Sorbanállási Rendszerek Távozási Folyamatai

SZAKDOLGOZAT

Készítette: Fonyó Dávid

Matematikus MSc

Témavezető: Dr. Michaletzky György, egyetemi tanár
ELTE TTK, Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2016

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Először bevezetem a pontfolyamatok fogalmát, bemutatom a Palm-kalkulus néven ismert eszközrendszert, ennek segítségével bebizonyítok néhány nevezetes sorbanállással kapcsolatos tételt. Ezután térek rá a távozási folyamatokkal kapcsolatos eredményekre. Emellett bemutatok néhány olyan eredményt, amely nem kifejezetten a távozási folyamattal kapcsolatos, de a távozások pillanatában mond valamit a rendszerről.

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Dr. Michaletzky Györgynek, hogy ezt a érdekes témát ajánlotta nekem, megszerette velem a matematika ezen területét, és hogy kérdéseimmel mindig fordulhattam hozzá.

2. fejezet

Pontfolyamatok

2.1. Időeltolás-operátorok

Amikor sztochasztikus folyamatokkal dolgozunk, általában nem részletezzük külön a mögöttes valószínűségi mezőt, hiszen az természetes módon azonosítható azzal a függvénytérrel, amiből a folyamatot kiválasztjuk. Nekünk azonban gyakran lesz szükségünk arra, hogy egy adott folyamatot különböző időpontokból indítva kezdjünk el vizsgálni. Ezen cél érdekében érdemes megkülönböztetni a függvényteret a valószínűségi mezőtől, és ez utóbbin bevezetni úgynevezett időeltolás-operátorokat.

Vezessük be $\mathbb{R}$ Borel-halmazaira a $\mathcal{B}$ jelölést!

2.1. Definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér, valamint $\theta_t : \Omega \to \Omega$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Vezessük be azt a $\varphi : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$ függvényt, melyre teljesül, hogy $\varphi(t, \omega) = \theta_t(\omega)$ minden $t \in \mathbb{R}$ és $\omega \in \Omega$ esetén. Tegyük fel, hogy*

- *φ mérhető, azaz $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{B} \times \mathcal{F}$ minden $A \in \mathcal{F}$-re,*
- *θ_t bijekció minden $t \in \mathbb{R}$-re, valamint*
- *a $t \mapsto \theta_t$ leképezés csoporthomomorfizmus, azaz minden $t, s \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$-ra*

$$\theta_{t^{-1}}(\omega) = \theta_t^{-1}(\omega) \quad \text{és} \quad \theta_s \circ \theta_t = \theta_{s+t}(\omega)$$

Ekkor $\{\theta_t \mid t \in \mathbb{R}\}$-et időeltolás-operátor csoportnak*, vagy* folyamnak *nevezzük.*

A mintatérre, és az azon adott időeltolás-operátorra természetes módon adódik egy jelölt, ami egyben a fenti elnevezést is indokolja. Legyen S egy Banach-tér (alkalmazásokban tipikusan $S = \mathbb{R}^n$ valamilyen n természetes számra), és jelöljük $\mathcal{B}(S)$-sel S Borel-mérhető részhalmazainak halmazát. Ekkor $(S, \mathcal{B}(S))$ egy mértéktér. Jelöljük Ω-val azon $S \to \mathbb{R}$ függvények halmazát, melyek jobbról folytonosak, és legfeljebb megszámlálható sok szakadási ponttal rendelkeznek. Tekintsük tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{R}$, $B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{B}(X)$ esetén a

$$C_{t_1,t_2,...,t_n}^{B_1,B_2,...,B_n} = \{\omega \in \Omega \mid \omega(t_i) \in B_i,\ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}\}$$

cilinderhalmazt. Legyen $\mathcal{F}$ az ezek által generált σ-algebra, azaz

$$\mathcal{F} = \sigma\left(C_{t_1,t_2,...,t_n}^{B_1,B_2,...,B_n} \mid n \in \mathbb{N},\ t_1, ..., t_n \in \mathbb{R},\ B_1, ..., B_n \in \mathcal{B}(X)\right).$$

Végül legyen $\{\theta_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ az a folyam, melyre fennáll, hogy minden $s, t \in \mathbb{R}$ esetén

$$\theta_t(\omega)(s) = \omega(s + t).$$

Ekkor θ_t-t természetes időeltolás-operátornak nevezzük. Ha Ω-n hatunk egy θ_t időeltolással, az szemléletesen azt jelenti, hogy a sztochasztikus folyamatok "időegyenesét" $-t$-vel eltoljuk, azaz a megfigyelésünk kezdőpillanatát az eredeti t időpontba helyezzük át.

Vizsgálatainkhoz szükség lesz diszkrét idejű eltolásokra is. Ekkor az időeltoláscsoport fogalmát a következőképpen módosíthatjuk:

2.2. Definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér, valamint $\eta_n : \Omega \to \Omega$ minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén. Tegyük fel, hogy*

- *η_n mérhető bijekció minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén, valamint*
- *az $n \mapsto \eta_n$ leképezés csoporthomomorfizmus, azaz minden $n, m \in \mathbb{Z}$, $\omega \in \Omega$-ra*

$$\eta_{-n}(\omega) = \eta_n^{-1}(\omega) \quad \text{és} \quad \eta_m \circ \eta_n = \eta_{m+n}(\omega)$$

Ekkor $\{\eta_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$-et diszkrét időeltolás-operátor csoportnak*, vagy* diszkrét folyamnak *nevezzük.*

2.3. Definíció. *Legyen $\{\theta_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ egy időeltolás-operátor csoport az $(\Omega, \mathcal{F})$ mértéktéren. Egy $(\Omega, \mathcal{F})$-en vett P valószínűségi mértéket θ_t-re vonatkozóan* stacionáriusnak *mondunk, ha minden $t \in \mathbb{R}$ és $A \in \mathcal{F}$ esetén teljesül rá, hogy*

$$P(\theta_t(A)) = P(A).$$

Ha $\{\eta_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ egy diszkrét időeltolás-operátor csoport $(\Omega, \mathcal{F})$-en, akkor P pontosan akkor stacionárius rá nézve, ha minden $A \in \mathcal{F}$-re $P(\eta_1(A)) = P(A)$.

Sztochasztikus folyamat alatt olyan $(\Omega, \mathcal{F})$-en értelmezett S-ben haladó függvényt értünk általában, amely jobbról folytonos, és minden pontban rendelkezik baloldali határértékkel.

