Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Reakció-diffúziós egyenletek megoldhatósága

Szakdolgozat
Matematikus MSc

Mihálka Éva Zsuzsanna

Témavezető: Karátson János, egyetemi tanár
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2016

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Karátson Jánosnak a dolgozat elkészítése során nyújtott segítségéért. Iránymutatásával és türelmével hozzájárult ahhoz, hogy ez a dolgozat elkészülhessen. Hálásan köszönöm a konzultációk során kapott hasznos tanácsokat és ötleteket, a kérdéseimre adott készséges válaszokat, valamint a dolgozat nagyon alapos áttekintését.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A parciális differenciálegyenleteknek számtalan típusát különböztetjük meg. Ezek közül a reakció-diffúziós egyenletek szemilineáris másodrendű egyenletek, melyek többféle modellben is előfordulnak. Ilyenek a kémiai reakciót és diffúziót egyszerre leíró modellek, de például a Schrödinger-egyenlet (mind az időfüggő és az időfüggetlen) is ilyen típusú egyenlet. Ezen felül populációdinamikai modellekben is ilyen feladatok fordulnak elő. Az alapvető különbséget a feladattípusok között a nemlineáris rész adja.

A kémiai reakciók során az abban részt vevő anyagok koncentrációja változik, a változás mértéke pedig a pillanatnyi koncentráció függvénye. Koncentrációváltozást azonban nem csak a kémiai reakció okoz, hanem a diffúzió és a konvekció is. A diffúzió a koncentrációgradiens hatására bekövetkező anyagtranszport. A legegyszerűbb modellekben nem foglalkoznak sem a diffúzióval, sem a konvekcióval. Azonban számos esetben ez nem tehető meg, sőt, éppen a diffúzió okozza a különleges viselkedést (oszcilláció, mintázatok megjelenése). Ezért érdekes és fontos az ilyen típusú differenciálegyenletek vizsgálata. A dolgozatban az egyértelmű megoldás esetéről lesz szó, ami determinisztikus modellt jelent.

Az első fejezetben röviden összefoglalom a feladatok értelmezéséhez szükséges kémiai hátteret. A második fejezetben a felhasznált alapfogalmak és megoldhatósági tételek szerepelnek. A harmadik fejezet témája a stacionárius feladat megoldása Dirichlet-, Neumann- és vegyes peremfeltételek esetében. Az egzisztenciát egy komponens és rendszer esetében is vizsgáljuk. A negyedik fejezet az időfüggő feladatokkal foglalkozik. Ebben az általánosabb alakú nemlineáris részt tartalmazó egyenletek megoldhatóságát az operátorfélcsoportok elméletére támaszkodva igazoljuk.

1.1. Kémiai modellek

A fizikai kémiai jelenségekről tartalmas összefoglalót ad az [1] könyv. A kémiai reakciót leíró sztöchiometriai egyenlet általános alakja

$$\sum_{i=1}^{N} \nu_i A_i = 0,$$

ahol A_i az i-edik anyag kémiai képlete, ν_i pedig a hozzá tartozó sztöchiometriai együttható. A kiindulási anyagokra $\nu < 0$, míg a termékekre $\nu > 0$. A reakciósebesség definíció szerint

$$v = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t},$$

ahol V jelöli a térfogatot, ξ pedig a reakciókoordináta, mely a reakció előrehaladását méri. Tetszőleges i esetén $\nu_i \mathrm{d}\xi = \mathrm{d}n_i$, ahol n_i az i-edik speciesz anyagmennyiségét jelöli. Áttérve koncentrációra: $[A_i] = n_i/V$, és így a reakciósebesség

$$v = \frac{1}{\nu_i}\frac{\mathrm{d}[A_i]}{\mathrm{d}t}. \tag{1.1}$$

Általában egy kémiai reakció összetett, és több ún. elemi reakcióból tevődik össze. Gyakori, hogy a reakciósebesség arányos a kiindulási anyagok koncentrációinak megfelelő hatványon vett szorzatával, ez a tömeghatás törvénye. Az arányossági tényező a reakciósebességi együttható, mely adott hőmérsékleten állandó. Vagyis egy

$$\sum_{j=1}^{M} \nu_j A_j = \sum_{k=1}^{N-M} \mu_k B_k$$

reakció esetén, ahol a bal oldalon szerepelnek a kiindulási anyagok, a jobb oldalon a termékek (és most $\nu_j, \mu_k > 0$), a reakciósebesség gyakran a következő formában írható fel:

$$v = k \prod_{j=1}^{M} [A_j]^{\alpha_j}.$$

Az α_j kitevő a reakció rendűsége az i-edik anyagra nézve. A rend csupán tapasztalati mennyiség, nem vezethető le más tulajdonságokból. Bizonyos reakciók esetében megegyezik a megfelelő sztöchiometriai együtthatóval. Összetett reakciók esetében az is lehetséges, hogy a termék koncentrációja is megjelenik a sebességi egyenletben, valamint a reakciósebesség sem adható meg mindig a fenti formulával.

Például az elemi hidrogén és bróm gázfázisú reakciója ([1]):

$$\mathrm{H_2(g) + Br_2(g) \longrightarrow 2HBr(g)}$$

Az ehhez tartozó sebességi egyenlet pedig:

$$v = k\frac{[\mathrm{H_2}][\mathrm{Br_2}]^{3/2}}{[\mathrm{Br_2}] + k'[\mathrm{HBr}]}.$$

Az ilyen típusú sebességi egyenlet mindig összetett mechanizmusra utal.

Az (1.1) egyenlet alapján az i-edik anyag koncentrációjának megváltozása:

$$\frac{\mathrm{d}[A_i]}{\mathrm{d}t} = \nu_i v = \nu_i k \prod_{j=1}^{M} [A_j]^{\alpha_j}, \qquad (j = 1, \ldots, M)$$

vagyis az $[A_i]$ koncentrációkra egy (általában nemlineáris) differenciálegyenletet kapunk. Mindez olyan körülmények között teljesül, amikor a reakcióelegyet homogénnek tekintjük. Ha figyelembe vesszük a diffúziót, sőt akár a konvekciót is, akkor a fenti sebességi egyenletet a diffúziós egyenlettel (Fick II. törvénye, ld. [1]) kombinálva jutunk el az ún. reakció-diffúziós egyenlethez, melynek általános alakja

$$\partial_t u = \operatorname{div}(a\nabla u) - \mathbf{b}\nabla u - q(x,u) + g. \tag{1.2}$$

A fenti egyenletben u jelöli a koncentrációt, a jobb oldalon az első tag a diffúziót, a második a konvekciót, a harmadik pedig a reakciót írja le. Ha a sebességi egyenletben több anyag koncentrációja is szerepel, akkor parciális differenciálegyenlet-rendszert kapunk.

Ilyen típusú egyenletek nemcsak kémiai reakcióknál fordulnak elő, hanem például populációdinamikai modellek esetében is. Ezek megoldhatóságáról, illetve a megoldás egyértelműségéről lesz a továbbiakban szó.

2. Elméleti összefoglaló

A dolgozat nagy részben az $L^p(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ és $H^1(\Omega)$ függvényterek néhány alapvető tulajdonságára, illetve a közöttük lévő kapcsolatra épít ([7]).

2.1. $L^p(\Omega)$ és Szoboljev-terek

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány.

2.1.1. Tétel. (Szoboljev-féle beágyazási tétel) *Ha $n > 2$ és $2 \le p \le \frac{2n}{n-2}$, vagy ha $n = 2$ és $2 \le p < \infty$, akkor $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, és létezik olyan K_p állandó, hogy tetszőleges $f \in H_0^1(\Omega)$-ra $||f||_{L^p(\Omega)} \le K_p ||f||_{H_0^1(\Omega)}$, valamint tetszőleges $g \in H^1(\Omega)$-ra $||g||_{L^p(\Omega)} \le K_p ||g||_{H^1(\Omega)}$.*

2.1.2. Állítás. *Ha $1 \le p \le s$, akkor $L^s(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, és létezik $K_{\Omega,p,s}$ állandó, hogy minden $f \in L^s(\Omega)$-ra $||f||_{L^p(\Omega)} \le K_{\Omega,p,s} ||f||_{L^s(\Omega)}$.*

Bizonyítás. Legyen $f \in L^s(\Omega)$, vagyis $\int\limits_\Omega |f|^s = ||f||^s_{L^s(\Omega)} < \infty$. Ekkor $\frac{s}{p} \ge 1$, és így a Hölder-egyenlőtlenség alapján

$$\int\limits_\Omega |f|^p = \int\limits_\Omega 1 \cdot |f|^p \le \left(\int\limits_\Omega 1 \right)^{\frac{s-p}{s}} \cdot \left(\int\limits_\Omega (|f|^p)^{\frac{s}{p}} \right)^{\frac{p}{s}} = c_{\Omega,p,s} \cdot ||f||^p_{L^s(\Omega)} < \infty,$$

azaz $f \in L^p(\Omega)$, és azt is megkaptuk, hogy $||f||^p_{L^p(\Omega)} \le c_{\Omega,p,s} ||f||^p_{L^s(\Omega)}$. $\square$

Megjegyzés. Ha $n > 2$ és $1 \le p \le \frac{2n}{n-2}$, vagy $n = 2$ és $1 \le p < \infty$, akkor Ω korlátossága miatt $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, ill. $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, és létezik olyan $c_{\Omega,p}$ állandó, hogy tetszőleges $f \in H_0^1(\Omega)$ esetén $||f||_{L^p(\Omega)} \le c_{\Omega,p} ||f||_{H_0^1(\Omega)}$, valamint tetszőleges $g \in H^1(\Omega)$ esetén $||g||_{L^p(\Omega)} \le c_{\Omega,p} ||g||_{H^1(\Omega)}$. Ugyanis $p \ge 2$ esetén a Szoboljev-féle beágyazási tétel éppen ezt mondja ki, ha $p < 2$, akkor pedig az 2.1.2. állítás alapján $H_0^1(\Omega), H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, és tetszőleges $f \in H_0^1(\Omega)$-ra és $g \in H^1(\Omega)$-ra $||f||_{L^p(\Omega)} \le c_{\Omega,p} ||f||_{H_0^1(\Omega)}$, ill. $||g||_{L^p(\Omega)} \le c_{\Omega,p} ||g||_{H^1(\Omega)}$.

2.2. Alapfogalmak, alaptulajdonságok

A vizsgált differenciálegyenleteket, illetve a peremérték-feladatokat általában átalakítjuk gyenge alakra, és így absztrakt terekben értelmezett operátoregyenletekhez jutunk. Ezek vizsgálatához szükség lesz néhány új definícióra. Az itt szereplő fogalmak és az állítások bizonyítása a [4] könyvben megtalálhatók. A továbbiakban minden itt szereplő normált tér valós.

2.2.1. Definíció. Legyenek X, Y normált terek, és $F : X \to Y$ nem feltétlenül lineáris operátor. Azt mondjuk, hogy F Gâteaux-deriválható az $u \in X$ pontban, ha

i) tetszőleges $v \in X$ esetén létezik a következő, $\partial_v F(u)$-val jelölt határérték:

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t},$$

ii) az $X \to Y$, $v \mapsto \partial_v F(u)$ leképezés folytonos és lineáris.

Ha F minden $u \in X$ esetén Gâteaux-deriváható u-ban, akkor a második pontban szereplő operátort $F'(u)$-val jelölve egyrészt $F'(u) \in B(X, Y)$, másrészt egy $F' : X \to B(X, Y)$ leképezéshez jutunk.

2.2.2. Példa. Ha $F \in B(X, Y)$, azaz F korlátos lineáris operátor, akkor $\frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = F(v)$, így $\partial_v F(u) = F(v)$, és ez nyilván folytonos és lineáris v-ben. Ezért F minden $u \in X$ pontban Gâteaux-deriváható, és $F'(u) = F$.

2.2.3. Definíció. Legyenek X, Y, Z normált terek, $A : X \to B(Y, Z)$ operátor. Azt mondjuk, hogy A bihemifolytonos, ha tetszőleges rögzített $u, v, w \in X$ és $z \in Y$ esetén az $\mathbb{R}^2 \ni (t, s) \mapsto A(u + tv + sw)z$, $\mathbb{R}^2$-ből Z-be vezető leképezés folytonos.

Ha pl. $\phi : X \to \mathbb{R}$ funkcionál, $X = Y$ és $Z = \mathbb{R}$, akkor $B(Y, Z) = X^*$, és így értelmezhető a $\phi' : X \to X^*$ Gâteaux-derivált bihemifolytonossága.

2.2.4. Definíció. Legyen X Banach-tér, $\phi : X \to \mathbb{R}$ funkcionál. $u, v \in X$ és $t \in [0, 1]$ esetén legyen $\phi_{u,v}(t) = \phi(u + t(v - u))$. Azt mondjuk, hogy ϕ (szigorúan) konvex, ha minden $u, v \in X$ esetén $\phi_{u,v}$ (szigorúan) konvex.

2.2.5. Állítás. *Ha $\phi : X \to \mathbb{R}$ konvex funkcionál Gâteaux-deriválható, akkor minden $u, v \in X$ esetén $\phi(u) - \phi(v) \geq \langle \phi'(v), u - v \rangle$.*

2.2.6. Definíció. Egy $F : X \to X^*$ operátor monoton, ha $\forall u, v \in X$ esetén

$$\langle F(u) - F(v), u - v \rangle \geq 0.$$

Az operátor szigorúan monoton, ha a fenti kifejezésben pontosan akkor áll fenn egyenlőség, ha $u = v$. Végül az operátor egyenletesen monoton, ha létezik $m > 0$, hogy minden $u, v \in X$ esetén $\langle F(u) - F(v), u - v \rangle \geq m||u - v||^2$.

2.2.7. Állítás. *Legyen $\phi : x \to \mathbb{R}$ Gâteaux-deriválható funkcionál. Ekkor ekvivalensek:*

i) ϕ konvex,

ii) $\phi' : X \to X^*$ monoton operátor.

2.2.8. Definíció. Legyen X Banach-tér, $A : X \to X^*$ operátor. Azt mondjuk, hogy A potenciáloperátor, ha létezik $J : X \to \mathbb{R}$ Gâteaux-deriválható funkcionál, melyre $J' = A$. Ekkor J-t az A potenciáljának nevezzük.

Ha a potenciál létezik, akkor az additív konstans erejéig egyértelmű.

2.3. Megoldhatósági tételek

A gyenge alakból kapott operátoregyenletekben szereplő operátorok az előzőekben definiált tulajdonságokkal rendelkezhetnek. Bizonyos monotonitási, korecitivitási illetve differenciálhatósági feltételek teljesülése esetén az egyenletek megoldhatóságára, valamint a megoldás egyértelműségére több tétel is vonatkozik. Ezek közül azok szerepelnek csak itt, amelyeket közvetlenül fel is használunk. További megoldhatósági tételek és az alább szereplő állítások bizonyítása megtalálható a [4] könyvben.

2.3.1. Tétel. *Legyen H valós Hilbert-tér, és tegyük fel, hogy az $F : H \to H$ operátorra a következők teljesülnek:*

i) létezik $m > 0$, hogy $\langle F(u) - F(v), u - v\rangle \geq m||u - v||^2 \qquad (u, v \in H_0^1(\Omega))$, azaz F egyenletesen monoton,

ii) létezik olyan $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ monoton növő függvény, hogy

$$||F(u) - F(v)|| \leq M(r)||u - v|| \qquad (\forall u, v \in H,\ ||u|| \leq r,\ ||v|| \leq r),$$

azaz F lokálisan Lipschitzes.

Ekkor bármely $b \in H$ esetén az $F(u) = b$ operátoregyenletnek egyértelműen létezik megoldása, azaz $u^* \in H$, melyre $F(u^*) = b$.

2.3.2. Tétel. *Legyen H valós Hilbert-tér. Ha az $F : H \to H$ operátorra fennáll, hogy*

i) F Gâteaux-deriválható, F' bihemifolytonos,

ii) minden $u \in H$ esetén $F'(u) \in B(H)$ önadjungált,

iii) létezik $m > 0$, hogy minden $u, h \in H$ esetén $\langle F'(u)h, h\rangle \geq m||h||^2$,

akkor tetszőleges $b \in H$ esetén az $F(u) = b$ operátoregyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in H$ megoldása.

2.3.3. Tétel. *Legyen X reflexív Banach-tér, és $F : X \to X^*$ szigorúan monoton potenciáloperátor. Jelölje egy potenciálját J. Ha $\lim\limits_{||u||\to+\infty} \frac{J(u)}{||u||} = +\infty$, akkor az $F(u) = b^*$ operátoregyenletnek minden $b^* \in X^*$-ra egyértelműen létezik $u^* \in H$ megoldása.*

3. Stacionárius reakció-diffúziós egyenletek

Ebben a fejezetben a dolgozat elején definiált reakció-diffúziós egyenlet (illetve -rendszer) stacionárius megoldásait vizsgáljuk különböző peremfeltételek mellett. Belátjuk, hogy ha a nemlineáris tag eleget tesz bizonyos folytonossági, növekedési és monotonitási feltételeknek, akkor a stacionárius megoldás egyértelműen létezik.

Ha a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(a\nabla u) - \mathbf{b}\nabla u - q(x,u) + g$$

reakció-diffúziós egyenlet időben állandó, azaz stacionárius megoldásait keressük, akkor az egyenlet jobb oldalát nullával egyenlővé téve elliptikus parciális differenciálegyenlethez (vagy több ismeretlen esetében -rendszerhez) jutunk.

3.1. Egy komponens

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány. Ebben a szakaszban azzal az esettel foglalkozunk, amikor egyetlen komponensre vonatkozik az egyenlet.

Tekintsük a következő szemilineáris feladatot:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\nabla u) + \mathbf{b}\cdot\nabla u + q(x,u) = g, \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \tag{3.1}$$

A peremfeltétel tehát Dirichlet-peremfeltétel. Később más típusú peremfeltételekkel is foglalkozunk. A fenti egyenletben az első két tag lineáris, míg a harmadik többnyire nem az, és a q-ra vonatkozó növekedési feltétel általában az $|u|$-nak a $p-1$-edik hatványát tartalmazza, ahol $p > 1$ valós szám. Ezen p értékétől függően két osztályba sorolhatjuk a feladatokat, és a megoldás létezését is eszerint vizsgálhatjuk.

Mivel kémiai reakciók esetében a keresett u megoldás koncentrációt jelöl, a megoldásnak csak akkor van értelme, ha az nemnegatív. A $q(x,\xi)$ függvényről feltesszük, hogy ξ-ben monoton növő. Ekkor a (3.1) feladat ekvivalens alakja

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\nabla u) + \mathbf{b}\cdot\nabla u + \frac{q(x,u)-q(x,0)}{u}u = g - q(x,0), \\ u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Ha u^* a fenti egyenlet megoldása, akkor megoldása az alábbi lineáris egyenletnek is:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a\nabla u) + \mathbf{b}\cdot\nabla u + h(x)u = \tilde{g}, \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

ahol $h(x) := \dfrac{q(x,u^*) - q(x,0)}{u^*} \geq 0$, mivel $q(x,\xi)$ a második változójában monoton növő, és $\tilde{g}(x) := g(x) - q(x,0)$. Ha $\varphi \geq 0$ és $\tilde{g} \geq 0$, akkor a (3.3) lineáris Dirichlet-feladat bármely megoldása, ezáltal u^* is nemnegatív (ez a maximum-elv, ld. [3]).

Tekintsük most a homogén peremfeltételt, azaz legyen $\varphi = 0$. A (3.1) feladatban szereplő egyenletet $v \in C_0^1(\Omega)$ függvénnyel szorozzuk, majd Ω-n integrálunk. A Gauss-Osztrogradszkij-tétel és a peremfeltétel felhasználásával azt kapjuk, hogy minden $v \in C_0^1(\Omega)$ esetén

$$\int_\Omega (a\nabla u\cdot\nabla v + (\mathbf{b}\cdot\nabla u)v + q(x,u)v) = \int_\Omega gv.$$

Mivel $C_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ sűrű, így a (3.1) feladat gyenge alakja a következő: olyan $u \in H_0^1(\Omega)$ függvényt keresünk, hogy tetszőleges $v \in H_0^1(\Omega)$ esetén

$$\int_\Omega (a\nabla u\cdot\nabla v + (\mathbf{b}\cdot\nabla u)v + q(x,u)v)\;\mathrm{d}x = \int_\Omega gv\,\mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

3.1.1. A $p \geq 2$ eset Dirichlet-peremfeltétellel

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány. Tegyük fel, hogy a (3.1) feladatban szereplő függvények a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

3.1.1. Feltételek.

1. $a \in L^\infty(\Omega), a(x) \geq m > 0 \qquad$ (m.m. $x \in \Omega$),
2. $\mathbf{b} \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$, $\mathrm{div}(\mathbf{b}) = 0$,
3. $q : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, rögzített $x \in \Omega$ mellett $q(x,\xi)$ ξ-ben monoton növő, és léteznek olyan $2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$, ha $n > 2$, ill. $2 \leq p < \infty$ ha $n = 2$, és $\alpha_1, \beta_1 \geq 0$ állandók, hogy minden $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$|q(x,\xi_1) - q(x,\xi_2)| \leq (\alpha_1 + \beta_1(|\xi_1| + |\xi_2|)^{p-2})|\xi_1 - \xi_2|.$$

3.1.2. Állítás. *Ha $\mathbf{b} \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$ divergenciamentes vektormező, azaz div$(\mathbf{b}) = 0$, akkor $u \in H_0^1(\Omega)$ esetén $\int_\Omega (\mathbf{b}\cdot\nabla u)u = 0$.*

Bizonyítás.

