1(x) | x \in B_i^1 - B_j^1\} \cup \{xf^2(x) | x \in B_i^2 - B_j^2\}$. Itt E két párosítás uniója, amiből következik, hogy G páros gráf. Legyen a két színosztálya R és T. Legyen:

$$F_i^{1'} = (F_i^1 \cup F_j^1) \cap R, \qquad F_j^{1'} = (F_i^1 \cup F_j^1) \cap T,$$
$$F_i^{1'} = (F_i^2 \cup F_j^2) \cap R, \qquad F_j^{2'} = (F_i^2 \cup F_j^2) \cap T$$

Megmutatjuk, hogy $F_i^{1'}$ független M_1-ben. Legyen $X = (B_i^1 - B_j^1) \cap T$, $Y = (B_i^1 - B_j^1) \cap R$. Ekkor azon pontok, amelyek G-ben szomszédosak valamely X-beli ponttal, mind R-ben vannak, vagyis $f^1(X) \subset R$. Hasonlóan $f^1(Y) \subset T$. Amiből $((B_i^1 - B_j^1) \cup (B_j^1 - B_i^1)) \cap R = Y + f^1(X)$, vagyis $F_i^{1'} = (F_i^1 \cup F_j^1) \cap R \subset (B_i^1 \cup B_j^1) \cap R \subset B_i^1 - X + f^1(X)$, vagyis $F_i^{1'}$ része egy bázisnak így független. Szimmetrikusan $F_j^{1'}$ is független M_1-ben. (Itt valójában használnunk kell, hogy az 4.0.2 megjegyzés szerint $(f^1)^{-1}$ megfelelő bijekció az B_j^1, B_i^1 párhoz.) Hasonlóan $F_i^{2'}$ és $F_j^{2'}$ is független M_2-ben. Cseréljük ki a partícióinkban $F_i^1, F_j^1, F_i^2, F_j^2$-t rendre $F_i^{1'}, F_j^{1'}, F_i^{2'}, F_j^{21}$-re. Ekkor egy újabb megfelelő partíció párt kapunk. Nézzük hogyan változik az N. S azon elemi, amik nem elemei $F_i^1 \cup F_j^1$-nek vagy $F_i^2 \cup F_j^2$-nek, azok pontosan akkor esnek az új partíciókban azonos indexű részbe, ha a régiben azonos indexűbe estek. Azok az elemek, amik $F_i^1 \cup F_j^1$ és $F_i^2 \cup F_j^2$ közül pontosan 1-ben szerepelnek, sem az újban, sem a régiben nem esnek azonos indexű részekbe. $(F_i^1 \cup F_j^1) \cap (F_i^2 \cup F_j^2)$-nek viszont az összes eleme ugyanolyan indexű részbe esik az új partícióknál, a régieknél viszont t különböző részekbe esett, vagyis N szigorúan nőtt a változtatással. Ami ellentmondás. □

4.0.8. Megjegyzés. *Ez a bizonyítás könnyen polinomiális algoritmussá alakítható, feltéve, hogy a 4.0.1 definícióban szereplő f polinom időben meghatározható.*

Azaz, a matroid uniótétellel összevetve:

4.0.9. Lemma. *Legyen $M_1 = (S, r_1)$ és $M_2 = (S, r_2)$ két SBO matroid, ekkor S pontosan akkor bomlik fel k közös függetlenre, ha $kr_1(X) \geq |X|$ és $kr_2(X) \geq |X|$ minden $X \subset S$-re.*

További következmények:

4.0.10. Lemma. *Legyen $M_1 = (S, r_1)$ és $M_2 = (S, r_2)$ két SBO matroid, ekkor az S maximális méretű részhalmazának mérete, ami felbomlik k közös függetlenre:*

$$\min(kr_1(X) + kr_2(Y) + |S - X - Y|),$$

ahol a minimum az S diszjunkt X, Y részhalmazaira megy.

Ugyanezt a minimumot kapjuk, ha az összes X, Y részhalmazt tekintjük, illetve ekkor elegendő S olyan X és Y részhalmazait nézni, ahol X M_1-ben zárt és Y M_2-ben zárt.

Bizonyítás. Legyen kM_i az M_i matroid k-szorosa. Ekkor kM_1 és kM_2 közös függetlenjei éppen S azon részhalmazai, amik felbomlanak az M_1 és M_2 k közös függetlenjére a 4.0.9 lemma szerint. Vagyis kM_1 és kM_2 legnagyobb közös függetlenjére vagyunk kíváncsiak, ami éppen az állításbeli minimum. □

4.0.11. Lemma. *Legyen $M_1 = (S, r_1)$ és $M_2 = (S, r_2)$ két SBO matroid, ekkor S pontosan akkor bomlik fel k közös generátor uniójára, ha M_1-ben és M_2-ben is külön-külön létezik k diszjunkt bázis.*

Bizonyítás. Legyen N_i az matroid, amit úgy kapunk M_i duálisából, hogy minden elemet $k-1$ párhuzamos példányban tekintünk. Közös alaphalmazuk legyen S'. Ekkor a 4.0.3 és 4.0.6 lemmákból N_i is SBO. A 1.1.1 lemma bizonyításából S pontosan akkor bomlik fel k generátorra, ha S' felbomlik k közös függetlenre. De mivel N_i SBO, ezért ez a 4.0.7 lemmából, S' pontosan akkor bomlik fel k közös függetlenre, ha N_1 és N_2 külön-külön felbomlanak, de ez a 1.1.1 lemma gondolat menetéből pontosan akkor igaz, ha M_1 és M_2 külön-külön felbomlik k generátorra, azaz külön-külön van bennük k diszjunkt bázis. □

4.0.12. Lemma. *Legyen $M_1 = (S, r_1)$ és $M_2 = (S, r_2)$ két SBO matroid, melyekre $r_1(S) = r_2(S)$, ekkor S pontosan akkor fedhető k közös bázissal, ha*

$$k(r_1(T) + r_2(U) - r_1(S)) \geq |T \cap U|$$

minden T, U ko-diszjunkt részhalmazára S-nek.

Elegendő csak olyan T, U párokat tekinteni, ahol T M_1-ben zárt és U M_2-ben zárt.

Bizonyítás. Definiáljuk N_i-t, mit az előző bizonyításban. Láttuk, hogy N_i SBO. A 1.1.2 lemmából, pontosan akkor fedhető S k közös bázissal, ha N_1-nek és N_2-nek létezik k független bázisa. Azaz, ha r'_i az N_i rang függvénye, és S' az N_i-k közös alaphalmaza akkor, az a kérdés, hogy

$$kr'_1(X') + kr'_2(Y') + |S' - X' - Y'| \geq kr'_1(S')$$

mikor teljesül minden X', Y' részhalmazára S'-nek. Itt feltehető, hogy X', Y' zártak a megfelelő matroidban, ekkor speciálisan teljes osztályok uniói. (Egy osztályon azon elemek halmazát értjük, amik ugyanazon elem párhuzamos többszörözéséből születtek.) Vagyis legyen X' azon elemek halmaza, amik valami $X \subset S$ halmaz eleminek többszörözéséből születtek. Hasonlóan Y'-re és Y-ra. Ekkor $r'_1(X') = r^*{}_1(X)$ és $r'_2(Y') = r^*{}_2(Y)$. Vagyis a feltétel

$$kr^*_1(X) + kr^*_2(Y) + (k-1)|S - X - Y| \geq kr^*_1(S)$$

alakban írható. Ez pontosan akkor teljesül minden X, Y párra, ha a diszjunktakra teljesül. Ekkor az $T = S - X$ és $U = S - Y$ jelöléssel a következő feltételhez jutunk, használva, hogy $r^*(Z) = |Z| + r(S - Z) - r(S)$:

$$k(r_1(T) + r_2(U) - r_1(S)) \geq |T \cap U|$$

minden T, U ko-diszjunkt párra. □

4.0.13. Lemma (R. A. Brualdi [4])**.** *A transzverzális matroidok SBO-k. Továbbá a partíciós matroidok és a gammoidok is.*

Bizonyítás. Elegendő belátni az első állítást, hiszen a partíciós matroidok speciális transzverzális matroidok. Továbbá a gammoidok transzverzális matroidok minorjaiként előállnak, vagyis a 4.0.4 lemma alkalmazható.

Legyen tehát M egy transzverzális matroid, $G = (S, T, E)$ a hozzátartozó páros gráf, azaz M bázisai éppen S azon részhalmazai, amik fedhetők maximális méretű párosítással. A Mendelson-Dulmage-tétel szerint feltehető, hogy T mérete éppen az

M matroid rangjával egyezik meg. Legyen B_1 és B_2 két bázis, ekkor létezik P_1 és P_2 párosítás úgy, hogy P_i által fedett pontok éppen $B_i \cup T$. Nézzük a P_1 és P_2-beli élek alkotta H (multi)gráfot. Itt minden csúcsfoka legfeljebb 2, minden T-beli csúcs foka 2. Vagyis H csúcsdiszjunkt körök és utak uniója, az utak végpontjai mind S-ben vannak, amiből minden út páros hosszú. Továbbá a végpontok mind B_1 és B_2 szimmetrikus differenciájának az elemi, és minden út egyik végpontja $B_1 - B_2$-ben van, a másik $B_2 - B_1$-ben. Legyen $x \in B_1 - B_2$ $f(x)$ az x végpontú út másik végpontja. Könnyű látni, hogy az így kapott f megfelelő. □

Egy $G = (S, T, E)$ páros gráfban a párosítások két M_1 és M_2 partíciós matroid közös függetlenjeiként állnak elő. Az M_1 matroidban az S-beli végpontjuk, az M_2 matroidban az T-beli végpontjuk szerint partícionáljuk az éleket, és minden partíció részen egy a felső korlát. A fenti tételek egyszerű következményei a következők:

4.0.14. Tétel. *Egy páros gráf élei pontosan akkor színezhetőek k színnel úgy, hogy minden csúcsnál csupa különböző színű él találkozik, ha maximális fokszám legfeljebb k.*

4.0.15. Tétel. *Egy páros gráf élei pontosan akkor színezhetőek k színnel úgy, hogy minden csúcsnál mind a k színű él előfordul, ha minimális fokszám legalább k.*

4.0.16. Tétel. *Legyen $G = (S, T, E)$ egy páros gráf, $|S| = |T|$, ekkor G élei pontosan akkor fedhetőek k teljes párosítással, ha minden Z lefogó ponthalmazra $k(|Z| - |S|) \geq$ $\geq i_G(Z)$.*

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy

$$k(r_1(R) + r_2(U) - r_1(E)) \geq |R \cap U|$$

teljesül minden $R, U \subset E$ ko-diszjunkt halmazra, ahol R zárt M_1-ben, azaz R előáll, mint valami $X \subset S$ halmazra illeszkedő élek halmaza, és U zárt M_2-ben, azaz R előáll, mint valami $Y \subset T$ halmazra illeszkedő élek halmaza. Tovább $R \cup U = E$ akkor és csak akkor, ha $Z = X \cup Y$ egy lefogó ponthalmaz, $R \cap U$ pedig éppen a Z által feszített élek halmaza lesz, és $r_1(R) + r_2(U) = |X| + |Y| = |Z|$. Ezeket felhasználva éppen a feltétel adódik. □

Végezetül mutatunk egy példát arra, hogy a 4.0.7 tétel állítása nem lenne igaz, ha nem követelnénk meg M_1-ről és M_2-ről, hogy SBO matroidok legyenek. A K_4, azaz 4 pontú teljes gráf éleinek S halmazán definiáljunk két matroidot, M_1 legyen a K_4 körmatroidja, M_2 pedig az partíciós matroid, ahol éleknek egy részhalmaza független, ha nem tartalmaz két élű párosítást, azaz a partíció részek a K_4 egy-egy teljes párosításának felelnek meg. Könnyű látni, hogy M_1 és M_2 külön-külön felbomlik 2 független uniójára, azonban S nem bomlik fel 2 közös független uniójára.

Ebből persze azonnal következik, hogy a K_4 körmatroidja nem lehet SBO, azaz egy gráf körmatroidja általában nem SBO.

Így talán még érdekesebb, hogy Edmonds fenyő tétele megfogalmazható a 4.0.7 tételhez hasonló alakban, holott ebben az esetben az állításban szereplő matroidok nem feltétlenül SBO matroidok.

Adott egy $D = (V, A)$ digráf egy kijelölt r_0 gyökérponttal, feltesszük, hogy r_0-ba nem lépnek be élek. Ekkor az r_0 gyökerű feszítő fenyők a szokásos módon előállnak, mint két matroid közös bázisai. Legyen M_1 a D-nek megfelelő irányítatlan gráf körmatroidja, M_2 pedig az a partíciós matroid, ahol éleknek egy halmaza akkor és csak akkor független, ha az általuk alkotott részgráfban minden befok legfeljebb 1, azaz az éleket a fejpontjuk szerint partícionáljuk. Ekkor

4.0.17. Lemma. *Tegyük fel, hogy M_1 és M_2 is külön-külön felbomlik k bázis uniójára. Ekkor A felbomlik k közös bázis uniójára.*

Bizonyítás. Elegendő megmutatnunk, hogy ekkor teljesül a 2.1.2 tétel feltétele, azaz minden $X \subset V - r_0$ részhalmazba legalább k-éle belép D-nek. De ez igaz, hiszen pontosan $k|X|$ olyan él van, aminek a feje X-ben van, és X legfeljebb $k(|X| - 1)$ élt feszít, azaz legalább k él belép X-be. $\square$

5. Topológiai módszerek

Ezen fejezetben végig Aharoni és Berger [1] eredményeit ismertetjük.