2.4. Definíció. *Egy $X(t)$ sztochasztikus folyamatot $\{\theta_t \mid t \in \mathbb{R}\}$-vel konzisztensnek mondunk, ha minden $s, t \in \mathbb{R}$ esetén*

$$X(s) \circ \theta_t = X(s + t).$$

Hasonlóképpen egy diszkrét idejű $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ folyamat akkor lesz $\{\eta_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$-vel konzisztens, ha minden $m, n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$X_m \circ \eta_n = X_{m+n}.$$

2.5. Definíció. *Egy $(\Omega, \mathcal{F})$-en értelmezett $X(t)$ sztochasztikus folyamatot a P-re nézve* stacionáriusnak *mondunk, ha minden $n \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{R}$, $B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{B}(S)$ és $i \in \{1, ..., n\}$-re*

$$P(X(t_i + u) \in B_i)$$

nem függ u megválasztásától. Hasonlóan értelmezhető diszkrét folyamatok stacionaritása.

A következő megállapítás nyilvánvaló következménye az eddigi definícióknak:

2.6. Állítás. *Ha P egy egy olyan valószínűségi mérték $(\Omega, \mathcal{F})$-en, amely stacionárius a $\{\theta_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ időeltolás-operátor csoportra nézve, és $X(t)$ konzisztens θ_t-vel, akkor $X(t)$ egy folytonos idejű stacionárius folyamat a P mértékre nézve.*

2.2. Pontfolyamatok

Vezessük be az $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ és $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

2.7. Definíció. *Legyen m egy mérték az $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mérhető téren. Azt mondjuk, hogy $m : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ egy* számláló mérték *$\mathbb{R}$-en, ha $m(c) \in \bar{\mathbb{N}}$ minden $C \in \mathcal{B}$-re, valamint minden korlátos $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumra $m([a, b])$ véges.*

2.8. Definíció. $\mathbb{R}$ *egy m számláló mértékét* egyszerűnek *nevezzük, ha $m(\{x\}) \in \{0,1\}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.*

2.9. Definíció. *Jelöljük M-mel $\mathbb{R}$ számláló mértékeinek halmazát. Tetszőleges $n \in \bar{\mathbb{N}}$, $C \in \mathcal{B}$ esetén legyen $H_k^C = \{m \in M \mid m(C) = k\}$, és legyen $\mathcal{M}$ a H_k^C alakú halmazok által generált σ-algebra, azaz $\mathcal{M} = \sigma(\{H_k^C \mid k \in \bar{\mathbb{N}},\ C \in \mathcal{B}\})$. Az $(M, \mathcal{M})$ mérhető tér az* $\mathbb{R}$ pontfolyamatainak kanonikus tere.

2.10. Definíció. *Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén δ_x egy olyan $\mathcal{B} \to \mathbb{R}$ leképezés, melyre teljesül, hogy minden $C \in \mathcal{B}$ esetén $\delta_x(C) = \chi_C(x)$. Ez a δ_x-et az x-hez tartozó Dirac-mérték.*

Az egyszerűség kedvéért vezessük be az $\delta_\infty = \delta_{-\infty} \equiv 0$ jelölést.

Minden számláló mértékhez egyértelműen hozzárendelhetünk egy olyan $\bar{\mathbb{R}}$-ban haladó szigorúan monoton növő $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sorozatot, melyre

$$m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{t_n},$$

valamint $|\{n \in Z \mid t_n \in [a,b]\}| < \infty$ teljesül minden $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumra. t_n-et m n-edik (idő)pontjának, vagy n-edik beérkezési idejének nevezzük.

$$t_n := \begin{cases} \inf(t > 0 \mid N((0,t]) \geq n) & \text{, ha} \quad n \geq 1 \\ \sup(t \leq 0 \mid N((t,0]) \geq 1-n) & \text{, ha} \quad n < 0 \end{cases}$$

Igazolható, hogy az $(M, \mathcal{M}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $m \mapsto t_n$ leképezés minden $n \in Z$ esetén mérhető.

2.11. Definíció. *Egy $(\Omega, \mathcal{F})$-ből $(M, \mathcal{M})$-be menő N mérhető leképezést* pontfolyamatnak *nevezünk.*

Rögzített $C \in \mathcal{B}$ esetén tekintsük azt az $N(C)$ valószínűségi változót, amire $N(C)(\omega) = N(\omega)(C)$, T_n pedig legyen az a valószínűségi változó, amire $T_n(\omega) = t_n(N(\omega))$ teljesül minden $\omega \in \Omega$ esetén. Ekkor persze $N(C) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi_C(T_n)$.

Azt mondjuk, hogy egy pontfolyamat konzisztens a $\{\theta_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ folyammal, ha minden $C \in \mathcal{B}$, $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$N(C) \circ \theta_t = N(C + t)$$

Hasonlóan a sztochasztikus folyamatokhoz, ponfolyamatokra is értelmezhetjük a stacionaritást:

2.12. Definíció. *Legyen N egy $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mértéktéren értelmezett pontfolyamat. N-et* stacionáriusnak *nevezzük, ha minden $n \in \mathbb{N}$, $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{N}$, $B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{B}(S)$-re*

$$P(N(t+B_1) = k_1, N(t+B_2) = k_2, ..., N(t+B_n) = k_n)$$

nem függ t megválasztásától.

2.13. Lemma. *Ha P θ_t-stacionárius, és N konzisztens θ_t-vel, akkor N stacionárius pontfolyamat.*

Vegyünk egy N pontfolyamatot, és rendeljünk hozzá egy $N(t)$ sztochasztikus folyamatot a következő módon:

$$N(t) := \begin{cases} N((0,t]) & \text{, ha} \quad t > 0 \\ -N((t,0]) & \text{, ha} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

Ekkor könnyen látható, hogy $N(t)$ szakaszonként konstans, a $[T_n, T_{n+1})$ intervallumon felvett értéke n. Ha N konzisztens a $\{\theta_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ folyammal, akkor minden $n \geq$, $s > 0$ esetén

$$T_n\theta_s = \inf(t > 0 \mid N \circ \theta_s((0,t]) = n) = \inf(t > 0 \mid N((s, s+t]) = n) = T_{N(s)+n-s},$$

és ugyanez az azonosság fennáll $s \leq 0$ és $n \leq$ esetén is. Ha s helyére T_m-et írunk, akkor az adódik, hogy

$$T_n \circ \theta_{T_m} = T_{m+n} - T_m. \tag{2.1}$$

2.14. Állítás. *Tekintsünk egy N pontfolyamatot $(\Omega, \mathcal{F})$-en, és egy olyan $\{\theta_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ folyamot, amely konzisztens N-nel. Legyen $n \in \mathbb{Z}$ és $\omega \in \Omega$-ra $\eta_n(\omega) = \theta_{T_n(\omega)(\omega)}$. Ekkor $\{\eta_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ egy diszkrét folyam $(\Omega, \mathcal{F})$-en.*

Bizonyítás:

$$\eta_n \circ \eta_m = \theta_{T_n \circ \eta_m} \circ \eta_m = \theta_{T_{m+n} - T_m} \circ \theta_{T_m} = \theta_{T_{m+n}} = \eta_{m+n}$$