Egyrészt $\mathrm{div}(\mathbf{b}u^2) = u^2\mathrm{div}(\mathbf{b}) + 2(\mathbf{b}\cdot\nabla u)u = 2(\mathbf{b}\cdot\nabla u)u$. Másrészt a Gauss-Osztrogradszkij-tételből:

$$\int_\Omega (\mathbf{b}\cdot\nabla u)u = \frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{div}(\mathbf{b}u^2) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (\mathbf{b}u^2)\cdot\nu \,\mathrm{d}s = 0,$$

mivel $u_{|\partial\Omega} = 0$ nyom-értelemben.

$\square$

3.1.3. Állítás. *A 3.1.1.-beli feltételek teljesülése esetén a (3.1) feladatnak minden $g \in L^2(\Omega)$ esetén egyértelműen létzik gyenge megoldása.*

Bizonyítás. A 3. tulajdonságból következik, hogy léteznek olyan $\alpha, \beta \geq 0$ konstansok, mellyel $|q(x,\xi)| \leq \alpha + \beta|\xi|^{p-1}$.

Az egyenlet jobb oldalából kapható $v \mapsto \int_\Omega gv$ leképezés nyilván lineáris, és korlátos is: $|\int_\Omega gv| \leq ||g||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} \leq c_\Omega||g||_{L^2(\Omega)}||v||_{H_0^1(\Omega)}$. Így minden $g \in L^2(\Omega)$ függvényhez egyértelműen létezik $b \in H_0^1(\Omega)$, hogy $\int_\Omega gv = \langle b, v\rangle_{H_0^1}$.

Továbbá a $v \mapsto \int_\Omega (a\nabla u\nabla v + (\mathbf{b}\cdot\nabla u)v + q(x,u)v)$ leképezés rögzített u mellett v-ben lineáris, és ez a funkcionál korlátos (azaz folytonos). Ugyanis tagonként becsülve:

$$\int_\Omega |a\nabla u\nabla v| \leq c_a\Big|\Big||\nabla u|\Big|\Big|_{L^2(\Omega)} + \Big|\Big||\nabla v|\Big|\Big|_{L^2(\Omega)} = c_a||u||_{H_0^1}||v||_{H_0^1}, \tag{3.5}$$

ahol $|a| \leq c_a$, kihasználva a korlátosságát. Továbbá $|\mathbf{b}\cdot\nabla u| \leq |\mathbf{b}|\cdot|\nabla u| \leq c_b|\nabla u|$, hiszen $\mathbf{b}$ is korlátos. Ezáltal

$$\int_\Omega |(\mathbf{b}\cdot\nabla u)v| \leq c_b\Big|\Big||\nabla u|\Big|\Big|_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} \leq c_b c_\Omega||u||_{H_0^1}||v||_{H_0^1}.$$

Végül a Hölder-egyenlőtlenség alapján (q az $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ összefüggésben szereplő q, és ezért $p/q = p-1$):

$$\begin{aligned}\int_\Omega |q(x,u)v| \,\mathrm{d}x &\leq \int_\Omega (\alpha|v| + \beta|u|^{p-1}|v|)| \leq \alpha||v||_{L^1(\Omega)} + \beta\left(\int_\Omega |u|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\cdot\left(\int_\Omega |v|^p\right)^{1/p} \\ &= \alpha\cdot||v||_{L^1(\Omega)} + \beta||u||^{p/q}_{L^p(\Omega)}\cdot||v||_{L^p(\Omega)} \leq (\alpha c_{\Omega,1} + c^{p-1}_{\Omega,p}||u||^{p-1}_{H_0^1})||v||_{H_0^1}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

A Riesz-féle reprezentációs tétel szerint tehát egyértelműen létezik olyan $F(u) \in H_0^1(\Omega)$, hogy $\int\limits_\Omega (a\nabla u\nabla v + (\mathbf{b}\cdot\nabla u)v + q(x,u)v) = \langle F(u), v\rangle_{H_0^1(\Omega)}$ minden $v \in H_0^1(\Omega)$-ra. Ezáltal a feladat gyenge alakja $\langle F(u), v\rangle_{H_0^1} = \langle b, v\rangle_{H_0^1}$ alakra hozható. Mivel ez az egyenlet minden $v \in H_0^1(\Omega)$ esetén fennáll, így eljutunk a következő operátoregyenlethez:

$$F(u) = b$$

Elegendő azt belátni, hogy az $F : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ operátorra teljesülnek a 2.3.1. tétel feltételei.

Az egyenletes monotonitás igazolásához bontsuk fel az F operátort három részre: $F = A + B + N$, ahol $\langle A(u), v\rangle = \int\limits_\Omega a\nabla u\cdot\nabla v$, $\langle B(u), v\rangle = \int\limits_\Omega (\mathbf{b}\nabla u)v$, és $\langle N(u), v\rangle = \int\limits_\Omega q(x,u)v$.

A és B lineáris operátorok, így áttérve a $h = u-v$ jelölésre $\langle A(u)-A(v), u-v\rangle = \langle A(h), h\rangle = \int\limits_\Omega a|\nabla h|^2 \geq m||h||^2_{H_0^1(\Omega)} = m||u-v||^2_{H_0^1(\Omega)}$, felhasználva az a-ra szabott feltételt.

A második tag esetében a 3.1.2. állítás alapján azt kapjuk, hogy $\langle B(u)-B(v), u-v\rangle = \langle B(h), h\rangle = \int\limits_\Omega (\mathbf{b}\cdot\nabla h)h = 0$. Végül $\langle N(u)-N(v), u-v\rangle = \int\limits_\Omega (q(x,u)-q(x,v))(u-v) \geq 0$, mivel $q(x,\xi)$ ξ-ben monoton nő, így az integrandus nemnegatív.

Tehát $\langle F(u)-F(v), u-v\rangle_{H_0^1} \geq m||u-v||^2_{H_0^1}$, vagyis F egyenletesen monoton.

A 2.3.1. tételben szereplő második feltétel, hogy az F operátor lokálisan Lipschitzes. Ennek igazoláshoz érdemes ismét tagonként vizsgálódni. Egyrészt tetszőleges $z \in H_0^1(\Omega)$ esetén $||z||_{H_0^1} = \sup\limits_{||v||_{H_0^1}=1} \langle z, v\rangle_{H_0^1}$. Másrészt $\langle A(u)-A(v), h\rangle = \langle A(u-v), h\rangle = \int\limits_\Omega a(\nabla u - \nabla v)\nabla h \leq c_a||u-v||_{H_0^1}\cdot||h||_{H_0^1}$, emiatt $||A(u)-A(v)|| \leq \sup\limits_{||h||_{H_0^1}=1} c_a||u-v||_{H_0^1}\cdot||h||_{H_0^1} = c_a||u-v||_{H_0^1}$.

Hasonlóan, $\langle B(u)-B(v), h\rangle = \langle B(u-v), h\rangle = \int\limits_\Omega (\mathbf{b}\cdot(\nabla u-\nabla v))h \leq c_b c_\Omega||u-v||_{H_0^1}\cdot||h||_{H_0^1}$, ahonnan $||B(u)-B(v)|| \leq \sup\limits_{||h||_{H_0^1}=1} c_b c_\Omega||u-v||_{H_0^1}||h||_{H_0^1} = c_b c_\Omega||u-v||_{H_0^1}$.

Végül a nemlineáris tagra azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\langle N(u)-N(v), h\rangle = \int\limits_\Omega (q(x,u)-q(x,v))h &\leq \int\limits_\Omega (\alpha_1 + \beta_1(|u|+|v|)^{p-2})|u-v||h| \\ &\leq \alpha_1||u-v||_{L^2(\Omega)}||h||_{L^2(\Omega)} + \beta_1|||u|+|v|||^{p-2}_{L^p(\Omega)}\cdot||u-v||_{L^p(\Omega)}||h||_{L^p(\Omega)} \\ &\leq c_\Omega^2\alpha_1||u-v||_{H_0^1}||h||_{H_0^1} + \beta_1 c_{\Omega,p}^p(||u||_{H_0^1}+||v||_{H_0^1})^{p-2}||u-v||_{H_0^1}||h||_{H_0^1}.\end{aligned}$$

Ezt alkalmazva pedig

$$\begin{aligned}||N(u)-N(v)|| &\leq \sup_{||h||_{H_0^1}=1} (c_\Omega^2\alpha_1||u-v||_{H_0^1} + \beta_1 c_{\Omega,p}^p(||u||_{H_0^1} + ||v||_{H_0^1})^{p-2}||u-v||_{H_0^1})||h||_{H_0^1} \\ &= (c_\Omega^2\alpha_1 + \beta_1 c_{\Omega,p}^p(||u||_{H_0^1} + ||v||_{H_0^1})^{p-2})||u-v||_{H_0^1}.\end{aligned}$$

Összesítve $||F(u) - F(v)|| \leq M(r)||u-v||$, ha $||u|| \leq r$, $||v|| \leq r$, ahol $M(r) = c_a + c_b c_\Omega + c_\Omega^2\alpha_1 + \beta_1 c_{\Omega,p}^p(2r)^{p-2}$ monoton növő függvény. Ezzel beláttuk, hogy a (3.1) gyenge alakból kapható $F(u) = b$ operátoregyenletben szereplő F operátor egyenletesen monoton és lokálisan Lipschitzes, vagyis a 2.3.1. tétel értelmében minden $b \in H_0^1(\Omega)$-ra egyértelműen létezik megoldása.

□

Szigorúbb feltételeket szabva a (3.1) egyenletben szereplő függvényekre, az előző gondolatmenetet követve ismét operátoregyenlethez jutunk. Megfelelő feltételek mellett az így kapott F egy megfelelő tulajdonságokkal rendelkező potenciáloperátor, így a megoldás létezését a 2.3.2. tétel segítségével is igazolhatjuk. Ekkor az elsőrendű tag nyilvánvalóan nem szerepelhet az egyenletben, hiszen annak nem lehet potenciálja (antiszimmetrikus).

Vagyis a feladat alakja egyszerűsödik:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a\nabla u) + q(x,u) = g, \\ u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

A (3.7) feladat gyenge alakja így a következő: olyan $u \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldást keresünk, melyre teljesül, hogy

$$\int_\Omega (a\nabla u \cdot \nabla v + q(x,u)v) = \int_\Omega gv \qquad (\forall v \in H_0^1(\Omega)). \tag{3.8}$$

Az a és q függvényekre vonatkozó feltételek is szigorúbbak lesznek:

3.1.4. Feltételek.

1. $a \in L^\infty(\Omega), a(x) \geq m > 0 \qquad$ (m.m. $x \in \Omega$),
2. $q \in C^1\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right)$, és léteznek olyan $2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$, ha $n > 2$ ill. $2 \leq p < \infty$, ha $n = 2$, és $\alpha_1, \beta_1 \geq 0$ állandók, hogy $0 \leq \frac{\partial q(x,\xi)}{\partial \xi} \leq \alpha_1 + \beta_1|\xi|^{p-2} \qquad (\forall x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R})$.

A 2. feltételből a Lagrange-középértéktétel felhasználásával könnyen igazolható, hogy $|q(x,\xi)| \leq \alpha + \beta|\xi|^{p-1}$, alkalmas α, β konstansokkal. (Ennél a becslésnél kihasználtuk, hogy $p \geq 2$.)

3.1.5. Állítás. *A 3.1.4.-beli feltételek teljesülése esetén a (3.7) feladatnak bármely $g \in L^2(\Omega)$ esetén egyértelműen létezik $u^* \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldása.*

Bizonyítás. A 3.1.3. állítás gondolatmenetét követhetjük. A (3.8) gyenge alak jobb oldalát a 3.1.3. állítás bizonyítása alapján ismét $\int_\Omega gv = \langle b, v\rangle_{H_0^1}$ alakban írhatjuk.

A $v \mapsto \int_\Omega (a\nabla u\nabla v + q(x,u)v)$ leképezés rögzített u mellett v-ben lineáris, és korlátos. Ennek igazolásához elegendő a (3.5) és (3.6) egyenlőtlenségekre hivatkozni, hiszen ezek most is teljesülnek. Ezért a megfelelő Riesz-reprezentánst $F(u)$-val jelölhetjük, és így a jobb oldalból $\int_\Omega (a\nabla u\nabla v+q(x,u)v) = \langle F(u), v\rangle_{H_0^1}$ alakot, illetve egy $F : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ operátort kapunk.

Megint egy $F(u) = b$ operátoregyenlethez jutunk. Azt fogjuk belátni, hogy erre az F-re az 2.3.2. tételben szereplő tulajdonságok mind teljesülnek, és így a gyenge megoldás egyértelmű létezését is igazoljuk.

Válasszuk az F operátort két részre: $F = A + N$, ahol az első tag lineáris, N pedig nem az. F-ről azt kell igazolni, hogy Gâteaux-deriválható, F' bihemifolytonos, minden u-ra $F'(u)$ önadjungált, és hogy $F'(u)$ egyenletesen monoton operátor, minden u-ra közös konstanssal. Ezeket tagonként bizonyítjuk. Az A lineáris operátort a következő módon adhatjuk meg:

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega (a\nabla u \cdot \nabla v).$$

Az így kapott A korlátos és lineáris operátor. Ezekről tudjuk, hogy Gâteaux-deriválhatók, továbbá $\langle A'(u)v, h\rangle = \langle Av, h\rangle = \int_\Omega (a\nabla v \cdot \nabla h)$.

A nemlineáris tagra $\langle N(u), v\rangle = \int_\Omega q(x,u)v$. Tetszőleges, de rögzített $u, v, h \in H_0^1(\Omega)$ esetén

$$\frac{1}{t}\left(\langle N(u+tv), h\rangle - \langle N(u), h\rangle\right) = \int_\Omega \frac{q(x,u+tv) - q(x,u)}{t} h.$$

Ha $t \to 0$, az integrandus m.m. pontonként tart $\frac{\partial q}{\partial \xi}(x,u)v$-hez, ezért definiáljuk adott u és v esetén a $D(u,v) \in H_0^1(\Omega)$ elemet így: $\langle D(u,v), h\rangle := \int_\Omega \frac{\partial q}{\partial \xi}(x,u)vh$. Ez utóbbi h-nak lineáris, korlátos funkcionálja, és így van értelme a megfelelő $D(u,v)$ Riesz-féle reprezentánsról beszélni. Hiszen

$$\left|\int\limits_\Omega \frac{\partial q}{\partial \xi}(x,u)vh\right| \le \int\limits_\Omega \left|\frac{\partial q}{\partial \xi}(x,u)vh\right| \le \int\limits_\Omega (\alpha+\beta|u|^{p-2})|v||h|$$
$$\overset{1}{\le} \alpha c_\Omega^2 ||v||_{H_0^1}||h||_{H_0^1} + \beta\left(\int\limits_\Omega |u|^{(p-2)\frac{p}{p-2}}\right)^{(p-2)/p} \cdot \left(\int\limits_\Omega |vh|^{\frac{p}{2}}\right)^{2/p} \tag{3.9}$$
$$\overset{2}{\le} \alpha c_\Omega^2 ||v||_{H_0^1}||h||_{H_0^1} + \beta ||u||_{L^p(\Omega)}^{p-2}\left(\int\limits_\Omega |v|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int\limits_\Omega |h|^p\right)^{1/p}$$
$$\le (\alpha c_\Omega^2 + \beta c_{\Omega,p}^p ||u||_{H_0^1}^{p-2})||v||_{H_0^1}||h||_{H_0^1}$$

Itt az 1 becslésnél a Hölder-egyenlőtlenséget használjuk $p' = \frac{p}{p-2}$ és $q' = \frac{p}{2}$-vel, míg a 2 becslés egyszerűen a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenségből kapható. Ezek alapján $D(u,v)$ valóban értelmes, és a fenti becslés alapján rögzített u mellett

$$||D(u,v)|| = \sup_{||h||_{H_0^1}=1} \langle D(u,v),h\rangle = \sup_{||h||_{H_0^1}=1} \int\limits_\Omega \frac{\partial q}{\partial \xi}(x,u)vh$$
$$\le \sup_{||h||_{H_0^1}=1} (\alpha c_\Omega^2 + \beta c_{\Omega,p}^p ||u||_{H_0^1}^{p-2})||v||_{H_0^1}||h||_{H_0^1} = (\alpha c_\Omega^2 + \beta c_{\Omega,p}^p ||u||_{H_0^1}^{p-2})||v||_{H_0^1},$$

azaz a $v \mapsto D(u,v)$ lineáris leképezés korlátos, és így folytonos. Azt kell ellenőrizni, hogy éppen ez lesz a Gâteaux-derivált, azaz hogy $\lim\limits_{t\to 0} ||\frac{1}{t}(N(u+tv)-N(u)) - D(u,v)|| = 0$. A Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik olyan $\theta(x) \in [0,t]$, hogy $\dfrac{q(x,u+tv)-q(x,u)}{t} = \dfrac{\partial q}{\partial \xi}(x,u+\theta v)v$. Eszerint $\frac{1}{t}\langle N(u+tv)-N(u),h\rangle = \int\limits_\Omega \frac{\partial q}{\partial \xi}(x,u+\theta v)vh$. Mivel $t \to 0$, így elég kicsi t esetén $\theta(x) < 1$, ezt kihasználva

$$||\tfrac{1}{t}(N(u+tv)-N(u)) - D(u,v)|| = \sup_{||h||_{H_0^1}=1} \langle \tfrac{1}{t}(N(u+tv)-N(u)) - D(u,v),h\rangle$$
$$= \sup_{||h||_{H_0^1}=1} \int\limits_\Omega ((\tfrac{\partial q}{\partial \xi}(x,u+\theta v) - \tfrac{\partial q}{\partial \xi}(x,u))vh)$$
$$\le \sup_{||h||_{H_0^1}=1} \left(\int\limits_\Omega \left|\tfrac{\partial q}{\partial \xi}(x,u+\theta v) - \tfrac{\partial q}{\partial \xi}(x,u)\right|^{p/(p-2)}\right)^{(p-2)/p} \cdot \left(\int\limits_\Omega |v|^{p/2}|h|^{p/2}\right)^{2/p} \tag{3.10}$$
$$\le \left(\int\limits_\Omega \left|\tfrac{\partial q}{\partial \xi}(x,u+\theta v) - \tfrac{\partial q}{\partial \xi}(x,u)\right|^{p/(p-2)}\right)^{(p-2)/p} ||v||_{L^p(\Omega)} \sup_{||h||_{H_0^1}=1} ||h||_{L^p(\Omega)}$$
$$\le c_{\Omega,p}^2 ||v||_{H_0^1} \left(\int\limits_\Omega \left|\tfrac{\partial q}{\partial \xi}(x,u+\theta v) - \tfrac{\partial q}{\partial \xi}(x,u)\right|^{p/(p-2)}\right)^{(p-2)/p}$$

A (3.10) kifejezés végén szereplő integrálban az integrandus m.m. pontonként 0-hoz tart, hiszen q deriváltja folytonos. Másrészt van integrálható majoránsa, méghozzá $(2\alpha_1+\beta_1((|u|+|v|)^{p-2}+|u|^{p-2}))^{p/(p-2)}$.

Ugyanis $|\frac{\partial q}{\partial \xi}(x,u+\theta v)-\frac{\partial q}{\partial \xi}(x,u)| \leq 2\alpha_1+\beta_1(|u+\theta v|^{p-2}+|u|^{p-2}) \leq 2\alpha_1+\beta_1((|u|+|\theta v|)^{p-2}+|u|^{p-2}) \leq \alpha_1+\beta_1((|u|+|v|)^{p-2}+|u|^{p-2})$, ha t (és így θ) elég kicsi.

Ha $u,v \in L^p(\Omega)$, akkor $(|u|+|v|)^{p-2}, |u|^{p-2} \in L^{\frac{p}{p-2}}(\Omega)$, és így $(2\alpha_1+\beta_1((|u|+|v|)^{p-2}+|u|^{p-2}) \in L^{\frac{p}{p-2}}(\Omega)$, ezáltal $(2\alpha_1+\beta_1((|u|+|v|)^{p-2}+|u|^{p-2}))^{p/(p-2)} \in L^1(\Omega)$, vagyis tényleg integrálható majoránst kaptunk.

Mindezek alapján tehát N Gâteaux-deriválható, és

$$\langle N'(u)v,h\rangle = \int_\Omega \frac{\partial q}{\partial \xi}(x,u)vh.$$

Összesítve $\langle F'(u)v,h\rangle = \int_\Omega (a\nabla v\cdot\nabla h+\frac{\partial q}{\partial \xi}(x,u)vh)$.

Az F bihemifolytonosságához az

$$\mathbb{R}^2 \ni (s,t) \mapsto F'(u+sv+tw)z$$

leképezés folytonosságát kell igazolni ($u,v,w,z \in H_0^1(\Omega)$ rögzített elemek). Elegendő a $(0,0)$-beli folytonosságot ellenőrizni, hiszen az (s,t)-beli folytonosság a v és w alkalmas választásával éppen a $(0,0)$-beli folytonosságot jelenti. Ezt is tagonként fogjuk ellenőrizni.