5.1. Alapfogalmak

5.1.1. Definíció. *Véges halmazok egy $\mathcal{K}$ véges családját szimpliciális komplexusnak nevezzük, ha $Y \subset X \in \mathcal{K}$ esetén $Y \in \mathcal{K}$. A $V(\mathcal{K}) = \cup_{S \in \mathcal{K}} S$ véges halmaz elemeit a $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexus csúcsainak nevezzük. $\mathcal{K}$ elemeit pedig $\mathcal{K}$ szimplexeinek.*

Legyen $n = |V(\mathcal{K})|$. Rendeljünk hozzá $V(\mathcal{K})$ minden v eleméhez p_v $\mathbb{R}^{n-1}$-beli pontot úgy, hogy a kapott n pont ne essék egy hipersíkra. A továbbiakban, ha ez nem zavaró, akkor nem teszünk különbséget $\mathcal{K}$ egy v csúcsa és a hozzátartozó p_v pont között. $\mathcal{K}$ minden S szimplexére tekintsük az S-beli pontok konvex burkaként előálló $conv(S)$ (geometriai) szimplexet. Ezek unióját nevezzük a $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexus $G(\mathcal{K})$ geometriai realizációjának. A $conv(S)$ ($S \in \mathcal{K}$) alakú halmazokat $G(\mathcal{K})$ lapjainak nevezzük. Mivel feltettük, hogy a pontjaink általános helyzetűek, ezért két lap csakis a közös részlapjukban metszi egymást, azaz $conv(S_1) \cap conv(S_2) = conv(S_1 \cap \cap S_2)$, minden $S_1, S_2 \in \mathcal{K}$-ra.

Másképpen: $V(\mathcal{K})$ konvex burkának minden x pontja egyértelműen áll elő, $x = = \sum_{v \in V(\mathcal{K})} x_v p_v$ alakban, ahol $x_v \geq 0$ minden $v \in V(\mathcal{K})$-ra és $\sum_{v \in V(\mathcal{K})} x_v = 1$. Az x pont tartóján a $\operatorname{supp} x = \{v \in V(\mathcal{K}) | x_v > 0\}$ halmazt értjük. Ekkor $G(\mathcal{K})$ éppen $conv(V(\mathcal{K}))$ azon x pontjaiból fog állni, amire $\operatorname{supp} x \in \mathcal{K}$.

$G(\mathcal{K})$, mint topológikus tér is tekinthető az $\mathbb{R}^{n-1}$-től örökölt topológiával. $V(\mathcal{K})$ elemeihez nyilván többféleképpen megválaszthatjuk a pontokat $\mathbb{R}^{n-1}$-ben, de mind homeomorf realizációkat fog adni.

5.1.2. Definíció. *Legyen $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ két szimpliciális komplexus, az $f : V(\mathcal{K}_1) \to V(\mathcal{K}_2)$ leképezést szimpliciálisnak nevezzük, ha bármely $S \in \mathcal{K}_1$-re, $f(S) \in \mathcal{K}_2$. Ekkor f-hez definiálható a $\hat{f} : G(\mathcal{K}_1) \to G(\mathcal{K}_2)$ folytonos függvény, amire $x = = \sum_{v \in V(\mathcal{K})} x_v p_v$ pont képe $\hat{f}(x) = \sum_{v \in V(\mathcal{K})} x_v q_{f(v)}$, azaz f-et affin módon kiterjesztjük. (Ahol q_v a $v \in V(\mathcal{K}_2)$-nek megfelelő pont a $G(\mathcal{K}_2)$ realizációnál.)*[3]

5.1.3. Definíció. *Legyen $\mathcal{K}$ egy szimpliciális komplexus, ekkor a baricentrikus felbontásán a következő $\beta(\mathcal{K})$ szimpliciális komplexust értjük: $\beta(\mathcal{K})$ csúcsainak feleljenek $\mathcal{K}$ nem üres elemei, továbbá $\beta(\mathcal{K})$ szimplexei legyenek $\{S_1, S_2, ..., S_k\}$ alakú halmazok, ahol $S_i \in \mathcal{K}$ nem üres és $S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_k$, azaz $\beta(\mathcal{K})$ szimplexei $\mathcal{K}$ nem üres elemeiből álló láncok.*

[3] Ez valóban $G(\mathcal{K}_2)$-be képez, hiszen $\operatorname{supp} f(x) = f(\operatorname{supp} x)$. Továbbá nyilván folytonos, hiszen egy affin leképezés megszorítása.

5.1.4. Lemma. *Bármely $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexusra $G(\mathcal{K})$ és $G(\beta(\mathcal{K}))$ homeomorfak.*

Bizonyítás. Minden $S \in \mathcal{K}$ nem üres szimplexre, legyen $b_S = \frac{1}{|S|} \sum_{v \in S} p_v$, azaz b_S az S szimplex súlypontja. Tekintsük $G(\beta(\mathcal{K}))$ egy $y = \sum_{S \in V(\beta(\mathcal{K}))} y_S q_S$ pontját, ahol q_S a $\beta(\mathcal{K})$ S csúcsához tartozó pont az adott realizációnál. Legyen ekkor $f(y) = \sum_{y \in V(\beta(\mathcal{K}))} y_S b_S$. Megmutatjuk, hogy f egy $G(\beta(\mathcal{K})) \to G(\mathcal{K})$ homeomorfizmus. Nyilván folytonos. Megmutatjuk, hogy valóban $G(\mathcal{K})$-ba képez. Vegyük észre, hogy $\operatorname{supp} b_S = S$, így ha $\operatorname{supp} y = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$, ahol $S_1 \subset S_2 \subset ... \subset S_k$, akkor $\operatorname{supp} f(y) = S_k$, azaz $f(y) \in G(\mathcal{K})$. Továbbá, ha $f(y) = x = \sum_{v \in \mathcal{K}} x_v p_v$, akkor S_1 illetve $S_i - S_{i-i}$ $(i = 2,3, ..., k)$ halmazokon x_v konstans, továbbá ha $v \in S_i$, de $u \notin S_i$, akkor $x_v > x_u$. Egy $x \in G(\mathcal{K})$ pont ősképét a következőképpen határozhatjuk meg a fentiek alapján: legyen $E = \{x_v | v \in \operatorname{supp} x\} = \{x_1 > x_2 > ... > x_k\}$. Legyen $S_i = \{v \in V(\mathcal{K}) | x_v \geq x_i\}$. Ekkor könnyű látni, hogy léteznek pozitív y_i konstansok, amire $x = \sum_{i=1}^{k} y_i b_{S_i}$ és $\sum_{i=1}^{k} y_i = 1$, amiből $y = \sum_{i=1}^{k} y_i q_{S_i}$-re $f(y) = x$. Az is belátható, hogy valóban $y \in G(\beta(\mathcal{K}))$, és ez az egyetlen lehetséges inverz, továbbá f^{-1} folytonos. $\square$

5.1.5. Definíció. *A fenti bizonyításban megkonstruált $f^{-1} : G(\mathcal{K}) \to G(\beta(\mathcal{K}))$ homeomorfizmust a továbbiakban ι-val jelöljük és a kanonikus $G(\mathcal{K}) \to G(\beta(\mathcal{K}))$ homeomorfizmusnak nevezzük.*

5.1.6. Megjegyzés. *A ι kanonikus homeomorfizmusra, mint a fenti bizonyításból látszik, teljesül, hogy minden $x \in G(\mathcal{K})$-ra* $\operatorname{supp} x \in \operatorname{supp} \iota(x)$.

Jelölje B^n az n dimenziós (tömör) gömböt, S^{n-1} a felszínét.

5.1.7. Definíció. *Egy X topológikus teret k-szorosan összefüggőnek nevezünk, ha minden $0 \leq r \leq k$ egészre, ha f egy $S^r \to X$ folytonos leképezés, akkor az kiterjeszthető egy $\bar{f} : B^{r+1} \to X$ folytonos leképzéssé. X-et definíció szerint -1 összefüggőnek nevezzük, ha nem üres.*

5.1.8. Megjegyzés. *Mivel egy n dimenziós szimplex homeomorf B^n-nel, ezért ha X legalább $n+1$-szeresen összefüggő, akkor minden az S ∂S határán, azaz S $n-1$ dimenziós lapjainak unióján értelmezett $f : \partial S \to X$ folytonos leképezés, kiterjeszthető egy $\bar{f} : S \to X$ folytonos leképezéssé.*

Homeomorf terek pontosan ugyanakkor k-szorosan összefüggőek, vagyis van értelme a következő definíciónak.

5.1.9. Definíció. *Egy $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexus k-szorosan összefüggő, ha $G(\mathcal{K})$ az. Vezessük be a következő jelölést:*

$$\eta(\mathcal{K}) = 2 + \max\{k | \mathcal{K} \quad k\text{-szorosan összefüggő}\}.$$

Definíció szerint, ha $G(\mathcal{K})$ üres, akkor legyen $\eta(\mathcal{K}) = 0$.

5.1.10. Definíció. *A $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexus megszorítása az X halmazra a*

$$\mathcal{K}|X = \{S \cap X | S \in \mathcal{K}\}$$

szimpliciális komplexus. Használni fogjuk a $\mathcal{K} - X = \mathcal{K}|V(\mathcal{K}) - X$ jelölést is. Legyen $v \in V(\mathcal{K})$ ekkor v linkje a

$$lk_{\mathcal{K}}v = \{X - v | v \in X \in \mathcal{K}\}$$

szimpliciális komplexus. (Ez lényegében matroidoknál az összehúzás.)

5.1.11. Megjegyzés. *Legyen K egy szimpliciális komplexus, $X \subset V(\mathcal{K})$, ekkor $G(\mathcal{K}) \cap conv(X)$ és $G(\mathcal{K}|X)$ homeomorf, amennyiben nem okoz zavart a kettő között nem teszünk különbséget.*

A későbbiekben szükségünk lesz a következő ismert lemmára:

5.1.12. Lemma. *Legyen $\mathcal{K}$ egy szimpliciális komplexus $v \in V(\mathcal{K})$, ekkor*

$$\eta(\mathcal{K}) \geq \min(\eta(\mathcal{K} - v); \eta(lk_{\mathcal{K}}v) + 1).$$

5.2. Matroid és szimpliciális komplexus metszete

5.2.1. Tétel. *Legyen $M = (S, r)$ egy matroid, $\mathcal{K}$ egy szimpliciális komplexus, $V(\mathcal{K}) \subset$ $\subset S$. Ekkor, ha minden $X \subset S$ M szerint zárt részhalmazra teljesül, hogy*

$$r(X) + \eta(\mathcal{K} - X) \geq r(S),$$

akkor létezik M-nek egy B bázisa, amelyre $B \in \mathcal{K}$.

Ennek azonnali következménye, ha k-nál csonkoljuk az M matroidot és arra alkalmazzuk a tételt, a következő állítás:

5.2.2. Tétel. *Legyen $M = (S, r)$ egy matroid, $\mathcal{K}$ egy szimpliciális komplexus, $V(\mathcal{K}) \subset$ $\subset S$. Ekkor, ha minden $X \subset S$ M szerint zárt részhalmazra teljesül, hogy*

$$r(X) + \eta(\mathcal{K} - X) \geq k,$$

akkor létezik M-nek egy k méretű F függetlenje, amelyre $F \in \mathcal{K}$.

Bizonyítás. (5.2.1 tétel) Definiáljuk a $\mathcal{Z}$ szimpliciális komplexust a következőképpen: Csúcsai legyenek az M matroid zárt halmazai, beleértve az üres halmazt, de kizárva az egész S-et, a szimplexei pedig legyen a zárt halmazok láncai, azaz a szimplexek a $\{Z_1, Z_2, ..., Z_m\}$ alakú halmazok lesznek, ahol $Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_m$.

5.2.3. Lemma. *Létezik egy* $f : G(\mathcal{Z}) \to G(\mathcal{K})$ *folytonos leképzés, amire minden* $x \in G(\mathcal{Z})$*-re igaz, hogy létezik* $Z \in \operatorname{supp} x$*, amire* $Z \cap \operatorname{supp} f(x) = \emptyset$.

Bizonyítás. Először $\mathcal{Z}$ csúcsainak megfelelő pontokra definiáljuk f-et. Legyen Z egy S-től különböző zárt halmaz, ekkor a feltétel szerint $G(\mathcal{K} - Z)$ nem üres, a Z-nek megfelelő pont képe legyen ennek tetszőleges pontja. Tegyük föl, hogy $G(\mathcal{Z})$ $d - 1$ dimenziós szimplexein már definiáltuk jól az f függvényt. Most ki szeretnénk terjeszteni egy S d dimenziós szimplexre az f-t, úgy, hogy S határán már ismerjük f-et. Legyen $S = \{Z_1, Z_2, ..., Z_{d+1}\}$, ahol $Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_{d+1}$. Vegyük észre, hogy abból, hogy f jó függvény az S határán, következik, hogy a határ bármely x pontjára $f(x) \in G(\mathcal{K} - Z_1)$. Legyen $r = r(S)$, ekkor $r(Z_{d+1}) \leq r - 1, r(Z_d) \leq r - 2, ..., r(Z_1) \leq r - d - 1$. De ekkor a feltétel szerint $\eta(\mathcal{K} - Z_1) \geq d + 1$, azaz $\mathcal{K} - Z_1$ $d-1$-szeresen összefüggő, de ekkor f kiterjeszthető folytonosan S belsejére úgy, hogy S-en csak $G(\mathcal{K} - Z_1)$-beli értékeket vegyen fel. Így tehát az egész $\mathcal{Z}$-n tudunk egy megfelelő f-et definiálni. □

Legyen Δ a következő szimpliciális komplexus, csúcsai az M matroid hipersíkjai, azaz az $r - 1$ rangú zárt halmazok, és a csúcshalmaz összes lehetséges szimplexe legyen benne Δ-ban. Tekintsük $\beta(\Delta)$-t, ennek csúcsai, tehát az összes hipersík halmazának nem üres részhalmazai, továbbá hipersíkoknak $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, ..., \mathcal{H}_k$ részhalmazai akkor alkotnak egy szimplexet, ha láncot alkotnak, azaz $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2 \subset ... \subset \mathcal{H}_k$. Definiáljuk a $g : V(\beta(\Delta)) \to V(\mathcal{Z})$ szimpliciális leképzést a következőképpen: egy $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, ..., H_m\}$ csúcsára $\beta(\Delta)$-nak, ahol tehát, $H_1, H_2, ..., H_m$ az M hipesíkjai legyen $g(\mathcal{H}) = \cap_{i=1}^{m} H_i$, mivel zárt halmazok metszete zárt, ez valóban $\mathcal{Z}$ egy csúcsa lesz, tovább ha $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$, akkor $g(\mathcal{H}_2) \subset g(\mathcal{H}_1)$, azaz g láncokat láncokba visz, vagyis valóban egy szimpliciális leképezés, mint láttuk ez meghatároz egy $\hat{g} : G(\beta(\Delta)) \to G(\mathcal{Z})$ folytonos leképezést.