$\square$

2.15. Állítás. *Tegyük fel, hogy $X(t)$ egy sztochasztikus folyamat, N egy pontfolyamat, $\{\theta_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ pedig egy folyam $(\Omega, \mathcal{F})$-en, és hogy N konzisztens θ_t-vel. Legyen $n \in \mathbb{Z}$-re $Y_n = X(T_n)$, ahol T_n nem más, mint N n-edik pontja. Ekkor $\{Y_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ konzisztens az $\{\eta_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ diszkrét folyammal.*

Bizonyítás:

$$Y_n \circ \eta_m = X \circ \eta_m(T_n \circ \eta_m) = X \circ \theta_{T_m}(T_{m+n} - T_m) = X(T_{m+n} - T_m + T_m) = Y_{m+n}$$

$\square$

2.3. Jelölt pontfolyamatok

Az előző két alfejezetben bevezettük a pontfolyamatok fogalmát. Ennek segítségével már modellezhetjük sorbanállási rendszerek beérkezési folyamatait. A pontfolyamat n. időpontjára gondolhatunk úgy, mint egy beérkező igényre, a hozzá rendelt sztochasztikus folyamat pedig azt írja le, hogy a 0 időpillanattól számítva eddig összesen hány igény érkezett be a rendszerbe. Ahhoz, hogy ezen modellünket tovább gazdagítsuk, szükségünk lesz további mennyiségekre, melyek az egyes igények kiszolgálásához tartozó információkat tartalmazzák, például azt, hogy a sorra kerülés után mennyi ideig tart a kiszolgálás.

2.16. Definíció. *Legyen N egy pontfolyamat $(\Omega, \mathcal{F})$-en, ami konzisztens a θ_t folyammal, és legyen $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ az időpontjainak sorozata. Továbbá vegyünk egy $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sorozatot, ami a $\mathcal{K}$ Banach-térben halad. Ekkor a $\Psi = (T_n, Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sorozatot* jelölt pontfolyamatnak *nevezzük.*

Értelmezzünk az M_Ψ mértéket $(\mathbb{R}\times\mathcal{K}, \mathcal{B}\times\mathcal{B}(\mathcal{K}))$ mérhető téren a következőképpen: Tetszőleges $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$-ra legyen

$$M_\Psi(B, C) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi_{\{T_n\in B, Z_n\in C\}}$$

Ha minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $M_\Psi(B, C)\theta_t = M_\Psi(B + t, C)$, akkor azt mondjuk, hogy Ψ konzisztens a $\{\theta_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ folyammal.

2.17. Állítás. *Tegyük fel, hogy (Z_n) konzisztens az $\eta_n = \theta_{T_n}$ diszkrét folyammal. Ekkor Ψ is konzisztens θ_t-vel.*

Bizonyítás: (2.1) miatt

$$\{T_n \circ \theta_t \in B\} = \{T_{N(t)+n} \in B + t\}.$$

Másfelől $Z_n = Z_0 \circ \eta_n$, így

$$Z_n \circ \theta_t(\omega) = Z_0(\theta_{T_n \circ \theta_t(\omega)}(\theta_t(\omega))) = Z_0(\theta_{T_{N(t)(\omega)+n}(\omega)}(\omega)) = Z_{N(t)(\omega)+n}(\omega).$$

Tehát

$$M_\Psi(B, C) \circ \theta_t = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_{\{T_{N(t)+n} \in B+t,\ Z_{\{N(t)+n} \in C\}} = M_\Psi(B + t, C)$$

$\square$

Hasonlóan értelmezhetjük egy Ψ jelölt pontfolyamat stacionaritását, mint pontfolyamatok esetében.

2.18. Definíció. *A* $\Psi = (T_n, Z_n)$ *jelölt pontfolyamatot* stacionáriusnak *nevezzük* P*-re nézve, ha minden* $n \in \mathbb{N}$*,* $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{N}$*,* $B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{B}$*,* $C_1, C_2, ..., C_n \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$*,-ra*

$$P(M_\Psi(t + B_1, C_1) = k_1, M_\Psi(t + B_2, C_2) = k_2, ..., M_\Psi(t + B_n, C_n) = k_n)$$

nem függ t *megválasztásától.*

A definícióból könnyen látható a következő állítás:

2.19. Állítás. *Ha* P θ_t*-stacionárius, és a* Ψ *jelölt pontfolyamat konzisztens* θ_t*-vel, akkor* Ψ P*-re nézve stacionárius.*

3. fejezet

Palm-kalkulus

3.1. A Palm-mérték

Legyen P egy θ_t-stacionárius valószínűségi mérték $(\Omega, \mathcal{F})$-en, N pedig egy P-re nézve stacionárius folyamat. N intenzitásának nevezzük az $E(N((0,1]))$ értéket.

3.1. Definíció. *Tegyük fel, hogy N egy véges λ intenzitású stacionárius folyamat az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mértéktéren. Legyen $A \in \mathcal{F}$-re*

$$P_0(A) = \frac{1}{\lambda} E\left(\int_0^1 \chi_{\{\theta_u{}^{-1}(A)\}} N(\mathrm{d}u)\right) \tag{3.1}$$

Könnyen meggondolható, hogy P_0 egy valószínűségi mérték $(\Omega, \mathcal{F})$-en. P_0-at az N pontfolyamathoz tartozó Palm-mértéknek *nevezzük.*

3.2. Megjegyzés. *Mivel $\chi_{\{\theta_u{}^{-1}(A)\}}(\omega) = \chi_A(\theta_u(\omega)) = \chi_A \circ \theta_u(\omega)$, így $P_0(A)$-t $\frac{1}{\lambda}E\left(\int_0^1 \chi_A \circ \theta_u N(\mathrm{d}u)\right)$ alakban is felírhatjuk. Valójában 3.1-szal ekivavens definíciót kapunk, ha P_0-ről azt követeljük meg, hogy minden $f : \Omega\mathbb{R}$ korlátos mérhető függvényre*

$$E_0(f) = \frac{1}{\lambda} E\left(\int_0^1 f \circ \theta_u N(\mathrm{d}u)\right) \tag{3.2}$$

teljesüljön.

3.3. Lemma. $P_0(T_0 = 0) = 1$

Bizonyítás: Legyen $A = \{T_0 = 0\}$. Ekkor

$$\theta_u{}^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid \theta_u(\omega) \in A\} = \{T_0 \circ \theta_u = 0\} = \{T_{N(u)=u}\}.$$

Mivel minden $u \in \mathbb{R}$-re $N(u) \in \mathbb{N}$ és azon u-kra, ahol $N(t)$ ugrik $T_{N(u)} = 0$, így az (3.1) egyenletből

$$P_0(T_0 = 0) = \frac{1}{\lambda} E(N((0,1])) = 1$$

következik. □

A Palm-mérték szemléletes jelentése, hogy tulajdonképpen az, hogy a pontfolyamaz szemszögéből szemléljük a rendszert, a 0 időpontot a folyamat 0. beérkezési idejéhez rögzítjük.