A lineáris tag esetében $A'(u)z = Az$, másrészt

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} ||A'(u+sv+tw)z-A'(u)z|| = \lim_{(s,t)\to(0,0)} ||A(z)-A(z)|| = 0,$$

azaz a vizsgált leképezés valóban folytonos a $(0,0)$-ban. N' bihemifolytonosságát is elegendő a $(0,0)$-ban ellenőrizni:

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \sup_{||h||=1} \langle N'(u+sv+tw)z,h\rangle = \lim_{(s,t)\to(0,0)} \sup_{||h||=1} \int_\Omega ((\frac{\partial q}{\partial \xi}(x,u+sv+tw)-\frac{\partial q}{\partial \xi}(x,u))zh) \tag{3.11}$$

A (3.11) egyenletbeli mennyiség becslése teljesen hasonlóan történik, mint a (3.10) becslés, és azt kapjuk, hogy a keresett limesz 0, azaz N' is bihemifolytonos.

F' önadjungáltsága is tagonként megkapható. $A'(u)$ önadjungált, mert valós Hilbert-térben vagyunk: $\langle A'(u)h,v\rangle = \langle Ah,v\rangle = \int_\Omega (a\nabla h\nabla v) = \langle Av,h\rangle = \langle h,Av\rangle = \langle h,A'(u)v\rangle$.

Adott $u \in H_0^1(\Omega)$ esetén $N'(u)$ nyilván lineáris és a (3.9) becslés alapján $||N'(u)v||_{H_0^1} \leq (\alpha c_\Omega^2 + \beta c_\Omega^p ||u||_{H_0^1}^{p-2})||v||_{H_0^1}$. Ezek szerint $N'(u)$ korlátos operátor. Önadjungáltsága pedig könnyen látható:

$$\langle N'(u)v, h\rangle = \int_\Omega \frac{\partial q}{\partial \xi}(x,u)vh = \int_\Omega \frac{\partial q}{\partial \xi}(x,u)hv = \langle N'(u)h, v\rangle$$

Végül be kell látnunk, hogy $F' = A' + N'$ egyenletesen monoton. Itt

$$\begin{aligned} \langle A'(u)h, h\rangle = \langle A(h), h\rangle &= \int_\Omega a|\nabla h|^2 \geq m||h||^2_{H_0^1(\Omega)} \\ \langle N'(u)h, h\rangle &= \int_\Omega \frac{\partial q}{\partial \xi}(x,u)h^2 \geq 0, \end{aligned}$$

mivel $\dfrac{\partial q(x,\xi)}{\partial \xi} \geq 0$. Azaz

$$\langle F'(u)h, h\rangle \geq m||h||^2_{H_0^1(\Omega)} \qquad (\forall u, h \in H_0^1(\Omega)).$$

Összefoglalva: beláttuk, hogy teljesülnek a 2.3.2. tétel feltételei a gyenge alakból kapott F operátorra, azaz a gyenge megoldás egyértelműen létezik.

□

Az eddig megfogalmazott feladatokban mindig homogén Dirichlet-peremfeltételt adtunk meg. A feladat természetesen inhomogén peremfeltétellel is megfogalmazható:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\nabla u) + \mathbf{b}\cdot\nabla u + q(x,u) = g, \\ u_{|\partial\Omega} = h. \end{cases} \tag{3.12}$$

Ha az egyenletet $v \in C_0^\infty(\Omega)$ függvénnyel szorozzuk, majd Ω-n integrálunk, akkor

$$\int_\Omega (a\nabla u \cdot \nabla v + (\mathbf{b}\cdot\nabla u)v + q(x,u)v) = \int_\Omega gv.$$

Mivel $C_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ sűrű, így a 3.12. feladat gyenge alakja a következő: olyan $u \in H^1(\Omega)$ függvényt keresünk, hogy tetszőleges $v \in H_0^1(\Omega)$ esetén

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (a\nabla u \cdot \nabla v + (\mathbf{b}\cdot\nabla u)v + q(x,u)v)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega gv\,\mathrm{d}x, \\ u_{|\partial\Omega} = h \qquad \text{nyom-értelemben.} \end{cases} \tag{3.13}$$

Az inhomogén feladat visszavezethető a homogén esetre, így a megoldás létezését könnyen igazolhatjuk. Tegyük fel, hogy a (3.12) feladatban szereplő függvényekre teljesülnek az alábbiak:

3.1.6. Feltételek.

1. $a \in L^\infty(\Omega), a(x) \geq m > 0 \qquad$ (m.m. $x \in \Omega$),
2. $\mathbf{b} \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$, $\operatorname{div}(\mathbf{b}) = 0$,
3. $q : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, rögzített $x \in \Omega$ mellett $q(x,\xi)$ ξ-ben monoton növő, és léteznek olyan $2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$, ha $n > 2$, ill. $2 \leq p < \infty$ ha $n = 2$, és $\alpha_1, \beta_1 \geq 0$ állandók, hogy minden $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ esetén
$$|q(x,\xi_1) - q(x,\xi_2)| \leq (\alpha_1 + \beta_1(|\xi_1| + |\xi_2|)^{p-2})|\xi_1 - \xi_2|,$$
4. létezik olyan $\tilde{h} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, hogy $\tilde{h}|_{\partial\Omega} = h$.

3.1.7. Állítás. *A 3.1.6.-beli feltételek teljesülése esetén a (3.12) feladatnak minden $g \in L^2(\Omega)$ esetén egyértelműen létezik gyenge megoldása.*

Bizonyítás. Legyen $\tilde{h} \in H_0^1(\Omega)$ olyan függvény, melyre $\tilde{h}_{|\partial\Omega} = h$ nyom-értelemben. Definiáljuk a $\tilde{q} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt a következő módon: $\tilde{q}(x,\xi) = q(x, \xi + \tilde{h}(x))$. Ekkor az u függvény pontosan akkor gyenge megoldása a (3.13) feladatnak, ha $\tilde{u} := u - \tilde{h}$ megoldása a

$$\int_\Omega (a\nabla\tilde{u}\nabla v + (\mathbf{b}\nabla\tilde{u})v + \tilde{q}(x,\tilde{u})v = \int_\Omega (g - a\nabla\tilde{h}\nabla v - (\mathbf{b}\nabla\tilde{h})v) \tag{3.14}$$

homogén feladatnak. Itt a jobb oldal tovb́bra is folytonos és lineáris funkcionálja v-nek. Ezért elegendő azt megmutatni, hogy a (3.14) egyenletben szereplő $a, \mathbf{b}$ és $\tilde{q}$ függvényekre teljesülnek a 3.1.1. feltételek, hiszen ekkor a 3.1.3. állítás szerint a homogén feladatnak (és így az inhomogénnek is) egyértelműen létezik megoldása.

Az a illetve $\mathbf{b}$ függvényekre nyilvánvalóan teljesülnek a megfelelő tulajdonságok. Végül tetszőleges $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}|\tilde{q}(x,\xi_1) - \tilde{q}(x,\xi_2)| &\leq (\alpha + \beta(|\xi_1 + \tilde{h}(x)| + |\xi_2 + \tilde{h}(x)|)^{p-2})|\xi_1 - \xi_2| \\ &\leq (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}(|\xi|_1 + |\xi_2|)^{p-2})|\xi_1 - \xi_2|^{p-1},\end{aligned}$$

hiszen $\tilde{h} \in L^\infty(\Omega)$. Vagyis a 3.1.1.-beli összes feltétel teljesül, ezért az egyértelmű megoldás létezését a 3.1.3. állítás biztosítja. □

A (3.7) feladatnak megfelelő inhomogén eset:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\nabla u) + q(x,u) = g, \\ u_{|\partial\Omega} = h. \end{cases} \tag{3.15}$$

A (3.15) feladat gyenge alakja így a következő: olyan $u \in H^1(\Omega)$ gyenge megoldást keresünk, melyre teljesül, hogy

$$\begin{gathered} \int_\Omega (a\nabla u \cdot \nabla v + q(x,u)v) = \int_\Omega gv \qquad (\forall v \in H_0^1(\Omega)), \\ u_{|\partial\Omega} = h. \end{gathered} \tag{3.16}$$

A homogén állítás mintájára az a és q függvényekre vonatkozó feltételeket kapunk.

3.1.8. Feltételek.

1. $a \in L^\infty(\Omega), a(x) \geq m > 0 \qquad$ (m.m. $x \in \Omega$),
2. $q \in C^1\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right)$, és léteznek olyan $2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$, ha $n > 2$ ill. $2 \leq p < \infty$, ha $n = 2$, és $\alpha_1, \beta_1 \geq 0$ állandók, hogy $0 \leq \frac{\partial q(x,\xi)}{\partial \xi} \leq \alpha_1 + \beta_1 |\xi|^{p-2} \qquad (\forall x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R})$.
3. létezik $\tilde{h} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, melyre $\tilde{h}|_{\partial\Omega} = h$.

3.1.9. Állítás. *A 3.1.8.-beli feltételek teljesülése esetén a (3.15) feladatnak bármely $g \in L^2(\Omega)$ esetén egyértelműen létezik $u^* \in H^1(\Omega)$ gyenge megoldása.*

Bizonyítás. Az előző bizonyításhoz hasonlóan áttérünk a homogén egyenletre, melynek $\tilde{u} = u - \tilde{h} \in H_0^1(\Omega)$ pontosan akkor megoldása, ha $u \in H^1(\Omega)$ megoldása az inhomogén feladatnak. A kapott egyenlet éppen a (3.14), a $\mathbf{b} = 0$ választással. Elég belátni, hogy a $\tilde{q}(x,\xi) = q(x, \xi + \tilde{h}(x))$ függvényre igaz a 3.1.4.-beli 3. feltétel, hiszen ekkor hivatkozhatunk a 3.1.5. állításra.

Egyrészt $0 \leq \frac{\partial q(x,\xi+\tilde{h}(x))}{\partial \xi} = \frac{\partial \tilde{q}(x,\xi)}{\partial \xi} \leq \alpha_1 + \beta_1 |\xi + \tilde{h}(x)|^{p-2}$.

Másrészt $|\xi + \tilde{h}(x)| \leq 2\max(|\xi|, |\tilde{h}(x)|)$, ahonnan $|\xi + \tilde{h}(x)|^{p-2} \leq 2^{p-2}\max(|\xi|^{p-2}, |\tilde{h}(x)|^{p-2}) \leq 2^{p-2}(|\xi|^{p-2} + |\tilde{h}(x)|^{p-2}) \leq c + c'|\xi|^{p-2}$, mivel $\tilde{h} \in L^\infty(\Omega)$. Ezek alapján $\frac{\partial \tilde{q}(x,\xi)}{\partial \xi} \leq \alpha_1 + \beta_1 |\xi + \tilde{h}(x)|^{p-2} \leq c_2 + c_3 |\xi|^{p-2}$. Tehát valóban teljesülnek a 3.1.4. feltételek, így a megoldás egyértelműen létezik. □

3.1.10. Példa. Tekintsük a következő kémiai reakciót ([1]):

$$\mathrm{H_2O_2(aq)} \xrightarrow{k} \mathrm{H_2O(l)} + \mathrm{O_2(g)}$$

A vegyületek után szereplő zárójel a fázisra (ill. halmazállapotra) utal: g - gázfázis, l - folyadék fázis, aq - vzben oldott, hidratált állapot. A fenti reakció vízben oldott hidrogén-peroxid bomlása folyékony vízzé és gáz halmazállapotú oxigénné. Ismeretes, hogy a reakció elsőrendű, azaz a sebességi egyenlet $\frac{\mathrm{d[H_2O_2]}}{\mathrm{d}t} = -k[\mathrm{H_2O_2}]$, ahol $k > 0$ a reakciósebességi együttható, $[\mathrm{H_2O_2}]$ pedig a hidrogén-peroxid koncentrációját jelöli.

Ha az ennek megfelelő reakció-diffúziós egyenletet írjuk fel, akkor az a következő alakot ölti (jelölje a hidrogén-peroxid koncentrációját u, a konvekciótól eltekintünk):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u - ku,$$

ahol D a hidrogén-peroxid diffúziós együtthatója, melyről feltehető, hogy állandó. Az egyenlet stacionárius változata: $D\Delta u - ku = 0$, azaz $-D\Delta u + ku = 0$. Ebben az egyenletben a korábbi jelöléseket alkalmazva $a = D$, és $q(x, \xi) = q(\xi) = k\xi$. Ilyen választással a-ra és q-ra az $m = D$, $\alpha_1 = k$, $\beta_1 = 0$ és $p = 2$ konstansokkal teljesülnek a 3.1.4. feltételek. Azaz az egyenletnek a 3.1.5. állítás alapján egyértelműen létezik a gyenge megoldása.

3.1.11. Példa. A hipoklorit-ionok folyadékfázisú bomlása ([1])

$$2\mathrm{ClO}^- \xrightarrow{k} 2\mathrm{Cl}^- + \mathrm{O}_2$$

másodrendű kinetika szerint zajlik, azaz $\frac{\mathrm{d}[\mathrm{ClO}^-]}{\mathrm{d}t} = -k[\mathrm{ClO}^-]^2$, ahonnan a következő stacionárius reakció-diffúziós egyenletet kapjuk:

$$-D\Delta u + ku^2 = g,$$

ahol u jelöli a ClO^--koncentrációt, D a hipoklorit-ion diffúziós együtthatója, melyet konstansnak tekintünk.

Ekkor $a = D$, $q(x, \xi) = k|\xi|\xi$, és a $p = 3$, $m = D$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 2k$ konstansokkal teljesülnek a 3.1.4. feltételek, ezért a 3.1.5. állítás szerint a gyenge megoldás egyértelműen létezik.

3.1.2. Az $1 < p < 2$ eset Dirichlet-peremfeltétellel

Az $1 < p < 2$ esetben a nempotenciálos gondolatmenet nem működik, mivel az F operátor ilyen feltételek mellett nem lesz lokálisan Lipschitzes. Sőt, a potenciálos esetben is módosítani kell a q-ra vonatkozó feltételeket. Láttuk, hogy a $q(x, \xi)$ fügvényt a $|\xi|$ $p-1$-edik hatványával lehetett becsülni.

Ha a $|q(x, \xi)| \leq \alpha_1 + \beta_1|\xi|^{p-1}$ tulajdonságot továbbra is megtartjuk, akkor q nem lesz differenciálható 0-ban, illetve a $p \geq 2$ eset lépéseit és jelöléseit követve a $D(u, v)$ funkcionál nem feltétlenül lesz korlátos, így N Gâteaux-deriválhatósága sem feltétlenül teljesül. (A (3.10) becslés során ugyanis kihasználtuk, hogy $\frac{p}{p-2} \geq 1$, mely $p < 2$ esetén nyilvánvalóan nem igaz.)

Így a potenciálos megoldhatósági tételek közül egy másikat, a 2.3.3. tételt kell alkalmaznunk. Továbbra is a (3.7) feladat gyenge megoldását keressük, azonban az a és q függvényekre más feltételeket szabunk.

3.1.12. Feltételek.

1. $a \in L^\infty(\Omega), a(x) \geq m > 0 \qquad$ (m.m. $x \in \Omega$),

2. $q \in C\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right)$, rögzített $x \in \Omega$ mellett $q(x,\xi)$ ξ-ben monoton növő, és léteznek olyan $1 < p < 2$, $\alpha, \beta \geq 0$ állandók, hogy
   $|q(x,\xi)| \leq \alpha + \beta|\xi|^{p-1} \qquad (\forall \xi \in \mathbb{R})$.

3.1.13. Állítás. *A 3.1.12. feltételek teljesülése esetén a (3.7) feladatnak minden $g \in L^2(\Omega)$ esetén egyértelműen létezik $u^* \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldása.*

Bizonyítás.

A $p \geq 2$ esethez hasonlóan a (3.8) gyenge feladatból operátoregyenletet írunk fel, és azt látjuk be, hogy az abban szereplő operátorra teljesülnek a 2.3.3. tétel feltételei.

A gyenge alak jobb oldala ismét $\langle b, v\rangle_{H_0^1}$ alakban adható meg.

A $v \mapsto \int\limits_\Omega (a\nabla u \nabla v + q(x,u)v)\,\mathrm{d}x$ leképezés rögzített u mellett v-ben lineáris, és korlátos is. Ez könnyen látható a (3.5) és a (3.6) egyenlőtlenségek alapján, mivel ezek ebben az esetben is teljesülnek. Ugyanis a Hölder-egyenlőtlenség alkalmazásának a feltétele, hogy $p \geq 1$ legyen, ami most is teljesül, az $L^p(\Omega)$-norma becslése a $H_0^1(\Omega)$-beli normával a korábbi meggondolások alapján szintén $1 \leq p$ esetén használható. Tehát $|\int\limits_\Omega (a\nabla u \nabla v + q(x,u)v)| \leq (c_a||u||_{H_0^1} + \alpha c_{\Omega,1} + c_{\Omega,p}^{p-1}||u||_{H_0^1}^{p-1})||v||_{H_0^1}$.

Ezért a Riesz-féle reprezentációs tétel szerint a (3.8) gyenge alak bal oldala $\langle F(u), v\rangle_{H_0^1}$ formában írható, és így a gyenge feladat a $\langle F(u), v\rangle_{H_0^1} = \langle b, v\rangle_{H_0^1}$ egyenletnek felel meg. Azaz megint eljutottunk az $F(u) = b$ operátoregyenlethez, ahol tehát

$$\langle F(u), v\rangle_{H_0^1} = \int\limits_\Omega (a\nabla u \nabla v + q(x,u)v).$$

A 2.3.3.-beli feltételek fennállásának bizonyításához ismét két részre választjuk F-et: $F = A + N$, ahol $\langle A(u), v\rangle = \int\limits_\Omega (a\nabla u \cdot \nabla v)$ lineáris tag, míg $\langle N(u), v\rangle = \int\limits_\Omega q(x,u)v$ nem az. Először azt látjuk be, hogy F potenciáloperátor, méghozzá úgy, hogy meg is adjuk egy potenciálját.

Lineáris operátornak mindig van potenciálja, egy additív konstans erejéig

$$J_A(u) = \frac{1}{2}\langle A(u), u\rangle = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (a|\nabla u|^2).$$

Mivel $q \in C\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right)$, így létezik olyan $Q \in C^{0,1}\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right)$ (azaz olyan Q függvény, amely x-ben folytonos, ξ-ben folytonosan differenciálható), hogy $\dfrac{\partial Q(x,\xi)}{\partial \xi} = q(x,\xi)$.

Legyen $J_N(u) := \int\limits_\Omega Q(x,u)\,\mathrm{d}x$. Ez értelmes, hiszen Q folytonos x-ben és $|q(x,\xi)| \leq \alpha + \beta|\xi|^{p-1}$. Megmutatjuk, hogy a $J_N : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ funkcionál Gâteaux-deriválható, és $\langle J_N'(u), v\rangle = \langle N(u), v\rangle$ minden $u,\ v \in H_0^1(\Omega)$-ra, azaz $J_N' = N$.

Ennek bizonyításához először tekintsük az alábbi határértéket ($t \in \mathbb{R},\ u, v \in H_0^1(\Omega)$):

$$\lim_{t\to 0} \frac{J_N(u+tv) - J_N(u)}{t} = \lim_{t\to 0} \int\limits_\Omega \frac{Q(x,u+tv) - Q(x,u)}{t} \, \mathrm{d}x$$

Azt kell igazolni, hogy $\lim\limits_{t\to 0} \int\limits_\Omega \frac{Q(x,u+tv)-Q(x,u)}{t} \, \mathrm{d}x = \int\limits_\Omega q(x,u)v \, \mathrm{d}x$, melyhez elegendő belátni, hogy

$$\lim_{t\to 0} \left| \int\limits_\Omega \frac{Q(x,u+tv) - Q(x,u)}{t} - q(x,u)v \, \mathrm{d}x \right| = 0$$

Nyilván $|\int\limits_\Omega \frac{Q(x,u+tv)-Q(x,u)}{t} - q(x,u)v \, \mathrm{d}x| \le \int\limits_\Omega |\frac{Q(x,u+tv)-Q(x,u)}{t} - q(x,u)v| \, \mathrm{d}x$, és a Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik olyan $\theta(x) \in [0,t]$, hogy $\frac{Q(x,u+tv)-Q(x,u)}{t} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}(x, u+\theta v)v = q(x,u+\theta v)v$, így

$$\int\limits_\Omega \left| \frac{Q(x,u+tv) - Q(x,u)}{t} - q(x,u)v \right| \mathrm{d}x = \int\limits_\Omega |q(x,u+\theta v) - q(x,u)| \cdot |v| \, \mathrm{d}x.$$

Ha $\theta \in [0,t]$ és $t \to 0$, akkor feltehető, hogy $\theta \le 1$. Az integrandus m.m. pontonként tart 0-hoz, ha $t \to 0$, hiszen ekkor $\theta \to 0$, és q folytonos. Másrészt van integrálható majoránsa:

$$|q(x,u+\theta v) - q(x,u)| \cdot |v| \le (2\alpha + \beta(|u+\theta v|^{p-1} + |u|^{p-1}))|v|$$
$$\le (2\alpha + \beta((|u| + \theta|v|)^{p-1} + |u|^{p-1}))|v| \le (2\alpha + \beta((|u| + |v|)^{p-1} + |u|^{p-1}))|v|.$$

Ha $u, v \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, akkor $(|u|+|v|) \in L^p(\Omega)$, és ezáltal $|u|^{p-1},\ (|u|+|v|)^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, kihasználva, hogy $p-1>0$. Ekkor $(2\alpha + \beta(|u|^{p-1} + (|u|+|v|)^{p-1})) \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) = L^q(\Omega)$. És mivel $v \in H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, ezért a szorzatuk, $(2\alpha + \beta((|u|+|v|)^{p-1} + |u|^{p-1}))|v| \in L^1(\Omega)$, azaz tényleg integrálható majoránst kaptunk.