Használnunk kell a Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz tételt [15]:

5.2.4. Tétel. *Ha* Δ *egy (geometriai) szimplex úgy, hogy minden* v *csúcsához hozzárendeltük egy* O_v *(az altér topológiában) nyílt részhalmazát* Δ*-nak úgy, hogy minden* $x \in \Delta$*-ra létezik* $v \in \operatorname{supp} x$*, amire* $x \in O_v$*, akkor létezik egy olyan* $x \in \Delta$*, hogy* $x \in O_v$ *minden* v *csúcsra.*

Tekintsük a $h = f \circ \hat{g} \circ \iota : G(\Delta) \to \mathcal{K}$ leképezést. A Δ szimplex minden csúcsára, azaz egy H hipersíkra, legyen $O_H = \{x \in G(\Delta) | \operatorname{supp} h(x) \not\subset H\}$. (Az valóban nyílt lesz, mert $O_H = h^{-1} (\cup_{v \in S-H}\{x \in G(\mathcal{K}) | v \in \operatorname{supp} x\})$. Itt mivel $\{x \in G(\mathcal{K}) | v \in \operatorname{supp} x\}$ nyílt, ezért O_H néhány nyílt halmaz uniójának ősképe egy folytonos leképezésnél, azaz nyílt.) Megmutatjuk, hogy az így kapott O_h halmazok teljesítik a 5.2.4 tétel feltételeit, legyen tehát $x \in G(\Delta)$, ekkor $\operatorname{supp} x \in \operatorname{supp} \iota x$ a 5.1.6 megjegyzés szerint. De ekkor $\operatorname{supp} \hat{g}(\iota(x))$-nek eleme $g(\operatorname{supp} x)$, azaz a $\operatorname{supp} x$ elemeinek megfelelő hipersíkok metszeteként előálló Z zárt halmaz. De f konstrukciójából adódóan, Z diszjunkt $h(x) = f(\hat{g}(\iota(x)))$ tartójától, vagyis $\operatorname{supp} h$ tetszőleges v elemét választva, $v \notin Z$, de Z a $\operatorname{supp} x$-nek megfelelő hipersíkok metszete, ami azt jelenti, hogy v nincs benne legalább az egyik hipersíkban és ezt akartuk látni. Innét rögtön adódik az a tétel állítása, hiszen a 5.2.4 tételből létezik egy olyan x, ami minden O_H-ban benne van, azaz $\operatorname{supp} h(x) \not\subset H$, minden H hipersíkra, de ekkor $\operatorname{supp} h(X)$ az X generátora, vagyis létezik M-nek egy $B \subset \operatorname{supp} h(x)$ bázisa. A szimplicális komplexus definíciójából adódóan $B \subset \operatorname{supp} h(x) \in \mathcal{K}$, amiből $B \in \mathcal{K}$. □

5.3. Három matroid metszete

5.3.1. Lemma. *Legyenek $M_1, M_2, \ldots, M_k$ matroidok egyazon S alaphalmazon. Jelölje $\nu(M_1, M_2, \ldots, M_k)$ a legnagyobb közös függetlenjük méretét. Ekkor a közös függetlenek által alkotott $M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_k$ szimpliciális komplexusra:*

$$\eta(M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_k) \geq \frac{\nu(M_1, M_2, ..., M_k)}{k}$$

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk. Legyen F egy maximális méretű közös független, legyen x az $S - I$-nek egy olyan eleme, amire x nem hurok elem semelyik matroidban sem, ami azzal ekvivalens, hogy $x \in V(M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_k) - I$. Ha nincs ilyen elem, akkor $I = V(M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_k)$, vagyis $M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_k$ éppen az I által meghatározott teljes szimplex. De ekkor $\eta(M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_k) = \infty$ vagyis készen vagyunk. Feltehető tehát, hogy létezik ilyen x. Ekkor az indukciós feltevést az $M_1 - x, M_2 - x, ..., M_k - x$ matroidokra alkalmazva kapjuk, hogy $\eta((M_1 \cap M_2 \cap \cap ... \cap M_k) - x) \geq \nu(M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_k)$, hiszen I továbbra is független $M_1 - x, M_2 - - x, ..., M_k - x$ matroidok mindegyikében. Legyen $x_i \in I$ olyan, hogy $I + x - x_i$ független M_i-ben, mivel x nem hurok egyik matroidban sem ilyenek léteznek. Ekkor $I' = I - x_1 - x_2 - ... - x_k$ egy független az x összehúzásával keletkező M_1/x, M_2/x, ..., M_k/x matroidok mindegyikében, és $|I'| \geq |I| - k$, amiből

$$\eta(lk_{M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_k} x) = \eta(M_1/x \cap M_2/x \cap ... \cap M_k/x) \geq \frac{\nu(M_1/x, M_2/x, ..., M_k/x)}{k}$$

$$\geq \frac{\nu(M_1, M_2, ..., M_k) - k}{k} = \frac{\nu(M_1, M_2, ..., M_k)}{k} - 1.$$

Ezt összevetve a 5.1.12 lemmával, kapjuk, hogy

$$\eta(M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_k) \geq \min(\eta((M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_k) - x); \eta(lk_{M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_k} x) + 1)$$

$$\geq \frac{\nu(M_1, M_2, ..., M_k)}{k}$$

□

5.3.2. Tétel. *Legyen M_1, M_2, M_3 három matroid egyazon S alaphalmazon, k egy pozitív egész, ekkor ha S-nek minden $S = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ partíciójára*

$$r_1(X_1) + r_2(X_2) + 2r_3(X_3) \geq 2k$$

akkor létezik egy k méretű közös független.

Bizonyítás. Tekintsük a $\mathcal{K} = M_1 \cap M_2$ szimpliciális komplexust. Tegyük föl indirekte, hogy nem létezik k méretű közös független. Ekkor a 5.2.2 tétel miatt, létezik egy $S = X_3 \cup X_K$ partíció, amire $r_3(X_3) + \eta(\mathcal{K}|X_K) < k$. Alkalmazva a fenti lemmát, $\eta(\mathcal{K}|X_K)) \geq \frac{\nu((M_1|X_K),(M_2|X_K))}{2}$. De a matroid metszet tételből létezik egy olyan $X_K = X_1 \cup X_2$ partíció, amire $\nu((M_1|X_K), (M_2|X_K)) = r_1(X_1) + r_2(X_2)$. Mindezeket összerakva kapjuk, hogy $r_3(X_3) + \frac{r_1(X_1)+r_2(X_2)}{2} < k$, amiből $r_1(X_1) + r_2(X_2) + + 2r_3(X_3) < 2k$, ami ellentmondás. □

Azonnali következményként kapjuk az alábbi gyengébb, de szimmetrikus állítást:

5.3.3. Tétel. *Legyen M_1, M_2, M_3 három matroid egyazon S alaphalmazon, k egy pozitív egész, ekkor ha S-nek minden $S = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ partíciójára*

$$r_1(X_1) + r_2(X_2) + r_3(X_3) \geq 2k$$

akkor létezik egy k méretű közös független.

Ezzel megoldottuk a Ryser-sejést a $d = 3$ esetben:

5.3.4. Sejtés. *Legyen H egy d-részes d-uniform hipergráf ($k \geq 2$), legyen ν a páronként diszjunkt élek maximális száma, τ az éleket lefogó csúcsok minimális száma, ekkor $\tau \leq (d-1)\nu$.*

A $d = 2$ eset a Kőnig-tétel szerint igaz, sőt, $\nu = \tau$. A $d = 3$ eset a fenti lemmából következik a szokásos módon. Definiálunk három M_1, M_2, M_3 matroidot az S alaphalmazon, ahol S a H hipergráf éleinek halmaza. Tekintsük a csúcsoknak az i. V_i színosztályát, és legyen M_i az a partíciós matroid, ahol azon élek tartozzanak egy partíció részhez, amik V_i-t ugyanabban a pontban metszik, és legyen minden partíció részen a korlát 1. Ekkor éleknek egy részhalmaza pontosan akkor lesz páronként diszjunkt H-ban, ha független mind három matroidban. Továbbá az M_i-ben zárt r rangú X_i halmazok megfeleltethetőek, r darab V_i-beli pont által lefogott élhalmazoknak. Azaz S minden $S = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ lefedése zártakkal megfelel egy lefogó ponthalmaznak és fordítva. Vagyis a minimális lefogó ponthalmaz mérete egyenlő $r_1(X_1) + r_2(X_2) + r_3(X_3)$ minimumával, ahol a minimumot $S = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ zártakkal való fedésre, vagy ekvivalensen partícióra nézzük. Így 5.3.3 tételből következik a $d = 3$ eset.

A Ryser-sejtés általánosítása matroidokra:

5.3.5. Sejtés. *Legyen* $M_1, M_2, ..., M_n$ *n matroid ugyanazon az* S *alaphalmazon* ($d \geq$ ≥ 2)*, ekkor ha* S *minden* $S = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ *partíciójára:*

$$r_1(X_1) + r_2(X_2) + ... + r_n(X_n) \geq (d-1)k$$

akkor létezik k *méretű közös független.*

Ez $d = 2$-re a matroid metszet tételből igaz. A $d = 3$ eset, éppen 5.3.3 tétel. A Ryser-sejtés és így a fenti általánosítása is $d > 3$ esetben nyitott.

5.4. Partíció közös függetlenekre

Hasonló technikával, mint ahogy a matroid unió tétel visszavezethető a matroid metszet tételre, az előző alfejezetben bebizonyított 3 matroid metszetére vonatkozó tételből kapható egy matroid metszetek pakolására vonatkozó tétel:

5.4.1. Tétel. *Legyen* M_1 *és* M_2 *két matroid egyazon* S *alaphalmazon,* k *egy pozitív egész, ekkor ha minden* $X \subset S$ *részhalmazra teljesül, hogy*

$$2|X| \leq k \min(r_1(X), r_2(X))$$

akkor S *felbomlik* k *közös függetlenre.*

Bizonyítás. Legyen M'_i az M_i k-szoros direkt összege saját magával. M'_1 és M'_2 alaphalmaza megfeleltethető egymásnak a természetes módon, legyen ez S', ami tehát S k darab $S_1, S_2, ..., S_k$ példányának diszjunkt uniója. Legyen M_3 az a partíciós matroid, aminek $|S|$ partíciórésze van, minden $s \in S$-hez tartozik egy P_s partíció rész, ami az S'-nek s-nek megfelelő k eleméből áll. Azt állítjuk, hogyha az M'_1, M'_2, M_3 matroidoknak létezik egy $|S|$ elemű közös függetlenje, akkor M_1 és M_2 felbomlik k közös függetlenre. Valóban, legyen B egy $|S|$ elemű közös független, ekkor a $B \cap$ $\cap S_i$ halmazok S-nek egy-egy olyan részhalmazának felelnek meg, amik függetlenek M_1-ben és M_2-ben is az M'_1 és az M'_2 definíciójából adódóan, továbbá egy partícióját adják S-nek M_3 definíciója miatt. Most már csak azt kell belátnunk, hogy az M'_1, M'_2, M_3 matroidoknak létezik $|S|$ elemű közös függetlenje, ehhez elegendő belátni, hogy $r'_1(X'_1) + r'_2(X'_2) + 2r_3(X_3) \geq 2|S|$ teljesül S' minden $S' = X'_1 \cup X'_2 \cup X_3$ partíciójára a 5.3.2 tétel szerint. Vegyük észre, hogy $r'_1(X) \geq \frac{2}{k}|X|$ és $r'_2(X) \geq \frac{2}{k}|X|$ minden $X \subset S'$-re a feladat feltételéből és M'_i konstrukciójából, továbbá M_3 konstrukciójából $r_3(X) \geq \frac{1}{k}|X|$, ezekből

$$r'_1(X'_1) + r'_2(X'_2) + 2r_3(X_3) \geq \frac{2}{k}(|X'_1| + |X'_2| + |X'_3|) = \frac{2}{k}|S'| = 2|S|.$$

És ezt akartuk belátni. □

Egy hurokmentes M matroidra legyen $\Delta(M) = \max_{\emptyset \neq X \subset S} \frac{|X|}{r(X)}$. Ezzel a jelöléssel fenti tétel azt mondja, hogyha M_1 és M_2 két hurokmentes matroid egyazon alaphalmazon, akkor az alaphalmaz felpartícionálható $2\max(\Delta(M_1), \Delta(M_2))$ közös függetlenre.

5.4.2. Sejtés. *Legyen M_1 és M_2 két hurokmentes matroid egyazon alaphalmazon, ekkor az alaphalmaz felpartícionálható $\Delta(M_1) + \Delta(M_2)$ közös függetlenre.*

Még erősebb sejtést kapnánk, ha $\max(\Delta(M_1), \Delta(M_2)) + 1$ részre való partíciót követelnénk meg. Mindkét kérdés nyitott.