A következő tétel Campbell-Mecke-formulaként ismert, egy alapvető összefüggést szolgáltat egy P mérték, és egy a P-szerint stacionárius folyamathoz tartozó P_0 Palm-mérték között.

3.4. Tétel. *Legyen $X(t)$ egy valós, nemnegatív értékű sztochasztikus folyamat. Ekkor*

$$E\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(u) \circ \theta_u \; N(\mathrm{d}u)\right) = \lambda E\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(u)\mathrm{d}u\right)$$

Bizonyítás: Használjuk (3.2)-t az $f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} X(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} X(t+u)\mathrm{d}t$ függvényre:

$$\lambda E_0\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(s)\mathrm{d}s\right) = E\left(\int_0^1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} X(s+u) \circ \theta_u \mathrm{d}s\right) N(\mathrm{d}u)\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E\left(\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\{0<u<1\}} X(s+u) \circ \theta_u \; N(\mathrm{d}u)\right) \mathrm{d}s =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E\left(\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\{0<u<1\}} X(s+u) \circ \theta_{u+s} \; N(\mathrm{d}(u+s))\right) \mathrm{d}s =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E\left(\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\{0<u-s<1\}} X(u) \circ \theta_u \; N(\mathrm{d}(u))\right) \mathrm{d}s =$$

$$= E\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{u-1}^{u} \mathrm{d}s \cdot X(u) \circ \theta_u \; N(\mathrm{d}u)\right) = E\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(u) \circ \theta_u N(\mathrm{d}u)\right)$$

$\square$

Most levezetjük a sorbanállás-elmélet egyik legismertebb formuláját, a Little-formulát az előző tétel segítségével. Tekintsünk egy kiszolgálási rendszert, ahol a beérkezett igényeket az érkezési sorrendjük szerint szolgálják ki. Legyen T_n az n. beérkezés ideje, N az a pontfolyamat, amit ezek az időpontok generálnak. Legyen $\{\theta_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ egy folyam $(\Omega, \mathcal{F})$-en, és tegyük fel, hogy N konzisztens vele. Legyen U_n az n. beérkező igény élettartama, azaz, hogy ő mennyi időt tölt a rendszerben. Tegyük fel emellé azt is, hogy U_n konzisztens a $\theta_{T_n} = \eta_n$ diszkrét folyammal.

Jelöljük $L(t)$-vel a t időpillanatban a rendszerben tartózkodók számát. Ekkor

$$L(t) = \sum_{\infty}^{\infty} \chi_{\{T_n \le t < T_n + U_n\}}$$

Legyen $N(s)$ az N pontfolyamathoz tartozó sztochasztikus folyamat. Ekkor

$$L(t) \circ \theta_s = \sum_{-\infty}^{\infty} \chi_{T_{N(s)+n} \le s+t < T_{N(s)+n} + U_n} = L(s+t),$$

vagyis $L(t)$ konzisztens θ_t-vel. Tegyük fel, hogy P θ_t-stacionárius, és N intenzitása véges. Ekkor L_t egy stacionárius folyamat P-re nézve.

Legyen $X(u) = \chi_{T_0 \le -u < T_0 + U_0}$, ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(u) \mathrm{d}u = U_0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(u) \circ \theta_u N(\mathrm{d}u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_{\{0 \le -T_n < U_n\}} = L(0)$$

Ekkor a Campbell–Mecke-formula alapján:

$$E(L(0)) = \lambda E_0(U_0)$$

3.2. Inverziós formula

Az elkövetkezendőkben a P_0 Palm-mérték alaptulajdonságait mutatjuk be, és megadunk egy képletet, amivel P_0-ból P visszanyerhető.

3.5. Tétel. *Tegyük fel, hog N egy olyan egyszerű pontfolyamat, amely konzisztens θ_t-vel, és az intenzitása $\lambda = E(N((0,1]) \neq 0$ véges. Ha P θ_t-stacionárius, akkor P_0 η_n-stacionárius. Tehát a 2.15-ben definiált (Y_n) egy diszkrét idejű stacionárius folyamat P_0-ra nézve, valamint P megkapható P_0-ból a következőképpen:*

$$P(A) = \lambda E_0 \left(\int_0^{T_1} \chi_{\theta_u^{-1}(A)} du \right), \quad A \in \mathcal{F}. \tag{3.3}$$

Bizonyítás: Az állítás első fele teljesül, ha $P_0(\eta_1^{-1}(A)) = P(A)$ fennáll. Ezt a Palm-mérték definíciójának segítségével bizonyítjuk. Mivel $\eta_1 = \theta_{T_1}$, ezért

$$\theta_{T_1} \circ \theta_u(\omega) = \theta_{T_{N(u)+1}(\omega)-u}(\theta_u(\omega)) = \theta_{T_{N(u)+1}}(\omega),$$

következik, amiből pedig

$$\theta_u^{-1}(\eta_1^{-1}(A)) = \{\eta_1 \circ \theta_u \in A\} = \{\theta_{T_{N(u)+1}} \in A\}.$$

Ezt alkalmazva a Palm-mérték definícióját azt kapjuk, hogy

$$P_0(\eta_1^{-1}(A)) = \lambda^{-1} E \left(\sum_{n=1}^{N(1)} \chi_{\{\theta_{T_{n+1}} \in A\}} \right) =$$

$$= \lambda^{-1} \left(E \left(\sum_{n=1}^{N(1)} \chi_{\{\theta_{T_n} \in A\}} \right) + P(\theta_{T_{N(1)+1}} \in A) \right).$$

Mivel $\theta_{T_1} \circ \theta_1 = \theta_{T_{N(1)+1}}$ és P θ_t-stacionárius, ezért

$$P(\theta_{T_{N(1)+1}} \in A) = P(\theta_{T_1} \in A).$$

Tehát azt kapjuk, hogy $P_0(\eta_1^{-1}(A)) = P_0(A)$. Most térjünk rá az inverziós formula bizonyítására: Legyen $X(u) = \chi_{\{N((-u,0))=0, u>0\}} \chi_{\{\theta_u^{-1}(A)\}}$, ekkor

$$X(u) \circ \theta_u = \chi_{\{N((0,u>0)\}} \chi_A = \chi_{\{0<u \leq T_1\}} \chi_A.$$

Ezt a Campbell–Mecke-formulába helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(u) \circ \theta_u N(\mathrm{d}u)\right) = E(\chi_A) = P(A),$$

$$E_0\left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(u)\mathrm{d}u\right) = E_0\left(\int_{T_{-1}}^{0} \chi_{\{\theta_u^{-1}(A)\}}\mathrm{d}u\right) = E_0\left(\int_{T_{-1}\circ\eta_1}^{0} \chi_{\{(\theta_u\circ\eta_1)^{-1}(A)\}}\mathrm{d}u\right)$$

mivel P_0 η_n-stacionárius. Vegyük észre, hogy $T_{-1}\circ\eta_1 = T_0 - T_1$ és $\theta_u\circ\eta_1 = \theta_{u+T_1}$. Így az integrál változót u-ról $u + T_1$-re cserélve az utolsó tagban és kihasználva, hogy $P_0(T_0 = 0) = 1$, épp a bizonyítandó állítást kapjuk. $\square$

Az előbbi tételnek igaz a következő értelemben vett megfordítása is. Bizonyításért lásd [2].