Így a Lebesgue-tétel szerint

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_\Omega \left| \frac{Q(x,u+tv) - Q(x,u)}{t} - q(x,u) \right| = 0$$

Vagyis J_N valóban Gâteaux-deriválható, és $J_N' = N$.

Az F operátor szigorú monotonitását is tagonként érdemes megvizsgálni. Mivel A lineáris, így az $u - v = h$ helyettesítéssel $\langle A(h), h \rangle = \int\limits_\Omega a|\nabla h|^2 \ge m||h||^2_{H_0^1} > 0$, ha $h \ne 0$, azaz $u \ne v$.

A nemlineáris rész esetén $\langle N(u) - N(v), u - v\rangle = \int\limits_\Omega (q(x,u) - q(x,v))(u - v) \geq 0$, mert az integrandus $q(x,\xi)$ ξ-beli monotonitása miatt nemnegatív.

Összesítve tehát $\langle F(u) - F(v), u - v\rangle \geq m||u - v||^2_{H_0^1} > 0$, ha $u \neq v$.

Végül azt is igazolnunk kell, hogy $\lim\limits_{||u||\to\infty} \frac{J(u)}{||u||} = +\infty$. Mivel $N = J_N'$ monoton operátor, így J_N konvex funkcionál. Ekkor tetszőleges u, v vektorra $J_N(u) - J_N(v) \geq \langle J_N'(v), u - v\rangle = \langle N(v), u - v\rangle$, ebbe $v = 0$-t helyettesítve

$$J_N(u) \geq J_N(0) + \langle N(0), u\rangle = c + \int\limits_\Omega q(x,0)u \geq c - c_3||u||_{H_0^1},$$

hiszen q folytonos az Ω korlátos tartományon, vagyis $\int\limits_\Omega q(x,0)^2 \,\mathrm{d}x < \infty$, másrészt $\int\limits_\Omega q(x,0)u \geq -(\int\limits_\Omega q(x,0)^2 \,\mathrm{d}x)^{1/2}(\int\limits_\Omega |u|^2)^{1/2} \geq -c_3||u||_{H_0^1}$.

Ha $J = J_A + J_N$, akkor $J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega a|\nabla u|^2 + \int\limits_\Omega Q(x,u) \geq \frac{m}{2}||u||^2_{H_0^1} + c - c_3||u||_{H_0^1}$, és így

$$\lim_{||u||\to\infty} \frac{J(u)}{||u||} \geq \lim_{||u||\to\infty} \frac{\frac{m}{2}||u||^2 + c - c_3||u||}{||u||} = +\infty.$$

□

Inhomogén Dirichlet-peremfeltétellel a gyenge alak a következő: olyan $u \in H^1(\Omega)$ függvényt keresünk melyre tetszőleges $v \in H_0^1(\Omega)$ esetén

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega (a\nabla u\nabla v + q(x,u)v) &= \int\limits_\Omega gv \\ u_{|\partial\Omega} &= h \qquad \text{nyom-értelemben.} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Ilyenkor a $p \geq 2$ esethez hasonlóan homogenizálhatjuk a feladatot: ha $\tilde{h}$ olyan, hogy $\tilde{h}_{|\partial\Omega} = h$, akkor legyen $\tilde{q}(x,\xi) = q(x,\xi + \tilde{h}(x))$, és legyen $g' = g + \mathrm{div}(a\nabla\tilde{h})$. Ezzel a jelöléssel $u = \tilde{u} + \tilde{h}$ pontosan akkor megoldása a (3.17) feladatnak, ha $\tilde{u}$ megoldása a megfelelő, g' jobboldalú homogén feladatnak.

3.1.14. Feltételek.

1. $a \in L^\infty(\Omega), a(x) \geq m > 0 \qquad$ (m.m. $x \in \Omega$),
2. $q \in C\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right)$, rögzített $x \in \Omega$ mellett $q(x,\xi)$ ξ-ben monoton növő, és léteznek olyan $1 < p < 2$, $\alpha, \beta \geq 0$ állandók, hogy
   $|q(x,\xi)| \leq \alpha + \beta|\xi|^{p-1} \qquad (\forall \xi \in \mathbb{R})$.
3. létezik $\tilde{h} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, melyre $\tilde{h}|_{\partial\Omega} = h$.

3.1.15. Állítás. *Ha a 3.1.14. feltételek teljesülnek, akkor a (3.17) feladatnak egyértelműen létezik a megoldása.*

Bizonyítás. Az előző gondolatmenet alapján már csak azt kell belátnunk, hogy a fenti módon definiált $\tilde{q}$ függvényre is teljesülnek a 3.1.12.-beli 2. tulajdonságok. Nyilván $\tilde{q}$ monoton növő ξ-ben, hiszen q is az volt, és a két függvény különbsége csak x-től függ. A növekedési feltétel ugyanúgy látható be, mint a 3.1.9. tétel esetében, $p-2$ helyett $p-1$-et írva. □

3.1.16. Példa. Vizsgáljuk a kloroform ($CHCl_3$) és az elemi klór (Cl_2) gázfázisú reakcióját, melynek terméke szén-tetraklorid (CCl_4) és hidrogén-klorid (HCl). A reakciót leíró bruttó egyenlet:

$$\mathrm{CHCl_3(g) + Cl_2(g) \longrightarrow CCl_4(g) + HCl(g)}$$

A zárójelben lévő g a gázfázisra utal. A reakció mechanizmusa összetett, több lépésből áll, de a megfelelő kémiai meggondolások a $\frac{\mathrm{d[Cl_2]}}{\mathrm{d}t} = -k[\mathrm{CHCl_3}][\mathrm{Cl_2}]^{1/2}$ sebességi egyenletre vezetnek ([9]).

Ha a kloroform koncentrációja lényegesen (pl. nagyságrendekkel) nagyobb a klór koncentrációjánál, akkor előbbi koncentrációja az utóbbiéhoz képest állandónak tekinthető, és így a sebességi egyenlet $\frac{\mathrm{d[Cl_2]}}{\mathrm{d}t} = -k'[\mathrm{Cl_2}]^{1/2}$ alakra egyszerűsödik ($k' = k[\mathrm{CHCl_3}]$).

Az így kapható stacionárius reakció-diffúziós egyenlet (u jelöli a klórkoncentrációt, a konvekciót ismét elhanyagoljuk):

$$-D\Delta u + k'u^{1/2} = g$$

Itt D a klórgáz diffúziós együtthatója, melyet állandónak tekinthetünk, így $a = D$, $q(x,\xi) = k'|\xi|^{-1/2}\xi$ választással olyan függvényeket kapunk, melyek az $m = D$, $\alpha = 0$, $\beta = k'$ és $p = \frac{3}{2}$ konstansokkal kielégítik a 3.1.4. feltételeket. Azaz a gyenge megoldás tetszőleges g esetén egyértelműen létezik.

3.1.3. Vegyes feladatok

A homogén vegyes feladatban $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a\nabla u) + \mathbf{b}\cdot\nabla u + q(x,u) = g, \\ u_{|\Gamma_D} = 0, \ \partial_\nu u_{|\Gamma_N} = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

(Amennyiben a potenciálos feladatokról van szó, akkor vegyük $\mathbf{b}$-t 0-nak.) A gyenge feladatot úgy kapjuk, hogy v-vel szorzunk, és az integrálás során a kétféle peremfeltételt használjuk ki.

$$\int_\Omega (a\nabla u \nabla v + (\mathbf{b}\cdot\nabla u)v + q(x,u)v = \int_\Omega gv, \tag{3.19}$$

Ekkor a megoldást a $H^1_D(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \ u_{\Gamma_D} = 0\}$ térben keressük. $u, v \in H^1_D(\Omega)$ esetén $\langle u, v\rangle := \int_\Omega \nabla u \nabla v$ most is skalárszorzatot definiál, ezért a homogén Dirichlet-feladat esetében kimondott minden tétel átvihető erre az esetre.

Az inhomogén vegyes feladat alakja:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a\nabla u) + \mathbf{b}\cdot\nabla u + q(x,u) = g, \\ u_{|\Gamma_D} = h, \ \partial_\nu u_{|\Gamma_N} = \gamma. \end{cases} \tag{3.20}$$

Ekkor két lépéssel visszajuthatunk a homogén feladathoz. Először legyen $\tilde{h} \in H^1(\Omega)$ olyan, hogy $\tilde{h}_{|\Gamma_D} = h$, és tegyük fel, hogy $\partial_\nu \tilde{h}_{|\Gamma_N} = \tilde{\gamma}$. Definiáljuk ismét a $\tilde{q}(x,\xi) = q(x, \xi + \tilde{h}(x))$ függvényt. Megint azt látjuk, hogy $u = \tilde{u} + \tilde{h}$ pontosan akkor megoldása a (3.20) feladatnak, ha $\tilde{u}$ megoldása a

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a\nabla u) + \mathbf{b}\cdot\nabla u + \tilde{q}(x,u) = g + \mathrm{div}(a\nabla\tilde{h}) - \mathbf{b}\nabla\tilde{h} = g', \\ u_{|\Gamma_D} = 0, \ \partial_\nu u_{|\Gamma_N} = \gamma - \tilde{\gamma}. \end{cases} \tag{3.21}$$

feladatnak. Második lépésként ezt v-vel szorozva és x szerint integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int_\Omega (a\nabla u \nabla v + (\mathbf{b}\cdot\nabla u)v + \tilde{q}(x,u)v) = \int_\Omega g'v + \int_{\Gamma_N} (\gamma - \tilde{\gamma})v. \tag{3.22}$$

Az így kapott alak bal oldala megfelel a homogén feladat (3.19) bal oldalának, mivel a $\tilde{q}$ függvényre minden olyan feltétel teljesül, amely a korábbi feladatok során q-ra teljesült. A (3.22) jobb oldala pedig ugyanúgy v-nek egy korlátos lineáris funkcionálját adja, tehát az inhomogén vegyes feladatot lényegében visszavezettük a homogén esetre. Ezáltal minden olyan egzisztencia-tétel érvényes, ami a homogén, és így a Dirichlet-feladat esetén teljesült.

3.1.4. Neumann-peremfeltétel

Neumann-típusú peremfeltétel esetén nem a $H^1_0(\Omega)$, hanem a $H^1(\Omega)$ Szoboljev-térben keressük a megoldást.

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a\nabla u) + \mathbf{b}\cdot\nabla u + q(x,u) = g, \\ \partial_\nu u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

Ennek a feladatnak a gyenge alakját úgy kapjuk, hogy $v \in C^\infty(\Omega)$ függvénnyel szorzunk, Ω-n integrálunk, és kihasználjuk a $\partial_\nu u_{|\partial\Omega} = 0$ peremfeltételt. A gyenge feladatban olyan $u \in H^1(\Omega)$ függvényt keresünk, hogy minden $v \in H^1(\Omega)$ esetén

$$\int_\Omega (a\nabla u \cdot \nabla v + (\mathbf{b} \cdot \nabla u)v + q(x,u)v)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega gv\,\mathrm{d}x. \tag{3.24}$$

3.1.17. Tétel. (Poincaré-egyenlőtlenség) *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, nyílt, összefüggő halmaz, melynek határa elég sima. Ekkor létezik olyan c konstans, hogy minden $u \in H^1(\Omega)$-ra*

$$||u||^2_{L^2(\Omega)} \le c\left(|\textstyle\int_\Omega u|^2 + ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}\right)$$

A $H^1(\Omega)$ térben a norma $||u||_{H^1(\Omega)} = ||u||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}$, de a Poincaré-egyenlőtlenség alapján ezzel ekvivalens normát kapunk, ha az $||u||_{H^1(\Omega)} = ||u||_{L^1(\Omega)} + ||\nabla u||_{L^2(\Omega)}$-t választjuk.

Az egzisztenciáról szóló tételek bizonyításakor valamilyen módon alkalmaztuk, hogy a kapott operátoregyenletben szereplő F operátor egyenletesen monoton, vagy hogy az operátor potenciálja $||u||$-nál gyorsabban nő. Ezek azért teljesültek, mert a $H^1_0(\Omega)$ térben $||\nabla u||_{L^2(\Omega)}$ norma. A $H^1(\Omega)$ térben ez nem teljesül, és az említett alsó becslésekhez ezért nem lesznek elégségesek az eddig megadott növekedési feltételek. Ezért célszerű q-ra nem csak felső, hanem valamilyen értelemben alsó korlátot is adni.

3.1.18. Feltételek.

1. $a \in L^\infty(\Omega), a(x) \ge m > 0 \qquad$ (m.m. $x \in \Omega$),
2. $q \in C\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right)$, léteznek olyan $1 < p$, $\alpha, \beta \ge 0$ állandók, hogy minden $\xi \in \mathbb{R}$ esetén $|q(x,\xi)| \le \alpha + \beta|\xi|^{p-1}$,
3. léteznek $r > 1$ és $c_1 > 0$ állandók, hogy $\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$: $(q(x,\xi_1) - q(x,\xi_2))(\xi_1 - \xi_2) \ge c_1|\xi_1 - \xi_2|^r$,

3.1.19. Állítás. *Tegyük fel, hogy a 3.1.18. feltételek teljesülnek. Ekkor minden $g \in L^2(\Omega)$ mellett a (3.24) feladatnak egyértelműen létezik $u^* \in H^1(\Omega)$ gyenge megoldása.*

Bizonyítás. A 3.1.13. állítás bizonyításának megfelelően járunk el, hiszen a 3.1.12.-beli 1. és 2. feltétel most is teljesül (q monoton ξ-ben, ez az itteni 3. feltételből látszik), és akkor p-ről csak azt használtuk ki, hogy 1-nél nagyobb. Továbbá minden felső becslés is teljesül $||.||_{H^1(\Omega)}$-val is: ahol $||\nabla u||_{L^2(\Omega)}$ szerepel a felső becslésben, ott nyilván $||u||_{H^1(\Omega)}$ is jó felső becslésnek. Ahol pedig $||u||_{L^p(\Omega)}$ szerepel a felső becslésben, a Szoboljev-féle beágyazási tétel segítségével az $||u||_{L^p(\Omega)} \le K_p||u||_{H^1(\Omega)}$ egyenlőtlenség használható.

Tehát a gyenge alakból operátoregyenletre jutunk, ahol $F = A + N$, $\langle Au, v\rangle = \int\limits_\Omega a\nabla u\nabla v$, $\langle N(u), v\rangle = \int\limits_\Omega q(x,u)v$, teljesül, hogy F potenciáloperátor: $J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega a|\nabla u|^2 + \int\limits_\Omega Q(x,u)$ egy potenciálja, ahol $\frac{\partial Q(x,\xi)}{\partial \xi} = q(x,\xi)$. Mivel q ξ-ben monoton növő, így $(q(x,u)-q(x,v))(u-v) = |(q(x,u) - q(x,v))(u-v)| \ge |u-v|^r$. Ez alapján az F szigorú monotonitása:

$$\langle F(u)-F(v),u-v\rangle \geq m||\nabla(u-v)||^2_{L^2(\Omega)} + \int\limits_\Omega (q(x,u)-q(x,v))(u-v)$$
$$\geq m||\nabla(u-v)||^2_{L^2(\Omega)} + \int\limits_\Omega c_1||u-v||^r = m||\nabla(u-v)||^2_{L^2(\Omega)} + c_1||u-v||^r_{L^r(\Omega)}$$
$$\geq m||\nabla(u-v)||^2_{L^2(\Omega)} + K^{-r}_{\Omega,1,r}c_1||u-v||^r_{L^1(\Omega)} > 0,$$

ha $u \neq v$ $H^1(\Omega)$-ban. Láttuk, hogy $\frac{1}{2}\int\limits_\Omega a|\nabla u|^2 \geq \frac{m}{2}||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}$. A 3. feltétel alapján ha $\xi \geq 0$, akkor $q(x,\xi) \geq q(x,0) + c_1\xi|\xi|^{r-2} \geq c_2 + c_1\xi|\xi|^{r-2}$, ha pedig $\xi \leq 0$, akkor $q(x,\xi) \leq q(x,0) + c_1\xi|\xi|^{r-2} \leq c_3 + c_1\xi|\xi|^{r-2}$. Vagyis ha $\xi \geq 0$, akkor

$$Q(x,\xi) = Q(x,0) + \int\limits_0^\xi q(x,\eta)\mathrm{d}\eta \geq Q(x,0) + \int\limits_0^\xi (c_2 + c_1\eta|\eta|^{r-2})\mathrm{d}\eta$$
$$= Q(x,0) + \frac{c_1}{r}|\xi|^r + c_2\xi$$

Ha pedig $\xi \leq 0$, akkor

$$Q(x,\xi) = Q(x,0) + \int\limits_0^\xi q(x,\eta)\mathrm{d}\eta = Q(x,0) + \int\limits_\xi^0 (-q(x,\eta))\mathrm{d}\eta$$
$$\geq Q(x,0) + \int\limits_\xi^0 (-c_3 - c_1\eta|\eta|^{r-2})\mathrm{d}\eta = Q(x,0) + c_3\xi + \frac{c_1}{r}|\xi|^r$$

Vagyis léteznek olyan $c_4 > 0$ és c_5, c_6 konstansok, hogy $Q(x,\xi) \geq c_4|\xi|^r + c_5\xi + c_6$. Ezért

$$\int\limits_\Omega Q(x,u) \geq \int\limits_\Omega (c_4|u|^r + c_5u + c_6) \geq \int\limits_\Omega c_6 + c_4||u||^r_{L^r(\Omega)} - c_5'||u||_{L^1(\Omega)} = c_7 + c_4||u||^r_{L^r(\Omega)} - c_5'||u||_{L^1(\Omega)},$$

ahol $c_5' = |c_5|$ és $c_7 = \int\limits_\Omega c_2$. Mindezeket összesítve és felhasználva, hogy $r > 1$, létezik olyan $c_8 > 0$ szám, hogy

$$J(u) \geq c_8(||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + ||u||^r_{L^1(\Omega)}) + c_7 - c_5'||u||_{L^1(\Omega)}.$$

Azt kell még ellenőrizni, hogy $\lim\limits_{||u||_{H^1}\to\infty} \frac{J(u)}{||u||_{H^1}} = \infty$. Tudjuk, hogy

$$\frac{J(u)}{||u||_{H^1}} \geq \frac{c_8(||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + ||u||^r_{L^1(\Omega)}) + c_7 - c_5'||u||_{L^1(\Omega)}}{||\nabla u||_{L^2(\Omega)} + ||u||_{L^1(\Omega)}} \geq c_9 + c_8 \frac{||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} + ||u||^r_{L^1(\Omega)}}{||\nabla u||_{L^2(\Omega)} + ||u||_{L^1(\Omega)}},$$

ha $||\nabla u||_{L^2(\Omega)} + ||u||_{L^1(\Omega)}$ elég nagy. Legyen $a = ||\nabla||_{L^2(\Omega)}$ és $b = ||u||_{L^1(\Omega)}$. Azt kell belátni, hogy létezik $\varepsilon > 0$, hogy ha $R = a + b$ elég nagy, akkor $\frac{a^2+b^r}{a+b} \geq (a+b)^\varepsilon$. $\varepsilon := \frac{1}{r-1}$ jó választás lesz, ugyanis egy feltételes szélsőérték-számítási feladatról van szó: mennyi $a^2 + b^s$ minimuma, ha $R = a + b$?

Ennek megoldása Lagrange-féle multiplikátor módszerrel: $2a - \lambda = 0$, $rb^{r-1} - \lambda = 0$. Ekkor $a + b = \frac{r}{2}b^{r-1} + b = R$. Ha R elég nagy, akkor $b \geq 1$, és ezért $b^{r-1} \geq b$, ahonnan $b^{r-1} \geq c \cdot R$, vagyis $a^2 + b^r \geq b^r \geq c' \cdot R^{1+1/(r-1)}$.

Tehát a 2.3.3. tétel alapján a megoldás egyértelműen létezik. □

3.2. Rendszer

Legyen továbbra is $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány. A továbbiakban áttérünk az egyenletrendszer esetére.

Jelölés. Legyen $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Ekkor a $\underline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$ vektor (euklideszi) normája $|\underline{\xi}| = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_k^2}$, és lévén, hogy véges dimenzióban vagyunk, ezzel ekvivalens a p-norma $(1 \leq p)$: $|\underline{\xi}|_p = (\xi_1^p + \cdots + \xi_k^p)^{1/p}$.

3.2.1. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Jelölje $H := \underbrace{H_0^1(\Omega) \times \cdots \times H_0^1(\Omega)}_{k}$, és $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_k) \in H$, $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_k) \in H$ esetén legyen $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_H := \sum_{i=1}^k \langle u_i, v_i \rangle_{H_0^1(\Omega)}$.

Így $\langle ., . \rangle_H$ nyilvánvalóan skalárszorzat H-n, továbbá $(H, \langle ., . \rangle_H)$ Hilbert-tér, mely a direktszorzat végességének automatikus következménye.

A skalárszorzatból származtatható norma: $||\underline{u}||_H = \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle_H^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^k ||u_i||^2_{H_0^1(\Omega)} \right)^{1/2}$. H-n definiálhatunk egy másik normát is $(1 \leq p)$: $||\underline{u}||_{H,p} = \left(\sum_{i=1}^k ||u_i||^p_{H_0^1(\Omega)} \right)^{1/p}$. Kihasználva az $\mathbb{R}^k$-beli normák ekvivalenciáját, léteznek olyan $K_p, K_p' > 0$ állandók, hogy minden $\underline{u} \in H$-ra

$$K_p'||\underline{u}||_H \leq ||\underline{u}||_{H,p} \leq K_p||\underline{u}||_H,$$

azaz a H-n értelmezett két norma ekvivalens.