5.4.3. Sejtés (Rota)**.** *Legyen M_1 egy k-rangú matroid, aminek alaphalmaza $B_1, B_2, ..., B_k$ bázisokra van partícionálva. Legyen M_2 az a partíciós matroid, amiben a partíciórészek éppen a B_i bázisok. Ekkor létezik M_1-nek és M_2-nek k diszjunkt közös bázisa.*

Ez a kérdés szintén nyitott. A fenti 5.4.1 tételből kapjuk azt, hogy ekkor az alaphalmaz partícionálható $2k$ függetlenre. (Nekünk k kellene.) Geelen és Webb [12] bizonyította, hogy létezik $\Omega(\sqrt{k})$ diszjunkt közös bázis. Geelen és Humphries [11] bizonyította a sejtést nagykörű matroidokra.

6. A Woodall-sejtés

6.0.4. Sejtés. *Ha egy $D = (V, A)$ irányított gráfban minden egyirányú vágás legalább k élű, akkor létezik a gráfban k éldiszjunkt kötés.*

Vegyük észre, hogy az erősen összefüggő komponensek mindig összehúzhatóak egy pontttá, így feltehető, hogy D aciklikus, a továbbiakban ezt mindig feltesszük.

Mint később látni fogjuk $k < 3$ esetén a sejtés könnyen igazolható. De a $k = 3$ eset is még teljesen nyitott, valójában még a következő gyengébb állításról sem tudjuk, hogy igaz-e, még síkgráfok esetén sem:

6.0.5. Sejtés. *Létezik, olyan k, amire ha egy $D = (V, A)$ irányított gráfban minden egyirányú vágás legalább k élű, akkor létezik a gráfban 3 éldiszjunkt kötés.*

6.1. A Woodall-sejtés, mint matroid metszet pakolási probléma

Tekintsünk a $D = (V, A)$ gráf, minden $e = uv$ élére egy $T(e)$ és egy $H(e)$ halmazt úgy, hogy $|T(e)| = 1$ és $|H(e)| = k$, és az összes kiválasztott halmaz mind páronként diszjunkt. Legyen $L(v) = \{H(uv)|uv \in A\} \cup \{T(vu)|vu \in A\}$, továbbá legyen $L(X) = \cup_{v \in X} L(v)$, és legyen $I(X) = \cup\{T(u) \cup H(v)|X \text{ feszíti } uv\text{-t}\}$. Most definiálunk egy p keresztező szupermoduláris függvényt az $S = L(V)$ alaphalmazon. Legyen $p(\emptyset) = 0$, $p(L(V)) = i(V) = |A|$ és minden $X \subset V$ valódi részhalmazra, amire $\varrho(X) = 0$, legyen $p(L(X)) = i(X)+1$, mindenütt másutt $-\infty$. Az S alaphalmazon a következő két matroidot definiáljuk. Legyen M_1 a p keresztező szupermoduláris függvény által meghatározott matorid, M_2 pedig az partíciós matroid, ahol a partíció részek $T(e) \cup H(e)$ alakúak és rajtuk a korlát 1.

6.1.1. Lemma (Frank, Tardos [10])**.** *Pontosan akkor létezik M_1-nek és M_2-nek k diszjunkt közös bázisa, ha D-ben létezik k diszjunkt kötés.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy B közös bázist. Legyen C azon e élek halmaza, amire $T(e) \subset B$. Azt állítjuk, hogy ekkor C egy kötés. Valóban, tekintsünk egy $X \subset V$ valódi részhalmazt, amire $\varrho(X) = 0$, ekkor $L(X) = I(X) \cup \cup_{e \in F} T(e)$, ahol F az X-ből kilépő élek halmaza. Mivel B bázis M_2-ben, ezért $|I(X) \cap B| = i(X)$. Továbbá $|\left(\cup_{e \in F} T(e)\right) \cap B| = |C \cap F|$. De $|B \cup L(X)| \geq p(L(X)) = i(X) + 1$, mert B bázis M_1-ben, ezekből $|C \cap F| \geq 1$ következik, azaz C valóban kötés.

Legyen most C egy kötés, legyen B olyan, hogy $|B \cap T(e)| = 1$ és $|B \cap H(e)| = 0$, ha $e \in C$, és $|B \cap T(e)| = 0$ és $|B \cap H(e)| = 1$, ha $e \notin C$. Ekkor a fentiekhez hasonlóan B egy közös bázisa lesz M_1, M_2-nek. Innét könnyen adódik az állítás. $\square$

Egy kicsit eltérő módon is megfogalmazható a Woodall-sejtés matroid metszet pakolási problémaként, a (tartalmazásra nézve) minimális kötések segítségével.

6.1.2. Lemma (Frank, [17] 946. oldal)**.** *Legyen $D = (V, A)$ egy elvágó él nélküli irányított gráf. Ha C egy tartalmazásra nézve minimális kötés, akkor C éleinek irányítását megfordítva egy erősen összefüggő gráfot kapunk.*

Bizonyítás. Legyen C minimális kötés. Tegyük föl indirekte, hogy a C éleinek megfordításával keletkező D' gráf, nem erősen összefüggő. Ekkor létezik egy $X \subset V$ valódi részhalmaz, amire $\delta_{D'}(X) = 0$, azaz az összes X-ből kilépő él benne van C-ben, a belépő élek közül azonban egyik sem, amiből $\varrho_C(X) = 0$. Válasszunk egy tartalmazásra nézve minimális ilyen X-et. Legyenek $e_1, e_2, .., e_m$ az X-ből kilépő élek, amik tehát, mind C-ben vannak. (Mivel C kötés $m \geq 1$.) Mivel C minimális kötés, ezért minden e_i-re létezik egy Y_i halmaz, amire $\delta_D(Y_i) = 0$ és e_i az egyetlen C-beli belépő él, amiből persze $\varrho_C(Y_i) = 1$ és $\delta_{D'}(Y_i) = 1$. Mivel:

$$\delta_{D'}(Y_i) + \delta_{D'}(Y_i) = \delta_{D'}(X \cap Y_i) + \delta_{D'}(X \cup Y_i) + d_{D'}(Y_i, X)$$

$$\varrho_C(Y_i) + \varrho_C(Y_i) = \varrho_C(X \cap Y_i) + \varrho_C(X \cup Y_i) + d_C(Y_i, X)$$

mivel $d_{D'}(Y_i, X), d_C(Y_i, X) \geq 1$ az e_i él miatt, ezért $\delta_{D'}(X \cap Y_i) = \delta_{D'}(X \cup Y_i) = \varrho_C(X \cap Y_i) = \varrho_C(X \cup Y_i) = 0$ és $d_{D'}(Y_i, X) = d_C(Y_i, X) = 1$. Mivel e_i töve benne van X-ben, de Y_i-ban nincsen, $Y_i \cap X$ egy X-nél kisebb halmaz, amire $\delta_{D'}(Y_i \cap X) = 0$, de X választása miatt ez csak úgy lehetséges, ha $Y_i \cap X = \emptyset$. Vegyük észre, hogy Y_i és Y_j diszjunkt $i \neq j$ esetén, hiszen $\delta(Y_i \cap Y_j) = 0$, és $\varrho_C(Y_i \cap Y_j) \leq \varrho_C(Y_i) + \varrho_C(Y_j) - \varrho_C(Y_i \cup Y_j) \leq 1 + 1 - 2$, hiszen e_i és e_j is belép $Y_i \cap Y_j$-be. Tekintsük Y_1-et, mivel D-ben nincs elvágó él, létezik e_1-en kívül még egy él, ami belép Y_1-be, ez nem jöhet X-ből, mert $d_D(Y_1, X) = 1$, se Y_i-ből, vagyis csak $Z = V - (X \cup Y_1 \cup \ldots \cup Y_m)$-ből jöhet, ami így nem üres. Könnyen látszik, hogy Z-be nem léphet be él, és egyik Z-ből kilépő él sem lehet benne C-ben, mert Y_i-be csak e_i lép bele C-ből, illetve X-be nem lépnek C-beli élek. □

Definiáljuk a p' keresztező szupermoduláris függvényt a következő módon: Legyen $p'(\emptyset) = 0$, $p'(L(V)) = i(V) = |A|$ és minden $X \subset V$ valódi részhalmazra legyen $p'(L(X)) = i(X) + 1$, mindenütt másutt $-\infty$. Legyen M_1' a p' keresztező szupermoduláris függvény által meghatározott matroid.

A fentiekhez hasonlóan adódik:

6.1.3. Lemma. *Pontosan akkor létezik M_1'-nek és M_2-nek $k \geq 2$ diszjunkt közös bázisa, ha D-ben létezik k diszjunkt kötés.*

6.2. Gráfok egyetlen forrással

Abban az esetben, amikor D-ben csak egy forrás van, a Woodall-sejtés könnyen igazolható. (Ugyan úgy, ha egy nyelő van csak.)

6.2.1. Tétel (Frank [8]). *Legyen $D = (V, A)$ egy aciklikus gráf egyetlen s forrással, ekkor ha minden egyirányú vágás legalább k élű, akkor létezik k éldiszjunkt kötés.*

Bizonyítás. Találnunk kell éleknek $F_1, F_2, ..., F_k$ diszjunkt halmazát úgy, hogy minden olyan $X \subset V$ valódi részhalmazba, amire $\delta(X) = 0$, minden F_i belép. Legyen D' az a gráf, amit úgy kapunk D-ből, hogy D-hez hozzávesszük D összes élenek megfordítottját k példányban. Ekkor könnyen látható, hogy minden halmazba belép D'-nek legalább k éle. Azaz az Edmonds fenyő-tétel szerint létezik k éldiszjunkt s gyökerű $B_1, B_2, .., B_k$ feszítőfenyő. Legyen $F_i = B_i \cap A$. Ha megmutatjuk, hogy F_i kötés, akkor készen vagyunk. Tekintsünk egy $X \subset V$ valódi részhalmazt, amire $\delta(X) = 0$, mivel s az egyetlen forrás, $s \notin X$. De ekkor X-be belép a B_i fenyő. De mivel $\delta(X) = 0$, ezért a B_i által használt X-be belépő élnek muszáj D eredeti élének lennie, és így készen vagyunk. □

Később egy erősebb tételt is belátunk (6.7.1 tétel).

6.3. A $k = 2$ eset

6.3.1. Tétel (folklór[4]). *Ha egy $D = (V, A)$ gráfban minden egyirányú vágás legalább 2 élt tartalmaz, akkor létezik 2 éldiszjunkt kötés.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy ekkor a D-nek megfelelő G irányítatlan gráf 2-élösszefüggő. Ekkor létezik G-nek egy erősen összefüggő D' irányítása. legyen A_1 azon élek halmaza, amik D-ben és D'-ben ugyanarra vannak irányítva, A_2 azon élek halmaza, amik fordítva állnak. Könnyű látni, hogy ekkor A_1 és A_2 is kötés. □

Ennek az ötletnek a kiterjesztésével kapjuk a következő állítást.

6.3.2. Tétel. *Ha egy $D = (V, A)$ gráfban minden egyirányú vágás legalább k élt tartalmaz, akkor az élek felbonthatóak egy kötésre és egy $k-1$-kötésre.*

Bizonyítás. Legyen G megint a D-nek megfelelő irányítatlan gráf. Definiáljuk a p_1 keresztező szupermoduláris függvényt a következőképpen: $p_1(\emptyset) = 0$, $p_1(V) = i_G(V) = |A|$ és $p_1(X) = i_G(X) + 1$ minden $X \subset V$ valódi részhalmazra. Továbbá definiáljuk a p_2 keresztező szupermoduláris függvényt a következőképpen: $p_2(\emptyset) = 0$,

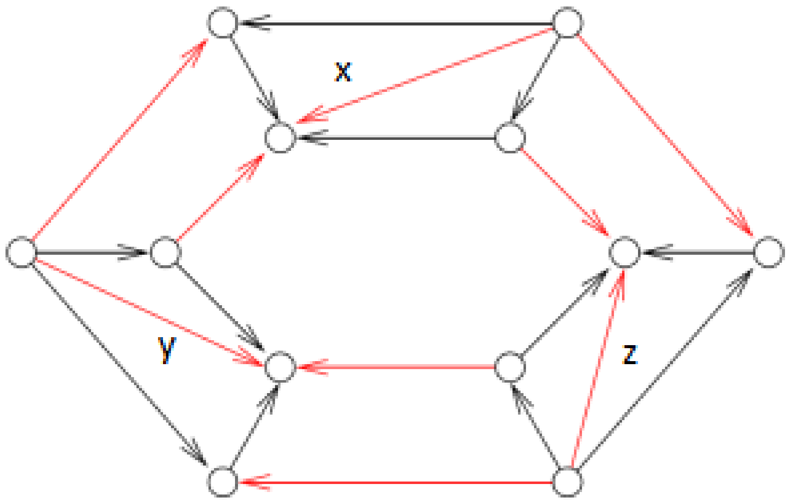
[4] Schrijver [17] Frankot jelöli forrásnak, az openproblemgarden.org Seymourt és M. DeVost