3.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy egy egyszerű N pontfolyamat konzisztens a θ_t folyammal, P_0 egy mérték $(\Omega, \mathcal{F})$-en, amire igaz, hogy $0 \leq E_0(T_1) < \infty$ $T_1 \equiv \sup\{u > 0 \mid N = (0, u) = 0\}$. Legyen $\lambda = \frac{1}{E_0(T_1)}$. Ha P_0 η_n-stacionárius, akkor az inverziós formula segítségével definiált P θ_t stacionárius. Továbbá $E(N((0, 1])) = \lambda$, és 3.1 teljesül P-re, illetve P_0-ra.*

3.3. PASTA tulajdonság

Mostantól a következő feltételezésekkel fogunk élni:

- Adott egy $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, azon egy $\{\theta_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ folyam, amire nézve P stacionárius. Továbbá adott egy egyszerű véges intenzitású pontfolyamat, ami konzisztens θ_t-vel.

- Ha $X(t)$ egy sztochasztikus folyamat, ami konzisztens θ_t-vel, akkor jobbról folytonos, és minden pontjában létezik a baloldai határértéke.

- $X(t)$ minden pontjában jobbról deriválható, és a derivált értéke véges.

- $X(t)$ mindegyik szakadási pontja egybeesik N egyik időpontjával

3.7. Tétel. *A fenti feltételek mellett $X(t)$ és $X'(t)$ stacionárius folyamatok, továbbá N egyszerű stacionárius pontfolyamat. Ha $E(X'(0))$ és $E_0(X(0-)-X(0))$ végesek, akkor*

$$E(X'(0)) = \lambda E_0(X(0-)-X(0))$$

3.8. Következmény. *Tegyük fel, hogy N-et felbontottuk az $N_1, N_2, ..., N_m$ pontfolyamatok összegére, amik konzisztensek θ_t-vel. Legyen $\lambda_i = E(N_i((0,1]))$, és tegyük fel róluk, hogy végesek. Jelöljük az N_i pontfolyamatoz tartó Palm-mértéket E_i-vel. Ha $E_i(X(0))$ és $E(X'(0))$ véges akkor*

$$E(X'(0)) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i E_i(X(0-)-X(0))$$

Bizonyítás: Jelöljük az N-hez tartozó Palm-mérték szerinti várható értéket E_0-lal. Ekkor

$$\lambda E_0(X(0-)-X(0)) = E\left(\int_0^1 (X(u-)-X(0))N(\mathrm{d}u)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} E\left(\int_0^1 (X(u-)-X(0))N_i(\mathrm{d}u)\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i E_i(X(0-)-X(0))$$

□

3.9. Tétel. *Legyen N_0 egy Poisson-folyamat, ami konzisztens θ_t-vel, véges intenzitású, és jelöljük a hozzá tartozó Palm-mérték szerinti várható értéket E_0-lal. Ha $\{X(u) \mid u < t\}$ független $\{N_0([t, t+s]) \mid s \geq 0\}$ akkor minden olyan mérhető függvényre, ahol a kifejezések végesek*

$$E(f(X(0))) = E_0(f(X(0-)))$$

Bizonyítás: f tetszőlegesen megközelíthető egy folytonosan deriválható függvénnyel, így elég csak az ilyen tulajdonságúakra bizonyítani.
Legyen $R_0(t) = \sup\{u \geq 0 \mid N_0(t, t+u] = 0\}$ Egy nemnegatív s-re legyen

$$Y(t) = f(X(t))e^{-sR_0(t)}.$$

Ekkor $Y(t)$ nyilván korlátos, és konzisztens θ_t-vel. Mivel $R_0'(t) = -1$, Y jobboldali deriváltja kiszámolható, mint

$$Y'(t) = (X'(t)f'(X(t)) + sf(X(0))))e - sR_0(t)$$

Ezután definiáljunk egy N_1 pontfolyamatot

$$N_1(B) = N(B) - \max(N(B), N_0(B))$$

segítségével. Mivel N_0 és N_1 egyszerű, konzisztens θ-val és véges intenzitással rendelkeznek. Ezért alkalmazhatjuk a 3.3 Következményt. Legyen $\varphi(S) = E\left(e^{-sR_0(0)}\right)$ Ekkor

$$E(X'(0)f'(X(0))) + sf(X(0))) = \lambda_0 E_0(f(X(0-)))) - E_0(f(X(0)))\varphi)$$

Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága miatt $\varphi(s) = \frac{\lambda_0}{s+\lambda_0}$. $s \to \infty$-ből nyerjük a bizonyítandó állítást.

$\square$

3.10. Tétel. *Adott egy sorbanállási rendszer, a beérkezést leíró egyszerű pontfolyamat N_a, az egyszerű távozási pontfolyamat N_d, a sor hossza t időpillanatban $L(t)$. Tegyük fel, hogy P stacionárius θ_t-re nézve. Ekkor*

$$\lambda_a P_a(n + 1 - \Delta L \leq L(0-) \leq n) = \underline{\lambda_d P_d}(n + 1 + \Delta L(0) \leq L(0) \leq n),$$

ahol $\Delta L(0) = L(0) - L(0-)$*, továbbá* $\underline{N_d}(B) = N_d(B) - \min(N_a(B) - N_d(B))$.

Bizonyítás: Alkalmazzuk a 3.3 Következményt az $N = N_a + N_d$ felbontásra és az $X(t) = \chi_{\{L(t) \geq n+1\}}$ folyamatra. $\square$

Az előbbi tételnek egy speciális esete, amikor nincs elvesztett igény, és minden igény egyszer jelentkezik be, és egyszer kerül kiszolgálásra, azaz $P_a(\Delta L(0) = 1) = P_d(\Delta L(0) = -1) = 1$. A 3.10 Tételből adódik, hogy minden n-re

$$\lambda_a P_a(L(0-) = n) = \lambda_d P_d(L(0) = n)$$

Összegezve a fenti egyenleteket minden n-re, és kihasználva, hogy $\lambda_a = \lambda_d$, azt kapjuk, hogy

$$P_a(L(0-) = n) = P_d(L(0) = n) \tag{3.4}$$

Tehát szemléletesen ez azt jelenti, hogy az érkező és a távozó igény ugyanolyan eloszlásban látja a rendszert.