3.2.1. A $p \geq 2$ eset

Ha több komponensű rendszerünk van, akkor azok mindegyikére vonatkozik egy-egy differenciálegyenlet, melyek általában csatolt egyenletek. Így k komponens esetén egy differenciálegyenlet-rendszert kapunk, mely a következő alakot ölti:

$$\forall 1 \leq i \leq k : \begin{cases} -\mathrm{div}(a_i \nabla u_i) + \mathbf{b}_i \cdot \nabla u_i + q_i(x, u_1, u_2, \ldots, u_k) = g_i, \\ u_i|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{3.25}$$

Ekkor is megfogalmazható a feladat gyenge alakja: az i-edik egyenletet $v_i \in C_0^1(\Omega)$ függvénnyel szorozzuk, majd Ω-n integrálunk.

$$\forall 1 \leq i \leq k : \int_\Omega (a_i \nabla u_i \nabla v_i + (\mathbf{b}_i \cdot \nabla u_i) v_i + q_i(x, u_1, u_2, \ldots, u_k) v_i) = \int_\Omega g_i v_i \tag{3.26}$$

Ismét $C_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ sűrűsége alapján a (3.25) feladat gyenge alakja így adható meg: olyan $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_k) \in H$ függvényt keresünk, hogy tetszőleges $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_k) \in H$ esetén fennáll (3.26). Ezzel ekvivalens feladatot kapunk, ha a k darab egyenletet összeadjuk: a gyenge megoldás olyan $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_k) \in H$, hogy minden $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_k) \in H$ esetén

$$\sum_{i=1}^{k} \int_\Omega (a_i \nabla u_i \nabla v_i + (\mathbf{b}_i \nabla u_i) v_i + q_i(x, u_1, \ldots, u_k) v_i) = \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega g_i v_i \tag{3.27}$$

3.2.2. Feltételek.

1. $a_i \in L^\infty(\Omega)$, és létezik m_i, hogy $a_i(x) \geq m_i > 0 \qquad$ (m.m. $x \in \Omega$),
2. $\mathbf{b}_i \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$, $\mathrm{div}(\mathbf{b}_i) = 0$,
3. $q_i : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, léteznek olyan $2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$, ha $n > 2$, ill. $2 \leq p < \infty$, ha $n = 2$, és $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ állandók, hogy $\forall \underline{\xi}, \underline{\eta} \in \mathbb{R}^k$-ra
$$|q_i(x, \underline{\xi}) - q_i(x, \underline{\eta})| \leq (\alpha_1 + \beta_i(|\underline{\xi}| + |\underline{\eta}|)^{p-2}) \cdot |\underline{\xi} - \underline{\eta}|,$$
4. minden $\underline{\xi}, \underline{\eta} \in \mathbb{R}^k$ és m.m. $x \in \Omega$ esetén $\sum\limits_{i=1}^{k} (q_i(x, \underline{\xi}) - q_i(x, \underline{\eta}))(\xi_i - \eta_i) \geq 0$.

A q_i-re vonatkozó feltételből következik, hogy minden $1 \leq i \leq k$ esetén létezik olyan α_i' állandó, hogy $|q_i(x, \underline{\xi})| \leq \alpha_i' + \beta_i |\underline{\xi}|^{p-1}$.

3.2.3. Állítás. *Ha a 3.2.2.-beli feltételek teljesülnek, akkor bármely $\underline{g} = (g_1, \ldots, g_k) \in L^2(\Omega) \times \cdots \times L^2(\Omega)$ esetén a (3.25) feladatnak egyértelműen létezik az $\underline{u}^* \in H$ gyenge megoldása.*

Bizonyítás. A gyenge feladat megint operátoregyenlethez vezet, és azt fogjuk megmutatni, hogy az ebben szereplő operátorra teljesülnek az 2.3.1. tétel feltételei. A (3.27) jobb oldala adott $\underline{g} \in L^2(\Omega) \times \cdots \times L^2(\Omega)$ mellett $\underline{v} \in H$-nak lineáris és korlátos funkcionálja:

$$\left| \sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega} g_i v_i \right| \leq \sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega} |g_i v_i| \leq \sum_{i=1}^{k} ||g_i||_{L^2(\Omega)} ||v_i||_{L^2(\Omega)} \leq c_{\Omega} \sum_{i=1}^{k} ||g_i||_{L^2(\Omega)} ||v_i||_{H_0^1}.$$

Legyen $||\underline{g}||_{L^2(\Omega)^k} = \left(\sum_{i=1}^{k} ||g_i||^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}$. A vektorokra érvényes Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség alapján

$$c_{\Omega} \sum_{i=1}^{k} ||g_i||_{L^2(\Omega)} ||v_i||_{H_0^1} \leq c_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{k} ||g_i||^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{k} ||v_i||^2_{H_0^1} \right)^{1/2} = c_{\Omega} ||\underline{g}||_{L^2(\Omega)^k} ||\underline{v}||_H$$

Tehát a Riesz-tétel értelmében minden $\underline{g} \in \left(L^2(\Omega)\right)^k$-hoz egyértelműen létezik $\underline{g}_1 \in \left(L^2(\Omega)\right)^k$, hogy $\sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega} g_i v_i = \langle \underline{g}_1, \underline{v} \rangle_H$, minden $\underline{v} \in H$ esetén. Mivel a_i korlátos, $\mathbf{b}_i$ folytonos az Ω korlátos halmazon, ezért léteznek $A_i, B_i \geq 0$ állandók, hogy $|a_i| \leq A_i$, és $|\mathbf{b}_i| \leq B_i$.

A gyenge alak bal oldala is $\underline{v} \in H$-nak egy lineáris és korlátos funkcionálját kapjuk. Előbbi tulajdonság nyilvánvaló, utóbbi igazolásához a (3.27) bal oldalát három tagra szétválasztva, a becslést tagonként végezhetjük el. A korábbiakhoz hasonló lépésekre van szükség, ill. ismét a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenségre hivatkozhatunk:

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega} |a_i \nabla u_i \nabla v_i| \leq \sum_{i=1}^{k} A_i ||u_i||_{H_0^1} ||v_i||_{H_0^1} \leq A ||\underline{u}||_H ||\underline{v}||_H, \text{ ahol } A = \max_{1 \leq i \leq k} A_i \tag{3.28}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega} |(\mathbf{b}_i \nabla u_i) v_i| \leq c_{\Omega} \sum_{i=1}^{k} B_i ||u_i||_{H_0^1} ||v_i||_{H_0^1} \leq c_{\Omega} B ||\underline{u}||_H ||\underline{v}||_H, \text{ ahol } B = \max_{1 \leq i \leq k} B_i \tag{3.29}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega} |q_i(x, \underline{u}) v_i| \leq \sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega} (\alpha_i' + \beta_i |\underline{u}|^{p-1}) |v_i| \leq \alpha \sum_{i=1}^{k} ||v_i||_{L^1(\Omega)} + \beta \sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega} |\underline{u}|^{p-1} |v_i|, \tag{3.30}$$

ahol $\alpha = \max_{1 \leq i \leq k} \alpha_i'$, és $\beta = \max_{1 \leq i \leq k} \beta_i$. A (3.30)-ben a két tagot külön-külön vizsgálva kapjuk, hogy

$$\alpha \sum_{i=1}^{k} ||v_i||_{L^1(\Omega)} \leq \alpha c_{\Omega,1} \sum_{i=1}^{k} ||v_i||_{H_0^1} \leq \alpha c_{\Omega,1}\sqrt{k} \left(\sum_{i=1}^{k} ||v_i||^2_{H_0^1} \right)^{1/2} = \alpha c_{\Omega,1}\sqrt{k}||\underline{v}||_H,$$

valamint ha $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, akkor $q(p-1) = p$, és így

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\underline{u}|^{p-1}|v_i| &\leq \left(\int_\Omega |\underline{u}|^{q(p-1)}\right)^{1/q} \left(\int_\Omega |v_i|^p\right)^{1/p} \leq c_p^p c_{\Omega,p} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{k} |u_i|^p\right)^{1/q} ||v_i||_{H_0^1} \\ &= c_p^p c_{\Omega,p} ||\underline{u}||^{p-1}_{H,p} ||v_i||_{H_0^1} \leq c_p^p c_{\Omega,p} K_p^{p-1} ||\underline{u}||_H^{p/q} ||v_i||_{H_0^1}.\end{aligned}$$

Ez alapján

$$\beta \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega |\underline{u}|^{p-1}|v_i| \leq K\beta ||\underline{u}||_H^{p-1} \sum_{i=1}^{k} ||v_i||_{H_0^1} \leq K\sqrt{k}||\underline{u}||_H^{p-1}||\underline{v}||_H, \tag{3.31}$$

ahol $K = c_p^p c_{\Omega,p} K_p^{p-1}$. Mindezt összesítve

$$\left| \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega (a_i \nabla u_i \nabla v_i + (\mathbf{b}_i \cdot \nabla u_i)v_i + q_i(x, u_1, u_2, \ldots, u_k)v_i) \right| \leq \left(c_2||\underline{u}||_H + c_3||\underline{u}||_H^{p-1}\right) ||\underline{v}||_H,$$

azaz a funkcionál tényleg korlátos, és így folytonos. Ezért egyértelműen létezik $F(\underline{u}) \in H$, hogy $\langle F(\underline{u}), \underline{v}\rangle_H = \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega (a_i \nabla u_i \nabla v_i + (\mathbf{b}_i \cdot \nabla u_i)v_i + q_i(x, u_1, u_2, \ldots, u_k)v_i)$ minden $\underline{v} \in H$-ra, és így az $F(\underline{u}) = \underline{g}_1$ operátoregyenlet megoldásait keressük. A gyenge megoldás egyértelmű létezéséhez belátjuk, hogy a 2.3.1. tétel feltételeit F teljesíti.

Az $F : H \to H$ operátort $F = A + N$ formában lineáris és nemlineáris részre bonthatjuk. Az egyenletes monotonitás A esetén egyszerűen igazolható, hiszen $\underline{u} - \underline{v}$ helyett $\underline{h}$-t írva

$$\langle A\underline{h}, \underline{h}\rangle_H = \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega (a_i|\nabla h_i|^2 + (\mathbf{b}_i \nabla h_i)h_i) \geq \sum_{i=1}^{k} (m_i||h_i||^2_{H_0^1} + 0) \geq m||\underline{h}||_H^2,$$

ahol $m = \min\limits_{1\leq i\leq k} m_i$. A nemlineáris tag is könnyen becsülhető, hiszen

$$\langle N(\underline{u}) - N(\underline{v}), \underline{u} - \underline{v}\rangle_H = \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega (q_i(x, \underline{u}) - q_i(x, \underline{v}))(u_i - v_i) \geq 0,$$

ugyanis az integrandus a 3.2.2.-beli 3. feltétel szerint nemnegatív. Vagyis $\langle F(\underline{u}) - F(\underline{v}), \underline{u} - \underline{v}\rangle \geq m||\underline{u} - \underline{v}||_H^2$.

A 2.3.1. tételben szereplő másik feltétel, hogy F lokálisan Lipschitzes. A lineáris tag esetén $\underline{h} = \underline{u} - \underline{v}$ helyettesítéssel $||A\underline{u} - A\underline{v}||_H = ||A\underline{h}||_H = \sup\limits_{||\underline{z}||_H=1} \langle A\underline{h}, \underline{z}\rangle$, melyre a (3.28) és (3.29) alapján fennáll, hogy

$$\sup_{||\underline{z}||_H=1} \langle A\underline{h}, \underline{z}\rangle \leq \sup_{||\underline{z}||_H=1} (A+B)||\underline{h}||_H||\underline{z}||_H = (A+B)||\underline{h}||_H.$$

A $||N(\underline{u}) - N(\underline{v})||_H$ kiszámítása előtt vizsgáljuk meg az $\int\limits_\Omega (|\underline{u}| + |\underline{v}|)^{p-2}|\underline{u} - \underline{v}| \cdot |z_i|$ integrált!

Tudjuk, hogy a vektornormák ekvivalenciája miatt $|\underline{u}|^p \leq c_p^p \cdot \sum\limits_{i=1}^k |u_i|^p$, így mivel $u_i \in H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, ezért $|\underline{u}| \in L^p(\Omega)$, és így $(|\underline{u}| + |\underline{v}|) \in L^p(\Omega)$. Továbbá

$$\Big|\Big||\underline{u}|\Big|\Big|_{L^p(\Omega)} \leq c_p \left(\sum_{i=1}^k ||u_i||_{L^p(\Omega)}^p\right)^{1/p} \leq c_p K_{\Omega,p} \left(\sum_{i=1}^k ||u_i||_{H_0^1}^p\right)^{1/p} \leq c_p K_{\Omega,p} K_p ||\underline{u}||_H$$

Ezek ismeretében

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (|\underline{u}| + |\underline{v}|)^{p-2}|\underline{u} - \underline{v}| \cdot |z_i| &\leq \left(\int_\Omega (|\underline{u}| + |\underline{v}|)^{(p-2)\frac{p}{p-2}}\right)^{(p-2)/p} \left(\int_\Omega |\underline{u} - \underline{v}|^{p/2}|z_i|^{p/2}\right)^{2/p} \\
&\leq \Big|\Big||\underline{u}| + |\underline{v}|\Big|\Big|_{L^p(\Omega)}^{p-2} \Big|\Big||\underline{u} - \underline{v}|\Big|\Big|_{L^p(\Omega)} ||z_i||_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \left(\Big|\Big||\underline{u}|\Big|\Big|_{L^p(\Omega)} + \Big|\Big||\underline{v}|\Big|\Big|_{L^p(\Omega)}\right)^{p-2} c_p K_{\Omega,p} K_p ||\underline{u} - \underline{v}||_H c_\Omega ||z_i||_{H_0^1} \\
&\leq (c_p K_{\Omega,p} K_p)^{p-1} c_\Omega \left(||\underline{u}||_H + ||\underline{v}||_H\right)^{p-2} ||\underline{u} - \underline{v}||_H ||z_i||_{H_0^1}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Így már könnyen igazolható a Lipschitzesség:

$$\begin{aligned}
||N(\underline{u}) - N(\underline{v})||_H &= \sup_{||\underline{z}||_H=1} \langle N(\underline{u}) - N(\underline{v}), \underline{z}\rangle_H = \sup_{||\underline{z}||_H=1} \sum_{i=1}^k \int_\Omega (q_i(x, \underline{u}) - q_i(x, \underline{v}))z_i \\
&\leq \sup_{||\underline{z}||_H=1} \sum_{i=1}^k \int_\Omega (\alpha_i + \beta_i(|\underline{u}| + |\underline{v}|)^{p-2})|\underline{u} - \underline{v}| \cdot |z_i| \\
&\leq \sup_{||\underline{z}||_H=1} \sum_{i=1}^k (c_4 \left(||\underline{u}||_H + ||\underline{v}||_H\right)^{p-2} + c_5)||\underline{u} - \underline{v}||_H ||z_i||_{H_0^1} \\
&\leq (c_6 \left(||\underline{u}||_H + ||\underline{v}||_H\right)^{p-2} + c_7)||\underline{u} - \underline{v}||_H.
\end{aligned}$$

Itt $c_4 = c_\Omega (c_p K_{\Omega,p} K_p)^{p-1}\beta$, míg $c_5 = c_\Omega^2 \max\limits_{1\leq i\leq k} \alpha_i$, $c_6 = c_4\sqrt{k}$, és $c_7 = c_5\sqrt{k}$. Az 2.3.1. tételben szereplő $M(r)$ függvény ezért a következő lehet: $M(r) := A + B + c_6(2r)^{p-2} + c_7$, ez valóban monoton növő, és ezzel a választással $||F(\underline{u}) - F(\underline{v})||_H \leq M(r)||\underline{u} - \underline{v}||_H$, ha $||\underline{u}||_H \leq r$ és $||\underline{v}||_H \leq r$.

Tehát a (3.27) gyenge alakból kapott $F(\underline{u}) = \underline{g}_1$ operátoregyenletben szereplő F-re teljesülnek a 2.3.1. tétel feltételei, azaz minden $\underline{g} \in (L^2(\Omega))^k$ esetén a (3.25) feladatnak egyértelműen létezik gyenge megoldása. □

3.2.2. Az $1 < p < 2$ eset

Ha rendszerünk van, a nempotenciálos tételek ugyanolyan okokból nem használhatóak az $1 < p < 2$ esetben, amiért nem használhatók egy komponens esetében sem. Így ahogy korábban is, az elsőrendű tagokat elhagyva egyszerűbb egyenletrendszerhez jutunk, és a függvényekre vonatkozó feltételek is módosulnak.

$$\forall 1 \leq i \leq k : \begin{cases} -\mathrm{div}(a_i \nabla u_i) + q_i(x, u_1, u_2, \dots, u_k) = g_i, \\ u_i|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{3.33}$$

A megfelelő gyenge alak: keressük azt az $\underline{u} \in H$ függvényt, melyre

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega} (a_i \nabla u_i \nabla v_i + q_i(x, \underline{u}) v_i) = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega} g_i v_i \qquad (\forall\ \underline{v} \in H). \tag{3.34}$$

3.2.4. Feltételek. Tegyük fel, hogy a (3.33) feladatbeli függvények az alábbi tulajdonságokkal rendelkeznek:

1. $a_i \in L^\infty(\Omega)$, és létezik m_i, hogy $a_i(x) \geq m_i > 0 \qquad$ (m.m. $x \in \Omega$),
2. $q_i \in C\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}\right)$, léteznek olyan $1 < p < 2$, $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ állandók, hogy $\forall \xi \in \mathbb{R}^k$-ra $|q_i(x, \underline{\xi})| \leq \alpha_i + \beta_i |\underline{\xi}|^{p-1}$,
3. a $(q_1, \dots, q_k)$ rendszer potenciálos, azaz létezik olyan $Q \in C^{0,1}\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}\right)$ függvény, hogy $\frac{\partial Q}{\partial \xi_i} = q_i$ minden $1 \leq i \leq k$ esetén,
4. tetszőleges $\underline{\xi}$, $\underline{\eta} \in \mathbb{R}^k$ esetén $\sum\limits_{i=1}^{k} (q_i(x, \underline{\xi}) - q_i(x, \underline{\eta}))(\xi_i - \eta_i) \geq 0$.

3.2.5. Állítás. *Ha a 3.2.4. feltételek teljesülnek, akkor tetszőleges $(g_1, \dots, g_k) \in L^2(\Omega) \times \dots \times L^2(\Omega)$ esetén a (3.33) feladatnak egyértelműen létezik $\underline{u}^* \in H$ gyenge megoldása.*

Bizonyítás. A (3.34) egyenlet jobb oldalát a $2 \leq p$ esettel megegyező módon egy $\langle \underline{g}_1, \underline{v} \rangle_H$ skalárszorzatnak tekinthetjük. A bal oldalból felírható $\underline{v} \mapsto \sum\limits_{i=1}^{k} \int\limits_{\Omega} (a \nabla u_i \nabla v_i + q(x, \underline{u}) v_i)$

lineáris leképezés korlátossága a (3.28) és (3.30) illetve (3.31) alapján látható. Ezek a becslések itt is igazak, hiszen csak azt használjuk ki, hogy $p > 1$.

A gyenge feladat tehát az $F(\underline{u}) = \underline{g}_1$ operátoregyenlethez vezet. Azt fogjuk megmutatni, hogy erre az $F : H \to H$ operátorra teljesülnek a 2.3.3. tételben szereplő feltételek.

Az F operátor lineáris része A, melyre $\langle A\underline{u}, \underline{v}\rangle_H = \sum\limits_{i=1}^{k} \int\limits_\Omega a_i \nabla u_i \nabla v_i$. Ennek mindig van potenciálja, méghozzá $J_A(\underline{u}) = \frac{1}{2}\langle A\underline{u}, \underline{u}\rangle_H = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k} \int\limits_\Omega a_i |\nabla u_i|^2$.