$p_2(V) = i_G(V) = |A|$, $p_2(X) = i_G(X) + k - 1$ minden $X \subset V$ valódi részhalmazra, amire $\delta(X) = 0$, és $p_2(X) = -\infty$ mindenütt máshol. Tekintsük a p_1 illetve p_2 által meghatározott bázis poliéder M metszetét, ez ha nem üres, akkor egész poliéder. Megmutatjuk, hogy nem üres. Legyen $z(v) = \frac{k-1}{k}\varrho(v) + \frac{1}{k}\delta(v)$. Azt állítjuk, hogy $z \in M$. Vegyük észre, hogy $z(X) = i_G(X) + \frac{k-1}{k}\varrho(X) + \frac{1}{k}\delta(X)$. Ebből $p_1(V) = p_2(V) = z(V)$. Továbbá $z(X) \geq p_1(X) = i_G(X) + 1$ minden X valódi részhalmazra, mert ha $\varrho(X) \geq 1$ és $\varrho(X) \geq 1$, akkor igaz, különben $\varrho(X) \geq k$ vagy $\delta(X) \geq k$ teljesül, így megint csak készen vagyunk. Ha X olyan valódi részhalmaz, amire $\delta(X) = 0$, akkor $\varrho(X) \geq k$, amiből $z(X) \geq p_2(X) = i_G(X) + k - 1$. Vagyis M nem üres, így létezik egy m egész pontja. Mivel m része a p_1 által meghatározott bázis poliédernek létezik G-nek egy olyan D' erősen összefüggő irányítása, aminek éppen m a befok sorozata. Legyen A_1 azon élek halmaza, amik D-ben és D'-ben ugyanúgy állnak, A_2 azon élek halmaz, amik fordítva, ekkor A_1 egy $k-1$ kötés, A_2 pedig egy kötés. Hiszen tekintsünk egy X valódi részhalmazt, amire $\delta(X) = 0$, ekkor mivel D' erősen összefüggő létezik neki egy éle, ami kilép X-ből, de ez az él D-ben egy X-be belépő él volt, vagyis eleme A_2-nek. Mivel m része a p_2 által meghatározott bázis poliédernek D'-nek legalább $k-1$ éle belép X-be, de ezek az élek mind A_1-ben kellenek, hogy legyenek, vagyis A_1 egy $k-1$ kötés, A_2 pedig egy kötés. □

Kézenfekvő volna bebizonyítani a fenti tétel következő általánosítását, amiből azonnal következne a Woodall-sejtés:

6.3.3. Sejtés. *Egy k-kötés mindig előáll, mint egy $k-1$-kötés és egy kötés uniója.*

Ez a sejtés azonban már $k = 2$ esetben sem igaz, még síkgráfokra sem, mint ahogy azt a következő Schrijvertől [19] származó ellenpélda mutatja:



Könnyű látni, hogy itt a pirossal jelölt élek egy 2-kötést alkotnak. Megmutatjuk, hogy ez a 2-kötés nem bontható fel két kötés uniójára. Tegyük föl, hogy mégis felbomlik egy C_1 és C_2 kötésre, ekkor mind három piros irányítatlan úton felváltva kell jönniük a C_1, illetve C_2-beli éleknek, hiszen ezen utak belső pontjai mind források vagy nyelők, amikre csak két piros él illeszkedik. Továbbá a külső 6 pont és belső 6 pont egy egyirányú vágást határoz meg, azaz az ábrán x, y, z-vel jelölt élek közül 2 az egyik vágásban kell, hogy legyen a harmadik pedig a másikban. Szimmetria okokból feltehető, hogy $y, z \in C_1$ és $x \in C_2$, de ekkor a baloldali 6 pontot a jobboldali 6 ponttól elválasztó vágásban csupa C_2-beli él volna, ami nem lehet.

M. Chudnovsky, K. Edwards, R. Kim, A. Scott, P. Seymour [5] eredménye szerint viszont egy irányított síkgráfban bármely *összefüggő* 2-kötés felbomlik két kötés uniójára.

6.4. Irányított fák tranzitív lezártjai

6.4.1. Tétel (Schrijver [17] 967. oldal). *Legyen $T = (V, F)$ egy irányított fa, $D = (V, A)$ a tranzitív lezártja, azaz $uv \in A$ akkor és csak akkor, ha T-ben létezik irányított út u-ból v-be. Legyen C a D éleinek egy multihalmaza, ami minden egyirányú vágásból legalább k élt tartalmaz, ekkor C felbontható k diszjunkt kötésre.*

Bizonyítás. Tekintsük T egy e élét és a hozzátartozó alapvágást T-ben, ekkor ez egy egyirányú vágás lesz D-ben, ennek a vágásnak az éleit jelöljük A_e-vel. Azt állítjuk, hogy az egy irányú vágásokat, mint élrészhalmazokat tekintve éppen ezek lesznek a tartalmazásra nézve minimális egy irányú vágásai D-nek. Hiszen legyen $A_0 \subset A$ egy egyirányú vágás D-ben, ami úgy áll, elő, mint egy X 0 befokú halmazból kilépő élek halmaza. Ekkor létezik T-nek egy $e = uv$ éle, ami kilép X-ből, azaz $u \in X$ és $v \notin X$. Azt szeretnénk belátni, hogy $A_e \subset A_0$. Vagyis legyen x, y két csúcs, ami között megy a fában egy olyan p irányított út, ami tartalmazza e-t. De ekkor mivel X befoka 0, a p-nek minden u megelőző csúcsa X-ben van, és minden v utáni csúcs nincs X-ben. Azaz $x \in X$ és $y \notin X$, amiből az xy él része A_0-nak és ezt akartuk látni. Ebből következik, hogy éleknek egy részhalmaza pontosan akkor lesz kötés, ha minden A_e alapvágásból tartalmaz legalább egy élt. Tekintsük a T irányított fához és a C-hez tartozó hálózati mátrixot, ennek sorai tehát T éleinek felelnek meg, oszlopai pedig a C uv éleinek, mivel u és v között a fában mindig egy irányított út megy, ezért az uv élhez tartozó oszlopban minden elem 0 vagy 1, továbbá éppen ott van azon e élek sorában szerepel 1, amikre $uv \in A_e$. Mindezekből a C éleinek egy részhalmaza pontosan akkor lesz kötés, ha a megfelelő oszlopok összege mindenütt legalább 1. A lemma feltételéből következi, hogy az összes oszlop összege minden koordinátában legalább k, de a hálózati mátrixok TU-k, így egyenletesen színezhetőek, amiből létezik az oszlopoknak olyan k részre való partíciója, hogy mindegyik partíció részben az oszlopok összege mindenütt legalább 1, azaz C felbomlik k db kötésre. $\square$

6.5. k-val osztható gráfok

Legyen $\Psi(X) = \varrho(X) - \delta(X)$. Az így kapott függvény moduláris.

6.5.1. Definíció. *Egy $D = (V, A)$ gráfot k-val oszthatónak nevezünk, ha minden v csúcsra $k|\Psi(v)$.*

6.5.2. Megjegyzés. *Legyen t tetszőleges csúcsa D-nek, ekkor a $k|\Psi(v)$ feltételt elegendő csak $v \in V - t$-re megkövetelni, hiszen $\sum_{v \in V} \Psi(v) = 0$.*

6.5.3. Megjegyzés. *Ha D irányítatlan értelemben összefüggő és k-val osztható, akkor automatikusan teljesül rá, hogy minden egyirányú vágása legalább k élű. Hiszen Ψ modularitásából $k|\Psi(X)$ is igaz, minden X-re. Ha tehát, egy $X \subset V$ valódi részhalmazra, $\delta(X) = 0$, akkor $\varrho(X)$ osztható k-val és pozitív, vagyis legalább k.*

6.5.4. Lemma. *Ha $D = (V, A)$ k-val osztható, akkor létezik k éldiszjunkt kötés D-ben.*

Bizonyítás. Vegyük a D gráf A incidencia mátrixát, ahol a sorok a csúcsoknak az oszlopok az éleknek felelnek meg, ekkor az oszlopok összegének minden koordinátája osztható k-val, mivel A TU, ezért oszlopai egyenletesen színezhetőek k színnel, ami jelen esetben azt jelenti, hogy az adott színű oszlopok összege minden szín osztályra ugyanaz a vektor. Ez a gráf nyelvén azt jelenti, hogy az élek partícionálhatóak k részre $A = A_1 \cup ... \cup A_k$, úgy hogy $\Psi_{A_1}(v) = ... = \Psi_{A_k}(v)$.

Azt állítjuk, hogy A_i kötés. Legyen $X \subset V$ valódi részhalmaz, amire $\delta(X) = 0$, ekkor $\Psi(X) = \varrho(X) > 0$. De ekkor $\Psi_{A_1}(X) = \cdots = \Psi_{A_k}(X) = \frac{1}{k}\Psi(X) > 0$, vagyis $\varrho_{A_i}(X) = \Psi_{A_i}(X) > 0$, vagyis A_i egy kötés. $\square$

6.6. (q-1,1)-partíció összefüggő gráfok

Szükségünk lesz a következő additív kombinatorikai lemmára:

6.6.1. Lemma (Olson [16]). *Legyen q egy prímhatvány, $A = (a_{ij})$ egy $n \times m$-es mátrix, melynek elemei egészek. Ha $m \geq (q-1)n + 1$, akkor létezik az oszlopoknak egy nem üres részhalmaz úgy, hogy ezek összegének minden koordinátája osztható q-val.*

6.6.2. Megjegyzés. *Legyen A az a mátrix, amit az egység mátrixból kapunk úgy, hogy minden oszlopát $q-1$-szer vesszük. Ez a példa mutatja, hogy a tétel éles, olyan értelemben, hogy a $(q-1)n + 1$ korlát nem csökkenthető tovább.*

Valójában Olson ennél egy kicsit általánosabb tételt látott be, ennek bizonyítása következik most. Ha q egy p prím, akkor az állítás a kombinatorikus Nullstellensatzból is megkapható, az érdekesség kedvéért később ezt a bizonyítást is közöljük.

6.6.3. Lemma (Olson [16]). *Legyen p prím, $e_1, e_2, ..., e_d$ pozitív egészek, tekintsük a $G = Z_{p^{e_1}} \times Z_{p^{e_2}} \times \cdots \times Z_{p^{e_d}}$ Ábel-csoportot. Legyen $m = 1 + \sum_{i=1}^{d}(p^{e_i} - 1)$. Ekkor a G csoport elemeinek egy $g_1, g_2, ..., g_m$ sorozatából mindig kiválasztható néhány, hogy a szorzatuk 1. (Ebben a lemmában a multiplikatív jelölés lesz kényelmes.)*

Bizonyítás. Legyen $x_1, x_2, ..., x_d$ a G egy bázisa, ahol x_i rendje p^{e_i}. Tekinstük az $\mathbb{F}_pG$ csoport algebrát, ahol $\mathbb{F}_p$ a p elemű test. Azt állítjuk, hogy a csoport algebrában mindig teljesül, hogy a

$$h = (1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_d)$$

kifejezés értéke 0. Ebből nyomban következik az állítás, hiszen ha h-ban az 1 együtthatója 0, akkor ez azt jelenti, hogy tekintve a $g_1, g_2, ..., g_m$ sorozat azon részsorozatait, amikben az elemek szorzata 1, akkor ezen részsorozatok közül a páros hosszúak száma kongruens a páratlan hosszúak számával moduló p. De ekkor mivel az üres részsoratra a szorzat 1, kell lennie még egy ilyen részsorozatnak.

Most tehát, már csak az van hátra, hogy belássuk, hogy $h = 0$. Írjuk föl g_i-t néhány x_j csoport elem szorzataként. Ismételten alkalmazva az $1 - uv = (1 - u) + u(1 - v)$ azonosságot, $1 - g_i$ a $\sum_{j=1}^{d} c(i,j)(1 - x_j)$ alakban írható alkalmas $\mathbb{F}_pG$-beli $c(i,j)$ együtthatókkal. Ha ezt h minden $(1 - g_i)$ tényezőjére megtesszük és kiszorzunk, akkor azt kapjuk, hogy h a következő alakú tagok összege: $cx_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_d^{k_d}$, ahol $\sum_{i=1}^{d} k_i = m$, amiből létezik i, amire $k_i \geq p^{e_i}$, de $(1 - x_i)^{p^{e_i}} = 1 - x_i^{p_i^e} = 0$, vagyis h kifejtésében az összes tag 0, vagyis $h = 0$. □

Ahogy ígértük, most mutatunk egy másik bizonyítást abban az esetben, ha q egy p prím. Ehhez szükség lesz a kombinatorikus Nullstellensatzra:

6.6.4. Lemma (Alon [2]). *Legyen $r(x_1, x_2, ..., x_m)$ egy $\mathbb{F}$ test fölötti többváltozós polinom. Legyen $x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_m^{k_m}$ egy nem 0 együtthatójú monomja r-nek, aminek összfoka maximális. Továbbá $S_1, S_2, ..., S_m \subset F$, amire $|S_i| > k_i$, ekkor r nem tűnhet el az $S_1 \times S_2 \times ... \times S_m$ halmazon.*

Bizonyítás. (6.6.1 lemma $q = p$ prím esetben) Legyen $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$. Tekintsük az A mátrixot modulo p, azaz mint egy $\mathbb{F}$ feletti mátrixot. Legyen

$$r(x_1, x_2, ..., x_m) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j\right)^{p-1}\right) - \prod_{j=1}^{m}(1 - x_j)$$

és $S_1 = S_2 = ... = S_m = \{0,1\}$. Az első összeadandóban a legnagyobb összfokszám legfeljebb $(q - 1)n$, vagyis ha $m \geq (p - 1)n + 1$, akkor a második összeadandóban keletkező $x_1 x_2 ... x_m$ monom maximális összfokú, vagyis létezik $x \in \{0,1\}^m$ úgy, hogy r nem tűnik el x-en. Látható, hogy $x \neq 0$. Ha viszont $x \neq 0$, akkor a második összeadandó r-ben 0, vagyis az első összeadandó nem lehet 0, vagyis a szorzat egyik tényezője sem 0, de ekkor azt állítjuk, hogy $\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right) = 0$ minden i-re, és valóban, ha $\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right) \neq 0$, akkor a kis-Fermat tételből: $\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right)^{p-1} = 1$, de ekkor $1 - \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right)^{p-1} = 0$, ami nem lehet. De ha $\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right) = 0$ minden i-re az éppen azt jelenti, hogy A azon j indexű oszlopainak összege, ahol $x_j = 1$ éppen a 0 vektor és ezt akartuk belátni. $\square$