4. fejezet

M/M/m rendszer

4.1. A távozáskor megfigyelt folyamat M/M/m rendszerben

4.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $X(t)$ egy stacionárius pontfolyamat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$-n, amely megmondja egy M/M/m rendszerben tartózkodó igények számát a t időpillanatban. Legyen $n \in \mathbb{N}$ esetén $\pi_n = P(X(t) = n)$. (Ez a mennyiség nem függ t-től. Ekkor a tetszőleges rögzített n-re, az n. távozó igény stacionárius állapotban hagyja a rendszert, azaz $P(X(D_n) = i) = \pi_i$.*

Bizonyítás: A PASTA-tulajdonság miatt $P_0^A(X(0-) = i) = P(X(0) = i)$, és mivel nincs elvesző igény, így $P_0^A(X(0-) = i) = P_0^D(X(0) = i)$. Alkalmazzuk a teljes valószínűség-tételt $P_0^D(X(D_n) = i)$-re:

$$P_0^D(X(D_n) = i) = \sum_{j=0}^{\infty} P_0^D(X(D_n) = i | X(0) = j) P_0^D(X(0) = j)$$

A Campbell-formula segítségével igazolható az alábbi összefüggés az erős Markov-tulajdonságot használva

$$P_0^D(X(D_n) = i | X(0) = j) = P(X(D_n) = i | X(0) = j)$$

adódik. Tehát

$$P_0^D(X(D_n) = i) = \sum_{j=0}^{\infty} P_0^D(X(D_n) = i | X(0) = j) P_0^D(X(0) = j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} P^D(X(D_n) = i|X(0) = j)P^D(X(0) = j) = P(X(D_k) = n).$$

Mivel a Palm-mérték stacionárius a θ_{T_n} diszkrét eltoláscsoportra, ezért

$$P_0^D(X(D_0) = i) = P_0^D(X(D_n) = i))$$

Tehát

$$P(X(D_k) = n) = P_0^D(X(D_n) = i) = P_0^D(X(D_0) = i) =$$

$$= P_0^A(X(0-) = i) = P(X(0) = i) = \pi_i$$

□

4.2. Burke tétele

Tekintsünk egy M/M/m rendszert, és legyen ebben $X(t)$ stacionárius folyamat. Mivel az egymást követő beérkezések és a kiszolgálás is exponenciális eloszlást követ, ezért az ilyen folyamatok születési-halálozási folyamat. Minden ilyen $X(t)$ folyamatról tudjuk, hogy megfordítható, azaz $X(-t)$ eloszlása megegyezik $X(t)$ eloszlásával. [4]

Ebből automatikusan következik, hogy ha az M/M/m rendszerbe beérkező igények λ, a kiszolgálási időtartamok pedig μ eloszlást követnek, akkor a távozási folyamat szintén λ paraméterű Poisson-folyamat. A megfordított folyamatban ugyanis a beérkezések megfelelnek az eredeti folyamat távozásainak.

4.2. Tétel. *Tekintsünk egy $N(t)$ stacionárius folyamatot, melynek beérkezési idejei Poisson-folyamatot határoznak meg, a kiszolgálási időket pedig egy exponenciális eloszlás határozza meg. Ekkor egy igény élettartamának a beérkezés és a távozás pillanatában megfigyelhető igények számára vonatkozó feltétes eloszlása megegyezik. [?]*

Bizonyítás: Legyen a c igény élettartama l_c, beérkezési időpontja T_c, távozási időpontja D_c. Legyen l_c feltételes eloszlásfüggvénye arra a feltételre nézve, hogy $T_n = k$ $F_k^a(t)$, arra a feltételre nézve, hogy $D_n = k$ pedig $F_k^d(t)$. Célunk tehát megmutatni, hogy $F_k^d(t) = F_k^a(t)$, ami a PASTA-tulajdonság miatt épp $F_k(t)$, a feltétel nélküli eloszlásfüggvény. Legyenek a folyamat állapotváltozásainak időpontjai $..., \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, ...$ Jelöljük $\tau_{i+1} - \tau_i$ feltételes eloszlásfüggvényét az $N(\tau_i + 0) = j$

feltételre vonatkozóan $G_j(t)$-vel. (Ez nem függ i-től). Könnyen kiszámolható, hogy

$$G_j(t) = 1 - e^{-((j\wedge s)\mu+\lambda)t}$$

Legyen $P_{j,k} = P(N(\tau_{i-1}-) = k \mid N(\tau_i-) = j)$

Tekintsük a folyamat megfordítottját. A T_c előtti állapot $k+1$ volt, annak foglaltsági ideje pedig G_{k+1} feltételes várható értékkel rendelkezik. Az, hogy mi történt ezután c függ k-tól is, és attól, hogy az első állapotot k vagy $k+2$ előzi meg.

Legyen először $k \leq s-2$. Ha az első állapotváltás k-ba történik, ami $P_{k+1,k}$ valószínűséggel következhet be, c vagy éppen most érkezett meg a rendszerbe $\frac{1}{k+1}$ valószínűséggel, vagy már korábban, $\frac{k}{k+1}$ valószínűséggel, és az előzetes élettartama ugyanolyan eloszlást követ, mint egy olyan igényé, aki a távozáskor k db igényt hagy hátra. Ezek nyilvánvaló következményei az exponenciális eloszlás örökfjú tulajdonságának. Másrészt, ha az első átmenet $k+2$-be történik, ami $Pk+1, k+2$ valószínűséggel fordul elő.

$$F_k = P_{k+1,k}(k+1)^{-1}(G_{k+1} + kG_{k+1} \star F_{k-1})$$

teljesül minden $j = 0, 1, ..., s-2esetn$, ahol $\star$ az eloszlásfüggvények konvolúcióját adja meg. $k = s+1$ esetén hasonlóan látható, hogy

$$F_s = P_{s,s-1}s^{-1}[G_s] + (s-1)G_s \star F_{s-2}P_{s,s+1}s^{-1}[(s-1)G_s \star F_s + G_s \star 0]$$

Végül $k \geq s$-re

$$F_k = P_{k+1,k}G_{k+1} \star F_{k-1} + P_{k+1,k+2}s^{-1}[(s-1)G_{k+1} \star F_{k+1} + G_{k+1} \star H_{k+1-s}].$$

Alkalmazzuk F_k a Laplace-Stieltjes transzformációt, $\varphi_k(\theta) := \int\limits_0^\infty e^{-\theta_t \mathrm{d}F_k(t)}$. Azt kapjuk, hogy $0 \leq k \leq s-2$-re

$$\varphi_k(\theta) = ((k+1)\mu + \lambda + s)^{-1}(\mu + k\mu\varphi_{k-1}(\theta) + \lambda\varphi_{k+1}(\theta))$$

$k = s-1$-re

$$\varphi_{s-1}(\theta) = (s\mu + \lambda + s)^{-1}(\mu + (s-1\mu\varphi_{s-2}(\theta) + (\lambda/s)((s-1)\varphi_s(\theta) + s\mu/(s\mu+\theta)))$$

$k \geq s$-re pedig

$$(s\mu+\lambda+s)^{-1}(s\mu\varphi_{k-1}(\theta)+(\lambda/s)((s-1)\mu\varphi_{k+1}(\theta)+(\lambda/s)((s-1)\varphi_s(\theta)+s\mu/(s\mu+\theta))^{k+2-s})$$

Még egy további feltétel nyerhető az $F(t)$ kifejezésének segítségével:

$$F(t) = P_{s-1}(1-e^{-\mu t}) + (1-P_{s-1})(1-e^{-\mu t}) \star (1-e^{-(s\mu-\lambda)t})$$

A φ_k értékek φ_0 segítségével kiszámolhatók, azt kapjuk, hogy

$$\varphi_k(\theta) = \mu(\mu+\theta)^{-1}(s\mu/(s\mu+\theta))^{[k-s+1]^+}.$$

Ebből már könnyen visszanyerhető a bizonyítandó azonosság.