A nemlineáris rész $\langle N(\underline{u}), \underline{v}\rangle_H = \sum\limits_{i=1}^{k} \int\limits_\Omega q_i(x, \underline{u}) v_i$. Mivel $(q_1, \ldots, q_k)$ potenciálos, így $\underline{u} \in H$ esetén legyen $J_N(\underline{u}) := \int\limits_\Omega Q(x, \underline{u})\,\mathrm{d}x$. Igazoljuk, hogy ezzel J_N Gâteaux-deriválható funkcionál, és $J'_N = N$. Ugyanis

$$\lim_{t\to 0} \frac{J_N(\underline{u} + t\underline{v}) - J_N(\underline{u})}{t} = \lim_{t\to 0} \int\limits_\Omega \frac{Q(x, \underline{u} + t\underline{v}) - Q(x, \underline{u})}{t}\,\mathrm{d}x$$

Azt kell belátni, hogy $\lim\limits_{t\to 0} \int\limits_\Omega \frac{Q(x,\underline{u}+t\underline{v})-Q(x,\underline{u})}{t}\,\mathrm{d}x = \int\limits_\Omega \sum\limits_{i=1}^{k} q_i(x, \underline{u}) v_i\,\mathrm{d}x$, melyhez elegendő igazolni, hogy

$$\lim_{t\to 0} \left| \int\limits_\Omega \left(\frac{Q(x, \underline{u} + t\underline{v}) - Q(x, \underline{u})}{t} - \sum_{i=1}^{k} q_i(x, \underline{u}) v_i \right) \mathrm{d}x \right| = 0$$

Nyilván $|\int\limits_\Omega (\frac{Q(x,\underline{u}+t\underline{v})-Q(x,\underline{u})}{t} - \sum\limits_{i=1}^{k} q_i(x, \underline{u}) v_i)\,\mathrm{d}x| \leq \int\limits_\Omega |\frac{Q(x,\underline{u}+t\underline{v})-Q(x,\underline{u})}{t} - \sum\limits_{i=1}^{k} q_i(x, \underline{u}) v_i|\,\mathrm{d}x$, és a Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik olyan $\theta(x) \in [0, t]$, hogy $\frac{Q(x,\underline{u}+t\underline{v})-Q(x,\underline{u})}{t} = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\partial Q}{\partial \xi_i}(x, \underline{u} + \theta\underline{v}) v_i = \sum\limits_{i=1}^{k} q_i(x, \underline{u} + \theta\underline{v}) v_i$, így

$$\int\limits_\Omega \left| \frac{Q(x,\underline{u}+t\underline{v})-Q(x,\underline{u})}{t} - \sum_{i=1}^{k} q_i(x, \underline{u}) v_i \right| = \int\limits_\Omega |\sum_{i=1}^{k} (q_i(x, \underline{u} + \theta\underline{v}) - q_i(x, \underline{u})| \cdot |v_i| \leq$$
$$\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{k} |q_i(x, \underline{u} + \theta\underline{v}) - q_i(x, \underline{u})| \cdot |v_i|$$

Ha $\theta \in [0, t]$ és $t \to 0$, akkor feltehető, hogy $\theta \leq 1$. Az integrandus m.m. pontonként tart 0-hoz, ha $t \to 0$, hiszen ekkor $\theta \to 0$, és a q_i függvények folytonosak. Másrészt van integrálható majoránsa:

$$\sum_{i=1}^{k} |q_i(x, \underline{u} + \theta \underline{v}) - q_i(x, \underline{u})| \cdot |v_i| \leq \sum_{i=1}^{k} (2\alpha_i + \beta_i(|\underline{u} + \theta \underline{v}|^{p-1} + |\underline{u}|^{p-1}))|v_i|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{k} (2\alpha_i + \beta_i((|\underline{u}| + \theta|\underline{v}|)^{p-1} + |\underline{u}|^{p-1}))|v_i| \leq \sum_{i=1}^{k} (2\alpha_i + \beta_i((|\underline{u}| + |\underline{v}|)^{p-1} + |\underline{u}|^{p-1}))|v_i|$$

Korábban beláttuk, hogy ha $\underline{u}, \underline{v} \in H$, akkor $|\underline{u}|$, $|\underline{v}| \in L^p(\Omega)$, és így $(|\underline{u}| + |\underline{v}|) \in L^p(\Omega)$, ezáltal $|\underline{u}|^{p-1}$, $(|\underline{u}| + |\underline{v}|)^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, kihasználva, hogy $p - 1 > 0$. Ekkor $(2\alpha_i + \beta(|\underline{u}|^{p-1} + (|\underline{u}| + |\underline{v}|)^{p-1})) \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$. És mivel $v_i \in H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, ezért a szorzatuk, $(2\alpha_i + \beta_i((|\underline{u}| + |\underline{v}|)^{p-1} + |\underline{u}|^{p-1}))|v_i| \in L^1(\Omega)$. Vagyis $\sum_{i=1}^{k} (2\alpha_i + \beta_i((|\underline{u}| + |\underline{v}|)^{p-1} + |\underline{u}|^{p-1}))|v_i|$ tényleg integrálható majoráns.

Így a Lebesgue-tétel szerint

$$\lim_{t \to 0} \int_\Omega \left| \frac{Q(x, \underline{u} + t\underline{v}) - Q(x, \underline{u})}{t} - \sum_{i=1}^{k} q_i(x, \underline{u}) \right| = 0.$$

Ezzel beláttuk, hogy $J = J_A + J_N$ Gâteaux-deriválható funkcionál, és $J' = F$, azaz F potenciáloperátor.

A lineáris tag szigorúan monoton, hiszen $\langle A\underline{h}, \underline{h} \rangle_H = \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega a_i |\nabla h_i|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} m_i ||h_i||^2_{H_0^1} \geq m||\underline{h}||^2_H$, ahol $m = \min_{1 \leq i \leq k} m_i$.

Hasonlóan, a nemlineáris rész $\langle N(\underline{u}) - N(\underline{v}), \underline{u} - \underline{v} \rangle_H = \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega (q_i(x, \underline{u}) - q_i(x, \underline{v}))(u_i - v_i) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{k} (q_i(x, \underline{u}) - q_i(x, \underline{v}))(u_i - v_i) \geq 0$, mivel az integrandus a 3.2.4.-beli 2. feltétel értelmében nemnegatív. Mindezt összesítve tehát $\langle F(\underline{u}) - F(\underline{v}), \underline{u} - \underline{v} \rangle_H \geq m||\underline{u} - \underline{v}||^2_H$, azaz F egyenletesen monoton potenciáloperátor.

Végül mivel a J_N funkcionál Gâteaux-deriválható, és $N = J'_N$ monoton operátor, ezért a J_N funkcionál konvex. Ekkor tudjuk, hogy bármely $\underline{u}, \underline{v} \in H$ esetén $J_N(\underline{u}) - J_N(\underline{v}) \geq \langle J'_N(\underline{v}), \underline{u} - \underline{v} \rangle_H = \langle N(\underline{v}), \underline{u} - \underline{v} \rangle_H$. A $\underline{v} = 0$ helyettesítéssel minden $\underline{u} \in H$-ra

$$J_N(\underline{u}) \geq J_N(0) + \langle N(0), \underline{u} \rangle_H = J_N(0) + \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega q_i(x, \underline{0}) u_i.$$

Ebből következik, hogy $J_N(\underline{u}) \geq c_6 - c_7||\underline{u}||_H$, míg $J_A(\underline{u}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega a_i |\nabla u_i|^2 \geq m||\underline{u}||^2_H$, és így ha $J = J_A + J_N$ az F egy potenciálja, akkor $\lim_{||\underline{u}|| \to \infty} \frac{J(\underline{u})}{||\underline{u}||} \geq \lim_{||\underline{u}|| \to \infty} \frac{\frac{m}{2}||\underline{u}||^2 + c_6 - c_7||\underline{u}||}{||\underline{u}||} = \infty$.

Összefoglalva: a (3.34) feladat gyenge alakjából kapott F operátorra fennálnak a 2.3.3. tételbeli feltételek, ezért a (3.33) feladatnak egyértelműen létezik a gyenge megoldása.

$\square$

4. Időfüggő egyenletek

Ha nem csak a stacionárius megoldást keressük, akkor a reakció-diffúziós egyenletek parabolikus feladatot jelentenek.

4.1. Parabolikus feladatok

Az ebben a szakaszban szereplő definíciók, állítások és a használt jelölésrendszer forrása a [6] jegyzet.

4.1.1. Definíció. Legyen V Banach-tér, $1 < p < \infty$. Jelölje $L^p(0,T;V)$ az olyan $f : (0,t) \to V$ mérhető függvények öszességét, amelyekre $\int_0^T ||f(t)||^p \, \mathrm{d}t < \infty$. $||f||_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T ||f(t)||^p \, \mathrm{d}t \right)^{1/p}$.

4.1.2. Állítás. *A fenti normával $L^p(0,T;V)$ Banach-tér. Ha V szeparábilis, akkor $L^p(0,T;V)$ is az.*

4.1.3. Tétel. (Hölder-egyenlőtlenség) *Legyen $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Ha $f \in L^p(0,T;V)$ és $g \in L^q(0,T;V^*)$, akkor*

$$\int_0^T \langle g(t), f(t) \rangle \, \mathrm{d}t \leq ||g||_{L^q(0,T;V^*)} \cdot ||f||_{L^p(0,T;V)}.$$

Következmény. A fenti egyenlőtlenség alapján tetszőleges $g \in L^q(0,T;V^*)$ függvénynek megfelel egy folytonos lineáris funkcionál.

4.1.4. Tétel. *$L^p(0,T;V)$ duális tere izometrikus és izomorf az $L^q(0,T;V^*)$ térrel. Ha V reflexív, akkor $L^p(0,T;V)$ is reflexív.*

4.1.5. Definíció. Legyen V valós, reflexív és szeparábilis Banach-tér, $(H, (.,.))$ valós, szeparábilis Hilbert-tér úgy, hogy a $V \subset H$ beágyazás folytonos, és V sűrű H-ban. Ekkor adott $v \in H$ esetén

$$\langle \tilde{v}, u \rangle = (v, u), \qquad u \in V$$

egy $\tilde{v}$ V feletti folytonos lineáris funkcionált definiál, és bijekciót létesít H és V^* egy részhalmaza között, azaz értelmezhető a $V \subset H \subset V^*$ ún. evolúciós hármas.

4.1.6. Definíció. Legyen $V \subset H \subset V^*$ evolúciós hármas. Azt mondjuk, hogy a $w \in L^q(0,T;V^*)$ függvény az $u \in L^p(0,T;V)$ függvény általánosított deriváltja, ha minden $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ tesztfüggvényre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)w(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t)u(t).$$

Ekkor w-re az u' jelölést használjuk.

A fenti egyenlet bal oldalán az integrandus V^*-beli, míg a jobb oldalon V-beli, de $V \subset H \subset V^*$ miatt az egyenlet értelmes. Továbbá ha az általánosított derivált létezik, akkor az egyértelmű.

4.1.7. Tétel. *Legyen $V \subset H \subset V^*$ egy evolúciós hármas, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $0 < T < \infty$. Ekkor*

$$W_p^1(0,T;V,H) = \{u \in L^p(0,T;V) : u' \in L^q(0,T;V^*)\}$$

az $||u|| = ||u||_{L^p(0,T;V)} + ||u'||_{L^q(0,T;V^*)})||$ normával Banach-teret alkot. W_p^1 folytonosan beágyazható a $C([0,T];H)$ térbe abban az értelemben, hogy minden $u \in W_p^1(0,T;V,H)$ függvényhez egyértelműen létezik egy $\tilde{u} \in C([0,T];H)$ függvény úgy ($C(0,T;H)$-n a szuprémum-normát véve), hogy $u(t) = \tilde{u}(t)$ m.m. $t \in [0,T]$-re, és $||\tilde{u}||_{C([0,T];H)} \leq c||u||_{W_p^1(0,T;V,H)}$.
Továbbá teljesül a következő „parciális integrálási" szabály tetszőleges $u, v \in W_p^1(0,T;V,H)$ és $0 \leq s < t \leq T$ esetén:

$$(u(t),v(t)) - (u(s),v(s)) = \int_s^t (\langle u'(\tau),v(\tau)\rangle + \langle v'(\tau),u(\tau)\rangle)\mathrm{d}\tau \tag{4.1}$$

4.1.8. Példa. Ha $V = H_0^1(\Omega)$, akkor a $H = H_0^1(\Omega)$ választással a $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ evolúciós hármast kapjuk.

4.2. Lineáris feladatok

A későbbiekben bizonyos nemlineáris egyenletekre vonatkozó egzisztencia-tétel bizonyításában lineáris egyenletek megoldhatóságát is felhasználjuk. Ezért először ezekről mondunk ki néhány állítást ([2]).

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány. Tekintsük a következő lineáris parabolikus feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t u + Lu = f & Q_T\text{-ben}, \\ u_{|\Gamma_T} = 0, & \\ u(0,x) = h(x) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

Itt $Q_T = (0,T) \times \Omega$, $\Gamma_T = [0,T) \times \partial\Omega$, $f : Q_T \to \mathbb{R}$, $h : \Omega \to \mathbb{R}$ adott függvények, és ennek keressük az $u : \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ megoldását. L pedig egy másodrendű, idő szerinti deriváltat nem tartalmazó parciális differenciáloperátor:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}(t,x)\partial_i u) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\partial_i u + c(t,x)u$$

4.2.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\frac{\partial}{\partial t} + L$ operátor egyenletesen parabolikus, ha létezik $\theta > 0$ állandó, hogy

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$$

minden $(t,x) \in Q_T$-re és $\xi \in \mathbb{R}^n$-re.

Azaz minden rögzített $0 \leq t \leq T$ esetén L egyenletesen elliptikus x-ben.

4.2.2. Tétel. *Legyen $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$. Ekkor $V \subset H \subset V^*$ evolúciós hármas, $X = L^2(0,T;V)$. Továbbá legyen $F \in X^*$, ahol*

$$[F,v] = \int_0^T \langle F(t), v(t)\rangle \,\mathrm{d}t$$

A (4.2) feladat gyenge alakja: olyan $u \in W_2^1(0,T;V,H)$ függvényt keresünk, melyre

$$\begin{aligned} u' + A(u) &= F \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

ahol $\langle [A(u)](t), v(t)\rangle = \int\limits_\Omega [\sum\limits_{i,j=1}^{n} a(t,x)_{ij}\partial_i u \partial_j v + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(t,x)(\partial_i u)v + c(t,x)uv]$. Ha $\frac{\partial}{\partial t} + L$ egyenletesen parabolikus, akkor a (4.2) feladatnak egyértelműen létezik a gyenge megoldása.

4.3. Nemlineáris feladatok

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, melynek határa elég sima, $\mathbb{R} \ni T > 0$. Jelölje $Q_T = (0,T) \times \Omega$, és $\Gamma_T = [0,T) \times \partial\Omega$. A parabolikus feladat Dirichlet-peremfeltétellel és a megfelelő kezdeti feltétellel:

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(a(t,x)\nabla u) + q(t,x,u) = f & Q_T\text{-ben}, \\ u_{|\Gamma_T} = g, \\ u(0,x) = h(x) \qquad x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.4}$$

Homogén peremfeltétel mellett ($g \equiv 0$) a (4.4) feladat gyenge alakját úgy kapjuk meg, hogy $v \in C_0^1(\Omega)$ függvénnyel szorozzuk a (4.4) első egyenletét, majd Ω-n integrálunk. A Gauss-Osztrogradszkij-tétel alapján ekkor

$$\int_\Omega ((\partial_t u)v + a(t,x)(\nabla u \cdot \nabla v) + q(t,x,u,\nabla u)v)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\,\mathrm{d}x. \tag{4.5}$$

Ha az a, q illetve f függvények bizonyos növekedési feltételeknek eleget tesznek, akkor a fenti egyenlet nem csak $v \in C_0^1(\Omega)$ tesztfüggvényekre fog teljesülni, hanem minden $v \in V$ függvényre, ahol V alkalmasan választott Banach-tér. Továbbá az egyenlet mindkét oldala v-nek folytonos és lineáris funkcionálja lesz. Ezért lesznek értelmesek a következő fogalmak (a [6]) jelöléseit használva): $X = \{U : [0,T] \to V\}$, $Y = \{U : [0,T] \to V^*\}$; $t \in [0,T]$ esetén jelölje $U(t)$ az $x \mapsto u(t,x) \in V$ függvényt (ekkor $U \in X$), valamint legyen

$$\begin{aligned} &F(t) \in V^*, && F(t)v = \int_\Omega fv\,\mathrm{d}x \\ &\tilde{A}(t) : V \to V^*, && \langle[\tilde{A}(t)][U(t)], v\rangle = \int_\Omega (a(t,x)(\nabla u \cdot \nabla v) + q(t,x,u,\nabla u)v)\,\mathrm{d}x \\ &A : X \to Y, && [A(U)](t) = [\tilde{A}(t)][U(t)] \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ha a $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}(t) = U'(t)$ deriváltnak is értelmet tudunk adni, és a kezdeti feltételt is értelmezni tudjuk, akkor a (4.5) egyenlet tulajdonképpen egy közönséges differenciálegyenletté egyszerűsödik:

$$\begin{gathered} U'(t) + [A(U)](t) = F(t) \qquad t \in (0,T) \\ U(0) = h \end{gathered} \tag{4.7}$$

4.3.1. Lipschitzes nemlineáris tag

A nemlineáris egyenleteknek egy speciális típusa, ha a nemlineaŕis tag Lipschitzes. Legyen $V \subset H \subset V^*$ evolúciós hármas, $1 < p < \infty$, $0 < T < \infty$, és a (4.6)-beli jelölésekkel $X = L^p(0,T;V)$, $Y = X^* = L^q(0,T;V^*)$, valamint $t \in (0,T)$ esetén $\tilde{A}(t) : V \to V^*$, és legyen $A : X \to X^*$, $[A(u)](t) = [\tilde{A}(t)][u(t)]$, $F \in X^*$, ahol $v \in X$ esetén

$$[F, v] = \int_0^T \langle F(t), v(t) \rangle \, \mathrm{d}t,$$

ha $[.,.]$ jelöli az X^* és X közti, $\langle .,. \rangle$ pedig a V^* és V közti dualitást. Legyen $u_0 \in H$. Ekkor olyan $u \in W_p^1(0,T;V,H)$ függvényt keresünk, mely teljesíti a

$$\begin{aligned} u' + A(u) &= F \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

feladatot. Az $u(0) = u_0$ kezdeti feltétel a 4.1.7. tétel alapján értelmes.

4.3.1. Feltételek.

1. $a : [0,T] \times \mathbb{R}^n$ olyan, hogy adott t mellett $a(t,x) \in L^\infty(\Omega)$, és a korlát t-től nem függ, és van olyan $m > 0$ konstans, hogy $a(t,x) \geq m$ m.m. $t \in [0,T]$ és m.m. $x \in \Omega$-ra
2. $q : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ második változójában Lipschitz-folytonos, úgy, hogy a Lipschitz-konstans nem függ x-től.

Tekintsük a

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(a \nabla u) + q(u) = f & Q_T\text{-ben} \\ u_{|\Gamma_T} = 0 \\ u(0,x) = h(x) \end{cases} \tag{4.9}$$

egyenletet. A megoldásait keresve jó választás lesz a $p = 2$, $V = H_0^1(\Omega)$ és $H = L^2(\Omega)$. Ekkor $X = L^2(0,T;V)$, $X^* = L^2(0,T;V^*)$.

Az $\langle [\tilde{A}(t)][u(t)], v \rangle = \int\limits_\Omega (a(x,t) \nabla u \nabla v) \, \mathrm{d}x = \langle [A(u)](t), v \rangle$, és $\langle [Q(u)](t), v \rangle = \int\limits_\Omega q(x,u) v \, \mathrm{d}x$ definícióval $A(u), Q(u) \in L^2(0,T;V^*)$ is teljesül.

Ehhez azt kell látni, hogy adott t esetén $[A(u)](t) \in V^*$, illetve hogy $\int_0^T ||[A(u)](t)||_V^2 \, \mathrm{d}t < \infty$.

Az első rész: $\langle [A(u)](t), v \rangle = \int\limits_\Omega a \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x \leq a ||u||_{H_0^1} ||v||_{H_0^1}$, azaz $[A(u)](t) \in V^*$, és $||[A(u)](t)|| \leq a||u||_V$. Emiatt $\int_0^T ||[A(u)](t)||_{V^*}^2 \, \mathrm{d}t \leq a \int_0^T ||u||_V \, \mathrm{d}t < \infty$, hiszen $u \in L^2(0,T;V)^2$.

A $Q(u) \in L^2(0,T;V^*)$ igazolásához is hasonló lépésekre van szükség. Egyrészt valóban adott u és rögzített t esetén $[Q(u)](t) : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ korlátos és lineáris funkcionál. Kihasználva, hogy q Lipschitzes, létezik $L > 0$ konstans, hogy $|q(x,\xi)| \leq L(1 + |\xi|)$. Ez alapján

$$\begin{aligned} \langle [Q(u)](t), v \rangle &= \int\limits_\Omega q(x,u) v \, \mathrm{d}x \leq \int\limits_\Omega L(1 + |u|) v \, \mathrm{d}x \\ &\leq L||v||_{L^1(\Omega)} + L||u||_{L^2(\Omega)} ||v||_{L^2(\Omega)} \leq C(1 + ||u||_{H_0^1(\Omega)}) ||v||_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Ezért $Q(u) \in L^2(0,T;V^*)$, és $||[Q(u)](t)||_{V^*} \leq C(1+||u||_{H_0^1(\Omega)})$. Hasonlóan azt is megkapjuk, hogy

$$||[Q(u_1)](t) - [Q(u_2)](t)||_{V^*} \leq C||u_1 - u_2||_V,$$

és ezért elmondható, hogy

$$||Q(u_1) - Q(u_2)||^2_{X^*} = \int_0^T ||[Q(u_1)](t) - [Q(u_2)](t)||^2_{V^*} \,\mathrm{d}t \leq \int_0^T C'||u_1 - u_2||^2_V \,\mathrm{d}t. \qquad (4.10)$$

Legyen f olyan, hogy adott t mellett $f(t,x) \in L^2(\Omega)$. Ekkor értelmezhető $F \in X^*$, ahol $v \in X$ esetén $[F,v] = \int_0^T \langle F(t), v(t)\rangle \,\mathrm{d}t$, míg $\langle F(t), v(t)\rangle = \int\limits_\Omega f(t,x)v(t,x)\,\mathrm{d}x$.