6.6.5. Lemma. *Legyen $D = (V, A)$ egy irányított gráf, q prímhatvány, ha D-nek legalább $(q-1)(|V|-1)+1$ éle van, akkor létezik nem üres k-val osztható részgráfja.*

Bizonyítás. Legyen A az a mátrix, amit a gráf incidencia mátrixából kapunk egy tetszőles $t \in V$ csúcshoz tartozó sor elhagyásával, erre a 6.6.1 lemma alkalmazható, tekintsük a kiválasztott oszlopokhoz tartozó élekből álló részgráfot, ekkor 6.5.2 megjegyzés szerint egy k-val osztható részgráfot kapunk. $\square$

6.6.6. Definíció. *Egy G irányítatlan gráfot (k, ℓ)-partíció összefüggőnek nevezünk, ha a csúcsoknak bármely $X_1, X_2, ..., X_t$ partíciójára, a partíció részek között menő élek száma legalább $k(t-1)+\ell$.*

Szükségünk lesz a következő lemmára:

6.6.7. Lemma. *Legyen $D = (V, A)$ egy irányított gráf, $D_0 = (V_0, A_0)$ egy részgráfja, C_0 egy kötés D_0-ba. Legyen D' az a gráf, amit D-ből V_0 összehúzásával kapunk, legyen C' ennek egy kötése. Ekkor $C = C_0 \cup C$ a D egy kötése.*

6.6.8. Tétel. *Legyen q prímhatvány. $D = (V, A)$ egy irányított gráf úgy, hogy a megfelelő irányítatlan gráf $(q-1,1)$-partíció-összefüggő, akkor létezik q éldiszjunkt kötés.*

6.6.9. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy ilyenkor a megfelelő irányítatlan gráf q-élösszefüggő, vagyis az ilyen gráfokban mindig teljesül a Woodall-sejtés feltétele.*

Bizonyítás. A csúcs szám szerinti indukcióval bizonyítunk. Egy csúcsú gráfra nyilvánvaló. A $(q-1,1)$-partíció összefüggőség definícióját a csupa egy elemű partícióra alkalmazva kapjuk, hogy a gráfnak legalább $(|V|-1)(q-1)+1$ éle van. Vagyis a fenti lemma szerint létezik q-val osztható részgráfja, legyen $D_0 = (V_0, A_0)$ az egyik (irányítatlan értelemben) összefüggő komponense. Ekkor D_0-ban létezik q éldiszjunkt kötés. Húzzuk össze V_0-t egyetlen ponttá, így kapjuk D' gráfot. Könnyű látni, hogy D' is $(q-1,1)$-összefüggő lesz, amiből indukcióval D'-ben is van q éldiszjunkt kötés, ezeket összepárosítva a D_0-ban megtalált kötésekkel kapunk q diszjunkt kötést a 6.6.7 lemma szerint. $\square$

6.7. Forrás-nyelő összefüggő gráfok

6.7.1. Tétel (Schrijver [18])**.** *Legyen $D = (V, A)$ egy olyan aciklikus gráf, amiben bármely forrásból elérhető bármely nyelő. Ekkor bármely $C \subset A$ k-kötés felbomlik k darab kötés uniójára.*

Bizonyítás. Tegyük föl indirekte, hogy az állítás nem igaz. Vegyünk egy olyan ellenpéldát, ahol $|V| + |C|$ minimális. Feltehető, hogyha u és v között vezet irányított él, akkor uv éle a gráfnak, mert ekkor az uv él hozzávétele nem változtatja meg a 0 kifokú halmazok halmazát. Vagyis speciálisan minden forrásból megy minden nyelőbe él.

(1) Legyen $Z \subset V$ olyan, hogy $\delta(Z) = 0$ és $1 < |Z| < |V| - 1$. Ekkor $\varrho_C(Z) > > k$. Tegyük föl indirekte, hogy nem így van. Ekkor mivel C k-kötés $\varrho_C(Z) = k$. Húzzuk össze Z-t egyetlen egy z ponttá, az így kapott $D' = (V', A')$ gráf, illetve C' élhalmazra továbbra is igaz, hogy D' aciklikus, és minden forrásból elérhető minden nyelő, és C' egy k-kötés, továbbá igaz rá a tétel állítása, mert $|V'| + |C'|$ kisebb, mint $|V'| + |C'|$. Vagyis C' felbomlik k darab $C'_1, C'_2, ..., C'_k$ kötésre. Nyilván a z-ből kiinduló k C'-beli élnek mind különböző kötésbe kell kerülni. Hasonló húzzuk össze $V - Z$-t, ekkor a keletkező D'' gráfban a C'' felbomlik k darab $C_1'', C_2'', ..., C_k''$ diszjunkt kötésre. Ekkor az indexeket jól megválasztva feltehető, hogy C'_i és C_i'' ugyan azon Z-be belépő C-beli élnek megfelelő élt használja. Ekkor tehát $C'_1 \cup C_1'', ..., C'_k \cup C_k''$ C-nek egy partícióját adja D-ben. Most belátjuk, hogy $C'_i \cup C_i''$ egy kötés, legyen X valódi részhalmaz, amelyre $\delta(X) = 0$. Első eset: $X \cup Z = V$ vagy $X \cap Z =$, ekkor $\varrho_{C_i''}(X) \geq 1$, illetve $\varrho_{C'_i}(X) \geq 1$, mivel C_i'' és C'_i kötések a megfelelő összehúzott gráfban. Második eset: $X \cap Z$ és $X \cup Z$ is valódi részhalmaza Z-nek. Ekkor $\delta(X \cup \cup Z) = 0$ és $\delta(X \cap Z) = 0$, és ezért $\varrho_{C'_i}(X \cup Z) \geq 1$ és $\varrho_{C_i''}(X \cap Z) \geq 1$, mert C'_i és C_i'' kötés a megfelelő összehúzott gráfban. Ekkor a ϱ_{C_i} szubmodularitásából $\varrho_C(X) \geq \varrho_C(X \cap Z) + \varrho_C(X \cup Z) - \varrho_C(Z) \geq 1 + 1 - 1 = 1$. Vagyis ellentmondást kaptunk.

(2) Minden $uv \in C$ élre, vagy u forrás, vagy v nyelő. Először is létezik egy Z halmaz, amire $\delta(Z) = 0$, $\varrho_C(Z) = k$ és uv belép Z-be, mert ha nem volna ilyen, akkor uv kihagyható volna C-ből és egy kisebb ellenpéldát kapnánk. De az (1) miatt ekkor $|Z| = 1$ vagy $|Z| = |V| - 1$, de ekkor v nyelő vagy z forrás.

(3) Legyen $uv, u'v' \in C$ továbbá tegyük föl, hogy u'-ből elérhető v, azaz $u'v$ éle a gráfnak(a fenti megjegyzés értelmében). Ekkor vagy v nyelő, vagy u' forrás. Tegyük föl, hogy nem, ekkor (2) miatt u forrás és v' nyelő. De ekkor mivel forrás-nyelő összefüggő a gráfunk uv' éle a gráfnak. Mivel v' nyelő és feltettük, hogy v nem nyelő, ezért $v \neq v'$, hasonlóan $u \neq u'$, ezért az uv és $u'v'$ él különböző. Legyen $C' = C - uv - u'v' + uv'$. Belátjuk, hogy C k-kötés. Tegyük fel, hogy létezik $X \subset V$ valódi részhalmaz, melyre $\delta(X) = 0$ és $\varrho_{C'}(X) < k$. De $\varrho_{C'}(X) < \varrho_C(X)$ eleve csak úgy lehetséges, ha uv vagy $u'v'$ belép X-be. Első eset: uv és $u'v'$ is belép X-be,

ekkor mivel $u \neq u'$ és $v \neq v'$, $1 < |X| < |V| - 1$, amiből $\varrho(C) \geq k + 1$ az (1) miatt. Továbbá uv' is belép X-be, amiből $\varrho_{C'}(X) = \varrho_C(X) - 2 + 1 \geq k$. Második eset: Csak egy lép be uv és $u'v'$ közül X-be. Ekkor ha $1 < |X| < |V| - 1$ készen is vagyunk, hiszen $\varrho(X) \geq k + 1$ és legfeljebb 1-gyel csökkenhet. Tegyük föl, hogy csak uv be lép X-be, de $u'v'$ nem és $|X| = 1$ vagy $|V| - 1$. Ekkor $|X| = 1$ nem lehetséges, mert ekkor $X = \{v\}$ és ekkor v nyelő volna, de feltettük, hogy nem az. Ha pedig $|X| = |V| - 1$. Akkor $V - X = \{u\}$, de ekkor uv' belép X-be, vagyis $\varrho_{C'}(X) = \varrho_C(X) - 1 + 1 \geq k$. Hasonlóan járunk el a másik esetben. Tehát, C' egy kötés, vagyis mivel $|C'| + |V| < |C| + |V|$, ezért C felbomlik k diszjunkt $C_1, C_2, ..., C_k$ kötés uniójára. Legyen C_1 az a kötés, ami tartalmazza uv'-t. Legyen $C_1' = C_1 - uv' + uv + u'v'$. Ekkor $C_1', C_2, ..., C_k$ C egy partícióját adja, már csak azt kell belátni, hogy C_1' is kötés. Az egyetlen probléma az lehet, ha van egy olyan X, hogy $\delta(X) = 0$, uv' belép X-be, de semelyik másik C_1-beli él nem, tovább uv és $u'v'$ sem. De ekkor $u' \in X$ és $v \notin X$ következne, de ekkor $u'v$ kilépne X-ből, ami nem lehet.

(4) V partícionálható két R és S részre úgy, hogy $\delta(S) = 0$, az összes forrás R-ben van az összes nyelő S-ben van. Továbbá, ha egy C-beli él kilép R-ből az egy forrás és egy nyelő között megy. Bizonyítás: Legyen C' azon C-beli élek halmaza, amik nem egy forrás és egy nyelő között mennek. Tekintsük azt a D' gráfot, amit úgy kapunk D-ből, hogy a C'-beli élek megfordítottjait hozzárakjuk a gráfhoz. Legyen R azon pontok halmaza amikből D'-ben elérhető valamelyik forrás. (A továbbiak forráson és nyelőn D forrását és nyelőjét értjük.) S pedig legyen $V - R$. Ekkor nyilvánvaló, hogy $\delta(S) = 0$ és minden forrás benne van R-ben, továbbá minden R-ből kilépő C-beli e él forrás és nyelő között megy, hiszen ha nem így lenne, akkor $e \in C'$ volna, de ekkor e megfordítottja belépne R-be D'-ben, de R a D'-ben egy 0 befokú halmaz. Egyedül azt kell belátnunk, hogy egy nyelő sincsen R-ben. Tegyük föl indirekte, hogy volna egy nyelő R-ben, azaz egy t nyelőből egy s forrásba menne irányított út D'. Vegyük a legrövidebb ilyen p utat. Nyilván p nem kezdődhet és végződhet D-beli éllel, vagyis p első és utolsó éle is egy C'-beli él megfordítottja. Továbbá az a két él nem eshet egybe, mert C'-ben nincsenek források és nyelők közötti élek. Tehát, vehetünk két egy uv és $u'v'$ C'-beli élet, hogy a p úton előbb következik a $v'u'$ él, aztán a vu, de köztük csupa D-beli élek vannak csak. Ekkor u'-ból elérhető D-ben a v. De ekkor vagy u' forrás vagy v nyelő (3) miatt, de ekkor p-nek a v és s közötti szakasza, vagy az t és u' közti szakasza egy rövidebb út lenne egy forrás és egy nyelő között, ami ellentmondás.

(5) Legyen D'' az a gráf, a V csúcshalmazon, ami C éleiből áll, továbbá D minden uv élere behúzzuk a vu élet k példányban. Könnyű látni, hogy a 2.2.3 tétel feltételei teljesülnek D''-re, vagyis létezik k diszjunkt $B_1, B_2, ..., B_k$ $R - S$ bifenyves. Legyen $C_i = B_i \cap C$. Ekkor ha belátjuk, hogy C_i kötés készen vagyunk. Vegyünk tehát egy $X \subset V$ valódi részhalmazt, amire $\delta(X) = 0$. Első eset: Ha $X \subset S$ vagy $S \subset X$, akkor B_i egy e éle belép X-be, de mivel X-ből nem lép ki él D-ben, ezért e csak C-beli él lehet. Második eset: Minden más. Mivel D forrás-nyelő összefüggő egy ilyen X

vagy nem tartalmaz forrást, vagy az összes nyelőt tartalmazza. Nézzük azt az esetet, amikor nem tartalmaz forrást. Tekintsük $X \cap S$-et, mivel $\delta(X) = 0$ X tartalmaz nyelőt, az összes nyelő eleme S-nek, vagyis ez egy nem üres halmaz, továbbá nyilván nem az egész V, és $\delta(S) = 0$ miatt $\delta(S \cap X) = 0$, de ekkor az első eset miatt $S \cap X$-be belép egy C_i-beli uv él. Azt állítjuk, hogy ez X-be is belép. Mert tegyük föl, hogy nem. Ekkor $u \in R \cap X$ lenne. De ekkor uv egy S-be belépő él volna, vagyis u forrás, de X nem tartalmaz forrást, ami ellentmondás. A másik eset az, ha X minden nyelőt tartalmaz, ekkor $S \cup X$ megint csak valódi részhalmaz, mert X nem tartalmazhatja az összes forrást, és $\delta(S \cup X) = 0$, de ekkor $S \cup X$-be belép egy C_i-beli uv él. Ha ez nem lépne be X-be is, akkor $v \in S - X$ lenne, mivel $u \in R$, ezért uv egy $R - S$ él, de ekkor v nyelő, ami ellentmondás, mert X az összes nyelőt tartalmazza. □

Egy aciklikus gráfban nevezzünk egy forrást szuper-forrásnak, ha belőle minden nyelő elérhető, és egy nyelőt szuper-nyelőnek, ha minden forrásból elérhető.