$\square$

5. fejezet

M/G/1 rendszer

Ebben a fejezetben olyan sorbanállási rendszereket fogunk vizsgálni [7] alapján, ahol a beérkezési folyamat egy λ paraméterű Poisson-folyamat, az egyes kiszolgálási idők pedig valami "általános" eloszlást követnek, egymástól függetlenek, és azonos eloszlásúak. Erről az általános eloszlásról annyit teszünk csak fel, hogy véges várható értékű, az eloszlásfüggvénye kétszer folytonosan deriválható, és a 0-ben felvett értéke 0. Továbbá egyetlen kiszolgáló egység van, amely a FIFO protokollt követi, azaz az egyes igények a beérkezésük sorrendje szerint kerülnek sorra.

Tegyük fel, hogy a váróterem mérete N, vagyis ha egy beérkező igény $N+1$ másikat lát a rendszerben (az egyiket épp kiszolgálják, a többi a sorban áll), akkor távozik, és később sem tér vissza.

Jelöljük $n_r(t)$-rel a rendszerben maradó igények számát az t idővel az r. távozás után. A távozáskor hátrahagyott igények száma $n_r = n_r(0+)$. Legyen l_r az r. és $r+1$. távozás között eltelt idő, továbbá jelöljük $H_{r+1}(t,j)$ n_{r+1} és l_r közös sűrűségfüggvényét, azaz $H_{r+1}(t,j) : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, és minden $a, b \in \mathbb{R}_+$, $j \in \mathbb{N}$ esetén

$$P(n_{r+1} = j, a < l_r < b) = \int\limits_a^b H_{r+1}(t,j)\mathrm{d}t$$

. Legyen $H_r(t)$ l_r sűrűségfüggvénye, és $P_r(j) = P(n_{r+1} = j)$ minden $j \in \mathbb{N}$ esetén.

Legyen c_r az r. igény kiszolgálási ideje, $c = c_1$.

Tegyük fel, hogy a $P_r(j)$ valószínűségi változóknak létezik minden j-re egy P_j határértékük, amennyiben $r \to \infty$. Ilyen mindig létezik, ha a kiszolgálás "várhatóan elég gyors", egészen pontosan ez azt jelenti, hogy $N = \infty$ esetén $\lambda \cdot E(s) < 1$-re, valamint $N < \infty$ esetben mindig. Ezen feltételek bizonyítása megtalálható (...)-ben.

5.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy adott egy sorbanállási rendszer, ami rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

- *A váróterem mérete* $N \in \mathbb{N}^+ \cup \{\infty\}$.
- *A beérkezési folyamat* λ *paraméterű Poisson-folyamat.*
- *A kiszolgálási idők egymástól független, azonos eloszlású véges várható értékű valószínűségi változók, eloszlásfüggvényük* $F(x)$*, ami kétszer folytonosan deriválható, és* $F(0) = 0$*. Legyen az első igény kiszolgálási idejét megadó valószínűségi változó* c*.*
- *Ha* $N = \infty$*, akkor* $\lambda E(c) < 1$

Ekkor a rendszerben távozáskor hátrahagyott igények száma pontosan akkor független a következő távozásig eltelő időtől határértékben, ha $N = \infty$ *és a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású.*

Bizonyítás: Ha az r. távozó üres rendszert hagy hátra, akkor a következő távozásig eltelő időt megkaphatjuk a következő beérkezésig eltelő idő, és c_{r+1} összegeként, míg ha a távozás utána a rendszerben maradt igény, akkor csupán c_{r+1} ideig kell várni. Ez alapján:

$$H_{r+1}(t) = P_r(0) \cdot \int_0^t \lambda \cdot e^{-\lambda(t-x)} \mathrm{d}B(x) + (1 - P_r(0)) \cdot B'(t)$$

Mivel $\lim\limits_{r\to\infty} P_r(0) = P_0$ létezik, így a fenti egyenlet alapján $\lim\limits_{r\to\infty} H_{r+1}(t) = H(t)$ is létezik, és értéke

$$H(t) = P_0 \cdot \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda x} \mathrm{d}B(x) + (1 - P(0)) \cdot B'(t)$$

Hasonlóan $H_{r+1}(t, j)$ is kiszámolható: Ha az r. távozó nem hagy hátra igényt, akkor ahhoz, hogy egy t idő múlva $j < N$ igény maradjon hátra, az kell, hogy beérkezzen egy igény valami $\tau < t$ időpontban, majd a fennmaradó $t - \tau$ idő alatt további j beérkezés történjen. Ha pedig az r. távozó $m \geq 1$ igényt hagyott hátra, akkor t idő alatt $j - m + 1$ igénynek kell beérkeznie. Abban az esetben, ha $j = N$, akkor a fenti érvelés úgy módosul, hogy a beérkezett igények száma legalább annyi, mint azt részleteztük. Tehát a következő formulák adhatók:

Ha $0 \leq j \leq N-1$, akkor

$$H_{r+1}(t,j) = P_r(0)\int_0^t \lambda e^{-\lambda\tau}\frac{\lambda^j(t-\tau)^j}{j!}e^{-\lambda(t-\tau)}B'(t-\tau)\mathrm{d}\tau +$$

$$+\sum_{m=1}^{j+1} P_r(m)\frac{(\lambda t)^{j+1-m}}{(j+1-m)!}e^{-\lambda t}B'(t),$$

ha pedig $j = N$, akkor

$$H_{r+1}(t,N) = P_r(0)\int_0^t \lambda e^{-\lambda\tau}\left[\sum_{i=N}^{\infty}\frac{\lambda^i(t-\tau)^i}{i!}\right]e^{-\lambda(t-\tau)}B'(t-\tau)\mathrm{d}\tau +$$

$$+\sum_{m=1}^{N} P_r(m)\sum_{i=N+1-m}^{\infty}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}B'(t).$$

Ha $r \to \infty$, akkor hasonlóan a korábbi esethez, a határértékek itt is léteznek, és nyertünk egy formulát $\lim\limits_{r\to\infty} H_r(t,j) = H(t,j)$ kiszámolásához.