Tehát a (4.9) feladat átfogalmazható: olyan $u \in W_2^1(0,T;H_0^1,L^2(\Omega))$ függvényt keresünk, melyre

$$\begin{aligned} u' + A(u) + Q(u) &= F \\ u_{|\Gamma_T=0} & \\ u(0,x) &= h(x) \end{aligned} \qquad (4.11)$$

4.3.2. Állítás. *([2]) A 4.3.1. feltételek teljesülése esetén a (4.11) feladatnak minden, a fenti tulajdonságokkal rendelkező f esetén egyértelműen létezik a megoldása.*

Bizonyítás.

A bizonyítás során a [2]-beli lépéseket követjük. Rögzített $u \in W_2^1(0,T;H_0^1(\Omega),L^2(\Omega))$ esetén legyen $G = F - Q(u)$. Tudjuk, hogy ekkor u-ra úgy tekinthetünk, mint $u \in C(0,T;L^2(\Omega))$. Legyen a továbbiakban $H = L^2(\Omega)$, és $V = H_0^1(\Omega)$. Vegyük a következő lineáris feladatot:

$$\begin{aligned} v' + A(v) &= G \qquad Q_T\text{-ben} \\ v_{|\Gamma_T} &= 0 \\ v(0) &= u_0. \end{aligned} \qquad (4.12)$$

Ennek a 4.2.2. tétel alapján létezik az egyértelmű $w \in C(0,T;H)$ megoldása. Ezt u függvényében kaptuk, ezért eljutunk egy B operátorhoz, melyre $B : C(0,T;H) \to C(0,T;H)$, $B(u) = w$. Belátjuk, hogy ha T elég kicsi, akkor ez a B kontrakció.

Legyen $u_1, u_2 \in C(0,T;H)$, és $w_1 = B(u_1)$, $w_2 = B(u_2)$. A (4.1) egyenletbe $v = u = w_1 - w_2$-t helyettesítve kapjuk, hogy

$$||w_1(t) - w_2(t)||^2_H - ||w_1(0) - w_2(0)||^2_H = 2\int_0^t \langle w_1'(\tau) - w_2'(\tau), w_1(\tau) - w_2(\tau)\rangle \mathrm{d}\tau$$

Mivel w_1 és w_2 is kielégíti a (4.12)-beli kezdetiérték-feltételt, ezért $||w_1(0) - w_2(0)||_H^2 = 0$. Továbbá $w_i'(\tau) = -[Aw_i](\tau) + F - Q(u_i)$ $(i = 1, 2)$, ahonnan

$$\langle w_1'(\tau) - w_2'(\tau), w_1(\tau) - w_2(\tau)\rangle = -\langle [A(w_1 - w_2)](\tau), w_1 - w_2\rangle + \langle Q(u_2) - Q(u_1), w_1 - w_2\rangle.$$

Ahhoz, hogy belássuk, hogy B kontrakció, a $||w_1 - w_2||_H$ normát kell megbecsülni.

$$\begin{aligned} ||w_1(t) - w_2(t)||_H^2 + 2\int_0^t \langle [A(w_1 - w_2)](\tau), w_1 - w_2\rangle &= -2\int_0^t \langle Q(u_2) - Q(u_1), w_1 - w_2\rangle \mathrm{d}\tau \\ ||w_1(t) - w_2(t)||_H^2 + 2m\int_0^t ||w_1 - w_2||_V^2 \mathrm{d}\tau &\leq 2\int_0^t \langle Q(u_1) - Q(u_2), w_1 - w_2\rangle \mathrm{d}, \end{aligned}$$

kihasználva, hogy $\langle [A(w_1 - w_2)](\tau), w_1 - w_2\rangle = \int\limits_\Omega a|\nabla(w_1 - w_2)|^2 \geq m||w_1 - w_2||_V^2$. A 4.1.3. Hölder-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} ||w_1(t) - w_2(t)||_H^2 + 2m||w_1 - w_2||_{L^2(0,t;V)}^2 &\leq 2||Q(u_1) - Q(u_2)||_{L^2(0,t;V^*)}||w_1 - w_2||_{L^2(0,t;V)} \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}||Q(u_1) - Q(u_2)||_{L^2(0,t;V^*)}^2 + \varepsilon||w_1 - w_2||_{L^2(0,t;V)}^2, \end{aligned}$$

ahol az utolsó becslés lényegében a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenségből kapható. ε-t elég kicsinek választva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} ||w_1(t) - w_2(t)||_H^2 \leq C\frac{1}{\varepsilon}||Q(u_1) - Q(u_2)||_{L^2(0,t;V^*)}^2 &\leq C\frac{1}{\varepsilon}||Q(u_1) - Q(u_2)||_{L^2(0,T;V)}^2 \\ &\leq \int_0^T C'||u_1 - u_2||_V^2 \,\mathrm{d}t \leq C'T||u_1 - u_2||_{C(0,T;H)}^2. \end{aligned} \tag{4.13}$$

A bal oldalon t szerint szuprémumot véve adódik, hogy

$$||B(u_1) - B(u_2)||_{C(0,T;H)} \leq \sqrt{C'T}||u_1 - u_2||_{C(0,T;H)},$$

vagyis ha T olyan kicsi, hogy $\sqrt{C'T} < 1$, akkor B kontrakció. A Banach-fixponttétel szerint ezért egyértelműen létezik B-nek fixpontja, azaz olyan $\tilde{u} \in C(0,T;H)$ függvény, melyre $B(\tilde{u}) = \tilde{u}$. Mivel $B(u)$-t úgy definiáltuk, hogy az a (4.12) feladat egyértelmű megoldása $G = F - Q(u)$-ra, ezért ez éppen azt jelenti, hogy $\tilde{u}$ megoldása a (4.11) feladatnak.

Adott T esetén legyen tehát $T_1 > 0$ olyan, hogy $\sqrt{C'T_1} < 1$. Ekkor a fenti gondolatmenet szerint a (4.11) egyenletnek egyértelműen létezik a $[0, T_1]$ intervallumon az $\tilde{u} \in L^2(0, T_1; V)$

megoldása, továbbá $\tilde{u}(T_1) \in V = H_0^1(\Omega)$. Ezért a (4.11) feladatot most $u(0) = \tilde{u}(T_1)$ kezdeti értékkel megfogalmazva ismét találunk egyértelmű megoldást a $[T_1, 2T_1]$ intervallumon.

Ezt véges sok lépésben megismételve (hiszen $T < \infty$ és $T_1 > 0$) eljutunk egy $[0, T]$-n értelmezett $u \in L^2(0, T; V)$ megoldáshoz.

Az egyértelműség bizonyításához tegyük fel, hogy u_1 és u_2 is gyenge megoldások $[0, T]$-n. Ekkor a (4.13) egyenlőtlenségben $w_1 = u_1$ illetve $w_2 = u_2$, ahonnan

$$||u_1(t) - u_2(t)||_H^2 \leq C' \int_0^t ||u_1(\tau) - u_2(\tau)||_H^2 \mathrm{d}\tau$$

A Gronwall-egyenlőtlenség alapján ezért $u_1 = u_2$.

□

4.3.2. Operátorfélcsoportok és lokálisan Lipschitzes nemlineáris tag

Leggyakrabban a kémiai példákban előforduló függvények, melyek az egyenlet nemlinearitását okozzák, nem Lipschitzesek. Ebben az esetben a megoldhatóság vizsgálatakor új eszközökre, az operátorfélcsoportok elméletére lesz szükség. A számunkra legfontosabb definíciók és tételek a következők (az itt nem szereplő bizonyítások az [5] könyvben találhatók):

4.3.3. Definíció. Legyen X Banach-tér. Ha $T : [0, \infty) \to B(X)$ leképezés, és

i) $T(0) = I$, (I az identitás X-en),

ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$ minden $t, s \geq 0$ (félcsoport-tulajdonság),

akkor a $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ családot korlátos lineáris operátorok félcsoportjának nevezzük.

Legyen A lineáris operátor a következő módon definiálva:

$$D(A) = \{x \in X : \lim_{t \to +0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ létezik}\},$$

és $Ax = \lim_{t \to +0} \frac{T(t)x - x}{t}$ $\quad (x \in D(A))$. Ha $D(A) \subset X$ sűrű, akkor azt mondjuk, hogy A a $\{T(t)\}$ félcsoport generátora.

Továbbá, ha $\lim_{t \to +0} ||T(t) - I|| = 0$, akkor a félcsoportot egyenletesen folytonosnak nevezzük.

4.3.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\{T(t)\}$ félcsoport erősen folytonos (C_0 félcsoport), ha minden $x \in X$ esetén

$$\lim_{t \to +0} T(t)x = x.$$

4.3.5. Állítás. *Az A lineáris operátor pontosan akkor generátora egy C_0 félcsoportnak, melyre $||T(t)|| \leq e^{\omega t}$, ha*

i) A zárt és $D(A) \subset X$ sűrű,

ii) A rezolvens halmaza $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)$ invertálható$\}$ tartalmazza a $\{\lambda : \operatorname{Im} \lambda = 0, \lambda > \omega\}$ félegyenest, és ilyen λ esetén

$$||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq (\lambda - \omega)^{-1}.$$

4.3.6. Definíció. Legyen $M = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2,\ \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$, és tegyük fel, hogy $z \in M$ esetén $T(z)$ korlátos lineáris operátor. A $T(z)$, $z \in M$ család analitikus félcsoport M-en, ha

i) $z \mapsto T(z)$ analitikus M-en,

ii) $T(0) = I$ és $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in M}} T(z)x = x, \qquad \forall x \in X,$

iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2), \qquad \forall z_1, z_2 \in M.$

A $T(t)$ félcsoportot analitikusnak nevezzük, ha egy, a nemnegatív valós tengelyt tartalmazó M tartományban analitikus.

Egy analitikus félcsoportot megszorítva a valós tengelyre C_0 félcsoportot kapunk. A fentiek alapján ha $-A$ a generátora egy analitikus félcsoportnak, akkor elég nagy $\lambda > 0$ esetén $-A-\lambda I$ invertálható, és egy korlátos analitikus félcsoportot generál (vagyis létezik M konstans, hogy $||T(t)|| \leq M$).

4.3.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy $0 \in \rho(A)$, és $-A$ analitikus félcsoportot generál. Ekkor $0 \leq \alpha \leq 1$ esetén értelmezhető A^α ($A^0 := I$), és*

i) A^α zárt operátor,

ii) $\alpha \geq \beta > 0 \Rightarrow D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$,

iii) minden $\alpha \geq 0$ esetén $D(A^\alpha) \subset X$ sűrű,

iv) ha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, akkor

$$A^{\alpha+\beta}x = A^\alpha \cdot A^\beta x,$$

minden $x \in D(A^\gamma)$, ahol $\gamma = \max(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$.

4.3.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy $-A$ egy $\{T(t)\}$ analitikus félcsoportot generál. Ha $0 \in \rho(A)$, akkor*

i) $T(t) : X \to D(A^\alpha)$ minden $t > 0$ és $\alpha \geq 0$ esetén.

ii) Minden $x \in D(A^\alpha)$ esetén $T(t)A^\alpha x = A^\alpha T(t)x$.

iii) Minden $t > 0$-ra $A^\alpha T(t)$ korlátos, és létezik $\delta > 0$, hogy

$$||A^\alpha T(t)|| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}.$$

iv) Ha $0 < \alpha \leq 1$ és $x \in D(A^\alpha)$, akkor

$$||T(t)x - x|| \leq C_\alpha t^\alpha ||A^\alpha x||.$$

4.3.9. Definíció. Legyen X Banach-tér, és tekintsük a következő absztrakt feladatot:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = Au(t) + f(t) \qquad t > 0 \\ u(0) = x. \end{cases} \tag{4.14}$$

i) Egy $u : [0, T[\to X$ függvény a (4.14) feladat erős megoldása, ha $u(t) \in D(A)$ minden $0 < t < T$ esetén, $u \in C([0, T[; X) \cap C^1(]0, T[; X)$, és kielégíti (4.14)-t.

ii) Ha A C_0 félcsoportot generál, és $f \in L^1(0, T; X)$, akkor az

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s, \qquad 0 \leq t \leq T$$

képlettel megadott $u \in C([0, T]; X)$ függvényt a (4.14) feladat gyenge megoldásának nevezzük.

4.3.10. Állítás. *Tegyük fel, hogy A analitikus félcsoportot generál, $f \in L^1(0, T; X)$ Hölder-folytonos $]0, T]$-n. Ekkor minden $x \in X$ esetén a*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = Au(t) + f(t) \\ u(0) = x \end{cases}$$

feladatnak egyértelműen létezik az erős megoldása.

Tegyük fel, hogy $-A$ egy korlátos analitikus félcsoportot generál, és $-A$ invertálható (azaz $0 \in \rho(-A)$). Ekkor $0 \leq \alpha \leq 1$ esetén definiálhatjuk A^α-t, mely zárt, invertálható lineáris operátor, és az értelmezési tartománya, $D(A^\alpha)$ sűrű X-ben. Ebben az esetben $D(A^\alpha)$ az $||x|| + ||A^\alpha x||$ módon definiált normával Banach-tér, és ezen az $||x||_\alpha = ||A^\alpha x||$ norma az előzővel ekvivalens normát ad. Jelölje $X_\alpha := (D(A^\alpha), ||.||_\alpha)$ ezt a Banach-teret.

Tekintsük a következő szemilineáris kezdetiérték-feladatot:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + Au(t) = f(u(t)), \qquad t > t_0, \\ u(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.15}$$

Ha $-A$ analitikus félcsoportot generál, akkor a korábbi meggondolások alapján feltehető, hogy $T(t)$ korlátos, és $0 \in \rho(A)$. Ha a (4.15) feladat jobb oldalán szereplő f függvény teljesít bizonyos feltételeket, akkor a feladatnak lokálisan létezik megoldása.

4.3.11. Definíció. Legyen X Banach-tér.

i) Ha az $u : [t_0, T] \to X$ folytonos függvény kielégíti az

$$u(t) = T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t - s)f(u(s))\mathrm{d}s$$

integrálegyenletet, akkor u-t a (4.15) feladat gyenge megoldásának nevezzük.

ii) Ha $u \in C([t_0, T[; X) \cap C^1(]t_0, T[; X)$, minden $t_0 < t$-re $u(t) \in D(A)$ és u kielégíti (4.15)-t, akkor u-t a (4.15) erős megoldásának nevezzük.

(F) feltétel:

Legyen $U \subset X_\alpha$ nyílt. Az $f : U \to X$ függvény teljesíti az (F) feltételt, ha minden $x \in U$ esetén létezik x-nek egy $V \subset U$ környezete és egy $L \geq 0$ konstans, hogy minden $x_1, x_2 \in V$-re

$$||f(x_1) - f(x_2)|| \leq L||x_1 - x_2||_\alpha,$$

4.3.12. Tétel. *Tegyük fel,hogy $-A$ a generátora a $\{T(t)\}$ analitikus félcsoportnak. Ha f kielégíti az (F) feltételt, akkor minden t_0 és $x_0 \in U$ esetén a (4.15) feladatnak egyértelműen létezik az $u \in C([t_0, t_1[; X) \cap C^1(]t_0, t_1[; X)$ lokális megoldása, ahol $t_1 = t_1(t_0, x_0) > t_0$.*

Bizonyítás.

A [5]-beli ötlet alapján járunk el. Tudjuk, hogy elég nagy $\lambda > 0$ esetén $-A - \lambda I$ analitikus félcsoportot generál, melyre $||T(t)|| \leq M$, és $0 \in \rho(-A - \lambda I)$. Ha ekkor áttérünk az $\tilde{A} = A + \lambda I$ operátorra és $\tilde{f} : U \to X$, $\tilde{f}(\xi) = f(\xi) + \lambda\xi$ függvényre, a (4.15) feladattal ekvivalens feladatot kapunk. Könnyen láthatóan $\tilde{f}$-ra is teljesül az (F) feltétel, $0 \in \rho(-\tilde{A})$, és $-\tilde{A}$ olyan analitikus félcsoportot generál, melyre $||T(t)|| \leq M$. Tehát feltehető, hogy már A is ilyen tulajdonságú.

Az A-ra tett feltevésekből a 4.3.8. tétel alapján következik, hogy $||A^\alpha T(t)|| \leq C_\alpha t^{-\alpha}$ minden $t > 0$-ra. Legyen t_0 és x_0 rögzített, és válasszuk $\delta > 0$-t úgy, hogy az x_0 körüli δ sugarú gömbben f-re az L állandóval teljesül (F), azaz $||x_1 - x_0||_\alpha \leq \delta$ és $||x_2 - x_0||_\alpha \leq \delta$ esetén $||f(x_1) - f(x_2)|| \leq L||x_1 - x_2||_\alpha$. Legyen $B = ||f(x_0)||$. $T(t)$ analitikus, ezért C_0, vagyis $\lim\limits_{t \to +0} T(t)y = y$ minden y-ra. Az $y = A^\alpha x_0$ választással ezért létezik $t_1 > t_0$, hogy minden $t_0 \leq t < t_1$ esetén

$$||T(t - t_0)A^\alpha x_0 - A^\alpha x_0|| < \delta/2$$

Legyen t_1 ilyen, továbbá teljesüljön, hogy $0 < t_1 - t_0 < [\frac{\delta}{2}(1 - \alpha)C_\alpha^{-1}(B + \delta L)^{-1}]^{1/(1-\alpha)}$.

Legyen $Y = C([t_0, t_1], X)$ Banach-tér a szuprémum-normával: $||y||_Y := \sup_{t\in[t_0,t_1]} ||y(t)||$. Definiáljuk Y-on a következő leképezést:

$$Fy(t) = T(t-t_0)A^\alpha x_0 + \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-s) f(A^{-\alpha} y(s)) \mathrm{d}s.$$

Ekkor $F : Y \to Y$, és minden $y \in Y$-ra $Fy(t_0) = A^\alpha x_0$. Legyen $S = \{y \in Y, y(t_0) = A^\alpha x_0, \; ||y(t) - A^\alpha x_0|| \leq \delta\}$. S nyilván nemüres és korlátos részhalmaza Y-nak. Vegyük észre, hogy $||y(t) - A^\alpha x_0|| \leq \delta$ pontosan akkor teljesül, ha $||A^{-\alpha} y(t) - x_0||_\alpha \leq \delta$, azaz $y_1, y_2 \in S$ esetén $x_1 = A^{-\alpha} y_1(t)$-re és $x_2 = A^{-\alpha} y_2(t)$-re fennáll az (F)-beli egyenlőtlenség. Továbbá $y \in S$ esetén

$$\begin{aligned}
||Fy(t) - A^\alpha x_0|| &\leq ||T(t-t_0)A^\alpha x_0 - A^\alpha x_0|| \\
&+ ||\int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-s)[f(A^{-\alpha} y(s)) - f(x_0)] \mathrm{d}s|| + ||\int_{t}^{t_1} A^\alpha T(t-s) f(x_0) \mathrm{d}s|| \\
&\leq \frac{\delta}{2} + C_\alpha L \delta \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} \mathrm{d}s + C_\alpha B \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{\delta}{2} + C_\alpha (1-\alpha)^{-1} (L\delta + B)(t_1 - t_0)^{1-\alpha} \leq \delta,
\end{aligned}$$

hiszen t_1-et épp így választottuk. Tehát $F : S \to S$, sőt F kontrakció S-en. Ugyanis $y_1, y_2 \in S$ esetén:

$$\begin{aligned}
||Fy_1(t) - Fy_2(t)|| &\leq \int_{t_0}^{t} ||A^\alpha T(t-s)|| \cdot ||f(A^{-\alpha} y_1(s) - f(A^\alpha y_2(s))|| \mathrm{d}s \\
&\leq C_\alpha L \int_{t_0}^{t} (t-s) ||y_1(s) - y_2(s)|| \mathrm{d}s \leq L C_\alpha (1-\alpha)^{-1} (t_1 - t_0)^{1-\alpha} ||y_1 - y_2||_Y \\
&\leq \frac{1}{2} ||y_1 - y_2||_Y
\end{aligned}$$

Tehát F valóban kontrakció S-en, így egyértelműen létezik a fixpontja (Banach-féle fixponttétel). Legyen ez a fixpont y. Ez teljesíti az alábbiakat:

$$y(t) = T(t-t_0)A^\alpha x_0 + \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-s) f(A^{-\alpha} y(s)) \mathrm{d}s \tag{4.16}$$

f folytonossága és az (F) feltétel alapján $t \mapsto f(A^{-\alpha}y(t))$ folytonos $[t_0, t_1]$-en, és ugyanitt korlátos is:

$$||f(A^{-\alpha}y(t))|| \leq N, \qquad t_0 \leq t \leq t_1$$

A 4.3.7. tétel értelmében $0 < h < 1$, $0 < \beta < 1 - \alpha$ esetén

$$||(T(h) - I)A^{\alpha}T(t-s)|| \leq C_{\beta}h^{\beta}||A^{\alpha+\beta}T(t-s)|| \leq Ch^{\beta}(t-s)^{-(\alpha+\beta)}.$$

Valamint

$$y(t+h) - y(t) = (T(h) - I)(T(t-t_0)A^{\alpha}x_0) + \int_{t_0}^{t} A^{\alpha}(T(h) - I)(T(t-s)f(A^{-\alpha}y(s)))\mathrm{d}s$$
$$+ \int_{t}^{t+h} A^{\alpha}T(t+h-s)f(A^{-\alpha}y(s))\mathrm{d}s$$

Ezt a három tagot külön-külön becsülve kapjuk, hogy $||y(t+h)-y(t)|| \leq (M_1+M_2+M_3)h^{\beta}$, ahol $M_1 = C||x_0||(t-t_0)^{-(\alpha+\beta)}$, $M_2 = CN(t_1-t_0)^{1-(\alpha+\beta)}(1-(\alpha+\beta))^{-1}$, $M_3 = NC_{\alpha}(1-\alpha)^{-1}$. Azaz M_2 és M_3 független t-től, azonban ha $t \to t_0$, akkor $M_1 \to \infty$. Ha $t_0 < t_0' \leq t, s \leq t_1$, akkor M_1 helyett is választhatunk t-től független konstanst, vagyis $||y(t) - y(s)|| \leq (M_1' + M_2 + M_3)|t-s|^{\beta}$, ahol M_1' sem függ t-től (és s-től sem). Tehát y lokálisan Hölder-folytonos $]t_0, t]$-n. Az (F)-beli becslés alapján pedig

$$||f(A^{-\alpha}y(t)) - f(A^{-\alpha}y(s))|| \leq L||y(t) - y(s)|| \leq C_1|t-s|^{\beta},$$

vagyis $t \mapsto f(A^{-\alpha}y(t))$ is lokálisan Hölder-folytonos.