6.7.2. Sejtés (Williams [21]). *Legyen $D = (V, A)$ egy olyan aciklikus gráf, amiben létezik szuper-forrás és szuper-nyelő is. Ekkor bármely $C \subset A$ k-kötés felbomlik k darab kötés uniójára.*

7. Matroidok ciklikus sorrendje

7.1. Egzakt partíció probléma

Ebben az alfejezetben a következő problémát vizsgáljuk. Adott egy M matroid az S alaphalmazon úgy, hogy S két bázisra partícionálható. Továbbá adott egy $P \subset S$ részhalmaz, aminek elemeit a továbbiakban pirosnak fogjuk nevezni. Adott továbbá egy $0 \leq k \leq |P|$ egész. Döntsük el, hogy létezik-e S-nek egy olyan $S = B_1 \cup B_2$ partíciója két bázisra, hogy B_1 pontosan k darab piros elemet tartalmaz.

Könnyű látni, hogy k-ra létezik jó partíció, akkor $|P| - k$-ra is, egyszerűen meg kell cserélni B_1-et és B_2-t. A $k = 0$, illetve $k = |P|$ eset kezelhető pl. a súlyozott matroid metszet algoritmussal.

7.1.1. Sejtés. *A $|P| = 2k$ esetben mindig létezik jó partíció.*

Ez használva a fenti észrevételt, azonnal következne az alábbi erősebb sejtésből:

7.1.2. Sejtés. *Azon k számok, amire van jó partíció, az egészeknek egy intervallumát alkotják.*

Ez az utóbbi sejtés talán nem igaz, de nincs rá ellenpéldánk.

A következőkben belátjuk, hogy abban az esetben, ha M egy $G = (V, E)$ gráf körmatroidja, akkor a még a 7.1.2 sejtés is igaz. Ehhez a következő lemmára lesz szükségünk.

7.1.3. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ egy n csúcsú gráf, aminek élhalmaza két F_1 és F_2 feszítőfa uniója. Ekkor az éleknek létezik olyan ciklikus sorrendje, hogy bármely $n-1$ a ciklikus sorrendben szomszédos él egy feszítőfát alkot, továbbá F_1 élei egymás után helyezkednek el a ciklikus sorrendben. (Ekkor persze F_2 éleire is igaz lesz ez.)*

Bizonyítás. Az n szerinti indukcióval bizonyítunk. Az $n = 1{,}2$ esetben triviálisan igaz. Legyen most $n > 2$ és tegyük föl, hogy $n-1$-re már tudjuk az állítást. Ekkor G-nek $2(n-1)$ éle van, amiből következik, hogy létezik egy v csúcs, aminek a foka legfeljebb 3, v foka nyilván nem lehet 0 vagy 1, vagyis v foka 2 vagy 3. Tekintsük először azt az esetet, amikor v foka 2, ekkor v-re egy e_1 F_1-beli és egy e_2 F_2-beli él illeszkedik. Tekintsük a $G' = G - v$ gráfot, ez éppen F_1' és F_2' uniója, ahol $F_i' = F_i - e_i$. G' éleinek az indukciós feltevésből adódóan létezik megfelelő ciklikus rendezése, legyen ez $f_1, f_2, ..., f_{2n-4}$, ahol tehát bármely $n-2$ egymást követő él egy feszítőfát alkot, és mondjuk $F_1' = \{f_1, f_2, ..., f_{n-2}\}$. Ekkor könnyű látni, hogy az eredeti gráfban $f_1, f_2, ..., f_{n-2}, e_1, f_{n-1}, ..., f_{2n-4}, e_2$ egy megfelelő ciklikus sorrend lesz. Kicsit nehezebb az az eset, amikor v foka 3. Tegyük föl, hogy v-re két F_1-beli és egy F_2-beli él illeszkedik, a másik eset szimmetrikusan kezelhető. Legyen $e_1' = vx'$ és $e_1'' = vx''$ a két F_1-beli v-re illeszkedő él, e_2 az F_2-beli v-re illeszkedő él.

Legyen $F_1' = F_1 - e_1' - e_2' + x'x''$, és $F_2' = F_2 - e_2$, ekkor a $G' = (G - v) + x'x''$ gráf éppen F_1' és F_2' uniója, indukció szerint van az éleinek jó $f_1, f_2, f_3, ..., f_{2n-4}$ ciklikus sorrendje, ahol $F_1' = \{f_1, f_2, ...f_{n-2}\}$, ekkor $x'x'' = f_k$ valamely $1 \leq k \leq n-2$-re. Tekintsük az F_1-nek az e_2-höz tartozó alapkörét. Ennek e_1' és e_2' közül pontosan az egyik eleme, legyen mondjuk ez e_1'. Ekkor a következő ciklikus sorrend megfelelő lesz: $f_1, f_2, ..., f_{k-1}, e_1', e_2'', f_{k+1}, ..., f_{k+n-3}, e_2, f_{k+n-2}, ..., f_{2n-4}$. Némi eset szétválasztással bizonyítható, hogy ez tényleg jó. □

Most már bizonyíthatjuk a következő tételt:

7.1.4. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, melynek élhalmaza két feszítőfa uniója. A gráf néhány élét pirosra színeztük, legyen ezek halmaza P. Ekkor azon k számok halmaza, amire G felbontható két diszjunkt F_1 és F_2 feszítőfára úgy, hogy F_1 pontosan k élet tartalmaz, egy $[k_{min}, |P| - k_{min}]$ zárt intervalluma az egészeknek. Továbbá egy k-ra polinom időben el tudjuk dönteni, hogy létezik-e rá jó partíció, és ha igen, meg is tudunk adni egyet.*

Bizonyítás. Legyen M a G gráf körmatroidja, M^* a duálisa, legyen a piros élek súlya 1, az összes többi élé pedig 0. Ekkor a minimális súlyú közös bázis súlya megmondja nekünk, hogy mi az a minimális k, amire létezik jó partíció, legyen ez k_{min}. A megfelelő partíció pedig $F_1 \cup F_2$. Ekkor nyilván megfelelő k csak a $[k_{min}, |P| - k_{min}]$ intervallumból kerülhet ki. Most megmutatjuk, hogy ezen intervallum minden elemére létezik egy megfelelő partíció. Tekintsük a 7.1.3 lemma által biztosított ciklikus sorrendet az $F_1 \cup F_2$ partícióra. Ekkor akárhogyan bontjuk ezt a sorrendet két egyenlő ívre mindig egy bázisokra való partíciót kapunk. Vegyük észre, hogy egy ilyen $F_1' \cup F_2'$ partíciót eltolva eggyel a ciklikus sorrend mentén így egy újabb $F_1'' \cup F_2''$ partíciót kapunk, továbbá $||F_1' \cap P| - |F_1'' \cap P|| \leq 1$. Vagyis $F_1 \cup F_2$ partícióból ilyen eltolásokkal megkapható az $F_2 \cup F_1$ partíció úgy, hogy az éppen aktuális F_1' fában a piros élek száma mindig legfeljebb 1-gyel változik, de ebből már következik az állítás. Vegyük észre, hogy ez a bizonyítás, illetve a 7.1.3 lemma bizonyítása is polinomiális algoritmussá alakítható. □

A 7.1.3 lemma eredményének általánosításaként megfogalmazható a következő sejtés:

7.1.5. Sejtés. *Legyen M egy matroid az S alaphalmazon úgy, hogy S két bázisra partícionálható, ekkor létezik S elemeinek egy olyan ciklikus sorrendje, amiben bármely $r(S)$ egymást követő elem egy bázist alkot.*

Vegyük észre, hogy ebből a fenti bizonyítás mintájára következne a 7.1.1 sejtés.

Egy még általánosabb sejtés a következő:

7.1.6. Sejtés. *Legyen M egy matroid az S alaphalmazon úgy, hogy S k bázisra particionálható, ekkor létezik S elemeinek egy olyan ciklikus sorrendje, amiben bármely $r(S)$ egymást követő elem egy bázist alkot.*

Ezek a sejtések mind nyitottak, $k > 2$ esetén még körmatroid esetén is. Eddig csak néhány speciális esetben ismert bizonyítás. (l. J. E. Bonin [3])

A következő alfejezetben J. van den Heuvel és S. Thomassé [14] ehhez a kérdéskörhöz kapcsolódó eredményét mutatjuk be.

7.2. Matroidok ciklikus sorrendje

Adott egy matroid az S alaphalmazon. Legyen $D \geq 2$ egész. Tekintsük egy szabályos D-szöget, melynek csúcsai pozitív körüljárás szerint $1,2,...,D$-vel vannak indexelve, a következőkben az indexek mindig $\mod D$ értendők. Legyen f egy függvény, ami S-ből a D-szög csúcsainak V halmazába képez. Adott $k \leq D-1$ egészre, és $s \in$ $\in S$-re, az s-hez tartozó k hosszú $I_f^k(s)$ intervallumon a D-szög csúcsainak $I_f^k(s) =$ $= \{f(s), f(s)+1, ..., f(s)+k-1\}$ k elemű részhalmazát értjük. A sokszög egy x csúcsára legyen $T_f^k(x)$, azon $s \in S$-ek halmaza, amire az s-hez tartozó k hosszú $I_f^k(s)$ intervallum tartalmazza x-et. Az $f : S \to V$ függvényt k-függetlennek nevezünk, ha a $T_f^k(x)$ halmazok függetlenek a D-szög összes x csúcsára.

7.2.1. Lemma (J. van den Heuvel, S. Thomassé [14])**.** *Ha $k|Z| \leq Dr(Z)$ teljesül minden $Z \subset S$-re, létezik egy $f : S \to V$ k-független függvény.*

Bizonyítás. Legyen f és g két $S \to V$ függvény. Azt mondjuk, hogy f jobb, mint a g, ha $\mathrm{cl}(T_f^k(x)) \subset \mathrm{cl}(T_g^k(x))$ minden $x \in V$-re. Továbbá f szigorúan jobb g-nél, ha ezenfelül valahol még szigorú is a tartalmazás. (Előfordulhat, hogy f jobb g-nél, és ugyanakkor g jobb f-nél, de ekkor $\mathrm{cl}(T_f^k(x)) = \mathrm{cl}(T_g^k(x))$ minden $x \in V$-re.)

Ha f egy $S \to V$ függvény $s \in S$, akkor az f-ből s forgatásával kapott függvényen, azt az f' függvényt értjük, amire $f'(s) = f(s)+1$, és $f'(t) = f(t)$ minden $s \neq t \in S$-re. Ha $s \in S$ olyan, hogy $T_f^k(f(s))$ tartalmaz egy C (matroid) kört, amire $s \in C$, akkor az s-et forgathatónak hívjuk, és ekkor az s forgatásával kapott f' függvény jobb lesz f-nél. (Hiszen $T_f^k(x) \neq T_{f'}^k(x)$ eleve csak két esetben fordulhat elő, ha $x = f(s)$ vagy $x = f(s)+k$, a második esetben, $T_{f'}^k(x) = T_f^k(x) + s$, így nyilván $\mathrm{cl}(T_f^k(x)) \subset \mathrm{cl}(T_{f'}^k(x))$, az első esetben $T_f^k(x)$ és $T_{f'}^k(x)$ lezártja megegyezik, hiszen $T_{f'}^k(x)$-t úgy kapjuk, $T_f^k(x)$-ból, hogy elhagyjuk egy olyan elemét, ami benne van egy $T_f^k(x)$ által tartalmazott körben.)