A tétel bizonyításához tehát azt kell megvizsgálnunk, hogy milyen feltételek esetén állhat fenn a

$$H(t,j) = H(t)P_j$$

azonosság minden $t \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$-re. Vizsgáljuk először a $j = 0$ esetet.

$$P_1B'(t)e^{-\lambda t} + P_0B(t)\lambda e^{-\lambda t} = P_0(1-P_0)B'(t) + P_0\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda x}\mathrm{d}B(x) \tag{5.1}$$

Deriváljuk mindkét oldalt t szerint, ekkor azt kapjuk, hogy

$$P_1e^{-\lambda t}B''(t) + \lambda(P_0-P_1)B'(t)e^{-\lambda t} - \lambda^2P_0B(t)e^{-\lambda t} =$$

$$= P_0(1-P_0)B''(t) + \lambda P_0B'(t) - \lambda^2P_0e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda x}\mathrm{d}B(x).$$

A fenti két egyenletből kiküszöbölve az integrált

$$B''(t)(P_0(1-P_0)-P_1e^{-\lambda t})+\lambda P_0B'(t)(1-e^{-\lambda t})=0$$

adódik. Megoldva a $B'(t)$-re vonatkozó differenciálegyenletet:

$$B'(t)=Ce^{-\frac{\lambda t}{1-P_0}}\left[\frac{P_0(1-P_0)-P_1e^{-\lambda t}}{P_0(1-P_0)-P_1}\right]^{\frac{P_0(1-P_0)-P_1}{P_1(1-P_0)}},$$

ahol C pozitív konstans. Ebből az következik, hogy $B(0+)>0$. Most tartsunk 0-ba jobbról t-vel (5.1)-ben. Ekkor az adódik belőle, hogy

$$P_0(1-P_0)=P_1,$$

így a differenciálegyenletünk az alábbi egyszerűbb alakban írható fel:

$$(1-P_0)B''(t)+\lambda B'(t)=0,$$

amiből

$$B(t)=1-e^{-\frac{\lambda t}{1-P_0}} \tag{5.2}$$

Tehát a kiszolgálási időnek exponenciális eloszlást kell követnie ahhoz, hogy a tételben szereplő két mennyiség független legyen egymástól.

Ha $N<\infty$, akkor kiszámolható, hogy

$$P_0=\frac{1-\lambda E(c)}{1-(\lambda E(c))^{N+1}}.$$

Ennek bizonyítása megtalálható [**?**, 2]ben. Azonban (5.2)-ből az következik, hogy $P_0=1-\lambda E(c)$. Így az $N<\infty$ esetben nem teljesülhet a függetlenség.

Ha $N=\infty$, akkor jól ismert, hogy $P_0=1-\lambda E_c$, bármi is legyen a kiszolgálási idő eloszlása. Megmutatható, hogy ha a $j=0$ eset teljesül, akkor bármilyen j-re is igaz a függetlenség, egyszerűen a kapott eloszlásfüggvényt kell visszahelyettesíteni a megfelelő egyenletbe. □

5.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy adott egy sorbanállási rendszer, ami rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

- *A váróterem mérete $N\in\mathbb{N}^+\cup\{\infty\}$.*
- *A beérkezési folyamat λ paraméterű Poisson-folyamat.*

- *A kiszolgálási idők egymástól független, azonos eloszlású véges várható értékű valószínűségi változók, eloszlásfüggvényük $F(x)$, ami kétszer folytonosan deriválható, és $F(0) = 0$. Legyen az első igény kiszolgálási idejét megadó valószínűségi változó c.*

- *Ha $N = \infty$, akkor $\lambda E(c) < 1$*

Ekkor két egymást követő szomszédos távozások között eltelő időtartamok határértéke független egymástól.

Bizonyítás: Legyen $P_{r+1}(n|\tau)$ annak az eseménynek a feltételes valószínűsége, hogy az $(r+1)$. távozás után n igény marad a rendszerben, feltéve, hogy $l_r = \tau$. Továbbá legyen $H_{r+2}(t|\tau)$ l_{r+1} feltételes sűrűségfüggvénye az $l_r = \tau$ feltételre vonatkozóan. Bontsuk fel $H_{r+2}(t|\tau)$-et aszerint, hogy az $(r+1)$. távozó üres rendszert hagy-e hátra. Ekkor

$$H_{r+2}(t|\tau) = P_{r+1}(0|\tau)\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda x}\mathrm{d}B(x) + (1 - P_{r+1}(0|\tau))B'(t)$$

adódik. Tartsunk r-rel a végtelenbe, ekkor

$$H(t|\tau) = P(0|\tau)\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda x}\mathrm{d}B(x) + (1 - P(0|\tau))B'(t)$$

Az egymást követő, szomszédos távozások közötti időintervallumok (határértékben) pontosan akkor függetlenek egymástól, ha $H(t|\tau) = H(t)$. Összevetve az eddigi eredményeket, ez pontosan akkor teljesül, ha

$$(P(0|\tau) - P_0)B'(t) - (P(0|\tau) - P_0)\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda x}\mathrm{d}B(x) = 0$$

Ez csak kétféle esetben fordulhat elő:

(i) $P(0|\tau) = P_0$, vagy

(ii) $B'(t) = \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda x}\mathrm{d}B(x)$.

Ha (i) áll fenn, akkor épp az előző tételben vizsgálandó azonosságot kapjuk vissza $j = 0$ esetén, ekkor $N = \infty$, és c exponenciális eloszlású.

Ha (ii) teljesül, akkor deriválva és rendezve azt kapjuk, hogy $B''(t) = 0$, vagyis $B'(t)$ konstans. Ez viszont ellentmond azzal, hogy B eloszlásfüggvény. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] Baccelli, F., and Bremaud, P. (2003) Elements of Queueing Theory: Palm Martingale Calculus and Stochastic Recurrences, Springer, Berlin.

[2] Miyazawa, M., Palm calculus, reallocatable gsmp and insensitivity structure Queueing networks: a fundamental approach2010

[3] Burke, P.J. (1956) The output of a stationary queueing system, Operations Research, 4, 699– 704.

[4] Kelly, F.P. (1979) Reversibility and Stochastic Networks. J. Wiley & Sons, New York.

[5] Mecke, J. (1967) Stationäre zufülige Masse auf lokalkompakten Abelschen Gruppen, Z. Wahrscheinlich. verw. Geb. 9 , 36–58.

[6] Serfozo, R. (1999) Introduction to Stochastic Networks, Springer–Verlag, New York.

[7] P. D. Finch Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological) Vol. 21, No. 2 (1959), pp. 375-380

[8] Burke, P. J. The Output Process of a Stationary $M/M/s$ Queueing System. Ann. Math. Statist. 39 (1968), no. 4, 1144–1152.

[9] Zazanis, M. A. From the Stationary to the Palm Version of the M/M/s Queue

[10] Palm, C. (1943) Intensitiitsschwankungen im Fernsprechverkehr, Ericsson Techniks 44, pp. 1-189.