Legyen y a megtalált fixpont, és nézzük az

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + Au(t) = f(A^{-\alpha}y(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4.17}$$

inhomogén feladatot. A 4.3.10. állítás értelmében a (4.17) feladatnak egyértelműen létezik az $u \in C^1(]t_0, t_1]; X)$ megoldása, mely a

$$u(t) = T(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(A^{-\alpha}y(s))\mathrm{d}s \tag{4.18}$$

képlettel adható meg. Az egyenletben minden tag benne van A^α értelmezési tartományában, vagyis hathatunk A^α-val. Ekkor a jobb oldal éppen $y(t)$ lesz, azaz $u(t) = A^{-\alpha}y(t)$, és a (4.18) alapján $C^1(]t_0, t_1], X)$-beli. Az egyértelműség az y és a (4.17) megoldásának egyértelműségéből következik. $\square$

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, melynek pereme sima. Tekintsük a következő $2m$-edrendű differenciáloperátort:

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

ahol az $a_\alpha(x)$ együtthatók elegendően sima komplex értékű függvények $\overline{\Omega}$-n. Az $A(x, D)$ operátor főrésze $A'(x, D)$:

$$A'(x, D) = \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

Azt mondjuk, hogy az $A(x, D)$ operátor erősen elliptikus, ha létezik olyan $c > 0$ állandó, hogy

$$\mathrm{Re}(-1)^m A'(x, \xi) \ge c|\xi|^{2m}, \qquad \forall x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

4.3.13. Definíció. Legyen $A(x, D) = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$ erősen elliptikus Ω-n, és legyen $D(A) = H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$. $u \in D(A)$ esetén legyen

$$Au = A(x, D)u.$$

4.3.14. Tétel. *Ha $A(x, D)$ erősen elliptikus, $2m$-edrendű operátor, akkor $-A$ egy, a $H = L^2(\Omega)$-n értelmezett analitikus operátorfélcsoportot generál.*

Ezt a tételt felhasználva igazolhatjuk, hogy ha a reakció-diffúziós egyenletben szereplő nemlineáris függvény lokálisan Lipschitzes, akkor lokálisan egyértelműen létezik a megoldás.

4.3.15. Tétel. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, melynek pereme sima, valamint $A(x, D)$ erősen elliptikus operátor:*

$$A(x, D) = -\sum_{k,l=1}^{n} \partial_k (a_{kl}(x) \partial_l), \tag{4.19}$$

ahol $a_{kl} = a_{lk} \in C^1(\overline{\Omega})$ valós értékű függvények. Legyen továbbá $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokálisan Lipschitzes függvény, mely teljesíti a következő növekedési feltételt: léteznek olyan $q, a, b \ge 0$ állandók, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ monoton növő függvény, hogy

$$|f(x,\xi_1) - f(x,\xi_2)| \le M(|\xi_1| + |\xi_2|)|\xi_1 - \xi_2| \qquad (\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R},\ m.m.\ x \in \Omega), \tag{4.20}$$

és $M(r) \le a + br^q$. Ekkor minden $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ esetén a

$$\begin{cases} \partial_t u = -A(x,D)u + f(x,u) & Q_T - ben \\ u|_{\Gamma_T} = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \quad x \in \Omega \end{cases}$$

Cauchy-feladatnak lokálisan egyértelműen létezik az $u \in C([0,t_1[; L^2(\Omega)) \cap C^1(]0,t_1[; L^2(\Omega)) \cap C(]0,t_1[; H^2(\Omega) \cap H_0^1)$ megoldása ($t_1 > 0$).

Bizonyítás. Azt látjuk be, hogy a Banach-terek alkalmas megválasztásával teljesülnek a 4.3.12. tétel feltételei.

Egyrészt legyen $X = L^2(\Omega)$, és $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, továbbá $u \in D(A)$ esetén $Au = A(x,D)u$. A 4.3.14. tétel alapján tudjuk, hogy $-A$ egy $X = L^2(\Omega)$-n analitikus félcsoportot generál. Továbbá a Poincaré-egyenlőtlenség és az erős (egyenletes) ellipticitás miatt azt is megkapjuk, hogy $-A$ invertálható, azaz $0 \in \rho(-A)$. Válasszuk α-t $1/2$-nek, ekkor $X_\alpha = H_0^1(\Omega)$.

Definiáljuk az F leképezést: $u \in X_\alpha = H_0^1(\Omega)$ és $x \in \Omega$ esetén legyen $F(u)(x) := f(x, u(x))$. Be kell látni, hogy $F : X_\alpha \to X$, azaz $F(u) \in L^2(\Omega)$. Az f-re vonatkozó feltétel alapján

$$|f(x,u)|^2 \le (K + M(|u|)|u|)^2 \le K^2 + 2K(a + b|u|^q)|u| + (a^2 + 2ab|u|^q + b^2|u|^{2q})|u|^2.$$

Mivel $u \in H_0^1(\Omega)$ és ebben a kifejezésben $|u|$ kitevője mindig legalább egy, ezért a felső becslést adó függvény $L^1(\Omega)$-beli. Azaz $|f(x,u)|^2 \in L^1(\Omega)$, $F(u) \in L^2(\Omega) = X$.

Azt kell még ellenőrizni, hogy az $F : X_\alpha \to X$ leképezésre teljesül az (F) feltétel. Ha $q = 0$, akkor ez nyilvánvaló. Ha $q > 0$, akkor legyen $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} ||F(u_1) - F(u_2)||_X^2 &= \int_\Omega |f(x,u_1) - f(x,u_2)|^2 \,\mathrm{d}x \le \int_\Omega M(|u_1| + |u_2|)^2 |u_1 - u_2|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\le \int_\Omega (a + b(|u_1| + |u_2|)^q)^2 |u_1 - u_2|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\le \left(\int_\Omega (a + b(|u_1| + |u_2|)^q)^{2(q+1)/q} \right)^{q/(q+1)} \left(\int_\Omega |u_1 - u_2|^{2q+2} \right)^{1/(q+1)} \\ &\le c(a + b(||u_1||_{H_0^1} + ||u_2||_{H_0^1})^q)^2 \cdot ||u_1 - u_2||_{H_0^1}^2 \end{aligned}$$

Ezért tetszőleges $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ esetén létezik $\delta > 0$ és $L \geq 0$, hogy ha $||u_1 - u_0||_{H_0^1} < \delta$ és $||u_2 - u_0||_{H_0^1} < \delta$, akkor $||F(u_1) - F(u_2)|| \leq L||u_1 - u_2||_{H_0^1}$. Vagyis az F leképezésre teljesül az (F) feltétel, ezért a 4.3.12. tétel biztosítja, hogy egyértelműen létezik a lokális megoldás.

□

Megjegyzés. Ha $n = 2$ vagy $n = 3$, akkor az α alkalmas megválasztásával elérhető, hogy $X_\alpha \subset L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, továbbá a beágyazások folytonosak. Ezért ilyenkor az M függvényről nem kell feltenni, hogy $M(r) \leq r^q$, mert a monotonitás miatt ha $u \in X_\alpha$, akkor $M(|u|) \leq M(||u||_\infty) =: K$. Vagyis $|F(u)|^2 \leq K^2|u|^2$, tehát $F(u) \in X$. Az (F) tulajdonság megléte is könnyen belátható, mivel ilyenkor azt kapjuk, hogy

$$||F(u_1) - F(u_2)||_X \leq M(||u_1||_\infty + ||u_2||_\infty)||u_1 - u_2||_{L^2(\Omega)} \leq c_{\alpha,\Omega} M(||u_1||_\infty + ||u_2||_\infty)||u_1 - u_2||_\alpha.$$

Ebből pedig már egyszerűen következik az (F) tulajdonság. Vagyis a 4.3.12. tétel szerint egyértelműen létezik a lokális megoldás.

A fenti állítás könnyen átfogalmazható rendszerre is. Hiszen ha $X_1, \ldots, X_k$ Banach-terek, akkor az $X = X_1 \times \cdots \times X_k$ direktszorzatuk is az, ahol $u = (u_1, \ldots, u_k) \in X$-re $||u||_X^2 = \sum_{i=1}^{k} ||u_i||_{X_i}^2$. Tudjuk továbbá, hogy X-en az előzővel ekvivalens normát kapunk, ha 2 helyett $p \geq 1$-et írunk. Valamint ha $-A_i$ analitikus félcsoportot generál X_i-n, akkor $-A = (-A_1, \ldots, -A_k)$ analitikus félcsoportot generál X-en. Itt $-A(u_1, \ldots, u_k) = (-A_1 u_1, \ldots, -A_k u_k)$.

Legyen $1 \leq i \leq k$ esetén $A_i(x, D) = \sum_{j,l=1}^{n} \partial_j(a_{jl}^i(x)\partial_l)$ erősen elliptikus Ω-n, és legyen $D(A_i) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Ekkor definiálható az $A = (A_1, \ldots, A_k)$ operátor, melynek értelmezési tartománya $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times \cdots \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$. Ezzel $-A$ analitikus félcsoportot generál $X = L^2(\Omega) \times \cdots \times L^2(\Omega)$-n. Ezen felül most is legyen $\alpha = 1/2$, így $X_\alpha = H_0^1(\Omega) \times \cdots \times H_0^1(\Omega)$.

Ezért egy k egyenletből álló differenciálegyenlet-rendszerből a korábbiakhoz hasonlóan egy, a szorzattérbeli egyenlethez jutunk:

$$\partial_t u_i + A_i u_i = f_i(u_1, \ldots, u_k) \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{4.21}$$

Az $u = (u_1, \ldots, u_k)$ és az $f = (f_1, \ldots, f_k)$ jelöléssel

$$\partial_t u + Au = f(u) \tag{4.22}$$

Tegyük fel, hogy az $f_i : \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvények mindegyike lokálisan Lipschitzes, azaz léteznek $M_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ monoton növő függvények és $a_i, b_i \geq 0$, $q_i \geq 1$ konstansok, hogy

$$|f_i(x,\xi)-f_i(x,\eta)| \le M_i(|\xi|+|\eta|)|\xi-\eta| \qquad (m.m. x\in\Omega,\ \forall \xi,\eta\in\mathbb{R}^k),$$

és $M_i(r) \le a_i + b_i r^{q_i}$. Itt $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_k)\in\mathbb{R}^k$ esetén $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^k \xi_i^2$.

Ez esetben a következő operátort adhatjuk meg: $u \in X_\alpha$ és $x\in\Omega$ esetén $F(u)(x) = f(x,u(x))$. Ekkor $F(u)\in X$, hiszen annak minden koordinátájára fennáll, hogy

$$|f_i(x,u)|^2 \le K_i^2 + 2K_i(a_i+b_i|u|^{q_i})|u| + (a_i^2+2a_ib_i|u|^{q_i}+b_i^2|u|^{2q_i})|u|^2$$

Ha $r\ge 1$, akkor létezik c_r konstans, hogy $|u|^r \le c_r\sum_{i=1}^k |u_i|^r$. Mivel $u_i\in H_0^1(\Omega)$, ezért $u_i\in L^r(\Omega)$, ahonnan $|u|^r\in L^1(\Omega)$. A fenti kifejezésben $|u|$ kitevője mindig legalább 1, tehát $|f_i(x,u)|^2\in L^1(\Omega)$, azaz $F(u)$ minden koordinátja $L^2(\Omega)$-beli. Vagyis $F(u)\in X$.

Azt, hogy az $F: X_\alpha \to X$ leképezésre teljesül az (F) feltétel, ismét koordinátánként láthatjuk be. A korábbiakhoz hasonló becsléseket alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int_\Omega |f_i(x,u)-f_i(x,v)|^2\,\mathrm{d}x \le c_i(a_i+b_i(||u||_{X_\alpha}+||v||_{X_\alpha})^{q_i})^2||u-v||_{X_\alpha}^2.$$

Mivel $||F(u)-F(v)||_X^2 = \sum_{i=1}^k\int_\Omega |f_i(x,u)-f_i(x,v)|^2\,\mathrm{d}x$, ezért tetszőleges $u_0\in X_\alpha$ esetén létezik $\delta>0$ és $L\ge 0$, hogy ha $||u-u_0||_{X_\alpha}<\delta$ és $||v-u_0||_{X_\alpha}<\delta$, akkor $||F(u)-F(v)||_X \le L||u-v||_{X_\alpha}$.

Így a fenti meggondolások alapján a 4.3.15. tételt rendszerekre is alkalmazhatjuk.

4.3.16. Példa. A Belouszov-Zsabotinszkij-reakcióban a malonsav bromátionok általi oxidációja játszódik le, 1 mol/dm^3 töménységű kénsavoldatban. A reakciót a Ce^{4+}/Ce^{3+} rendszer katalizálja. A mechanizmusa összetett, nagyon sok (80) reakciólépésből tevődik össze. Az erre javasolt (egyik) modellben ezt 6 lépésre redukálják ([8]):

	reakció	sebességi egyenlet
(1)	$X + Y + H \xrightarrow{k_1'} 2P$	$r_1 = k_1'[H][X][Y]$
(2)	$Y + A + 2H \xrightarrow{k_2'} X + P$	$r_2 = k_2'[A][H]^2[Y]$
(3)	$2X \xrightarrow{k_3} P + A + H$	$r_3 = k_3[X]^2$
(4)	$X + A + H \xrightarrow{k_4'} 2X + 2Z$	$r_4 = k_4'[A][H][X]$
(5)	$X + Z \xrightarrow{k_5} 0.5X + A + H$	$r_5 = k_5[X][Z]$
(6)	$Z + M \xrightarrow{k_6'} Y\text{-}Z$	$r_6 = k_6'[M][Z]$

Itt a jelölések a következőket jelentik: $Y = Br^-$, $X = HBrO_2$, $H = H^+$, $P = HOBr$, $A = BrO_3^-$, $Z = Ce^{4+}$, $M = CH_2(COOH)_2$. A fenti reakcióegyenletek nem mindig tartalmazzák azokat a vegyületeket, amelyek a reakciósebességeket nem befolyásolják, illetve amelyek a differenciálegyenlet-rendszerből elhagyhatók. (Ezért fordulhat elő, hogy pl. a (4) reakcióban a termékek között szerepel a cérium, holott a bal oldalon nincs feltüntetve.) A reakció során [H], [A] és [M] állandónak vehető, azaz három változó marad ([X], [Y] és [Z]). Ezekre felírva a sebességi egyenleteket:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}[\mathrm{X}]}{\mathrm{d}t} &= -k_1[\mathrm{X}][\mathrm{Y}] + k_2[\mathrm{Y}] - 2k_3[\mathrm{X}]^2 + k_4[\mathrm{X}] - 0.5k_5[\mathrm{X}][\mathrm{Z}]\\ \frac{\mathrm{d}[\mathrm{Y}]}{\mathrm{d}t} &= -k_1[\mathrm{X}][\mathrm{Y}] - k_2[\mathrm{Y}] + k_6[\mathrm{Z}]\\ \frac{\mathrm{d}[\mathrm{Z}]}{\mathrm{d}t} &= 2k_4[\mathrm{X}] - k_5[\mathrm{X}][\mathrm{Z}] - 2k_6[\mathrm{Z}],\end{aligned} \tag{4.23}$$

ahol $k_1 = k_1'[\mathrm{H}]$, $k_2 = k_2'[\mathrm{A}][\mathrm{H}]^2$, $k_4 = k_4'[\mathrm{A}][\mathrm{H}]$ és $k_6 = k_6'[\mathrm{M}]$. A továbbiakban a $[\mathrm{X}] = u_1$, $[\mathrm{Y}] = u_2$, $[\mathrm{Z}] = u_3$ jelöléssel élve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\partial_t u_1 - D_1\Delta u_1 &= -k_1u_1u_2 + k_2u_2 - 2k_3u_1^2 + k_4u_1 - 0.5k_5u_1u_3 + g_1\\ \partial_t u_2 - D_2\Delta u_2 &= -k_1u_1u_2 - k_2u_2 + k_6u_3 + g_2\\ \partial_t u_3 - D_3\Delta u_3 &= 2k_4u_1 - k_5u_1u_3 - 2k_6u_3 + g_3\end{aligned} \tag{4.24}$$

Itt tehát D_i a diffúzós állandókat jelöli, az f_i függvények pedig:

$$\begin{aligned}f_1(x,\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= -k_1\xi_1\xi_2 + k_2\xi_2 - 2k_3\xi_1^2 + k_4\xi_1 - 0.5k_5\xi_1\xi_3 + g_1(x)\\ f_2(x,\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= -k_1\xi_1\xi_2 - k_2\xi_2 + k_6\xi_3 + g_2(x)\\ f_3(x,\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= 2k_4\xi_1 - k_5\xi_1\xi_3 - 2k_6\xi_3 + g_3(x)\end{aligned}$$

Az f_i függvények lokálisan Lipschitzesek, pl. f_2-re:

$$\begin{aligned}|f_2(x,\xi_1,\xi_2,\xi_3) - f_2(x,\eta_1,\eta_2,\eta_3)| &\le k_1|\xi_1||\xi_2-\eta_2| + k_1|\eta_2||\xi_1-\eta_1| + k_2|\xi_2-\eta_2| + k_6|\xi_3-\eta_3|\\ &\le (k_1|\xi| + k_1|\eta| + k_2 + k_6)|\xi-\eta|.\end{aligned}$$

Vagyis az $M_2(r) = k_2 + k_6 + k_1 r$ választás megfelelő. Hasonlóan kapjuk, hogy ha $M_1(r) = k_2 + k_4 + (k_1 + 2k_3 - 0.5k_5)r$ illetve $M_3(r) = 2k_4 + 2k_6 + k_5 r$, akkor

$$|f_i(x,\xi) - f_i(x,\eta)| \le M_i(|\xi| + |\eta|)|\xi-\eta| \qquad (i = 1,2,3).$$

4.3.17. Példa. Az etil-acetát lúgos hidrolízise ([1])

$$\mathrm{CH_3COOC_2H_5(aq)} + \mathrm{OH^-(aq)} \xrightarrow{k} \mathrm{CH_3COO^-(aq)} + \mathrm{C_2H_5OH(aq)}$$

másodrendű sebességi egyenlethez vezet. Vagyis ha u_1 az észter, u_2 pedig a hidroxidionok koncentrációja, akkor $r = ku_1u_2$. Ezért

$$\begin{aligned}\partial_t u_1 - D_1 \Delta u_1 &= -k u_1 u_2 + g_1 \\ \partial_t u_2 - D_2 \Delta u_2 &= -k u_1 u_2 + g_2,\end{aligned}$$

vagyis $f_i(x, \xi_1, \xi_2) = -k\xi_1\xi_2 + g_i(x)$ $(i = 1, 2)$. Ekkor az $M_1(r) = M_2(r) = kr$ választás megfelelő, az f_i függvények lokálisan Lipschitzesek, és így alkalmazhatjuk a 4.3.15. tételt.

Ugyan a dolgozatnak a megoldhatóság vizsgálata volt a témája, a feladatok numerikus megoldása nem, de az itt használt elméletre alapul több fontos numerikus módszer is.

Például az elliptikus feladatok esetén gyakran alkalmazott végeselem-módszer és az azt követő Newton-típusú iteráció az itt felhasznált feltételekkel analóg feltételekre épül. Parabolikus feladatok esetén pedig az idődiszkretizáció konvergenciája vizsgálható a félcsoportelmélet segítségével (ld. [4]).

Irodalomjegyzék

[1] Atkins, P., de Paula, J., *Atkins' Physical Chemistry*, Oxford University Press, 2002.

[2] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, 1998.

[3] Gilbarg, D., Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1998.

[4] Karátson J., *Numerikus funkcionálanalízis*, Typotex, 2014. `http://etananyag.ttk.elte.hu/FiLeS/downloads/_Karatson_Num_Funk_Anal.pdf`.

[5] Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1983.

[6] Simon L., *Applications of monotone type operators to nonlinear PDE's*, 2013. `http://www.cs.elte.hu/~simonl/Nonlinear%20PDE's_book_hyperref.pdf`.

[7] Simon L., Baderko, E. A., *Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[8] Turányi T., Györgyi L., Field, R. J., *Analysis and simplification of the GTF model of the Belousov-Zhabotinskii reaction*, The Journal of Physical Chemistry, 97 (1993), pp. 1931–1941.

[9] Winning, I. H., *The kinetics of the photo-chlorination of chloroform vapour*, Trans. Farad. Soc., 47 (1951), pp. 1084–1088.