Vegyünk egy olyan $f_0 : S \to V$ függvényt, aminél nincsen szigorúan jobb függvény. (Ilyen van.) Továbbá vegyük S eleminek egy sorba rendezését. Ezek után a lentebb meghatározott szabály szerint forgatások sorozatát fogjuk végrehajtani az éppen aktuális függvényen, és így kapjuk f_0-ból kiindulva sorban az $f_1, f_2, \ldots$ függvényeket, közben az S eleminek sorrendjét is változtatjuk. Az i lépésnél ($i = 0,1,\ldots$) tegyük a következőt, vegyük a forgatható elemek közül azt, amelyik a sorban a lehető legelőrébb helyezkedik el, legyen ez s, ekkor f_{i+1}-et az s forgatásával kapjuk f_i-ből, továbbá s-et a sorrendben az utolsó helyre tesszük, a többi elem sorrendje változatlan. Azaz másképpen, mindig azt az elemet forgatjuk a lehetséges választások közül, amelyik a leghosszabb ideje nem forgattunk meg. (A továbbiakban $T^k_{f_i}(x)$-et röviden $T^k_i(x)$-nek jelöljük.) Vizsgáljuk meg azt az esetet először, amikor a fenti algoritmus elakad, azaz valamely i-re f_i-hez nincsen forgatható elem. Azt állítjuk, hogy ekkor f_i k-független, ugyanis tegyük föl, hogy nem, vagyis létezik $x \in V$, amire $T^k_i(x)$ tartalmaz egy C-kört. Induljunk el x-ból negatív körül járással, és vegyük az utolsó y-t, amire $C \subset T^k_i(y)$, ekkor kell létezzen $s \in C$, amire $f(s) = y$, vagyis s forgatható, ami ellentmondás. Most belátjuk, hogy nem lehetséges, hogy végtelen sokáig tudunk forgatásokat végrehajtani. Tegyük föl, indirekte, hogy létezik forgatásoknak egy végtelen sorozata. Mivel f_0-nál nincs jobb függvény, és mindig csak forgatható elemeket forgatunk, ezért $\mathrm{cl}(T^k_i(x) = \mathrm{cl}(T^k_j(x)) = Z^k(x)$ minden i, j nemnegatív egészre és $x \in V$-re. Legyen S^B az S azon eleminek halmaza, amit csak véges sokszor forgatunk az algoritmus során, S^U pedig S azon elemeinek halmaza, amit végtelen sokszor forgatunk. Tekintsünk egy olyan nagy N időpillanatot, amikor már minden S^B-beli elemnek meg volt az utolsó forgatása, és azóta minden S^U-beli elemet már megforgattunk egyszer. Ez azt jelenti, hogy egy $i > N$ időpillanatban az S aktuális sorrendjében S^B elemei megelőzik S^U elemit, vagyis nem létezhet S^B-beli forgatható elem, mert akkor a kiválasztási szabályunk szerint azt kellene forgatnunk, ami nem lehet N választása miatt. Vagyis, ha $b \in S^B$ és $i > N$, akkor $T^k_i(f_i(b))$ nem tartalmazhat olyan kört, aminek b eleme. Vagyis b nem eleme $\mathrm{cl}(T^k_i(f_i(b)) - b)$-nek, de vegyük észre, hogy az N időpillanattól kezdve, amitől b képe fix. Ekkor $\mathrm{cl}(T^k_i(f_i(b)) - b)$ nem csökkenthet, hiszen csak akkor csökkenhetne, ha egy u-t forgatunk az i pillanatban, amire $f_i(u) = f_i(b)$, de ekkor u benne van $T^k_i(f_i(u)) = T^k_i(f_i(b))$ egy körében, ami nem tartalmazhatja b-t, azaz $T^k_i(f_i(b)) - b$ egy köre által tartalmazott u-t forgatunk, amiből $\mathrm{cl}(T^k_i(f_i(b)) - b)$ nem változik. N-et esetleg nagyobbnak választva feltehető, hogy $i \geq N$-re $\mathrm{cl}(T^k_i(f_i(b)) - b)$ állandó. De a forgatások során minden $u \in S^U$ bekerül valamely i-re $T^k_i(f_i(b))$-be egy idő után, amiből $S^U \subset \mathrm{cl}(T^k_i(f_i(b)) - b)$ (minden $i > N$-re). De ekkor S^U zárt, hiszen tegyük föl, hogy létezik $b \in S^B$, amire $b \in \mathrm{cl}(S^U)$, de ekkor $b \in \mathrm{cl}(T^k_N(f_N(b)) - b)$ következne, ami nem lehet. Most megmutatjuk, hogy bármely $i > N$-re és $x \in V$-re, $T^k_i(x)$ nem tartalmazhat olyan kört, aminek valamely eleme S^B-beli. Tegyük föl indirekte, hogy $T^k_i(x)$ tartalmaz egy C kört, amire $C \cap S^B \neq \emptyset$. Induljunk el x-től negatív irányban és tekintsük az utolsó y-t, amire $C \cap S^B \subset T^k_i(y)$, ekkor létezik $b \in C \cap S^B$, amire $f_i(b) = y$. Ekkor $b \in \mathrm{cl}(((C \cap S^B) - b) \cup S^U)$, de $(C \cap S^B) - b \subset T^k_i(f_i(b)) - b$ és $S^U \subset \mathrm{cl}(T^k_i(f_i(b)) - b)$, amiből $b \in \mathrm{cl}(T^k_i(f_i(b)) - b)$ következne, ami ellentmondás. De ekkor fent már többször látott módszerrel $i > N$ és $x \in V$ esetén $\mathrm{cl}(T^k_i(x) - S^B)$ nem csökkenhet egy forgatásnál, de mivel egy idő után minden S^U-beli elemet beforgatunk $T_i^k(x)$-be, ezért N-et elég nagyra választva, $S^U \subset \mathrm{cl}(T_N^k(x) - S^B) = \mathrm{cl}(T_N^k(x) \cap S^U)$, mivel S^U zárt, ezért $S^U = \mathrm{cl}(T_N^k(x) \cap S^U)$ minden $x \in V$-re. Számoljuk meg kétféleképpen az (x, u) párokat, ahol $u \in S^U, x \in V$ és $u \in T_N^k(x)$. Egyfelől bármely u-hez k darab megfelelő x létezik, vagyis $k|S^U|$ megfelelő pár létezik. Ugyanakkor $\mathrm{cl}(T_N^k(x) \cap S^U) = S^U$ minden x-re, azaz $T_N^k(x) \cap S^U$ tartalmazza S^U egy maximális függetlenjét, vagyis legalább $r(S^U)$ elemű, tovább mivel van forgatható elem, létezik egy $x_0 \in V$, amire $T_0^k(x_0) \cap S^U$ tartalmaz egy kört, de ebből az elemszáma legalább $r(S^U) + 1$. Amiből azt kapjuk, hogy $k|S^U| > Dr(S^U)$, ami ellentmond a lemma feltételének. □

7.2.2. Tétel (J. van den Heuvel, S. Thomassé [14]). *Legyen M egy matroid az S alaphalmazon, amire $|S|$ és $r(S)$ relatív prímek. Ekkor pontosan akkor létezik S eleminek egy olyan ciklikus sorrendje, ahol minden $r(S)$ egymást követő elem egy bázist alkot, ha $r(S)|Z| \leq |S|r(Z)$ teljesül minden $Z \subset S$-re.*

Bizonyítás. A szükségességhez tekintsünk egy megfelelő ciklikus sorrendet és egy $Z \subset S$-et, számoljuk meg, az (I, s) párokat kétféleképpen, ahol I a ciklikus sorrendben $r(S)$ szomszédos elem által alkotott halmaz és $x \in I \cap Z$. Ekkor tetszőleges I-re, mivel a feltétel szerint I bázis, ezért $I \cap Z$ független, amiből $|I \cap Z| \leq r(Z)$, vagyis minden egyes I-hez legfeljebb $r(Z)$ megfelelő s tartozik, vagyis a jó párok száma legfeljebb $|S|r(Z)$, ugyanakkor bármely $s \in Z$-hez pontosan $r(S)$ megfelelő I tartozik, vagyis a jó párok száma pontosan $|Z|r(S)$, vagyis $r(S)|Z| \leq |S|r(Z)$.

A másik irányhoz tekintsünk egy szabályos $D = |S|$-szöget, ekkor 7.2.1 lemma szerint létezik egy $r(S)$-független $f : S \to V$ leképezés. Azt állítjuk, hogy ez bijekció lesz. Ha ezt belátjuk, akkor készen is vagyunk, hiszen legyen s_i az S egyértelmű eleme, amire $f(s_i) = i$. Ekkor $s_1, s_2, ..., s_{|S|}$ egy megfelelő ciklikus sorrend lesz, hiszen ehhez az kell, hogy minden i-re, az $\{s_i, s_{i+1}, ..., s_{i+r(S)-1}\}$ halmaz független legyen, de ez éppen $T_f^{r(S)}(s_{i+r(S)-1})$ azaz független. Most tehát csak annak belátása maradt hátra, hogy f bijekció. A fent már többször látott kettős leszámlálásból következik, hogy $T_f^{r(s)}(x) = r(S)$ minden $x \in V$-re. Legyen t_i az $i \in V$ elem ősképének mérete f-nél. Ekkor $\sum_{i \in V} t_i = |S|$ és $t_i + t_{i+1} + ... + t_{i+r(S)-1} = |T_{i+r(S)-1}^{r(s)}(i + r(S) - 1)| = r(S)$. Mivel $|S|$ és $r(S)$ relatív prímek léteznek olyan u és v pozitív egészek, amelyekre $ur(S) + 1 = v|S|$. Azt kell belátnunk, hogy $t_i = 1$ minden i-re, rögzítsünk tehát egy i-t, és tekintsük a következő halmazokat $I_1 = \{i + 1, i + 2, ..., i + r(S)\}$, $I_2 = \{i + 1 + r(S), i + 2 + r(S), ..., i + r(S) + r(S)\}$, ..., $I_k = \{i + 1 + (k-1)r(S), i + 2, ..., i + r(S) + (k-1)r(S)\}$ egészen I_u-ig. Ekkor az $I_1, I_2, ..., I_u$ halmazok V minden elemét v-szer fedik, kivéve i-t, amit csak $v - 1$-szer. Azaz:

$$v|S| - t_i = v\left(\sum_{j \in V} t_j\right) - t_i = \sum_{j \in V} v t_j + (v-1)t_i =$$

$$= \sum_{k=1}^{u} \sum_{j \in I_k} t_j = \sum_{k=1}^{u} r(S) = ur(S) = v|S| - 1,$$

amiből $t_i = 1$, ahogy azt látni akartuk. $\square$

8. Összefoglalás, nyitott kérdések

Valójában matroid metszetek pakolásáról igen keveset tudunk, kivéve a páros gráfok párosításait, és a fenyőket.

Egy páros gráf párosításaival kapcsolatban a legtöbb kérdést már elemi úton is meg lehet válaszolni. De láttuk, hogy ezek a tételek egy kicsit általánosabban is igazak az SBO matroidok osztályára.

Ugyanakkor Edmonds fenyő tételének nem ismert igazi matroid elméleti általánosítása, nem teljesen értjük, hogy mi a szereplő matroidok azon tulajdonsága, ami miatt jól kezelhető ez a probléma.

Általános válaszokat találni ebben a témakörben meglehetősen nehéznek tűnik. Talán érdemes volna speciális, gráfelméleti fogalmakkal könnyen definiálható eseteket vizsgálni. Az egyik ilyen természetesen adódó probléma lehet az, amikor az egyik matroidunk egy gráf körmatroidja, a másik pedig egy partíciós matroid. Persze nem biztos, hogy ez könnyebb, mint az általános eset.

Szintén lehetne a kérdés kört abból az irányból támadni, hogy megpróbálunk NP-teljes problémát találni benne. Ehhez hasznos volna minél több olyan természetesen adódó gráfelméleti problémát találni, ami megfogalmazható matroid metszet pakolási problémaként. Itt esetleg hasznunkra lehetne egy olyan tétel, ami azon halmazrendszereket karakterizálja, amik előállnak matroid metszetként. (Azaz például, hogyan tudnánk megmutatni egy halmaz rendszerről, hogy nem áll elő matroid matszetként?) Ez már abban a speciális esetben is érdekes volna, ha az egyik matroid partíciós matroid, sőt, minden partíció része két elemű.

A topológia módszerekkel bizonyított eredményekre is jó volna, ha lenne tisztán kombinatorikus, még inkább algoritmikus bizonyítás.

A Woodall-sejtéssel kapcsolatban is sokféle irányba elindulhatunk. Egyrészt próbálhatunk találni még több speciális gráfosztályt, amire a sejtés igaz (itt talán legérdekesebb Williams sejtése a szuper-forrással és szuper-nyelővel is rendelkező gráfokról), vagy megpróbálhatjuk valamely gyengítését bebizonyítani. Bár a $k = 2$ eset könnyű, az a kérdéskör még mindig izgalmas, hogy egy 2-kötés mikor bomlik fel két kötésre. Seymour és társai friss eredménye azt mondja, hogy egy síkgráf összefüggő 2-kötése mindig felbomlik két kötésre. Talán itt elhagyható az a feltétel, hogy a gráf síkgráf. A $(q-1,1)$-partíció összefüggő gráfokra vonatkozó tételnél is érdemes volna megvizsgálni, nem hagyható-e el az a feltétel, hogy q prímhatvány.

Hivatkozások

[1] R. Aharoni, E. Berger, The intersection of a matroid and a simplicial complex, Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), 4895-4917.

[2] N. Alon, Combinatorial Nullstellensatz, Combinatorics, Probability and Computing 8 (1999), 7-29.

[3] J.E. Bonin, Basis-exchange properties of sparse paving matroids,

[4] Brualdi, R.A., Comments on bases in dependence structures, Bull. of the Australian Math. Soc. 1 (1969), 161–167,

[5] M. Chudnovsky, K. Edwards, R. Kim, A. Scott, P. Seymour, Disjoint dijoins,

[6] J. Davies and C. Mcdiarmid, Disjoint common transversals and exchange structures, J. London Math. Soc. 14 (1976), 55–62

[7] J. Edmonds, Edge-disjoint branchings, in: B. Rustin (ed.), Combinatorial Algorithms, Academic Press, New York (1973), pp. 91-96.

[8] A. Frank, Kernel systems of directed graphs, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) 41, 1-2 (1979) 63-76.

[9] A. Frank, Rooted k-connections in digraphs, Discrete Applied Mathematics 157 (2009) 1242-1254.

[10] A. Frank, É. Tardos, Matroids from crossing families, Proceedings Sixth Hungarian Combinatorial Colloquium (1981), North Holland (1984) 295-304.

[11] J. Geelen, P.J. Humphries, Rota's basis conjecture for paving matroids, SIAM J. Discrete Math. 20 (2006), 1042-1045.

[12] J. Geelen, K. Webb, On Rota's basis conjecture, SIAM J. Discrete Math. 21 (2007), 802-804.

[13] N.J.A. Harvey, T. Király, L.C. Lau, On disjoint common bases in two matroids, SIAM Journal on Discrete Mathematics 25 (2011), 1792-1803.

[14] J. van den Heuvel, S. Thomassé, Cyclic Orderings and Cyclic Arboricity of Matroids,

[15] B. Knaster, C. Kuratowski, C. Mazurkiewicz, Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe, Fundamenta Mathematicae 14 (1929), 132-137.

[16] J.E. Olson, A combinatorial problem on finite abelian groups I, J. Number Theory 1 (1969) 8–10.

[17] A. Schrijver, Combinatorial Optimization, Volume B

[18] A. Schrijver, Min-max relations for directed graphs, Annals of Discrete Math. 16 (1982), 261-280S

[19] A. Schrijver, A counterexample to a conjecture of Edmonds and Giles, Discrete Math 32 (1980), 213-214,

[20] K. Vidyasankar, Covering the edge-set of a directed graph with trees, Discrete Mathematics, 24 (1978), pp. 79-85.

[21] A.M. Williams. Packing directed joins. Master's thesis, University of Waterloo, 2004. Supervisor: Bertrand Guenin